MECÁNICA de MATERIALES

Séptima edición

Beer
Johnston
DeWolf
Mazurek

Mc Graw Hill Education

https://www.facebook.com/groups/Technologies.CAD.CAM.CAE.CIM/

Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo†	Símbolo
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	tera	T
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^{9}$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^{6}$	mega	M
$1\ 000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto†	h
$10 = 10^{1}$	deka†	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci†	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi†	c
$0.001 = 10^{-3}$	milli	m
$0.000001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.000000001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000000000001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000000000000001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000000000000000001 = 10^{-18}$	atto	a

† Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . .	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	rad/s
Área	Metro cuadrado	. . .	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	kg/m^3
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Esfuerzo	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	. . .	m/s
Volumen, sólidos	Metro cúbico	. . .	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

† Unidad suplementaria (1 revolución = 2π rad = 360°).

‡ Unidad básica.

Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en el SI

Cantidad	Unidades de uso común en Estados Unidos	Equivalente en el SI
Aceleración	ft/s^2	0.3048 m/s^2
	in/s^2	0.0254 m/s^2
Área	ft^2	0.0929 m^2
	in^2	645.2 mm^2
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448 N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in	0.1130 N · m
Momento de inercia		
de un área	in^4	0.4162 3 10^6 mm^4
de una masa	lb · ft · s^2	1.356 kg · m^2
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft^2	47.88 Pa
	lb/in^2 (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in/s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen, sólidos	ft^3	0.02832 m^3
	in^3	16.39 cm^3
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft · lb	1.356 J

Séptima edición

Mecánica de materiales

Ferdinand P. Beer
Ex Lehigh University

E. Russell Johnston, Jr.
Ex University of Connecticut

John T. DeWolf
University of Connecticut

David F. Mazurek
United States Coast Guard Academy

REVISIÓN TÉCNICA:

José Manuel Dorador González
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México

Leopoldo Adrián González González
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México

Álvaro Ayala Ruiz
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México

Magdaleno Vásquez Rodríguez
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, México

José Manuel Ramírez Quintero
Universidad de Pamplona, Colombia

John Mario García Giraldo
Universidad de Medellín, Colombia

Cristian Camilo Londoño Piedrahita
Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia

Claudia Jenny de la Cruz Morales
Universidad Nacional de Colombia, Colombia

Álvaro Octavio Gaviria Ortiz
Universidad de Antioquía, Colombia

Adrián Espinosa Bautista
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México

Fernando Velázquez Villegas
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México

Antonio Zepeda Sánchez
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México

Ricardo Augusto Linares
Universidad Libre, Sede Principal, Bogotá, Colombia

Juan Carlos Botero Palacio
Departamento de Ingeniería Civil, Universidad EAFIT, Colombia

Ricardo León Ochoa Serna
Universidad de Medellín, Colombia

Nelson Andrés Ortiz Cano
Universidad de Medellín, Colombia

Junes Abdul Villarraga Ossa
Universidad de Antioquía, Colombia

Juan Carlos Velez Cadavid
Universidad de Antioquía, Colombia

Mc Graw Hill Education

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general Latinoamérica: Martín Chueco
Directora de portafolio Internacional: Rhondda McNabb
Gerente de portafolio de Universidades Latam: Gabriela López
Desarrolladora de contenido Sr: Marcela Rocha
Supervisor de preprensa: Zeferino García

Traductores: Elmer Murrieta Murrieta y Rodolfo Navarro

MECÁNICA DE MATERIALES
Séptima edición

DERECHOS RESERVADOS © 2017, 2014, 2010, 2007, 2003, 1993, 1982 respecto a la séptima edición en español por McGraw-Hill Education. Edificio Punta Santa Fe, Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A, Piso 16, Col. Desarrollo Santa Fe, Del. Álvaro Obregón, CP 01376, Ciudad de México.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736.

Traducido de la séptima edición de *Mechanical of materials* © 2015, por Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, John T. Dewolf y David F. Mazurek. All rights reserved by McGraw-Hill Global Education Holdings LLC. ISBN 978-0-07-339823-5.

Esta publicación no puede ser reproducida ni en todo ni en parte, ni registrada en/o trasmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotocopiado, electrónico, ni magnético, electroóptico o cualquier otro tipo, sin el permiso previo y por escrito de la editorial.

ISBN 13: 978-1-4562-6086-6
ISBN 10: 1-4562-6086-3
ISBN de la edición anterior: 978-607-15-0934-5

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 EDM 23 22 21 20 19 18

Impreso en México por:
EDAMSA

Printed in Mexico by:
EDAMSA

Acerca de los autores

John T. DeWolf, profesor de ingeniería civil de la University of Connecticut, se unió al equipo de Beer y Johnston como autor en la segunda edición de *Mecánica de materiales*. John es licenciado en Ciencias en ingeniería civil por la University of Hawaii y obtuvo los grados de maestría y doctorado en ingeniería estructural por la Cornell University. Es miembro de la Sociedad Estadounidense de Ingenieros Civiles y de la Academia de Ciencias e Ingeniería de Connecticut. John es un profesional de la ingeniería y miembro de la Junta de Ingenieros Profesionales de Connecticut; además, fue seleccionado como Profesor Asociado de la University of Connecticut en 2006. Las áreas de su interés en la investigación son las de estabilidad elástica, monitoreo de puentes y análisis y diseño estructural.

David F. Mazurek, profesor de ingeniería civil en la United States Coast Guard Academy, se unió al equipo de autores de Beer y Johnston en la quinta edición. David cuenta con una licenciatura en Ingeniería oceanográfica y una maestría en Ingeniería civil por el Florida Institute of Technology, así como un doctorado en Ingeniería civil por la University of Connecticut y es un ingeniero profesional registrado. Ha trabajado para el Comité de Ingeniería y Mantenimiento de Vías y Caminos Estadounidenses en el área de estructuras de acero desde 1991. Es miembro de la Sociedad Estadounidense de Ingenieros Civiles y fue inducido a la Academia de Ciencias e Ingeniería de Connecticut en 2013. Entre sus intereses profesionales se incluyen la ingeniería de puentes, el análisis forense de estructuras y el diseño resistente a las explosiones.

A manera de homenaje

Como editores de los libros de Ferd Beer y Russ Johnston, a menudo se nos pregunta cómo fue que escribieron juntos, cuando uno de ellos trabajaba en Lehigh y el otro en la Universidad de Connecticut. La historia es sencilla. El primer trabajo docente de Russ Johnston fue en el Departamento de Ingeniería Civil y Mecánica de Lehigh University. Ahí conoció a Ferd Beer, quien había ingresado a ese departamento dos años antes y estaba al frente de los cursos de mecánica.

Fred Beer nació en Francia y se educó en ese país y en Suiza. Alcanza el grado de maestro en Ciencias en la Sorbona y el de doctor en Ciencias en el campo de la mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Llegó a Estados Unidos tras servir en el ejército francés a comienzos de la Segunda Guerra Mundial. También enseñó durante cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de arte e ingeniería de Williams-MIT.

Russ Johnston nació en Filadelfia y obtuvo el grado de licenciado en Ciencias en la Universidad de Delaware y el grado de doctor en Ciencias en el campo de ingeniería estructural en el MIT. Beer se alegró al descubrir que el joven que había sido contratado principalmente para impartir cursos de posgrado en ingeniería estructural no solo deseaba ayudarlo a reestructurar los cursos de mecánica, sino que estaba ansioso por hacerlo. Ambos compartían la idea de que estos cursos deberían enseñarse a partir de algunos principios básicos y que los estudiantes entenderían y recordarían mejor los diversos conceptos involucrados si estos se presentaban de manera gráfica. Juntos redactaron notas para las cátedras de estática y dinámica, a las que después añadieron problemas que, pensaron, serían de interés para los futuros ingenieros. Pronto tuvieron en sus manos el manuscrito de la primera edición de *Mecánica para ingenieros*. Cuando apareció la segunda edición de este texto y la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, Russ Johnston se hallaba en el Worcester Polytechnics Institute. Al publicar-

se las siguientes ediciones ya trabajaba en la Universidad de Connecticut. Mientras tanto, Beer y Johnston habían asumido responsabilidades administrativas en sus departamentos, y ambos estaban involucrados en la investigación, la consultoría y la supervisión de estudiantes: Beer en el área de los procesos estocásticos y de las vibraciones aleatorias, y Johnston en el área de la estabilidad elástica y del diseño y análisis estructural. Sin embargo, su interés por mejorar la enseñanza de los cursos básicos de mecánica no había menguado, y ambos dirigieron secciones de estos cursos mientras continuaban revisando sus textos y comenzaron a escribir juntos el manuscrito para la primera edición de *Mecánica de materiales*.

Las contribuciones de Beer y Johnston a la educación en la ingeniería les han hecho merecedores de varios premios y honores. Se les otorgó el Western Electric Fund Award por la excelencia en la instrucción de los estudiantes de ingeniería por la American Society for Engineering Education, y ambos recibieron el Premio al Educador Distinguido (Distinguished Educator Award) de la División de Mecánica de la misma sociedad. En 1991, Jonhston recibió el Premio al Ingeniero Civil Sobresaliente (Outstanding Civil Engineer Award) de la sección del estado de Connecticut de la American Society of Civil Engineering, y en 1995 Beer obtuvo el grado honorario de doctor en ingeniería por la Lehigh University.

Contenido

Prefacio XI
Recorrido guiado de la obra XV
Lista de símbolos XVII

1 Introducción: concepto de esfuerzo 3

1.1 Repaso de los métodos de estática 4
1.2 Esfuerzos en los elementos de una estructura 6
1.3 Esfuerzos en un plano oblicuo bajo carga axial 24
1.4 Esfuerzos bajo condiciones generales de carga. Componentes del esfuerzo 25
1.5 Consideraciones de diseño 28
Repaso y resumen 39

2 Esfuerzo y deformación: carga axial 49

2.1 Introducción al esfuerzo y la deformación 51
2.2 Problemas estáticamente indeterminados 70
2.3 Problemas que involucran cambios de temperatura 74
2.4 Relación de Poisson 85
2.5 Cargas multiaxiales. Ley de Hooke generalizada 86
***2.6** Dilatación y módulo volumétrico de elasticidad 88
2.7 Deformación unitaria cortante 89
2.8 Deformaciones bajo carga axial: relación entre *e*, *v* y *G* 92
***2.9** Relaciones de esfuerzo-deformación para materiales compuestos reforzados con fibras 94
2.10 Distribución del esfuerzo y la deformación bajo carga axial: principio de Saint-Venant 104
2.11 Concentraciones de esfuerzos 105
2.12 Deformaciones plásticas 107
***2.13** Esfuerzos residuales 111
Repaso y resumen 120

* Temas avanzados o especializados.

3 Torsión 131

3.1 Ejes circulares en torsión 133
3.2 Ángulo de torsión en el rango elástico 148
3.3 Ejes estáticamente indeterminados 151
3.4 Diseño de ejes de transmisión 163
3.5 Concentraciones de esfuerzo en ejes circulares 165
***3.6** Deformaciones plásticas en ejes circulares 171
***3.7** Ejes circulares hechos de un material elastoplástico 173
***3.8** Esfuerzos residuales en ejes circulares 175
***3.9** Torsión de elementos no circulares 185
***3.10** Ejes huecos de pared delgada 187
Repaso y resumen 196

4 Flexión pura 207

4.1 Miembros simétricos sometidos a flexión pura 210
4.2 Esfuerzos y deformaciones en el rango elástico 213
4.3 Deformaciones en una sección transversal 217
4.4 Miembros hechos de materiales compuestos 226
4.5 Concentraciones de esfuerzo 229
***4.6** Deformaciones plásticas 239
4.7 Carga axial excéntrica en un plano de simetría 253
4.8 Análisis de flexión asimétrica 264
4.9 Caso general de análisis de carga axial excéntrica 268
***4.10** Miembros curvos 278
Repaso y resumen 290

5 Análisis y diseño de vigas para flexión 301

5.1 Diagramas de fuerza cortante y momento flector 304
5.2 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector 315
5.3 Diseño de vigas prismáticas para flexión 325
***5.4** Funciones de singularidad utilizadas para determinar la fuerza cortante y el momento flector 336
***5.5** Vigas no prismáticas 348
Repaso y resumen 359

6 Esfuerzos cortantes en vigas y elementos de pared delgada 369

6.1 Esfuerzo cortante horizontal en vigas 371
***6.2** Distribución de esfuerzos en una viga rectangular delgada 376
6.3 Cortante longitudinal sobre un elemento de viga de forma arbitraria 385
6.4 Esfuerzos cortantes en elementos de pared delgada 387
***6.5** Deformaciones plásticas 388
***6.6** Carga asimétrica de elementos con pared delgada y centro de cortante 398
Repaso y resumen 410

7 Transformaciones de esfuerzos y deformaciones 419

7.1 Transformación del esfuerzo plano 422
7.2 Círculo de Mohr para el esfuerzo plano 432
7.3 Estado general de esfuerzo 442
7.4 Análisis tridimensional de esfuerzos 443
***7.5** Teorías de falla 445
7.6 Esfuerzos en recipientes a presión de pared delgada 455
***7.7** Transformación de la deformación plana 463
***7.8** Análisis tridimensional de la deformación 468
***7.9** Mediciones de la deformación; roseta de deformación 471
Repaso y resumen 478

8 Esfuerzos principales bajo una carga dada 489

8.1 Esfuerzos principales en una viga 490
8.2 Diseño de ejes de transmisión 493
8.3 Esfuerzos bajo cargas combinadas 503
Repaso y resumen 518

9 Deflexión en vigas 525

9.1 Deformación bajo carga transversal 527
9.2 Vigas estáticamente indeterminadas 535
***9.3** Funciones de singularidad para determinar la pendiente y la deflexión 546
9.4 Método de superposición 558
***9.5** Teoremas del momento de área 570
***9.6** Aplicación de los teoremas de momento de área a vigas con cargas asimétricas 583
Repaso y resumen 599

10 Columnas 611

10.1 Estabilidad de estructuras 612
***10.2** Carga excéntrica y fórmula de la secante 626
10.3 Diseño de carga céntrica 635
10.4 Diseño de carga excéntrica 647
Repaso y resumen 657

11 Métodos de energía 663

11.1 Energía de deformación 664
11.2 Energía de deformación elástica 667
11.3 Energía de deformacion para un estado general de esfuerzo 673
11.4 Cargas de impacto 683
11.5 Cargas únicas 686
***11.6** Trabajo y energía bajo varias cargas 700
***11.7** Teorema de Castigliano 701
***11.8** Deflexiones por el teorema de Castigliano 703
***11.9** Estructuras estáticamente indeterminadas 707
Repaso y resumen 717

Apéndices AP-1

A Momentos de áreas AP-2
B Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería AP-11
C Propiedades de perfiles laminados de acero AP-15
D Deflexiones y pendientes de vigas AP-27
E Fundamentos de la certificación en ingeniería AP-28

Respuestas a problemas RESP-1
Créditos de fotografías C-1
Índice analítico I-1

Prefacio

Objetivos

El objetivo principal de un curso básico de mecánica es lograr que el estudiante de ingeniería desarrolle su capacidad para analizar de manera sencilla y lógica un problema dado, y que aplique a su solución algunos principios fundamentales bien entendidos. Este libro se diseñó para el primer curso de mecánica de materiales —o de resistencia de materiales— que se imparte a los estudiantes de ingeniería de segundo o tercer año. Los autores esperan que la presente obra permita al profesor alcanzar este objetivo en un curso de la misma manera en que sus otros libros pueden haberle ayudado en estática y dinámica. Como una ayuda para alcanzar este objetivo, la séptima edición ha experimentado una revisión completa del lenguaje para facilitar la lectura del libro.

Enfoque general

En este libro, el estudio de la mecánica de materiales se basa en la comprensión de los conceptos básicos y en el uso de modelos simplificados. Este enfoque hace posible deducir todas las fórmulas necesarias de manera lógica y racional, e indicar claramente las condiciones bajo las que pueden aplicarse con seguridad al análisis y diseño de estructuras ingenieriles y componentes de máquinas reales.

Los diagramas de cuerpo libre se usan de manera extensa. Los diagramas de cuerpo libre se emplean extensamente en todo el libro para determinar las fuerzas internas o externas. El uso de "ecuaciones en dibujo" también permitirá a los estudiantes comprender la superposición de cargas, así como los esfuerzos y las deformaciones resultantes.

NUEVO

Se emplea la metodología EMARP para la solución de problemas. Como una novedad en esta edición del libro se presenta a los estudiantes un método para la resolución de problemas de ingeniería. El método se denomina EMARP, indica los pasos a seguir para resolver un problema: **E**strategia, **M**odelado, **A**nálisis y **R**evisión, y **P**ensar (del inglés strategy, modeling, analysis, reflect, thinking, SMART). Esta metodología se utiliza en todos los problemas modelo y se pretende que los estudiantes apliquen su enfoque en la resolución de los problemas de tarea.

Los conceptos de diseño se estudian a lo largo de todo el libro y en el momento apropiado. En el capítulo 1 puede encontrarse un análisis de la aplicación del factor de seguridad en el diseño, donde se presentan los conceptos tanto de diseño por esfuerzo permisible como de diseño por factor de carga y resistencia.

Se mantiene un balance cuidadoso entre las unidades del SI y las del sistema inglés. Puesto que es esencial que los estudiantes sean capaces de manejar tanto las unidades del sistema métrico o SI como las del sistema inglés, la mitad de los ejemplos, los problemas modelo y los problemas de repaso se han planteado en unidades SI, y la otra mitad en unidades estadounidenses. Como hay disponible un gran número de problemas, los instructores pueden asignarlos utilizando cada sistema de unidades en la proporción que consideren más deseable para su clase.

En las secciones optativas se ofrecen temas avanzados o especializados. En las secciones optativas se han incluido temas adicionales, como esfuerzos residuales, torsión de elementos no circulares y de pared delgada, flexión de vigas curvas, esfuerzos cortantes en elementos no simétricos y criterios de falla; temas que pueden usarse en

cursos con distintos alcances. Para conservar la integridad del material de estudio, estos temas se presentan, en la secuencia adecuada, dentro de las secciones a las que por lógica pertenecen. Así, aun cuando no se cubran en el curso, están altamente evidenciados, y el estudiante puede consultarlos si así lo requiere en cursos posteriores o en su práctica de la ingeniería. Por conveniencia, todas las secciones optativas se han destacado con asteriscos.

Organización de los capítulos

Se espera que los estudiantes que empleen este texto ya hayan completado un curso de estática. Sin embargo, el capítulo 1 se diseñó para brindarles la oportunidad de repasar los conceptos aprendidos en dicho curso, mientras que los diagramas de cortante y de momento flexionante se cubren con detalle en las secciones 5.1 y 5.2. Las propiedades de momentos y centroides de áreas se describen en el apéndice A; este material puede emplearse para reforzar el análisis de la determinación de esfuerzos normales y cortantes en vigas (capítulos 4, 5 y 6).

Los primeros cuatro capítulos del libro se dedican al análisis de los esfuerzos y las deformaciones correspondientes en diversos elementos estructurales, considerando sucesivamente carga axial, torsión y flexión pura. Cada análisis se sustenta en algunos conceptos básicos, tales como las condiciones de equilibrio de las fuerzas ejercidas sobre el elemento, las relaciones existentes entre el esfuerzo y la deformación unitaria del material, y las condiciones impuestas por los apoyos y la carga del elemento. El estudio de cada tipo de condición de carga se complementa con un gran número de ejemplos, problemas modelo y problemas por resolver, diseñados en su totalidad para fortalecer la comprensión del tema por parte de los alumnos.

En el capítulo 1 se introduce el concepto de esfuerzo en un punto, donde se muestra que una carga axial puede producir tanto esfuerzos cortantes como esfuerzos normales, dependiendo de la sección considerada. El hecho de que los esfuerzos dependen de la orientación de la superficie sobre la que se calculan se enfatiza de nuevo en los capítulos 3 y 4, en los casos de torsión y flexión pura. Sin embargo, el análisis de las técnicas de cálculo —como el círculo de Mohr— empleadas para la transformación del esfuerzo en un punto se presenta en el capítulo 7, después de que los estudiantes han tenido la oportunidad de resolver los problemas que involucran una combinación de las cargas básicas y han descubierto por ellos mismos la necesidad de tales técnicas.

En el capítulo 2, el análisis de la relación entre el esfuerzo y la deformación en varios materiales incluye los materiales compuestos con reforzamiento fibroso. El estudio de vigas bajo carga transversal se cubre en dos capítulos por separado. El capítulo 5 está dedicado a la determinación de los esfuerzos normales en una viga y al diseño de vigas con base en los esfuerzos normales permisibles en el material empleado (sección 5.3). El capítulo empieza con un análisis de los diagramas de cortante y de momento flexionante (secciones 5.1 y 5.2), e incluye una sección optativa acerca del uso de las funciones de singularidad para la determinación del cortante y del momento flexionante en una viga (sección 5.4). El capítulo termina con una sección optativa acerca de vigas no prismáticas (sección 5.5).

El capítulo 6 se dedica a la determinación de los esfuerzos cortantes en vigas y elementos de pared delgada bajo cargas transversales. La fórmula del flujo por cortante, $q = VQ/I$, se determina de la manera tradicional. Los aspectos más avanzados del diseño de vigas, como la determinación de los esfuerzos principales en la unión del patín y el alma de una viga W, se encuentran en el capítulo 8, un capítulo optativo que puede cubrirse después de haber estudiado las transformaciones de esfuerzos en el capítulo 7. El diseño de ejes de transmisión está en ese capítulo por la misma razón, así como la determinación de esfuerzos bajo cargas combinadas que ahora puede incluir la determinación de los esfuerzos principales, de los planos principales y del esfuerzo cortante máximo en un punto dado.

Los problemas estáticamente indeterminados se analizan primero en el capítulo 2 y, después, se manejan a lo largo de todo el texto para las diversas condiciones de carga encontradas. De esta manera, se le presenta a los estudiantes, desde una etapa temprana, un método de solución que combina el análisis de deformaciones con el

análisis convencional de fuerzas empleado en estática. Así, se busca que al finalizar el curso el estudiante se encuentre completamente familiarizado con dicho método fundamental. Además, este enfoque ayuda a los estudiantes a darse cuenta de que los esfuerzos son estáticamente indeterminados y solo pueden calcularse considerando la correspondiente distribución de deformaciones unitarias.

El concepto de deformación plástica se introduce en el capítulo 2, donde se aplica al análisis de elementos bajo carga axial. Los problemas que involucran la deformación plástica de ejes circulares y de vigas prismáticas se consideran también en las secciones optativas de los capítulos 3, 4 y 6. Aunque el profesor puede omitir parte de este material, si así lo cree pertinente, su inclusión en el cuerpo del libro se debió a que se considera útil que los estudiantes comprendan las limitaciones de la suposición de una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria, y servirá para prevenirlos contra el uso inapropiado de las fórmulas de torsión y de flexión elástica.

En el capítulo 9 se estudia la determinación de la deflexión en vigas. La primera parte del capítulo se dedica a los métodos de integración y de superposición, e incluye una sección optativa (la sección 9.3) que se basa en el uso de las funciones de singularidad. (Esta sección deberá usarse únicamente después de haber cubierto la 5.4). La segunda parte del capítulo 9 es optativa. Presenta el método de área de momento en dos lecciones.

El capítulo 10 se dedica al estudio de columnas y contiene material acerca del diseño de columnas de acero, aluminio y madera. El capítulo 11 cubre los métodos de energía, incluyendo el teorema de Castigliano.

Recursos adicionales para el aprendizaje

En el centro de recursos en línea de la obra: www.mhhe.com/latam/beer_mecmat7e, podrá encontrar diversos recursos que le ayudarán a mejorar su comprensión del material visto en la obra.

Adicionalmente, hay diversos recursos disponibles para profesores que adopten la obra. Por favor, póngase en contacto con su representante de ventas de McGraw-Hill Education local.

connect® ENGINEERING

McGraw-Hill Connect Engineering, es una herramienta de aprendizaje que ofrece soluciones de presentación, asignación y evaluación en línea. Conecta a sus estudiantes con las herramientas y recursos que necesitarán para lograr el éxito. Con Connect Engineering puede entregar asignaciones, concursos y pruebas en línea. Se presenta un conjunto robusto de preguntas y actividades, los cuales se alinean con los resultados de aprendizaje del libro de texto. Como profesor, es posible editar preguntas existentes y crear problemas totalmente nuevos. Además se pueden realizar fácilmente reportes de calificaciones con sistemas para la gestión del aprendizaje, como WebCT y Blackboard. ConnectPlus® Engineering ofrece a los estudiantes todas las ventajas de Connect Engineering, además de acceso en línea las 24 horas del día, los 7 días de la semana, a un libro electrónico con gran cantidad de medios que permiten la integración perfecta de texto, medios y evaluaciones. Esta herramienta se vende por separado. Para obtener más información, consulte con su representante de McGraw-Hill Education local o visite www.mcgrawhillconnect.com.

create™

¡Diseñe los recursos de enseñanza para que se ajusten a su forma de enseñar! Con **McGraw-Hill Create**, puede reorganizar fácilmente los capítulos, combinar material de otras fuentes de contenido y cargar rápidamente su contenido original, como un programa de estudios o notas de enseñanza. Organice su libro para que se ajuste a su estilo de enseñanza. Create incluso le permite personalizar la apariencia de su libro seleccionando la portada y agregando su nombre, escuela y la información del curso. Este sistema de personalización de los títulos se vende por separado. Consulte los costos con su representante de McGraw-Hill Education local.

AccessEngineering es una herramienta de referencia en ingeniería, ampliamente galardonada, para profesionales, académicos y estudiantes que proporciona un acceso sin interrupciones a la colección más conocida y usada de la información de referencia en ingeniería autorizada y regularmente actualizada. AccessEngineering también incluye funciones dinámicas en línea, como videos instructivos, elaborados por el profesorado, calculadoras, tablas y gráficos interactivos, así como herramientas de personalización que les permite a los usuarios organizar la información crucial del proyecto a medida que trabajan.

Ya sea un ingeniero activo, un miembro de la facultad que busque un medio para enseñar a los estudiantes a resolver problemas de ingeniería del mundo real o un estudiante que necesite material de referencia que utilizará a lo largo de su vida profesional, AccessEngineering es esencial para obtener los resultados correctos, de manera rápida.

AccessEngineering ofrece información multidisciplinaria en un formato dinámico e interactivo directamente en su escritorio o dispositivo, brindando acceso integrado a miles de páginas de contenido confiable de recursos tan reconocidos como Perry's Handbook for Chemical Engineers y Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers, así como recursos más nuevos, como Mecatrónica en medicina.

Esta herramienta ofrece contenido solo en idioma inglés y está disponible a la venta de manera institucional (no individual). Si desea conocer más información sobre ella y qué modalidades de venta, por favor, contacte a su representante de McGraw-Hill Education local.

Reconocimientos

Los autores agradecen a las numerosas empresas que proporcionaron fotografías para esta edición. También desean reconocer los esfuerzos del personal de RPK Editorial Services, que trabajó diligentemente para editar, revisar, corregir y, en general, examinar todo el contenido de esta edición. Un agradecimiento especial a Amy Mazurek (profesional en ingeniería civil del Florida Institute of Technology y maestra en ingeniería civil de la University of Connecticut) por su trabajo en la revisión y la preparación de soluciones y respuestas a todos los problemas de esta edición.

También se agradece la ayuda, los comentarios y las sugerencias ofrecidas por los numerosos revisores y usuarios de las ediciones previas de *Mecánica de materiales*.

John T. DeWolf
David F. Mazurek

Recorrido guiado de la obra

1

Introducción: concepto de esfuerzo

Los esfuerzos ocurren en todas las estructuras sujetas a cargas. En este capítulo se examinarán los estados simples de esfuerzo en los elementos, como en los miembros, pernos y pasadores de dos fuerzas que se utilizan en la estructura mostrada.

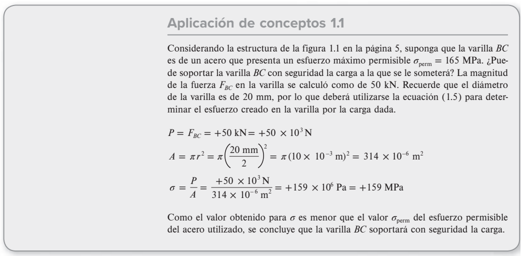
Objetivos

- **Repasar la estática** que se requiere para determinar las fuerzas en elementos de estructuras sencillas.
- **Introducir** el concepto de esfuerzo.
- **Definir** diferentes tipos de esfuerzo: esfuerzo normal axial, esfuerzo cortante y esfuerzo de apoyo.
- **Analizar** las dos tareas principales del ingeniero, el análisis y el diseño de estructuras y máquinas.
- **Desarrollar** un método para la solución de problemas.
- **Analizar** los componentes del esfuerzo en diferentes planos y bajo distintas condiciones de carga.
- **Analizar** las muchas consideraciones de diseño que un ingeniero debe revisar antes de preparar un diseño.

Introducción al capítulo. Cada capítulo comienza con una sección introductoria que establece el propósito y las metas del capítulo, y describe en términos sencillos el material que habrá de estudiarse y sus aplicaciones a la solución de problemas de ingeniería. Los objetivos del capítulo proporcionan a los estudiantes un panorama de los temas que se tratarán en el capítulo.

Lecciones del capítulo. El cuerpo del texto se ha dividido en unidades, y cada unidad consta de una o varias secciones de teoría seguidas de problemas modelo y de un gran número de problemas de tarea. El sitio web complementario contiene una guía de organización del curso con sugerencias para cada lección del capítulo.

Aplicaciones de conceptos. Se utiliza una gran cantidad de aplicaciones de conceptos con enfoque en temas específicos, dentro de las secciones de teoría, con el fin de ilustrar el material presentado y facilitar su comprensión.


Aplicación de conceptos 1.1

Considerando la estructura de la figura 1.1 en la página 5, suponga que la varilla *BC* es de un acero que presenta un esfuerzo máximo permisible $\sigma_{\text{perm}} = 165$ MPa. ¿Puede soportar la varilla *BC* con seguridad la carga a la que se le someterá? La magnitud de la fuerza F_{BC} en la varilla se calculó como de 50 kN. Recuerde que el diámetro de la varilla es de 20 mm, por lo que deberá utilizarse la ecuación (1.5) para determinar el esfuerzo creado en la varilla por la carga dada.

$$P = F_{BC} = +50 \text{ kN} = +50 \times 10^3 \text{ N}$$

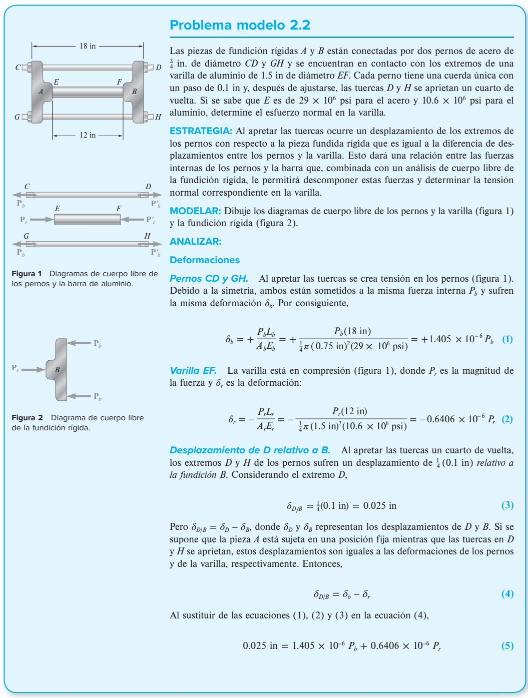
$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{20 \text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = +159 \times 10^6 \text{ Pa} = +159 \text{ MPa}$$

Como el valor obtenido para σ es menor que el valor σ_{perm} del esfuerzo permisible del acero utilizado, se concluye que la varilla *BC* soportará con seguridad la carga.

Problemas modelo. Los problemas modelo tienen la intención de mostrar aplicaciones más completas de la teoría a la solución de problemas de ingeniería, y emplean la metodología EMARP para la resolución de problemas, como un estímulo para que los estudiantes las utilicen en la realización de sus tareas. Como estos problemas se plantean casi de la misma manera que los estudiantes utilizarán para resolver los ejercicios asignados, los problemas modelo tienen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar el tipo de trabajo limpio y ordenado que los estudiantes deberán seguir en sus propias soluciones. Además, se han agregado referencias e ilustraciones a las figuras de los problemas de ejemplo para establecer un vínculo contextual con la solución paso a paso.

Series de problemas de tarea. Se ha actualizado o renovado más de 25% de los casi 1 500 problemas de tarea. La mayor parte de los problemas son de naturaleza práctica y deben resultar atractivos a los estudiantes de ingeniería. Sin embargo, se diseñaron principalmente para ilustrar el material



Problema modelo 2.2

Las piezas de fundición rígidas *A* y *B* están conectadas por dos pernos de acero de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro *CD* y *GH* y se encuentran en contacto con los extremos de una varilla de aluminio de 1.5 in de diámetro *EF*. Cada perno tiene una cuerda única con un paso de 0.1 in y, después de ajustarse, las tuercas *D* y *H* se aprietan un cuarto de vuelta. Si se sabe que *E* es de 29×10^6 psi para el acero y 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine el esfuerzo normal en la varilla.

ESTRATEGIA: Al apretar las tuercas ocurre un desplazamiento de los extremos de los pernos con respecto a la pieza fundida rígida que es igual a la diferencia de desplazamientos entre los pernos y la varilla. Esto dará una relación entre las fuerzas internas de los pernos y la barra que, combinada con un análisis de cuerpo libre de la fundición rígida, le permitirá descomponer estas fuerzas y determinar la tensión normal correspondiente en la varilla.

MODELAR: Dibuje los diagramas de cuerpo libre de los pernos y la varilla (figura 1) y la fundición rígida (figura 2).

ANALIZAR:

Deformaciones

Pernos CD y GH. Al apretar las tuercas se crea tensión en los pernos (figura 1). Debido a la simetría, ambos están sometidos a la misma fuerza interna P_b y sufren la misma deformación δ_b. Por consiguiente,

$$\delta_b = +\frac{P_b L_b}{A_b E_b} = +\frac{P_b(18 \text{ in})}{\frac{1}{4}\pi(0.75 \text{ in})^2(29 \times 10^6 \text{ psi})} = +1.405 \times 10^{-6} P_b \quad (1)$$

Varilla EF. La varilla está en compresión (figura 1), donde P_r es la magnitud de la fuerza y δ_r es la deformación:

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r(12 \text{ in})}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} = -0.6406 \times 10^{-6} P_r \quad (2)$$

Desplazamiento de D relativo a B. Al apretar las tuercas un cuarto de vuelta, los extremos *D* y *H* de los pernos sufren un desplazamiento de $\frac{1}{4}(0.1 \text{ in})$ *relativo a la fundición B*. Considerando el extremo *D*,

$$\delta_{D/B} = \tfrac{1}{4}(0.1 \text{ in}) = 0.025 \text{ in} \quad (3)$$

Pero $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$, donde δ_D y δ_B representan los desplazamientos de *D* y *B*. Si se supone que la pieza *A* está sujeta en una posición fija mientras que las tuercas en *D* y *H* se aprietan, estos desplazamientos son iguales a las deformaciones de los pernos y de la varilla, respectivamente. Entonces,

$$\delta_{D/B} = \delta_b - \delta_r \quad (4)$$

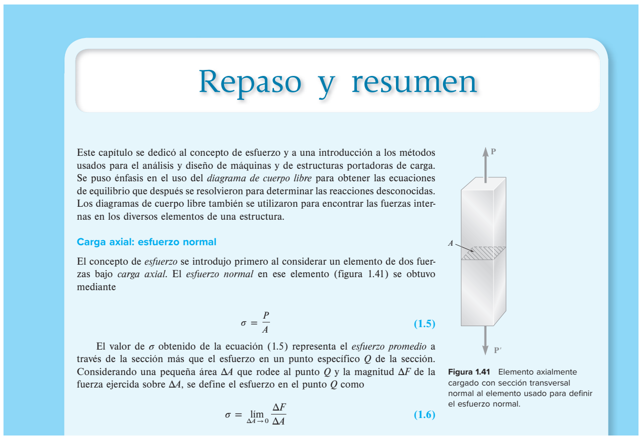
Al sustituir de las ecuaciones (1), (2) y (3) en la ecuación (4),

$$0.025 \text{ in} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6} P_r \quad (5)$$

Figura 1 Diagramas de cuerpo libre de los pernos y la barra de aluminio.

Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la fundición rígida.

presentado en el texto y ayudar a los estudiantes a comprender los principios básicos que se usan en la mecánica de materiales. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las secciones del material que ilustran y se han acomodado en orden ascendente de dificultad. Las respuestas a la mayoría de los problemas se encuentran al final del libro. Los problemas para los que se da una respuesta están marcados en color.


Repaso y resumen

Este capítulo se dedicó al concepto de esfuerzo y a una introducción a los métodos usados para el análisis y diseño de máquinas y de estructuras portadoras de carga. Se puso énfasis en el uso del *diagrama de cuerpo libre* para obtener las ecuaciones de equilibrio que después se resolvieron para determinar las reacciones desconocidas. Los diagramas de cuerpo libre también se utilizaron para encontrar las fuerzas internas en los diversos elementos de una estructura.

Carga axial: esfuerzo normal

El concepto de *esfuerzo* se introdujo primero al considerar un elemento de dos fuerzas bajo *carga axial*. El *esfuerzo normal* en ese elemento (figura 1.41) se obtuvo mediante

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.5)$$

El valor de σ obtenido de la ecuación (1.5) representa el *esfuerzo promedio* a través de la sección más que el esfuerzo en un punto específico Q de la sección. Considerando una pequeña área ΔA que rodee al punto Q y la magnitud ΔF de la fuerza ejercida sobre ΔA, se define el esfuerzo en el punto Q como

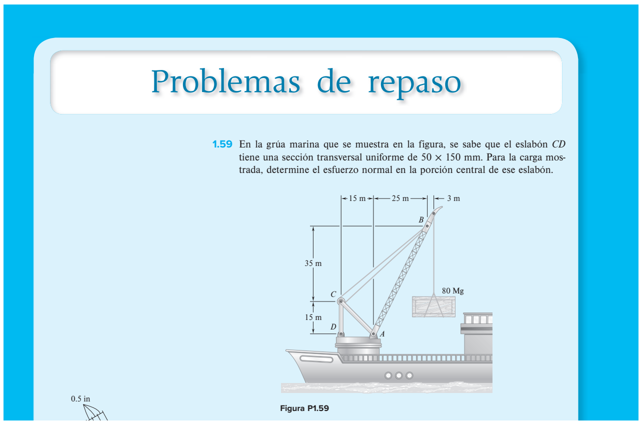
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.6)$$

Figura 1.41 Elemento axialmente cargado con sección transversal normal al elemento usado para definir el esfuerzo normal.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo termina con un repaso y un resumen del material cubierto en el capítulo. Se han incluido notas al margen para ayudar a los estudiantes a organizar su trabajo de repaso, y se dan referencias cruzadas para ayudarles a encontrar las partes que requieren atención especial.

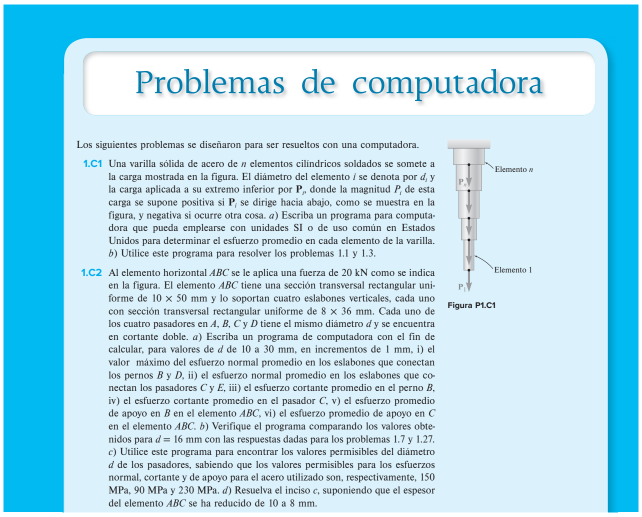
Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye una serie de problemas de repaso. Estos problemas proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.

Problemas de computadora. Las computadoras hacen posible que los estudiantes de ingeniería resuelvan una gran cantidad de problemas desafiantes. Al final de cada capítulo puede encontrarse un grupo de seis o más problemas diseñados para resolverse con una computadora. Estos problemas pueden resolverse usando cualquier lenguaje de computadoras que proporcione una base para los cálculos analíticos. El desarrollo del algoritmo requerido para resolver un problema dado beneficiará a los estudiantes de dos maneras distintas: 1) les ayudará a obtener una mejor comprensión de los principios de mecánica involucrados; 2) les brindará la oportunidad de aplicar las habilidades adquiridas en su curso de programación de computadoras a la solución de problemas significativos de ingeniería.


Problemas de repaso

1.59 En la grúa marina que se muestra en la figura, se sabe que el eslabón CD tiene una sección transversal uniforme de 50 × 150 mm. Para la carga mostrada, determine el esfuerzo normal en la porción central de ese eslabón.

Figura P1.59


Problemas de computadora

Los siguientes problemas se diseñaron para ser resueltos con una computadora.

1.C1 Una varilla sólida de acero de n elementos cilíndricos soldados se somete a la carga mostrada en la figura. El diámetro del elemento i se denota por d_i y la carga aplicada a su extremo inferior por $\mathbf{P}_i$, donde la magnitud P_i de esta carga se supone positiva si $\mathbf{P}_i$ se dirige hacia abajo, como se muestra en la figura, y negativa si ocurre otra cosa. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda emplearse con unidades SI o de uso común en Estados Unidos para determinar el esfuerzo promedio en cada elemento de la varilla. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 1.1 y 1.3.

1.C2 Al elemento horizontal ABC se le aplica una fuerza de 20 kN como se indica en la figura. El elemento ABC tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10 × 50 mm y lo soportan cuatro eslabones verticales, cada uno con sección transversal rectangular uniforme de 8 × 36 mm. Cada uno de los cuatro pasadores en A, B, C y D tiene el mismo diámetro d y se encuentra en cortante doble. *a*) Escriba un programa de computadora con el fin de calcular, para valores de d de 10 a 30 mm, en incrementos de 1 mm, i) el valor máximo del esfuerzo normal promedio en los eslabones que conectan los pernos B y D, ii) el esfuerzo normal promedio en los eslabones que conectan los pasadores C y E, iii) el esfuerzo cortante promedio en el perno B, iv) el esfuerzo cortante promedio en el pasador C, v) el esfuerzo promedio de apoyo en B en el elemento ABC, vi) el esfuerzo promedio de apoyo en C en el elemento ABC. *b*) Verifique el programa comparando los valores obtenidos para $d = 16$ mm con las respuestas dadas para los problemas 1.7 y 1.27. *c*) Utilice este programa para encontrar los valores permisibles del diámetro d de los pasadores, sabiendo que los valores permisibles para los esfuerzos normal, cortante y de apoyo para el acero utilizado son, respectivamente, 150 MPa, 90 MPa y 230 MPa. *d*) Resuelva el inciso *c*, suponiendo que el espesor del elemento ABC se ha reducido de 10 a 8 mm.

Figura P1.C1

Lista de símbolos

a	Constante; distancia
A, B, C, ...	Fuerzas; reacciones
$A, B, C, \ldots$	Puntos
A, @	Área
b	Distancia; ancho
c	Constante; distancia; radio
C	Centroide
$C_1, C_2, \ldots$	Constantes de integración
C_P	Factor de estabilidad de una columna
d	Distancia; diámetro; profundidad
D	Diámetro
e	Distancia; excentricidad; dilatación
E	Módulo de elasticidad
f	Frecuencia; función
F	Fuerza
F.S.	Factor de seguridad
G	Módulo de rigidez; módulo de corte
h	Distancia; altura
H	Fuerza
H, J, K	Puntos
$I, I_x, \ldots$	Momento de inercia
$I_{xy}, \ldots$	Producto de inercia
J	Momento polar de inercia
k	Constante de resorte; factor de forma; módulo volumétrico; constante
K	Factor de concentración de esfuerzos; constante de resorte de torsión
l	Longitud; claro
L	Longitud; claro
L_e	Longitud efectiva
m	Masa
M	Par
$M, M_x, \ldots$	Momento flector
M_D	Momento flector, carga muerta (DCFR)
M_L	Momento flector, carga viva (DCFR)
M_U	Momento flector, carga última (DCFR)
n	Número, relación de módulos de elasticidad; dirección normal
p	Presión
P	Fuerza; carga concentrada
P_D	Carga muerta (DCFR)
P_L	Carga viva (DCFR)
P_U	Carga última (DCFR)
q	Fuerza cortante por unidad de longitud; flujo cortante
Q	Fuerza
Q	Primer momento de área
r	Radio; radio de giro
R	Fuerza; reacción
R	Radio; módulo de ruptura
s	Longitud

S	Módulo elástico de sección
t	Espesor; distancia; desviación tangencial
$\mathbf{T}$	Momento de torsión
T	Temperatura
u, v	Coordenadas rectangulares
u	Densidad de energía de deformación
U	Energía de deformación; trabajo
$\mathbf{v}$	Velocidad
$\mathbf{V}$	Fuerza cortante
V	Volumen; corte
w	Ancho; distancia; carga por unidad de longitud
$\mathbf{W}$, W	Peso; carga
x, y, z	Coordenadas rectangulares; distancia; desplazamientos; deflexiones
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas del centroide
Z	Módulo plástico de sección
α, β, γ	Ángulos
α	Coeficiente de expansión térmica; coeficiente de influencia
γ	Deformación de corte; peso específico
γ_D	Factor de carga, carga muerta (DCFR)
γ_L	Factor de carga, carga viva (DCFR)
δ	Deformación; desplazamiento
ϵ	Deformación unitaria normal
θ	Ángulo; pendiente
λ	Coseno director
ν	Relación de Poisson
ρ	Radio de curvatura; distancia; densidad
σ	Esfuerzo normal
τ	Esfuerzo cortante
ϕ	Ángulo; ángulo de giro; factor de resistencia
ω	Velocidad angular

Mecánica de materiales

1

Introducción: concepto de esfuerzo

Los esfuerzos ocurren en todas las estructuras sujetas a cargas. En este capítulo se examinarán los estados simples de esfuerzo en los elementos, como en los miembros, pernos y pasadores de dos fuerzas que se utilizan en la estructura mostrada.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Repasar la estática** que se requiere para determinar las fuerzas en elementos de estructuras sencillas.
- **Introducir** el concepto de esfuerzo.
- **Definir** diferentes tipos de esfuerzo: esfuerzo normal axial, esfuerzo cortante y esfuerzo de apoyo.
- **Analizar** las dos tareas principales del ingeniero, el análisis y el diseño de estructuras y máquinas.
- **Desarrollar** un método para la solución de problemas.
- **Analizar** los componentes del esfuerzo en diferentes planos y bajo distintas condiciones de carga.
- **Analizar** las muchas consideraciones de diseño que un ingeniero debe revisar antes de preparar un diseño.

Introducción

1.1 Repaso de los métodos de estática

1.2 Esfuerzos en los elementos de una estructura

1.2A Esfuerzo axial

1.2B Esfuerzo cortante

1.2C Esfuerzo de apoyo en conexiones

1.2D Aplicación al análisis y al diseño de estructuras sencillas

1.2E Método para la solución de problemas

1.3 Esfuerzos en un plano oblicuo bajo carga axial

1.4 Esfuerzos bajo condiciones generales de carga. Componentes del esfuerzo

1.5 Consideraciones de diseño

1.5A Determinación de la resistencia última de un material

1.5B Carga permisible y esfuerzo permisible: factor de seguridad

1.5C Selección del factor de seguridad

1.5D Diseño por carga y factor de resistencia

https://www.facebook.com/groups/Technologies.CAD.CAM.CAE.CIM/

Fotografía 1.1 Aguilones de grúa usados para cargar y descargar embarcaciones.

Introducción

El estudio de la mecánica de materiales proporciona a los futuros ingenieros los medios para analizar y diseñar diversas máquinas y estructuras portadoras de carga, lo que involucra la determinación de *esfuerzos* y *deformaciones*. Este primer capítulo está dedicado al concepto de *esfuerzo*.

La sección 1.1 es un breve repaso de los métodos básicos de estática y de la aplicación de esos métodos a la determinación de las fuerzas en los elementos de una estructura sencilla que se componga de elementos unidos entre sí por pernos. En la sección 1.2 se introducirá el concepto de *esfuerzo* en un elemento de una estructura, y se mostrará cómo puede determinarse ese esfuerzo a partir de la *fuerza* en el elemento. Se estudiarán los *esfuerzos normales* en un elemento bajo carga axial, los *esfuerzos cortantes* ocasionados por la aplicación de fuerzas transversales iguales y opuestas y los *esfuerzos de apoyo* creados por los pernos y pasadores en los elementos que conectan.

La sección 1.2 termina con una descripción del método que deberá utilizarse en la solución de problemas propuestos y con el estudio de la exactitud numérica adecuada. Estos conceptos se aplicarán en el análisis de los elementos de la estructura sencilla que se consideró previamente.

En la sección 1.3, donde un elemento de dos fuerzas bajo carga axial se considera de nuevo, se observará que los esfuerzos en un plano *oblicuo* incluyen tanto esfuerzos *normales* como *cortantes*, mientras que en la sección 1.4 se analizará que se requieren *seis componentes* para describir el estado de esfuerzos en un punto en un cuerpo bajo las condiciones más generales de carga.

Finalmente, la sección 1.5 se enfocará a la determinación, a partir de probetas, de la *resistencia última* de un material dado y al uso de un *factor de seguridad* en el cálculo de la *carga permisible* para un componente estructural fabricado con dicho material.

1.1 REPASO DE LOS MÉTODOS DE ESTÁTICA

Considere la estructura mostrada en la figura 1.1, diseñada para soportar una carga de 30 kN. Consta de una viga *AB* con una sección transversal rectangular de 30 × 50 mm y de una varilla *BC* con una sección transversal circular de 20 mm de diámetro. La viga y la varilla están conectados por un perno en *B* y los soportan pernos y ménsulas en *A* y en *C*, respectivamente. El primer paso será dibujar el *diagrama de cuerpo libre* de la estructura, desprendiéndola de sus soportes en *A* y en *C*, y mostrando las reacciones que estos soportes ejercen sobre la estructura (figura 1.2). Advierta que el dibujo de la estructura se ha simplificado omitiendo los detalles innecesarios. En este punto algunos habrán reconocido que *AB* y *BC* son *elementos de dos fuerzas*. Para quienes no lo hayan hecho, se proseguirá el análisis, ignorando este hecho y suponiendo que las direcciones de las reacciones en *A* y en *C* se desconocen. Cada una de estas reacciones se representa mediante dos componentes, $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ en *A*, y $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ en *C*. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad A_x(0.6 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(0.8 \text{ m}) = 0$$

$$A_x = +40 \text{ kN} \tag{1.1}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + C_x = 0$$

$$C_x = -A_x \qquad C_x = -40 \text{ kN} \tag{1.2}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + C_y - 30 \text{ kN} = 0$$

$$A_y + C_y = +30 \text{ kN} \tag{1.3}$$

Se han encontrado dos de las cuatro incógnitas, pero no es posible determinar las otras dos de estas ecuaciones, y no pueden obtenerse ecuaciones independientes adicionales a partir del diagrama de cuerpo libre de la estructura. Ahora debe desmembrarse la

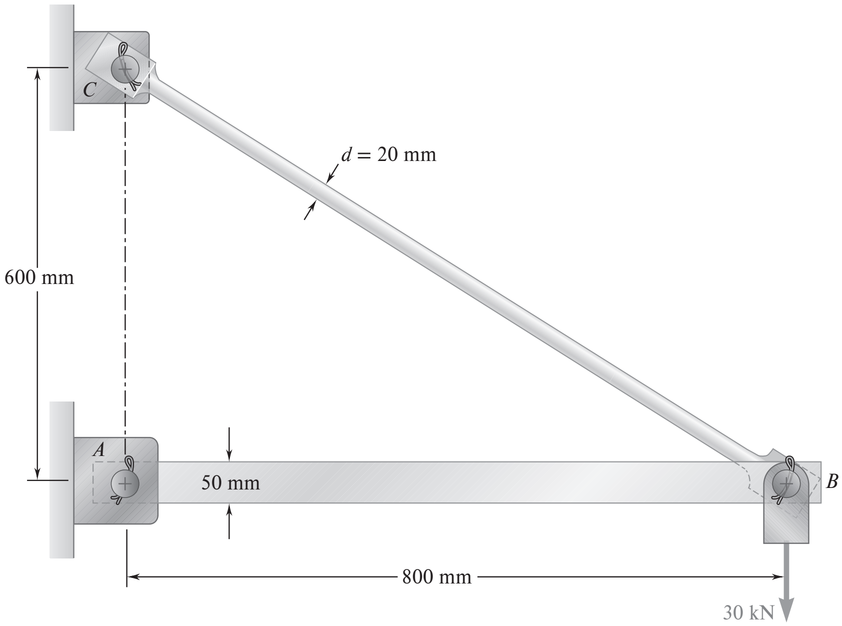


Figura 1.1 Aguilón usado para soportar una carga de 30 kN.

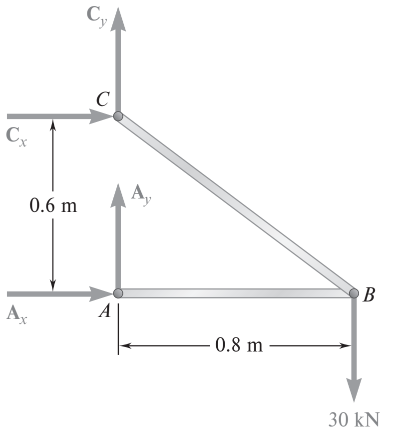


Figura 1.2 Diagrama de cuerpo libre del aguilón, que muestra la carga aplicada y las fuerzas de reacción.

estructura. Considerando el diagrama de cuerpo libre de la viga AB (figura 1.3), se escribirá la siguiente ecuación de equilibrio:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -A_y(0.8 \text{ m}) = 0 \qquad A_y = 0 \tag{1.4}$$

Al sustituir A_y de la ecuación (1.4) en la ecuación (1.3), se obtiene que $C_y = +30$ kN. Al expresar los resultados obtenidos para las reacciones en A y en C en forma vectorial, se tiene que

$$\mathbf{A} = 40 \text{ kN}\rightarrow \qquad \mathbf{C}_x = 40 \text{ kN}\leftarrow \qquad \mathbf{C}_y = 30 \text{ kN}\uparrow$$

Observe que la reacción en A se dirige a lo largo del eje de la viga AB y que causa compresión en ese elemento. Al notar que los componentes C_x y C_y de la reacción en C son, respectivamente, proporcionales a las componentes horizontal y vertical de la distancia de B a C, se concluye que la reacción en C es igual a 50 kN, que está dirigida a lo largo del eje de la varilla BC, y que causa tensión en ese elemento.

Estos resultados podrían haberse anticipado reconociendo que AB y BC son elementos de dos fuerzas, es decir, elementos sometidos a fuerzas solo en dos puntos, es decir, los puntos A y B para el elemento AB y B y C para el elemento BC. De hecho, para un elemento de dos fuerzas las líneas de acción de las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de los dos puntos son iguales y opuestas y pasan a través de ambos puntos. Utilizando esta propiedad, podría haberse obtenido una solución más sencilla si se considera el diagrama de cuerpo libre del perno B. Las fuerzas sobre el perno B son las fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{BC}$ ejercidas, respectivamente, por los elementos AB y BC, y la carga de 30 kN (figura 1.4*a*). Se dice que el perno B está en equilibrio dibujando el triángulo de fuerzas correspondiente (figura 1.4*b*).

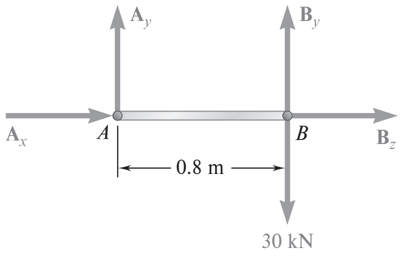


Figura 1.3 Diagrama de cuerpo libre del elemento *AB* liberado de la estructura.

Ya que la fuerza $\mathbf{F}_{BC}$ se dirige a lo largo del elemento BC, su pendiente es la misma que BC, es decir, 3/4. Por lo tanto, puede escribirse la proporción

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30 \text{ kN}}{3}$$

de la que se obtiene

$$F_{AB} = 40 \text{ kN} \qquad F_{BC} = 50 \text{ kN}$$

Las fuerzas $\mathbf{F}'_{AB}$ y $\mathbf{F}'_{BC}$ que el perno B ejerce, respectivamente, sobre la viga AB y sobre la varilla BC son iguales y opuestas a $\mathbf{F}_{AB}$ y a $\mathbf{F}_{BC}$ (figura 1.5).

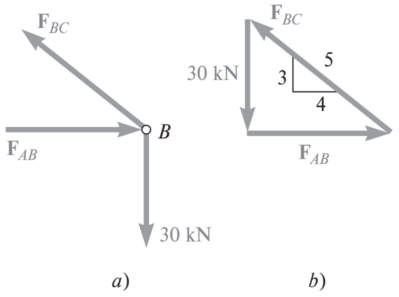


Figura 1.4 Diagrama de cuerpo libre de la unión *B* del aguilón y el triángulo de fuerzas asociado.

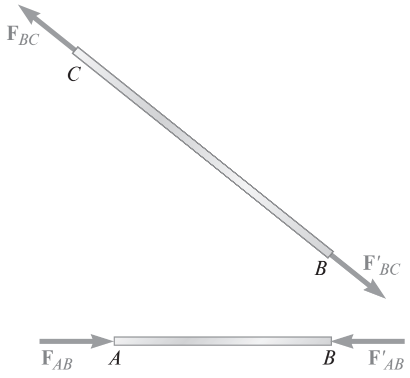


Figura 1.5 Diagramas de cuerpo libre de los elementos de dos fuerzas *AB* y *BC*.

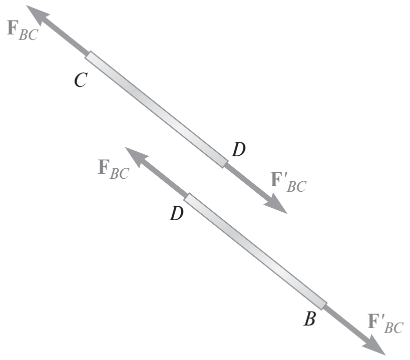


Figura 1.6 Diagramas de cuerpo libre de las secciones de la varilla *BC*.

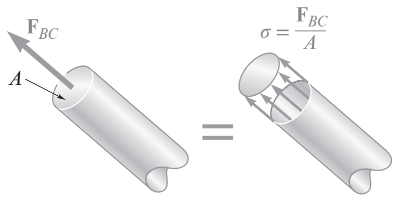


Figura 1.7 La fuerza axial representa la resultante de las fuerzas elementales distribuidas.

Si se conocen las fuerzas en los extremos de cada uno de los elementos, es posible determinar las fuerzas internas de estos elementos. Al efectuar un corte en algún punto arbitrario, *D*, en la varilla *BC*, se obtienen dos porciones, *BD* y *CD* (figura 1.6). Como deben aplicarse fuerzas de 50 kN en *D* a ambas porciones de la varilla, para mantenerlas en equilibrio, se concluye que una fuerza interna de 50 kN se produce en la varilla *BC* cuando se aplica una carga de 30 kN en *B*. Se constata, de manera adicional, por las direcciones en las fuerzas $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}'_{BC}$ en la figura 1.6, que la varilla se encuentra en tensión. Un procedimiento similar permitiría determinar que la fuerza interna en la viga *AB* es de 40 kN y que la viga está en compresión.

1.2 ESFUERZOS EN LOS ELEMENTOS DE UNA ESTRUCTURA

1.2A Esfuerzo axial

En la sección precedente se encontraron fuerzas en elementos individuales. Este es el primer paso necesario en el análisis de una estructura. Sin embargo, son insuficientes para determinar si la carga puede ser soportada con seguridad. La varilla *BC* del ejemplo considerado en la sección precedente es un elemento de dos fuerzas y, por lo tanto, las fuerzas $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}'_{BC}$ que actúan en sus extremos *B* y *C* (figura 1.5) están dirigidas a lo largo del eje de la varilla. El hecho de que la varilla *BC* pueda romperse o no hacerlo bajo esta carga depende del valor encontrado para la fuerza interna F_{BC}, del área transversal de la varilla y del material con que esta haya sido elaborada. De hecho, la fuerza interna F_{BC} representa la resultante de las fuerzas elementales distribuidas a lo largo de toda el área *A* de la sección transversal (figura 1.7). La intensidad promedio de estas fuerzas distribuidas es igual a la fuerza por unidad de área, F_{BC}/A, en la sección. El hecho de que la varilla se rompa o no bajo la carga dada, depende de la capacidad que tenga el material de soportar el valor correspondiente F_{BC}/A de la intensidad de las fuerzas internas distribuidas.

Fotografía 1.2 Esta armadura de puente consta de elementos de dos fuerzas que pueden estar en tensión o en compresión.

Se observará la fuerza uniformemente distribuida usando la figura 1.8. La fuerza por unidad de área, o la intensidad de las fuerzas distribuidas a través de una sección dada, se llama *esfuerzo* y se representa con la letra griega σ (sigma). El esfuerzo en un elemento con área transversal *A* sometido a una carga axial **P** se obtiene al dividir la magnitud *P* de la carga entre el área *A*:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

Se empleará un signo positivo para indicar un esfuerzo de tensión (el elemento a tensión) y un signo negativo para indicar un esfuerzo compresivo (el elemento a compresión).

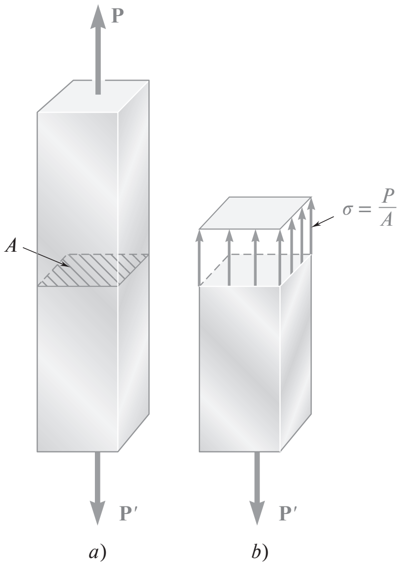


Figura 1.8 *a*) Elemento con una carga axial. *b*) Distribución idealizada del esfuerzo uniforme en una sección arbitraria.

Figura 1.9 El área pequeña ΔA, en un punto arbitrario de la sección transversal, soporta la carga axial ΔF en este elemento axial.

Como se muestra en la figura 1.8, la sección a través de la varilla para determinar su fuerza interna y su correspondiente esfuerzo es perpendicular a su eje. El esfuerzo correspondiente se describe como un *esfuerzo normal*. Así, la fórmula (1.5) da el *esfuerzo normal en un elemento bajo carga axial*.

Es preciso advertir que, en la ecuación (1.5), σ representa el *valor promedio* del esfuerzo a través de la sección transversal, y no el valor de un esfuerzo en un punto específico de la sección transversal. Para definir el esfuerzo en un punto dado Q en la sección transversal, debe considerarse una pequeña área ΔA (figura 1.9). Cuando se divide la magnitud de $\Delta \mathbf{F}$ entre ΔA, se obtiene el valor promedio del esfuerzo a través de ΔA. Al aproximar ΔA a cero, se halla el esfuerzo en el punto Q.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad (1.6)$$

En general, el valor obtenido para el esfuerzo σ en un punto dado Q de la sección es diferente al valor del esfuerzo promedio dado por la fórmula (1.5), y se encuentra que σ varía a través de la sección. En una varilla delgada sujeta a cargas concentradas, **P** y **P′**, iguales y opuestas (figura 1.10*a*), la variación es pequeña en una sección que se encuentre lejos de los puntos de aplicación de las cargas concentradas (figura 1.10*c*), pero es bastante notoria cerca de estos puntos (figuras 1.10*b* y *d*).

De la ecuación (1.6) se deduce que la magnitud de la resultante de las fuerzas internas distribuidas es

$$\int dF = \int_A \sigma \, dA$$

No obstante, las condiciones de equilibrio de cada una de las porciones de varilla mostradas en la figura 1.10 requiere que esta magnitud sea igual a la magnitud P de las cargas concentradas. Se tiene, entonces,

$$P = \int dF = \int_A \sigma \, dA \qquad (1.7)$$

lo que significa que el volumen bajo cada una de las superficies esforzadas en la figura 1.10 debe ser igual a la magnitud P de las cargas. Esto, sin embargo, es la única información que es posible determinar a partir de nuestro conocimiento sobre estática, con

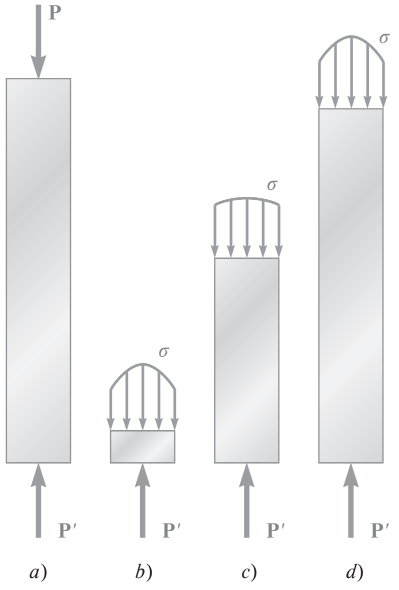


Figura 1.10 Distribuciones del esfuerzo en diferentes secciones a lo largo de un elemento cargado axialmente.

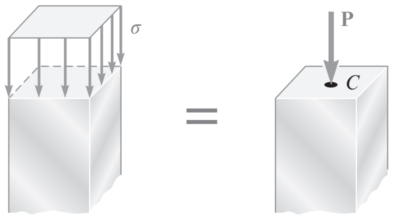


Figura 1.11 La distribución idealizada del esfuerzo uniforme implica que la fuerza resultante pasa a través del centro de la sección transversal.

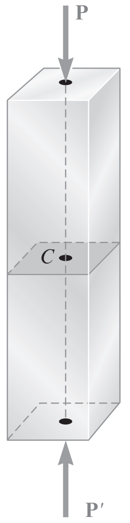


Figura 1.12 Carga céntrica con fuerzas resultantes que pasan a través del centroide de la sección.

respecto a la distribución de los esfuerzos normales en las diversas secciones de la varilla. La distribución real de los esfuerzos en cualquier sección dada es *estáticamente indeterminada*. Para saber más acerca de esta distribución, es necesario considerar las deformaciones que resultan del modo particular de la aplicación de las cargas en los extremos de la varilla. Esto se explicará con mayor atención en el capítulo 2.

En la práctica, se supondrá que la distribución de los esfuerzos normales en un elemento cargado axialmente es uniforme, excepto en la vecindad inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. El valor σ del esfuerzo es entonces igual a σ_{prom} y puede calcularse con la fórmula (1.5). Sin embargo, hay que darse cuenta de que, cuando se supone una distribución uniforme de los esfuerzos en la sección, la estática elemental† dice que la resultante **P** de las fuerzas internas debe aplicarse en el centroide C de la sección (figura 1.11). Esto significa que *una distribución uniforme del esfuerzo es posible solo si la línea de acción de las cargas concentradas* **P** *y* **P′** *pasa a través del centroide de la sección considerada* (figura 1.12). Este tipo de carga se denomina *carga céntrica* y se supondrá que tiene lugar en todos los elementos rectos de dos fuerzas que se encuentran en armaduras y en estructuras conectadas con pasadores, como la que se considera en la figura 1.1. Sin embargo, si un elemento con dos fuerzas está cargado de manera axial, pero *excéntricamente*, como en la figura 1.13*a*, se encuentra que, a partir de las condiciones de equilibrio de la porción del elemento que se muestra en la figura 1.13*b*, las fuerzas internas en una sección dada deben ser equivalentes a una fuerza **P** aplicada al centroide de la sección y a un par **M** cuyo momento es $M = Pd$. La distribución de fuerzas y, por lo tanto, la correspondiente distribución de esfuerzos, *no puede ser uniforme*. Tampoco la distribución de esfuerzos puede ser simétrica. Este punto se analizará detalladamente en el capítulo 4.

Cuando se emplean unidades del sistema SI, P se expresa en newtons (N) y A en metros cuadrados (m^2), por lo que el esfuerzo σ se expresará en N/m^2. Esta unidad se denomina *pascal* (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad muy pequeña, por lo que, en la práctica, deben emplearse múltiplos de esta unidad, como el kilopascal (kPa), el megapascal (MPa) y el gigapascal (GPa):

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

Aplicación de conceptos 1.1

Considerando la estructura de la figura 1.1 en la página 5, suponga que la varilla BC es de un acero que presenta un esfuerzo máximo permisible $\sigma_{\text{perm}} = 165$ MPa. ¿Puede soportar la varilla BC con seguridad la carga a la que se le someterá? La magnitud de la fuerza F_{BC} en la varilla se calculó como de 50 kN. Recuerde que el diámetro de la varilla es de 20 mm, por lo que deberá utilizarse la ecuación (1.5) para determinar el esfuerzo creado en la varilla por la carga dada.

$$P = F_{BC} = +50 \text{ kN} = +50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{20 \text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi (10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = +159 \times 10^6 \text{ Pa} = +159 \text{ MPa}$$

Como el valor obtenido para σ es menor que el valor σ_{perm} del esfuerzo permisible del acero utilizado, se concluye que la varilla BC soportará con seguridad la carga.

† Vea Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2008, o *Vector Mechanics for Engineers*, 10a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2013, secciones 5.2 y 5.3.

Cuando se utilizan las unidades acostumbradas en Estados Unidos, la fuerza P comúnmente se expresa en libras (lb) o kilolibras (kip), y el área transversal A en pulgadas cuadradas (in^2). El esfuerzo σ, en consecuencia, se presenta en libras por pulgada cuadrada (psi) o en kilolibras por pulgada cuadrada (ksi).[†]

Para que el análisis sea completo, el análisis de la estructura dada también deberá incluir el esfuerzo de compresión en la del aguilón AB, así como los esfuerzos producidos en los pasadores y en sus soportes. Esto se estudiará más adelante en este mismo capítulo. También es necesario determinar si las deformaciones producidas por la carga dada son aceptables. El estudio de la deformación bajo cargas axiales será el tema del capítulo 2. Para los elementos bajo compresión, la *estabilidad* del elemento (es decir, su capacidad para soportar una carga dada sin experimentar un cambio súbito de configuración) se estudiará en el capítulo 10.

El papel del ingeniero no se restringe al análisis de las estructuras y máquinas existentes sometidas a condiciones dadas de carga. Un asunto de mayor importancia que interesa a los ingenieros es el *diseño* de estructuras y máquinas nuevas, es decir, la selección de los componentes apropiados para desempeñar una tarea dada.

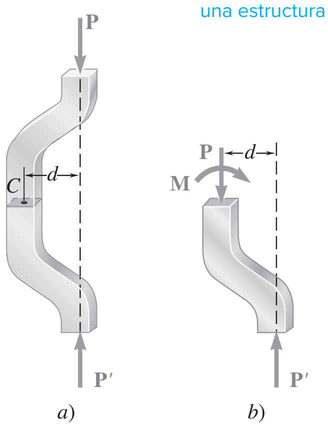


Figura 1.13 Ejemplo de una carga excéntrica simple.

Aplicación de conceptos 1.2

Como ejemplo de diseño, vea otra vez la estructura de la figura 1.1 en la página 5 y suponga que se empleará en ella aluminio, el cual tiene un esfuerzo permisible $\sigma_{perm} = 100$ MPa. Debido a que la fuerza en la varilla BC seguirá siendo $P = F_{BC} = 50$ kN bajo la carga dada, a partir de la ecuación (1.5), se tiene

$$\sigma_{perm} = \frac{P}{A} \qquad A = \frac{P}{\sigma_{perm}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

y, ya que $A = \pi r^2$,

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{\pi}} = 12.62 \times 10^{-3} \text{ m} = 12.62 \text{ mm}$$

$$d = 2r = 25.2 \text{ mm}$$

Se concluye que una varilla de aluminio de 26 mm, o de diámetro mayor, será adecuada.

1.2B Esfuerzo cortante

Las fuerzas internas y sus correspondientes esfuerzos estudiados en la sección 1.2A eran normales a la sección considerada. Un tipo muy diferente de esfuerzo se obtiene cuando se aplican fuerzas transversales **P** y **P′** a un elemento AB (figura 1.14). Al efectuar un corte en C entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas (figura 1.15a), obtenemos el diagrama de la porción AC que se muestra en la figura 1.15b. Se concluye que deben existir fuerzas internas en el plano de la sección, y que su resultante es igual a **P**. Estas fuerzas internas elementales se conocen como *fuerzas cortantes,* y la magnitud P de su resultante es el *cortante* en la sección. Al dividir el cortante P entre el área A de la sección transversal, se obtiene el *esfuerzo cortante promedio* en la sección. Al representar el esfuerzo cortante con la letra griega τ (tau), se escribe

$$\tau_{prom} = \frac{P}{A} \tag{1.8}$$

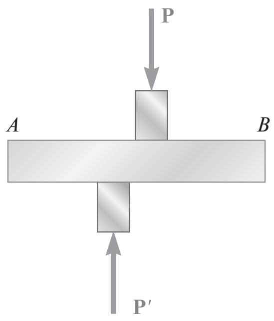


Figura 1.14 Cargas transversales opuestas que crean cortante sobre el elemento *AB*.

[†] Las unidades principales del SI y las de uso común en Estados Unidos utilizadas en mecánica se incluyen en tablas en el interior de la cubierta frontal de este libro. De la tabla del lado derecho, se observa que 1 psi es aproximadamente igual a 7 kPa, y que 1 ksi se aproxima a 7 MPa.

El valor obtenido es un valor promedio para el esfuerzo cortante sobre toda la sección. Al contrario de lo dicho con anterioridad para los esfuerzos normales, en este caso no puede suponerse que la distribución de los esfuerzos cortantes a través de una sección sea uniforme. Como se verá en el capítulo 6, el valor real τ del esfuerzo cortante varía de cero en la superficie del elemento estructural hasta un valor máximo $t_{\text{máx}}$ que puede ser mucho mayor que el valor promedio, τ_{prom}.

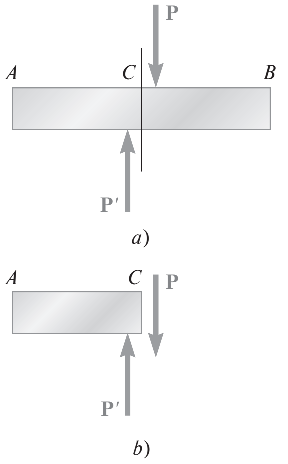
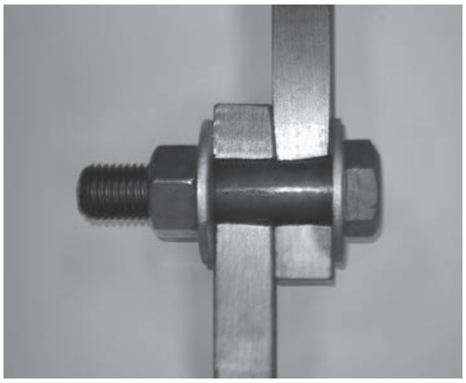


Figura 1.15 Esto muestra la fuerza cortante resultante en una sección entre fuerzas transversales.



Fotografía 1.3 Vista en corte de una conexión con un perno en cortante.

Los esfuerzos cortantes se encuentran comúnmente en pernos, pasadores y remaches utilizados para conectar diversos elementos estructurales y componentes de máquinas (fotografía 1.3). Considere dos placas *A* y *B* conectadas por un perno *CD* (figura 1.16). Si a las placas se les somete a fuerzas de tensión de magnitud *F*, se desarrollarán esfuerzos en la sección del perno que corresponde al plano *EE′*. Al dibujar los diagramas del perno y de la porción localizada por encima del plano *EE′* (figura 1.17), se concluye que el cortante *P* en la sección es igual a *F*. Se obtiene el esfuerzo cortante promedio en la sección, de acuerdo con la fórmula (1.8), dividiendo el cortante $P = F$ entre el área *A* de la sección transversal:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \qquad (1.9)$$

El perno anterior está en lo que se conoce como *cortante simple.* Sin embargo, pueden surgir diferentes condiciones de carga. Por ejemplo, si las placas de empalme *C* y *D* se emplean para conectar las placas *A* y *B* (figura 1.18), el corte tendrá lugar en el perno *HJ* en cada uno de los dos planos *KK′* y *LL′* (al igual que en el perno *EG*). Se dice que los pernos están sometidos a *cortante doble.* Para determinar el esfuerzo cortante promedio en cada plano, se dibujan los diagramas de cuerpo libre del perno *HJ* y de la porción del perno localizada entre los dos planos (figura 1.19). Al observar que el corte *P* en cada una de las secciones es $P = F/2$ se concluye que el esfuerzo cortante promedio es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \qquad (1.10)$$

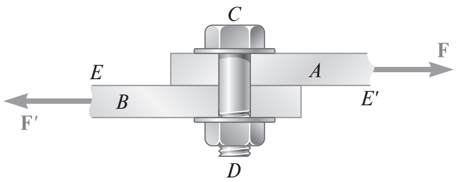


Figura 1.16 Perno sujeto a cortante simple.

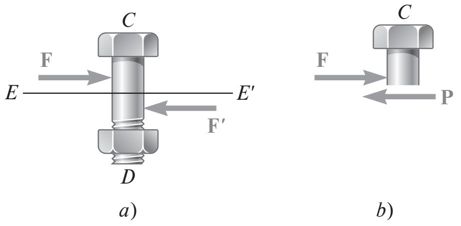


Figura 1.17 *a*) Diagrama de perno en cortante simple; *b*) sección *E-E′* del perno.

https://www.facebook.com/groups/Technologies.CAD.CAM.CAE.CIM/

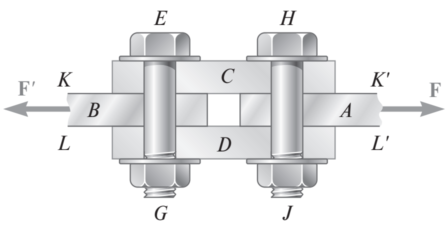


Figura 1.18 Pernos sujetos a cortante doble.

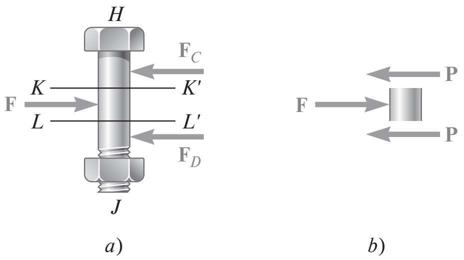


Figura 1.19 *a*) Diagrama de perno en cortante doble; *b*) secciones *K-K′* y *L-L′* del perno.

1.2C Esfuerzo de apoyo en conexiones

Los pernos, pasadores y remaches crean esfuerzos a lo largo de la *superficie de apoyo* de las superficies de contacto en los elementos que conectan. Por ejemplo, considere nuevamente las dos placas *A* y *B* conectadas por un perno *CD* que se analizaron en la sección precedente (figura 1.16). El perno ejerce una fuerza **P** sobre la placa *A* igual y opuesta a la fuerza **F** ejercida por la placa sobre el perno (figura 1.20). La fuerza **P** representa la resultante de las fuerzas elementales distribuidas en la superficie interior de un medio cilindro de diámetro *d* y longitud *t* igual al espesor de la placa. Como la distribución de estas fuerzas, y de los esfuerzos correspondientes, es muy complicada, en la práctica se utiliza un valor nominal promedio σ_b para el esfuerzo, llamado *esfuerzo de apoyo*, que se obtiene de dividir la carga *P* entre el área del rectángulo que representa la proyección del perno sobre la sección de la placa (figura 1.21). Debido a que esta área es igual a *td*, donde *t* es el espesor de la placa y *d* el diámetro del perno, se tiene que

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \qquad (1.11)$$

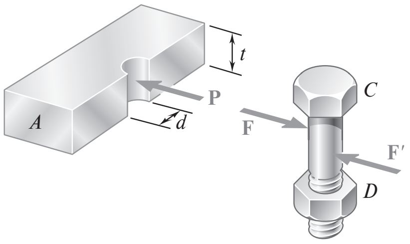


Figura 1.20 Fuerzas iguales y opuestas entre la placa y el perno, ejercidas sobre las superficies de apoyo.

1.2D Aplicación al análisis y al diseño de estructuras sencillas

Ahora se está en posibilidad de determinar los esfuerzos en los elementos y conexiones de varias estructuras bidimensionales sencillas y, por lo tanto, de diseñar tales estructuras. Esto se ilustra a través de la siguiente aplicación de conceptos.

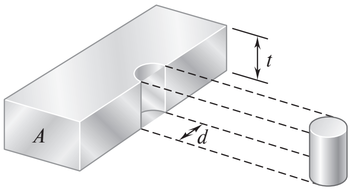


Figura 1.21 Dimensiones para calcular el área del esfuerzo de apoyo.

Aplicación de conceptos 1.3

De regreso a la estructura de la figura 1.1, se determinarán los esfuerzos normales, cortantes y de apoyo. Como se observa en la figura 1.22, la varilla *BC* de 20 mm de diámetro tiene extremos planos de sección transversal rectangular de 20 × 40 mm, en tanto que la viga *AB* tiene una sección transversal rectangular de 30 × 50 mm y está provista de una horquilla en el extremo *B*. Ambos elementos se conectan en *B* mediante un pasador del que cuelga la carga de 30 kN por medio de una ménsula en forma de U. La viga *AB* la soporta en *A* un pasador introducido en una ménsula doble, mientras que la varilla *BC* se conecta en *C* a una ménsula simple. Todos los pasadores tienen 25 mm de diámetro.

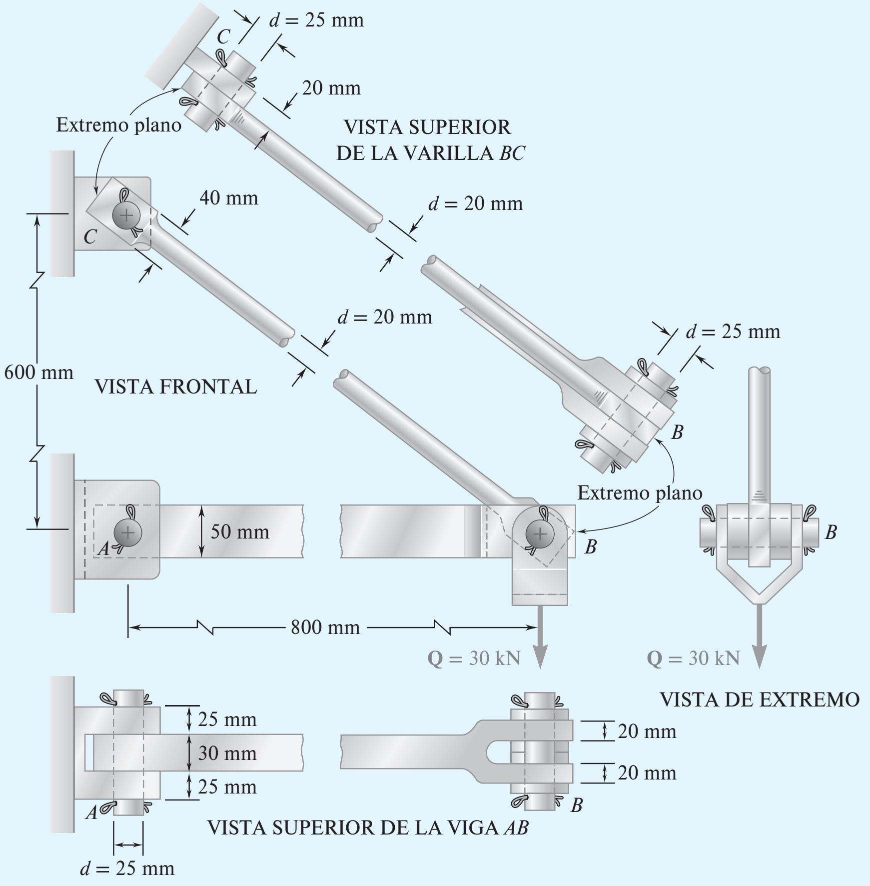


Figura 1.22 Componentes de la viga usada para soportar la carga de 30 kN.

Esfuerzo normal en la viga *AB* y en la varilla *BC*. Como se ha visto en la sección 1.1A, la fuerza en la varilla *BC* es $F_{BC} = 50$ kN (a tensión) y el área de su sección transversal circular es $A = 314 \times 10^{-6}$ m^2. El esfuerzo normal promedio correspondiente es $\sigma_{BC} = +159$ MPa. Sin embargo, las partes planas de la varilla también se encuentran bajo tensión y en la sección más angosta, donde se encuentra el agujero, se tiene

$$A = (20 \text{ mm})(40 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 300 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

El valor promedio correspondiente del esfuerzo es

$$(\sigma_{BC})_{\text{extremo}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{300 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 167.0 \text{ MPa}$$

Advierta que este es solo un *valor promedio*, ya que cerca del agujero, el esfuerzo alcanzará en realidad un valor mucho mayor, como se verá en la sección 2.11. Está claro que, si la carga aumenta, la varilla fallará cerca de uno de los agujeros, más que en su porción cilíndrica; su diseño, por lo tanto, podrá mejorarse aumentando el ancho o el espesor de los extremos planos de la varilla.

Recuerde de la sección 1.1A que la fuerza en la viga *AB* es $F_{AB} = 40$ kN (a compresión). Puesto que el área de la sección transversal rectangular del aguilón es $A = 30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} = 1.5 \times 10^{-3}$ m^2, el valor promedio del esfuerzo normal en la parte principal de la viga, entre los pasadores *A* y *B*, es

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{1.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -26.7 \times 10^6 \text{ Pa} = -26.7 \text{ MPa}$$

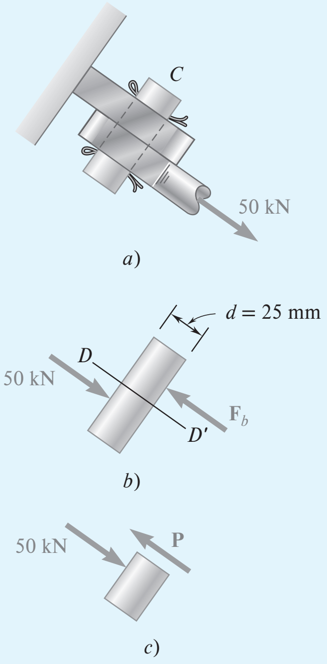


Figura 1.23. Diagramas del pasador en cortante simple en *C*.

Advierta que las secciones de área mínima en A y B no se encuentran bajo esfuerzo, ya que la viga está en compresión y, por lo tanto, *empuja* sobre los pasadores (en lugar de *jalarlos* como lo hace la varilla BC).

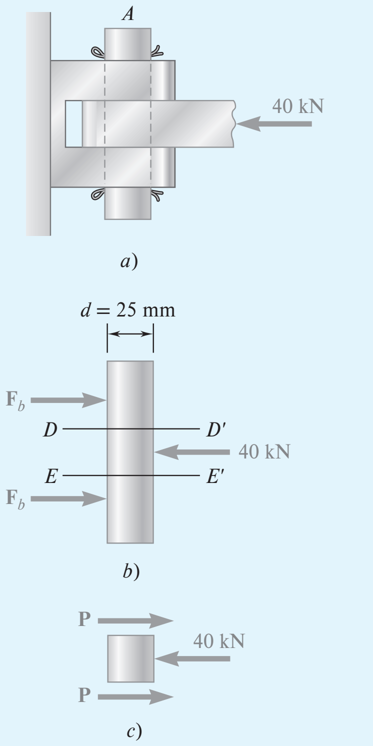


Figura 1.24 Diagramas de cuerpo libre del pasador en cortante doble en *A*.

Esfuerzo cortante en las distintas conexiones. Para determinar el esfuerzo cortante en una conexión como un perno, pasador o remache, primero deben mostrarse con claridad las fuerzas ejercidas por los distintos elementos que conecta. En el caso del pasador C (figura 1.23*a*), dibuje la figura 1.23*b* para mostrar la fuerza de 50 kN ejercida por el elemento BC sobre el pasador, y la fuerza igual y opuesta ejercida por el soporte. Al dibujar ahora el diagrama de la porción del pasador localizada bajo el plano DD' donde ocurren los esfuerzos cortantes (figura 1.23*c*), se concluye que la fuerza cortante en ese plano es $P = 50$ kN. Como el área transversal del pasador es

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{25 \text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(12.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

el valor promedio del esfuerzo cortante en el pasador en C es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102.0 \text{ MPa}$$

Observe que el pasador A (figura 1.24) se encuentra sometido a cortante doble. Al dibujar los diagramas de cuerpo libre del pasador y de la porción del pasador colocada entre los planos DD' y EE' donde ocurren los esfuerzos cortantes, se llega a la conclusión de que $P = 20$ kN y que

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40.7 \text{ MPa}$$

El pasador B (figura 1.25*a*) puede dividirse en cinco porciones sobre las que actúan fuerzas ejercidas por la viga, la varilla y el soporte. Las porciones DE (figura 1.25*b*) y DG (figura 1.25*c*) muestran que la fuerza cortante en la sección E es $P_E = 15$ kN mientras que la fuerza cortante en la sección G es $P_G = 25$ kN. Como la carga del pasador es simétrica, el valor máximo de la fuerza cortante en el pasador B es $P_G = 25$ kN y los mayores esfuerzos cortantes ocurren en las secciones G y H, donde

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P_G}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 50.9 \text{ MPa}$$

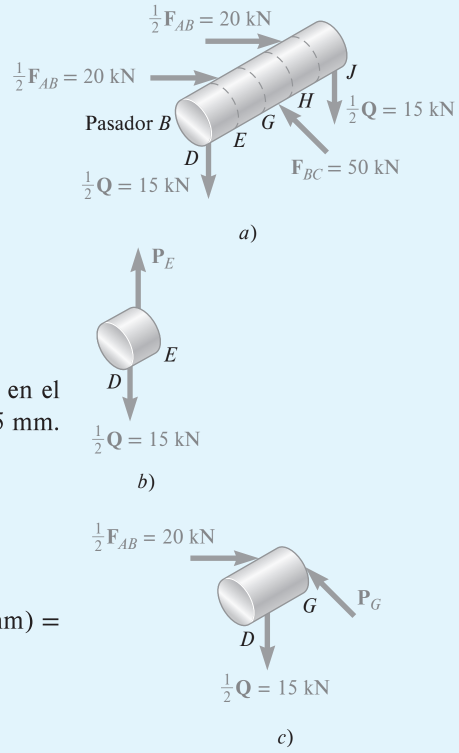


Figura 1.25 Diagramas de cuerpo libre para diferentes secciones en el pasador *B*.

Esfuerzos de apoyo. Para obtener los esfuerzos nominales de apoyo en A en el elemento AB, se utiliza la fórmula (1.11). De la figura 1.22, $t = 30$ mm y $d = 25$ mm. Recuerde que $P = F_{AB} = 40$ kN, por lo que

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(30 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 53.3 \text{ MPa}$$

Para obtener el esfuerzo de apoyo sobre el soporte en A, se emplea $t = 2(25 \text{ mm}) = 50$ mm y $d = 25$ mm:

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(50 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 32.0 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos de apoyo en B en el elemento AB, en B y en C en el elemento BC y en el soporte en C se calculan de manera similar.

1.2E Método para la solución de problemas

Quienes estudian este texto deben aproximarse a un problema de mecánica de materiales como lo harían con una situación ingenieril real. Su propia experiencia e intuición les ayudarán a comprender y formular mejor el problema. La solución de ese tipo de problemas debe basarse en los principios fundamentales de la estática y en los principios que se analizan en este curso. Cada paso que se tome debe justificarse sobre esa base, sin dejar espacio para la intuición o las "corazonadas". Después de que se ha obtenido una respuesta, esta deberá verificarse y será entonces cuando pueda utilizar el sentido común y su experiencia personal. Si no está satisfecho por completo con el resultado obtenido, deberá revisar con cuidado la formulación del problema, la validez de los métodos empleados en su solución y la exactitud de los cálculos.

En general, es posible resolver problemas de varias maneras diferentes; no hay un método que funcione mejor para todos. Sin embargo, se ha descubierto que frecuentemente los estudiantes encuentran útil contar con un conjunto general de pautas para estructurar los problemas y planificar su solución. En los Problemas modelo a lo largo de este texto se utiliza un enfoque de cuatro pasos para resolver problemas, que se conoce como metodología EMARP (de *Estrategia*, *Modelar*, *Analizar*, *Revisar* y *Pensar*):

1. **Estrategia.** El planteamiento de un problema debe ser claro y preciso. Necesita incluir los datos dados e indicar el tipo de información que se requiere. El primer paso para resolver el problema es decidir qué conceptos aplicables a la situación dada se han aprendido y conectar los datos a la información requerida. Con frecuencia es útil trabajar hacia atrás desde la información que debe encontrarse: pregúntese qué cantidades necesita saber para obtener la respuesta y si algunas de estas cantidades son desconocidas, cómo puede encontrarlas a partir de los datos dados.
2. **Modelar.** La solución para la mayoría de los problemas que encontrará hará necesario que primero se determinen las *reacciones en los apoyos* y las *fuerzas y los pares internos.* Es importante incluir uno o más *diagramas de cuerpo libre* para dar soporte a estas determinaciones. Dibuje bosquejos adicionales según se requiera para guiar el resto de la solución; por ejemplo, para el análisis de esfuerzos.
3. **Analizar.** Después de haber dibujado los diagramas apropiados, use los principios fundamentales de la mecánica para escribir las ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones pueden resolverse para determinar las fuerzas desconocidas y usarse para calcular los esfuerzos y deformaciones requeridos.
4. **Revisar y Pensar.** Después de haber obtenido la respuesta, deberá verificarla cuidadosamente. ¿Tiene sentido en el contexto del problema original? Los errores en el *razonamiento* pueden encontrarse con frecuencia analizando las unidades a través de los cálculos y verificando las unidades obtenidas para la respuesta. Por ejemplo, en el diseño de la varilla que se estudió en la Aplicación de conceptos 1.2, el diámetro requerido por la varilla se expresó en milímetros, que es la unidad correcta para una dimensión; si se hubiera encontrado otra unidad, se sabría que se cometió un error.

Los errores de *cálculo* se pueden descubrir frecuentemente al sustituir los valores numéricos obtenidos en una ecuación que aún no ha sido utilizada y verificando que la ecuación se satisface. Hay que resaltar que en la ingeniería es muy importante que los cálculos sean correctos.

Exactitud numérica. La exactitud de la solución de un problema depende de dos aspectos: 1) la exactitud de los datos recibidos y 2) la exactitud de los cálculos desarrollados.

La solución no puede ser más exacta que el menos exacto de estos dos factores. Por ejemplo, si se sabe que la carga de una viga es de 75 000 lb con un error posible de 100 lb en cualquier sentido, el error relativo que mide el grado de exactitud de los datos es

$$\frac{100 \text{ lb}}{75\,000 \text{ lb}} = 0.0013 = 0.13\%$$

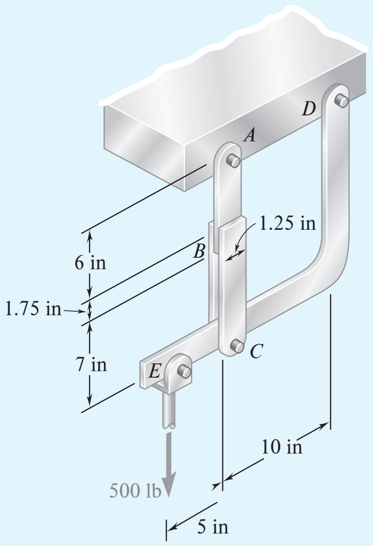
Al calcular la reacción en uno de los apoyos de la viga, sería entonces irrelevante registrarlo como de 14 322 lb. La exactitud de la solución no puede ser mayor que 0.13%, sin importar cuán exactos sean los cálculos, y el error posible en la respuesta puede ser tan grande como (0.13/100)(14 322 lb) ≈ 20 lb. El registro apropiado de la respuesta sería de 14 320 ± 20 lb.

En los problemas de ingeniería, los datos rara vez se conocen con una exactitud mayor de 0.2%. Una regla práctica es utilizar cuatro cifras para registrar los números que comienzan con "1" y tres cifras para todos los otros casos. A menos que se indique lo contrario, los datos ofrecidos en un problema deben suponerse conocidos con un grado comparable de exactitud. Una fuerza de 40 lb, por ejemplo, debería leerse 40.0 lb, y una fuerza de 15 lb debería leerse 15.00 lb.

La rapidez y exactitud de las calculadoras y computadoras facilitan los cálculos numéricos en la solución de muchos problemas. Sin embargo, los estudiantes no deberán registrar más cifras significativas que las que puedan justificarse solo porque pueden obtenerse con facilidad. Una exactitud mayor que 0.2% es rara vez necesaria o significativa en la solución de los problemas prácticos de ingeniería.

Problema modelo 1.1

En el soporte mostrado la porción superior del eslabón ABC es de $\frac{3}{8}$ in de espesor y las porciones inferiores son cada uno de $\frac{1}{4}$ in de grueso. Se utiliza resina epóxica para unir la porción superior con la inferior en B. El pasador en A tiene un diámetro de $\frac{3}{8}$ in mientras que en C se emplea un pasador de $\frac{1}{4}$ in. Determine *a*) el esfuerzo cortante en el pasador A, *b*) el esfuerzo cortante en el pasador C, *c*) el máximo esfuerzo normal en el eslabón ABC, *d*) el esfuerzo cortante promedio en las superficies pegadas en B y *e*) el esfuerzo de apoyo en el eslabón en C.



ESTRATEGIA: Considere el cuerpo libre del soporte para determinar la fuerza interna para el elemento AB y después proceda a determinar las fuerzas cortantes y de apoyo aplicables a los pasadores. Entonces, estas fuerzas pueden usarse para determinar los esfuerzos.

MODELAR: Dibuje el diagrama de cuerpo libre del soporte para determinar las reacciones en el soporte (figura 1). Después dibuje los diagramas de los diferentes componentes de interés, mostrando las fuerzas necesarias para determinar los esfuerzos deseados (figuras 2-6).

ANALIZAR:

Cuerpo libre: soporte entero. Como el eslabón ABC es un elemento de dos fuerzas (figura 1), la reacción en A es vertical; la reacción en D está representada por sus componentes D_x y D_y. Se escribe:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad (500 \text{ lb})(15 \text{ in}) - F_{AC}(10 \text{ in}) = 0$$
$$F_{AC} = +750 \text{ lb} \qquad F_{AC} = 750 \text{ lb} \quad \textit{tensión}$$

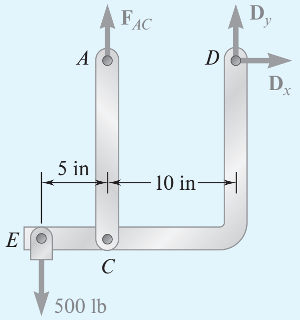


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del soporte.

***a*) Esfuerzo cortante en el pasador *A*.** Ya que este pasador de $\frac{3}{8}$ in de diámetro está en cortante simple (figura 2), se escribe

$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{750 \text{ lb}}{\frac{1}{4}\pi(0.375 \text{ in})^2} \qquad \tau_A = 6\,790 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

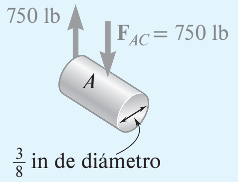


Figura 2 Pasador *A*.

***b*) Esfuerzo cortante en el pasador *C*.** Como este pasador de $\frac{1}{4}$ in de diámetro está en cortante doble (figura 3), se anota

$$\tau_C = \frac{\frac{1}{2}F_{AC}}{A} = \frac{375 \text{ lb}}{\frac{1}{4}\pi(0.25 \text{ in})^2} \qquad \tau_C = 7\,640 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

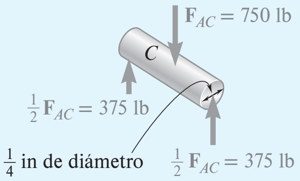


Figura 3 Pasador *C*.

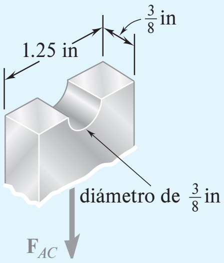


Figura 4 Sección del eslabón *ABC* en *A*.

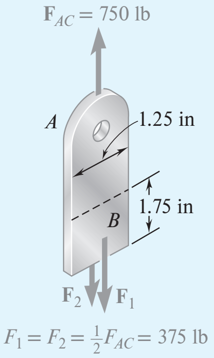


Figura 5 Elemento *AB*.

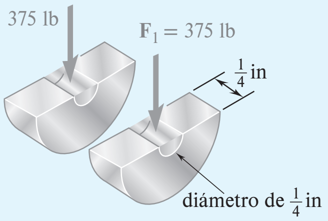


Figura 6 Sección del eslabón *ABC* en *C*.

c) Máximo esfuerzo normal en el eslabón *ABC*. El máximo esfuerzo se encuentra donde el área es más pequeña; esto ocurre en la sección transversal en *A* (figura 4) donde se localiza el agujero de $\frac{3}{8}$ in. Así, se tiene que

$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A_{\text{neta}}} = \frac{750 \text{ lb}}{(\frac{3}{8} \text{ in})(1.25 \text{ in} - 0.375 \text{ in})} = \frac{750 \text{ lb}}{0.328 \text{ in}^2} \qquad \sigma_A = 2\,290 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

d) Esfuerzo cortante promedio en *B*. Se advierte que existe adhesión en ambos lados de la porción superior del eslabón (figura 5) y que la fuerza cortante en cada lado es $F_1 = (750 \text{ lb})/2 = 375$ lb. Por lo tanto, el esfuerzo cortante promedio en cada superficie es

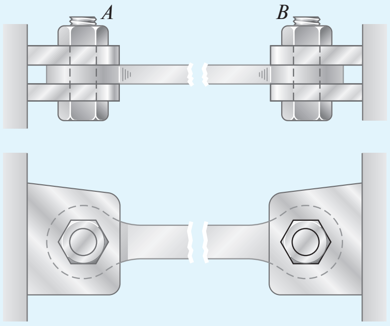
$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{375 \text{ lb}}{(1.25 \text{ in})(1.75 \text{ in})} \qquad \tau_B = 171.4 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

e) Esfuerzo de apoyo en el eslabón en *C*. Para cada porción del eslabón (figura 6), $F_1 = 375$ lb y el área nominal de apoyo es de (0.25 in)(0.25 in) = 0.0625 in^2.

$$\sigma_b = \frac{F_1}{A} = \frac{375 \text{ lb}}{0.0625 \text{ in}^2} \qquad \sigma_b = 6\,000 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Este problema modelo demuestra la necesidad de dibujar diagramas de cuerpo libre de los componentes separados, considerando cuidadosamente el comportamiento en cada uno. A modo de ejemplo, con base en la inspección visual del soporte, es evidente que el elemento *AC* debe estar en tensión para la carga dada, y el análisis lo confirma. Si se hubiese obtenido un resultado de compresión, se requeriría un reexamen exhaustivo del análisis.

Problema modelo 1.2



La barra de sujeción de acero que se muestra debe diseñarse para soportar una fuerza de tensión de magnitud $P = 120$ kN cuando se asegure con pasadores entre ménsulas dobles en *A* y *B*. La barra se fabricará de placa de 20 mm de espesor. Para el grado de acero que se usa, los esfuerzos máximos permisibles son $\sigma = 175$ MPa, $\tau = 100$ MPa y $\sigma_b = 350$ MPa. Diseñe la barra de sujeción determinando los valores requeridos para *a*) el diámetro *d* del pasador, *b*) la dimensión *b* en cada extremo de la barra, *c*) la dimensión *h* de la barra.

ESTRATEGIA: Utilice diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas necesarias para obtener los esfuerzos en términos de la fuerza de tensión de diseño.

Al igualar estos esfuerzos con los esfuerzos permisibles se obtienen las dimensiones requeridas.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Diámetro del pasador.** Debido a que el pasador se encuentra en cortante doble (figura 1), $F_1 = \frac{1}{2}P = 60$ kN.

$$\tau = \frac{F_1}{A} = \frac{60 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad 100 \text{ MPa} = \frac{60 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad d = 27.6 \text{ mm}$$

Se usa $d = 28$ mm ◀

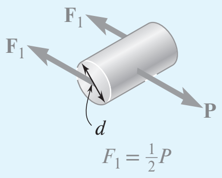


Figura 1 Perno seccionado.

En este punto se verifica el esfuerzo de apoyo entre la placa de 20 mm de espesor (figura 2) y el pasador de 28 mm de diámetro.

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{120 \text{ kN}}{(0.020 \text{ m})(0.028 \text{ m})} = 214 \text{ MPa} < 350 \text{ MPa} \qquad \text{OK}$$

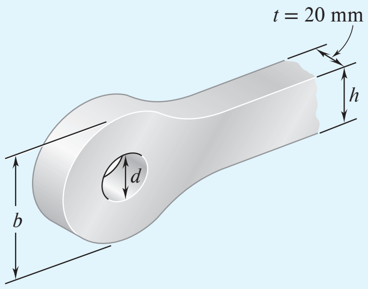


Figura 2 Geometría de la barra de sujeción.

***b*) Dimensión *b* en cada extremo de la barra.** En la figura 3 se considera una de las porciones extremas de la barra. Como el espesor de la placa de acero es $t = 20$ mm y el esfuerzo promedio de tensión no debe exceder los 175 MPa, se escribe

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}P}{ta} \qquad 175 \text{ MPa} = \frac{60 \text{ kN}}{(0.02 \text{ m})a} \qquad a = 17.14 \text{ mm}$$

$$b = d + 2a = 28 \text{ mm} + 2(17.14 \text{ mm}) \qquad b = 62.3 \text{ mm}$$ ◀

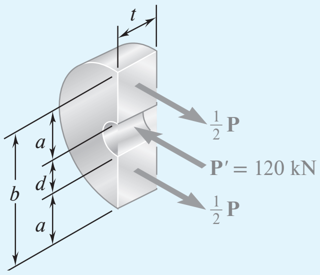


Figura 3 Sección extrema de la barra de sujeción.

***c*) Dimensión *h* de la barra.** Se considera una sección en la parte central de la barra (figura 4). Al recordar que el espesor de la placa de acero es $t = 20$ mm, se tiene que

$$\sigma = \frac{P}{th} \qquad 175 \text{ MPa} = \frac{120 \text{ kN}}{(0.020 \text{ m})h} \qquad h = 34.3 \text{ mm}$$

Se utiliza $h = 35$ mm ◀

REVISAR y PENSAR: Se obtuvo el tamaño de d con base en el cortante del perno, y después se revisó el apoyo sobre la barra de sujeción. Si se hubiese sobrepasado el límite máximo permitido para el apoyo, se hubiera tenido que recalcular d con base en el criterio de apoyo.

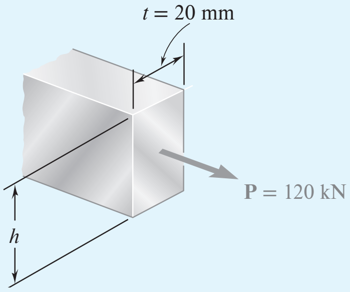


Figura 4 Sección en la porción media de la barra de sujeción.

Problemas

1.1 Dos barras cilíndricas sólidas *AB* y *BC* están soldadas en *B* y cargadas como se muestra. Si se sabe que $d_1 = 30$ mm y $d_2 = 50$ mm, determine el esfuerzo normal promedio en la sección central de *a*) la barra *AB*, *b*) la barra *BC*.

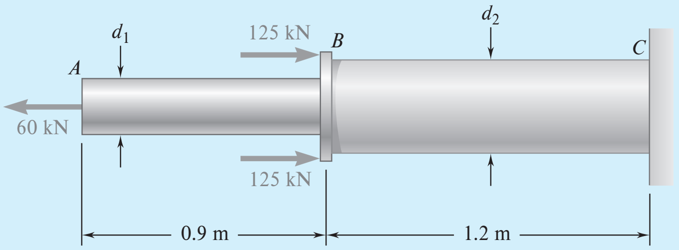


Figura P1.1 y P1.2

1.2 Dos barras cilíndricas sólidas *AB* y *BC* están soldadas en *B* y cargadas como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio no debe exceder 150 MPa en cada barra, determine los valores mínimos permisibles de los diámetros d_1 y d_2.

1.3 Dos barras cilíndricas sólidas *AB* y *BC* se encuentran soldadas en *B* y cargadas como se muestra. Si se sabe que $P = 10$ kips, determine el esfuerzo normal promedio en la sección media de *a*) la barra *AB*, *b*) la barra *BC*.

1.4 Dos barras cilíndricas sólidas *AB* y *BC* se encuentran soldadas en *B* y cargadas como se muestra. Determine la magnitud de la fuerza **P** para la que el esfuerzo de tensión en las barras *AB* y *BC* son iguales.

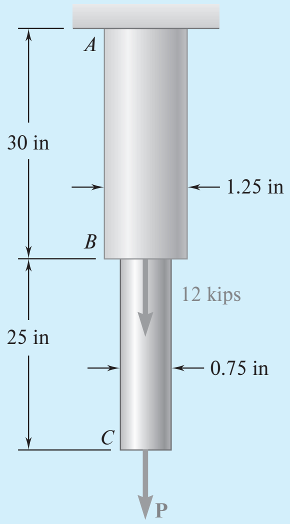


Figura P1.3 y P1.4

1.5 Una galga extensométrica localizada en *C* en la superficie del hueso *AB* indica que el esfuerzo normal promedio en el hueso es de 3.80 MPa cuando el

hueso se somete a dos fuerzas de 1 200 N como se muestra en la figura. Si se supone que la sección transversal del hueso en *C* es anular y se sabe que su diámetro exterior es de 25 mm, determine el diámetro interior de la sección transversal del hueso en *C*.

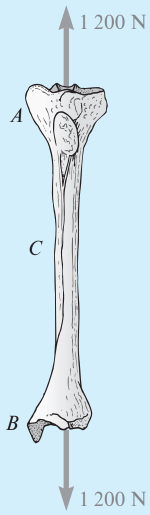


Figura *P1.5*

1.6 Dos barras de latón *AB* y *BC*, cada una con diámetro uniforme, se soldarán entre sí en *B* para formar una barra no uniforme con longitud total de 100 m que se suspenderá de un soporte en *A*, como se muestra en la figura. Si se sabe que la densidad del latón es de 8 470 kg/m^3, determine *a*) la longitud de la barra *AB* para la cual el esfuerzo normal máximo en *ABC* es mínimo, *b*) el valor correspondiente del esfuerzo normal máximo.

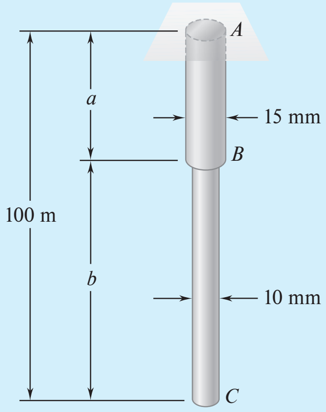


Figura *P1.6*

1.7 Cada uno de los cuatro eslabones verticales tiene una sección transversal rectangular uniforme de 8 × 36 mm y cada uno de los cuatro pasadores tiene un diámetro de 16 mm. Determine el valor máximo del esfuerzo normal promedio en los eslabones que conectan *a*) los puntos *B* y *D*, *b*) los puntos *C* y *E*.

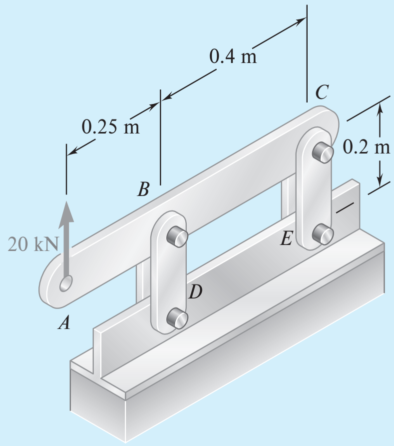


Figura P1.7

1.8 El eslabón *AC* tiene una sección transversal rectangular uniforme de $\frac{1}{8}$ in de espesor y 1 in de ancho. Determine el esfuerzo normal en la porción central de dicho eslabón.

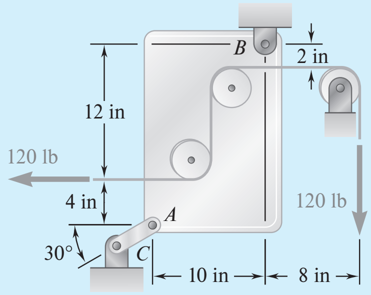


Figura P1.8

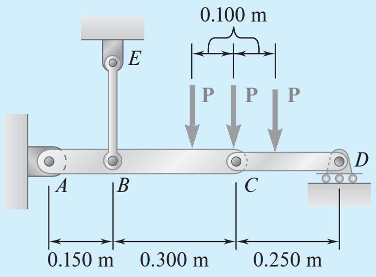


Figura P1.9

1.9 Se aplican tres fuerzas, cada una con magnitud $P = 4$ kN, sobre la estructura mostrada. Determine el área de la sección transversal de la porción uniforme de la barra *BE* si el esfuerzo normal en dicha porción es de +100 MPa.

1.10 El eslabón *BD* consiste en una barra sencilla de 1 in de ancho y $\frac{1}{2}$ in de grueso. Si se sabe que cada pasador tiene un diámetro de $\frac{3}{8}$ in determine el valor máximo del esfuerzo normal promedio en el eslabón *BD* si *a*) $\theta = 0$, *b*) $\theta = 90°$.

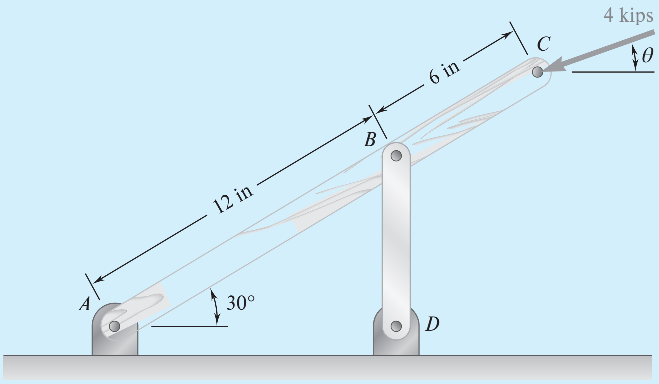


Figura P1.10

1.11 Para la armadura de puente tipo Pratt y la carga mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal promedio en el elemento *BE*, si se sabe que el área transversal del elemento es de 5.87 in^2.

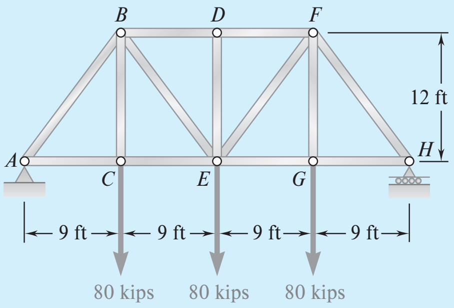


Figura *P1.11*

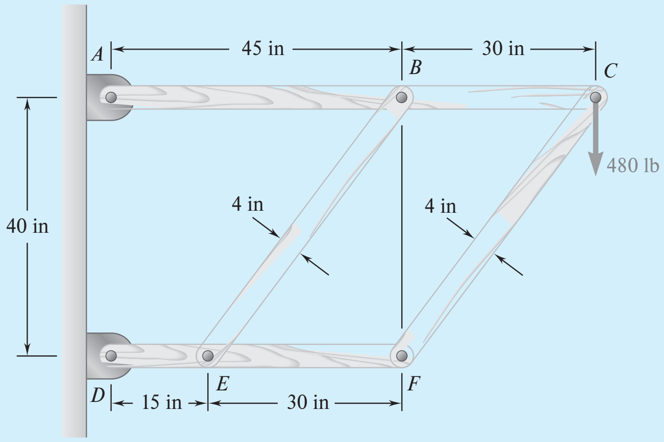


Figura *P1.12*

1.12 El bastidor mostrado en la figura consta de *cuatro* elementos de madera *ABC*, *DEF*, *BE* y *CF*. Si se sabe que cada elemento tiene una sección transversal rectangular de 2 × 4 in y que cada pasador tiene un diámetro de $\frac{1}{2}$ in, determine el valor máximo del esfuerzo normal promedio *a*) en el elemento *BE*, *b*) en el elemento *CF*.

1.13 La barra de un remolque para aviones se posiciona por medio de un cilindro hidráulico sencillo conectado mediante una varilla de acero de 25 mm de diámetro a las dos unidades idénticas de brazo y rueda *DEF*. La masa de toda

la barra del remolque es de 200 kg, y su centro de gravedad se localiza en *G*. Para la posición mostrada, determine el esfuerzo normal en la varilla.

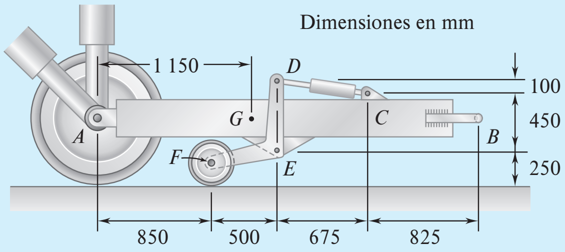


Figura P1.13

1.14 Se emplean dos cilindros hidráulicos para controlar la posición del brazo robótico *ABC*. Si se sabe que las varillas de control enganchadas en *A* y *D* tienen cada una un diámetro de 20 mm y que son paralelas en la posición mostrada, determine el esfuerzo normal promedio en *a*) el elemento *AE*, *b*) el elemento *DG*.

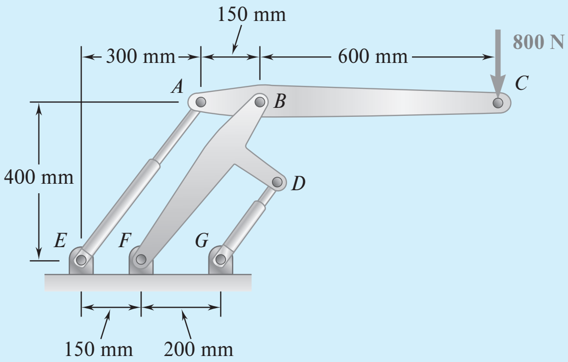


Figura P1.14

1.15 Determine el diámetro del agujero circular más grande que puede ser punzonado en una hoja de poliestireno de 6 mm de espesor, si se sabe que la fuerza ejercida por el punzón es de 45 kN y que se requiere un esfuerzo cortante promedio de 55 MPa para causar la falla del material.

1.16 Dos planchas de madera, cada una de $\frac{1}{2}$ in de grosor y 9 in de ancho, están unidas por el ensamble pegado de mortaja que se muestra en la figura. Si se sabe que la junta fallará cuando el esfuerzo cortante promedio en el pegamento alcance los 1.20 ksi, determine la magnitud *P* de la carga axial que ocasionará que la junta falle.

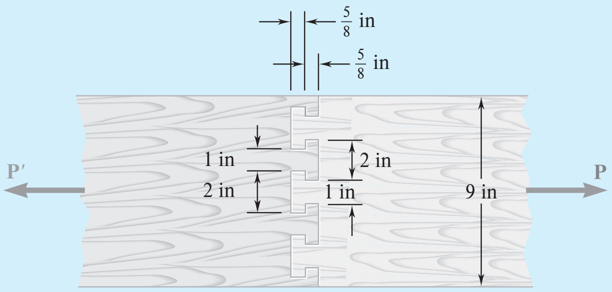


Figura P1.16

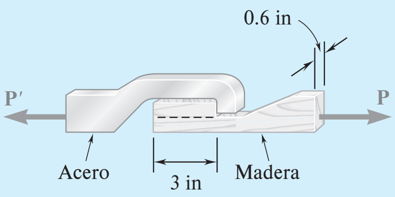


Figura P1.17

1.17 Cuando la fuerza **P** alcanzó 1 600 lb, el elemento de madera mostrado falló a cortante a lo largo de la superficie indicada por la línea punteada. Determine el esfuerzo cortante promedio a lo largo de esa superficie en el momento de la falla.

1.18 Una carga **P** se aplica a una varilla de acero soportada por una placa de aluminio en la que se ha perforado un barreno de 12 mm de diámetro, como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante no debe exceder 180 MPa en la varilla de acero y 70 MPa en la placa de aluminio, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse a la varilla.

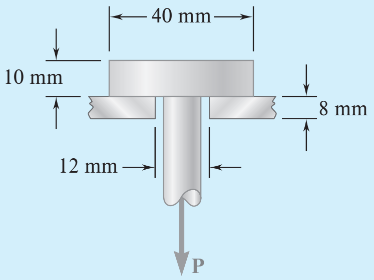


Figura P1.18

1.19 La fuerza axial en la columna que soporta la viga de madera que se muestra en la figura es $P = 20$ kips. Determine la longitud mínima permisible L de la zapata de carga si el esfuerzo de apoyo en la madera no debe ser mayor a 400 psi.

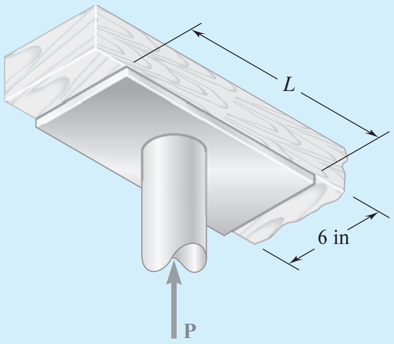


Figura *P1.19*

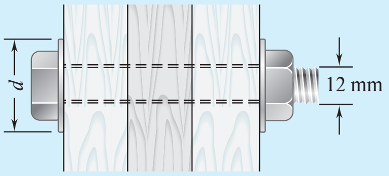


Figura P1.20

1.20 Tres tablas de madera se aseguran con una serie de pernos para formar una columna. El diámetro de cada perno es de 12 mm y el diámetro interior de cada arandela es de 16 mm, que es ligeramente más grande que el diámetro de los barrenos en las tablas. Determine el diámetro exterior d mínimo permisible en las arandelas, sabiendo que el esfuerzo normal promedio en los pernos es de 36 MPa y que el esfuerzo de apoyo entre las arandelas y las tablas no debe exceder 8.5 MPa.

1.21 Una carga axial de 40 kN se aplica sobre un poste corto de madera, el cual está sostenido por un basamento de concreto que descansa sobre suelo regular. Determine *a*) el esfuerzo de apoyo máximo sobre la base de concreto, *b*) el tamaño de la base para la cual el esfuerzo de apoyo promedio en el suelo es de 145 kPa.

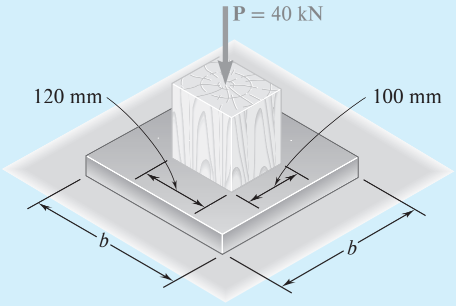


Figura P1.21

1.22 Una carga axial **P** es soportada por una columna corta W8 × 40 con un área de sección transversal $A = 11.7$ in^2 y se distribuye hacia un cimiento de concreto mediante una placa cuadrada como se observa en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio en la columna no debe exceder 30 ksi y que el esfuerzo de apoyo sobre la base de concreto no debe exceder 3.0 ksi, determine el lado a de la placa que proporcionará el diseño más económico y seguro.

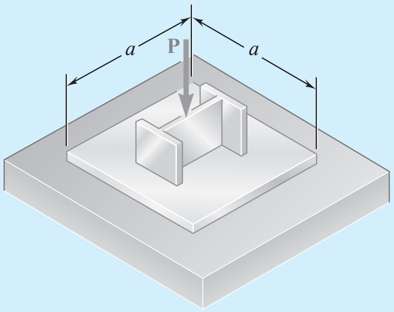


Figura *P1.22*

1.23 El eslabón AB, cuyo ancho es $b = 2$ in y su grosor $t = \frac{1}{4}$ in, se emplea para soportar el extremo de una viga horizontal. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio en el eslabón es de –20 ksi y que el esfuerzo cortante promedio en cada uno de los dos pasadores es de 12 ksi, determine *a*) el diámetro d de los pasadores, *b*) el esfuerzo promedio de apoyo en el eslabón.

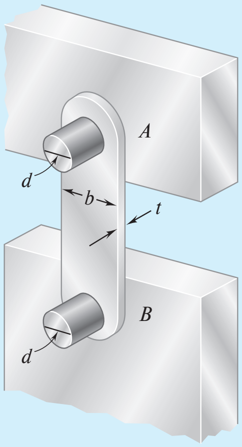


Figura P1.23

1.24 Determine la carga máxima **P** que puede aplicarse en A cuando $\theta = 60°$, si se sabe que el esfuerzo cortante promedio en el pasador de 10 mm de diámetro en B no debe exceder 120 MPa y que el esfuerzo de apoyo promedio en el elemento AB y en el soporte en B no deben exceder 90 MPa.

1.25 Si se sabe que $\theta = 40°$ y que $P = 9$ kN, determine *a*) el mínimo diámetro permisible del pasador en B si el esfuerzo cortante promedio en el pasador no debe exceder 120 MPa, *b*) el esfuerzo de apoyo promedio correspondiente en el elemento AB en el punto B, *c*) el esfuerzo de apoyo promedio correspondiente en cada ménsula de apoyo en B.

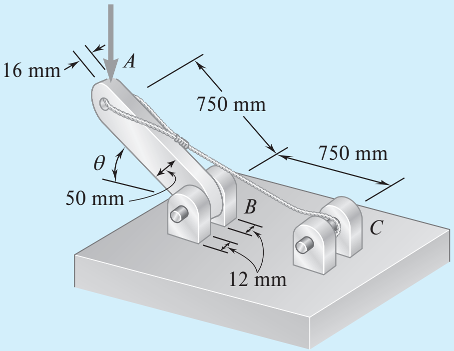


Figura P1.24 y P1.25

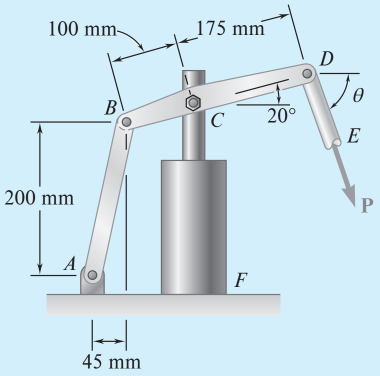


Figura *P1.26*

1.26 El cilindro hidráulico CF, que controla de manera parcial la posición de la varilla DE, se ha fijado en la posición mostrada. El elemento BD tiene 15 mm de espesor y está conectado en C al vástago vertical mediante un perno de 9 mm de diámetro. Si se sabe que $P = 2$ kN y que $\theta = 75°$, determine *a*) el

esfuerzo cortante promedio en el perno, *b*) el esfuerzo de apoyo en *C* en el elemento *BD*.

1.27 Para el ensamble y la carga del problema 1.7, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en el pasador en *B*, *b*) el esfuerzo de apoyo promedio en *B* en el elemento *BD*, *c*) el esfuerzo de apoyo promedio en *B* en el elemento *ABC*, si se sabe que este elemento tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10 × 50 mm.

1.28 Dos sistemas idénticos de eslabón y cilindro hidráulico controlan la posición de las horquillas de un montacargas. La carga soportada para el sistema que se muestra en la figura es de 1 500 lb. Si se sabe que el grosor del elemento *BD* es $\frac{5}{8}$ in, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en el pasador de $\frac{1}{2}$ in de diámetro en *B*, *b*) el esfuerzo de apoyo en *B* en el elemento *BD*.

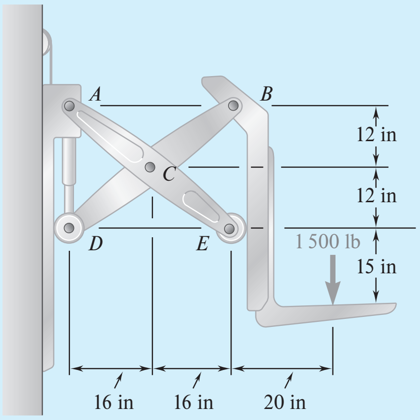


Figura P1.28

1.3 ESFUERZOS EN UN PLANO OBLICUO BAJO CARGA AXIAL

En las secciones precedentes se encontró que las fuerzas axiales ejercidas en un elemento de dos fuerzas (figura 1.26*a*) causan esfuerzos normales en ese elemento (figura 1.26*b*), mientras que también se encontró que las fuerzas transversales ejercidas sobre pernos y pasadores (figura 1.27*a*) causan esfuerzos cortantes en esas conexiones (figura 1.27*b*). La razón de que la relación observada entre las fuerzas axiales y los esfuerzos normales, por una parte, y las fuerzas transversales y los esfuerzos cortantes, por la otra, fue que los esfuerzos se determinaron únicamente en los planos perpendiculares al eje del elemento o conexión. Como se verá en esta sección, las fuerzas axiales causan esfuerzos tanto normales como cortantes en planos que no son perpendiculares al eje del elemento. De manera similar, las fuerzas transversales ejercidas sobre un perno o pasador producen esfuerzos tanto normales como cortantes en planos que no son perpendiculares al eje del perno o pasador.

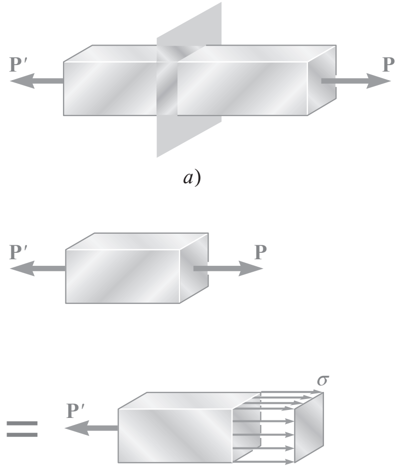


Figura 1.26 Fuerzas axiales sobre un elemento de dos fuerzas. *a*) Sección plana perpendicular al elemento alejado de la aplicación de la carga. *b*) Modelos de diagramas de fuerza equivalente para la fuerza resultante que actúa en el centroide y el esfuerzo normal uniforme.

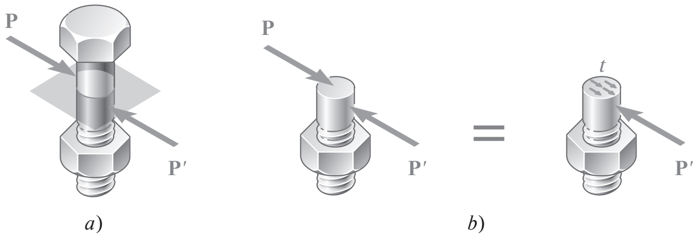


Figura 1.27 *a*) Diagrama de un perno en una junta a cortante simple con un plano de sección normal al perno. *b*) Modelos de diagrama de fuerzas equivalentes de la fuerza resultante que actúa en el centroide de la sección y el esfuerzo cortante uniforme promedio.

Considere el elemento de dos fuerzas de la figura 1.26, que se encuentra sometido a fuerzas axiales **P** y **P**′. Si se realiza un corte en dicho elemento, que forme un ángulo θ con un plano normal (figura 1.28*a*) y se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción del elemento localizada a la izquierda de ese corte (figura 1.28*b*), se encuentra a partir de las condiciones de equilibrio del cuerpo libre que las fuerzas distribuidas que actúan en la sección deben ser equivalentes a la fuerza **P**.

Al separar **P** en sus componentes **F** y **V**, que son, respectivamente, normal y tangencial al corte (figura 1.28*c*),

$$F = P\cos\theta \qquad V = P\,\text{sen}\,\theta \tag{1.12}$$

La fuerza **F** representa la resultante de las fuerzas normales distribuidas a través de la sección, y la fuerza **V** la resultante de las fuerzas cortantes (figura 1.28*d*). Los valores promedio de los esfuerzos normales y cortantes correspondientes se obtienen dividiendo, respectivamente, F y V entre el área A_θ de la sección:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \qquad \tau = \frac{V}{A_\theta} \tag{1.13}$$

Al sustituir los valores de F y V de la ecuación (1.12) en la ecuación (1.13), y al observar de la figura 1.28*c* que $A_0 = A_\theta \cos\theta$, o que $A_\theta = A_0/\cos\theta$, donde A_0 denota el área de una sección perpendicular al eje del elemento, de lo que se obtiene

$$\sigma = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} \qquad \tau = \frac{P\,\text{sen}\,\theta}{A_0/\cos\theta}$$

o

$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \tau = \frac{P}{A_0}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \tag{1.14}$$

Observe en la primera de las ecuaciones (1.14) que el valor del esfuerzo normal σ es máximo cuando $\theta = 0$ (es decir, cuando el plano de la sección es perpendicular al eje del elemento), y que se aproxima a cero cuando θ tiende a 90°. Se verifica que el valor de σ cuando $\theta = 0$ es

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \tag{1.15}$$

La segunda de las ecuaciones (1.14) muestra que el esfuerzo cortante τ es cero para $\theta = 0$ y $\theta = 90°$ y que para $\theta = 45°$ alcanza su valor máximo

$$\tau_m = \frac{P}{A_0}\,\text{sen}\,45°\cos 45° = \frac{P}{2A_0} \tag{1.16}$$

La primera de las ecuaciones (1.14) indica que, cuando $\theta = 45°$, el esfuerzo normal σ' también es igual a $P/2A_0$:

$$\sigma' = \frac{P}{A_0}\cos^2 45° = \frac{P}{2A_0} \tag{1.17}$$

Los resultados obtenidos en las ecuaciones (1.15), (1.16) y (1.17) se muestran gráficamente en la figura 1.29. Se observa que la misma carga produce un esfuerzo normal $\sigma_m = P/A_0$ y ningún esfuerzo cortante (figura 1.29*b*), o un esfuerzo normal y un esfuerzo cortante de la misma magnitud $\sigma' = \tau_m = P/2A_0$ (figura 1.29*c* y *d*), dependiendo de la orientación del corte.

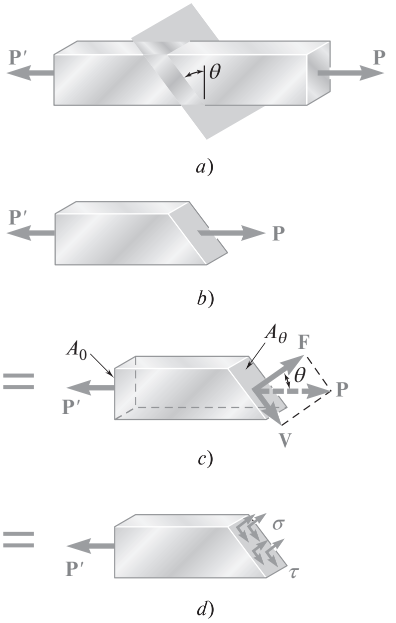


Figura 1.28 Sección oblicua a través de un elemento de dos fuerzas. *a*) Corte plano realizado a un ángulo θ con el plano normal del elemento, *b*) Diagrama de cuerpo libre de la sección izquierda con fuerza resultante interna **P**. *c*) Diagrama de cuerpo libre de la fuerza resultante separada en los componentes **F** y **V** a lo largo de las direcciones de la sección normal y tangencial al plano, respectivamente. *d*) Diagrama de cuerpo libre con las fuerzas de sección **F** y **V** representadas como esfuerzo normal, σ, y esfuerzo cortante, τ.

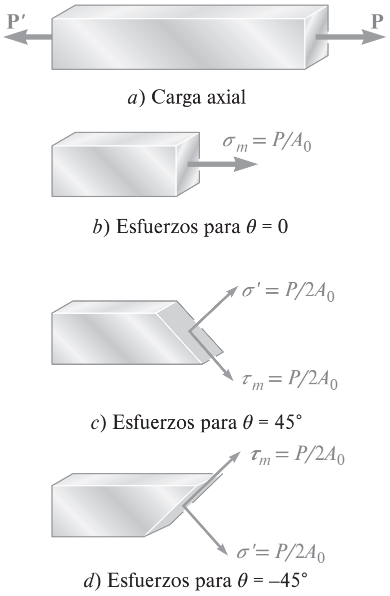


Figura 1.29 Resultados de esfuerzos seleccionados para una carga axial.

1.4 ESFUERZOS BAJO CONDICIONES GENERALES DE CARGA. COMPONENTES DEL ESFUERZO

Los ejemplos de las secciones previas estuvieron restringidos a elementos bajo carga axial y a conexiones bajo carga transversal. La mayoría de los elementos estructurales y de los componentes de maquinaria se encuentran bajo condiciones de carga más complicadas.

Considere un cuerpo sujeto a varias cargas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, etc. (figura 1.30). Para comprender la condición de esfuerzos creada por estas cargas en algún punto Q dentro del

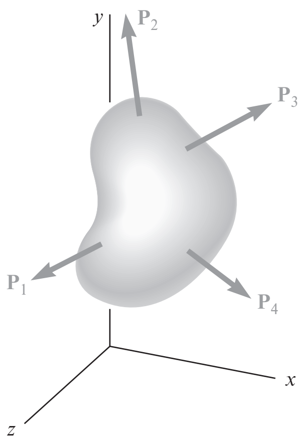


Figura 1.30 Cargas múltiples sobre un cuerpo general.

cuerpo, primero se efectuará un corte a través de Q, utilizando un plano paralelo al plano yz. La porción del cuerpo a la izquierda de la sección está sujeta a algunas de las cargas originales, y a las fuerzas normales y de corte distribuidas a través de la sección. Denotaremos con $\Delta \mathbf{F}^x$ y $\Delta \mathbf{V}^x$, respectivamente, las fuerzas normales y cortantes que actúan sobre una pequeña área que rodea al punto Q (figura 1.31*a*). Note que el superíndice x se emplea para indicar que las fuerzas $\Delta \mathbf{F}^x$ y $\Delta \mathbf{V}^x$ actúan sobre una superficie perpendicular al eje x. En tanto que la fuerza normal $\Delta \mathbf{F}^x$ tiene una dirección bien definida, la fuerza cortante $\Delta \mathbf{V}^x$ puede tener cualquier dirección en el plano de la sección. Por lo tanto, se descompone $\Delta \mathbf{V}^x$ en dos fuerzas componentes, $\Delta \mathbf{V}_y^x$ y $\Delta \mathbf{V}_z^x$ en direcciones paralelas a los ejes y y z, respectivamente (figura 1.31*b*). Al dividir ahora la magnitud de cada fuerza entre el área ΔA y al hacer que ΔA se aproxime a cero, se definen las tres componentes del esfuerzo mostradas en la figura 1.32:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$
$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A} \tag{1.18}$$

Observe que el primer subíndice en σ_x, τ_{xy} y τ_{xz} se emplea para indicar que los esfuerzos bajo consideración se ejercen *sobre una superficie perpendicular al eje x*. El segundo subíndice en τ_{xy} y en τ_{xz} identifica *la dirección de la componente.* El esfuerzo normal σ_x es positivo si la flecha correspondiente apunta en la dirección x positiva (es decir, si el cuerpo está en tensión), y negativa de otra manera. En forma similar, las componentes del esfuerzo cortante τ_{xy} y τ_{xz} son positivas si las flechas correspondientes apuntan, respectivamente, en las direcciones y y z positivas.

El análisis anterior puede también llevarse a cabo considerando la porción del cuerpo localizada a la derecha del plano vertical que pasa a través de Q (figura 1.33). Las mismas magnitudes, pero con direcciones opuestas, se obtienen para las fuerzas normal y cortante $\Delta \mathbf{F}^x$, $\Delta \mathbf{V}_y^x$ y $\Delta \mathbf{V}_z^x$. Por lo tanto, los mismos valores se obtienen para las componentes correspondientes de los esfuerzos, pero ya que la sección en la figura 1.33 apunta ahora al *eje x negativo*, un signo positivo para σ_x indicará que la flecha correspondiente apunta ahora *en la dirección x negativa*. De manera similar, los signos positivos en τ_{xy} y τ_{xz} indicarán que las flechas correspondientes apuntan, respectivamente, en las direcciones y y z negativas, como se muestra en la figura 1.33.

Al hacer un corte a través de Q paralelo al plano zx, se definen de la misma manera las componentes de esfuerzo σ_y, τ_{yz} y τ_{yx}. Después, un corte a través de Q paralelo al plano xy da las componentes σ_z, τ_{zx} y τ_{zy}.

Para visualizar la condición de esfuerzos en el punto Q, considere un pequeño cubo de lado a centrado en Q y que los esfuerzos se ejercen en cada una de las seis caras del

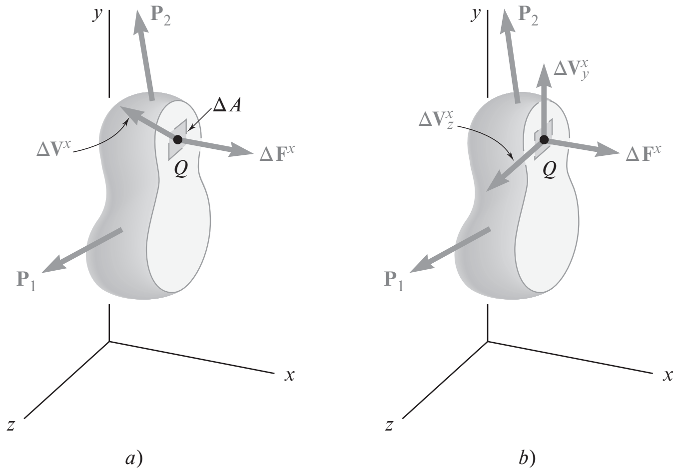


Figura 1.31 *a*) Fuerzas cortante y normal resultantes, $\Delta \mathbf{V}^x$ y $\Delta \mathbf{F}^x$, que actúan sobre la pequeña área ΔA en el punto Q. *b*) Fuerzas sobre ΔA descompuestas en las direcciones coordenadas.

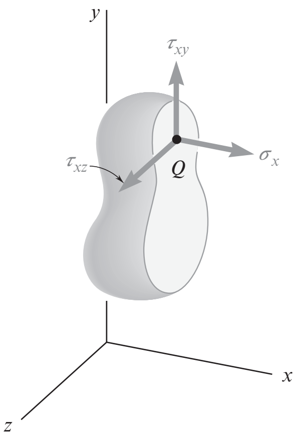


Figura 1.32 Componentes del esfuerzo en el punto Q del cuerpo a la izquierda del plano.

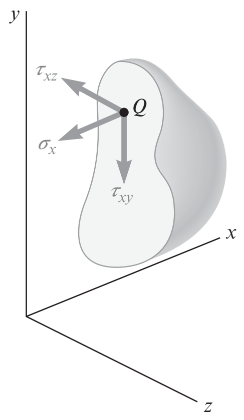


Figura 1.33 Componentes del esfuerzo en el punto Q del cuerpo a la derecha del plano.

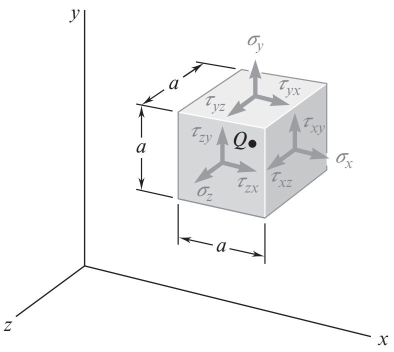


Figura 1.34 Componentes positivas del esfuerzo en el punto Q.

cubo (figura 1.34). Las componentes de los esfuerzos mostradas en la figura son σ_x, σ_y y σ_z, que representan los esfuerzos normales en las caras perpendiculares respectivamente a los ejes x, y y z, y las seis componentes de los esfuerzos cortantes τ_{xy}, τ_{xz}, etc. Es preciso recordar que τ_{xy} representa la componente y del esfuerzo cortante que es ejercida en la cara perpendicular al eje x, mientras que τ_{yx} representa la componente x del esfuerzo cortante que se ejerce sobre la cara perpendicular al eje y. Advierta que solo tres caras del cubo son visibles en la figura 1.34, y que en las caras opuestas actúan componentes de esfuerzos iguales y opuestas. En tanto que los esfuerzos que actúan sobre las caras del cubo difieren ligeramente de los esfuerzos en Q, el error involucrado es pequeño y desaparece cuando el lado a del cubo se aproxima a cero.

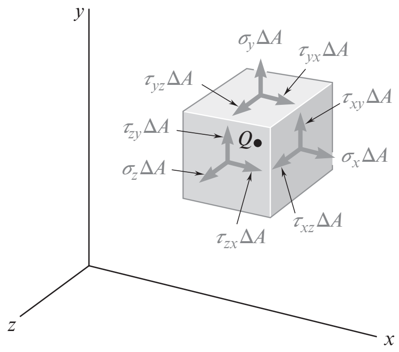


Figura 1.35 Fuerzas resultantes positivas sobre un elemento pequeño en el punto Q que resultan de un estado de esfuerzo general.

Componentes del esfuerzo cortante. Considere el diagrama de cuerpo libre del pequeño cubo centrado en el punto Q (figura 1.35). Las fuerzas normales y cortantes que actúan sobre las diversas caras del cubo se obtienen multiplicando las componentes correspondientes del esfuerzo por el área ΔA de cada cara. Primero se escribirán las tres ecuaciones de equilibrio siguientes:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{1.19}$$

Como hay fuerzas iguales y opuestas a las fuerzas mostradas en la figura 1.35 actuando sobre las caras ocultas del cubo, se satisfacen las ecuaciones (1.19). Considerando, ahora, los momentos de las fuerzas alrededor de los ejes x', y' y z' dibujados desde Q en direcciones paralelas respectivamente a los ejes x, y y z, se anotarán tres ecuaciones adicionales

$$\Sigma M_{x'} = 0 \qquad \Sigma M_{y'} = 0 \qquad \Sigma M_{z'} = 0 \tag{1.20}$$

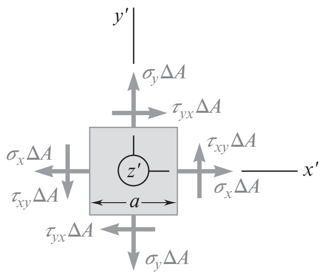


Figura 1.36 Diagrama de cuerpo libre de un elemento pequeño en Q visto en un plano proyectado perpendicular al eje z′. Las fuerzas resultantes sobre las caras z′ positivas y negativas (no mostradas) actúan a través del eje z′, por lo tanto no contribuyen al momento alrededor de ese eje.

Utilizando una proyección sobre el plano $x'y'$ (figura 1.36), se advierte que las únicas fuerzas con momentos alrededor del eje z distintas de cero son las fuerzas cortantes. Estas fuerzas forman dos pares, uno de ellos es un momento $(\tau_{xy}\,\Delta A)a$, en la dirección antihoraria (positiva), y el otro es un momento $-(\tau_{yx}\,\Delta A)a$, en dirección horaria (negativa). La última de las tres ecuaciones (1.20) da, por lo tanto,

$$+\circlearrowleft \Sigma M_z = 0: \qquad (\tau_{xy}\,\Delta A)a - (\tau_{yx}\,\Delta A)a = 0$$

de donde se concluye que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.21}$$

La relación muestra que la componente y del esfuerzo cortante ejercida sobre una cara perpendicular al eje x es igual a la componente x del esfuerzo cortante ejercido sobre una cara perpendicular al eje y. De las dos ecuaciones (1.20) restantes se deduce

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.22}$$

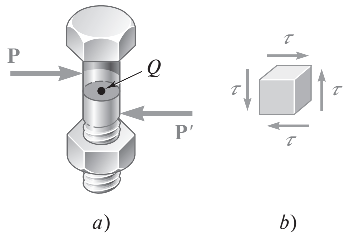


Figura 1.37 *a*) Perno en cortante simple con un punto *Q* seleccionado en el centro. *b*) Elemento con esfuerzo cortante puro en el punto *Q*.

Se concluye, a partir de las ecuaciones (1.21) y (1.22), que solo se requieren seis componentes de esfuerzo para definir la condición de esfuerzo en un punto dado *Q*, en lugar de nueve como se supuso al principio. Estas componentes son σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}. También se observa que, en un punto dado, *el cortante no puede ocurrir en un plano únicamente*; un esfuerzo cortante igual debe ser ejercido en otro plano perpendicular al primero. Por ejemplo, considerando de nuevo el pasador de la figura 1.29 y un pequeño cubo en el centro *Q* (figura 1.37*a*), se encuentra que deben ejercerse esfuerzos cortantes de igual magnitud en las dos caras horizontales del cubo y en las dos caras perpendiculares a las fuerzas **P** y **P**′ (figura 1.37*b*).

Carga axial. Considere de nuevo el caso de un elemento bajo carga axial. Si se estudia un pequeño cubo con caras paralelas a las caras del elemento y se recuerdan los resultados de la sección 1.3, las condiciones de esfuerzo en el elemento pueden describirse como se muestra en la figura 1.38*a*. Los únicos esfuerzos son los esfuerzos normales σ_x ejercidos sobre las caras del cubo que son perpendiculares al eje *x*. No obstante, si se gira el pequeño cubo 45° alrededor del eje *z* de tal manera que su nueva orientación sea igual a la orientación de las secciones consideradas en la figura 1.29*c* y *d*, se concluye que se ejercen esfuerzos normales y cortantes de igual magnitud sobre cuatro caras del cubo (figura 1.38*b*). Se observará, de esta manera, que la misma condición de carga puede conducir a distintas interpretaciones de la situación de esfuerzos en un punto dado, dependiendo de la orientación del elemento considerado. Este aspecto se explicará en el capítulo 7: Transformación del esfuerzo y la deformación.

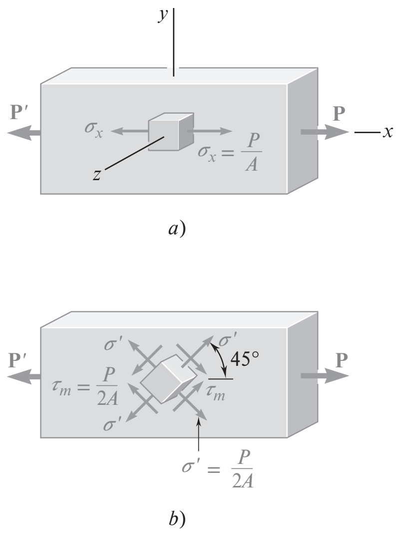


Figura 1.38 El cambio en la orientación del elemento de esfuerzo produce diferentes componentes para el mismo estado de esfuerzo. Esto se estudia a detalle en el capítulo 7.

1.5 CONSIDERACIONES DE DISEÑO

En las aplicaciones de ingeniería, la determinación de esfuerzos rara vez es un fin en sí misma. Al contrario, el conocimiento de los esfuerzos lo emplean los ingenieros como un apoyo a su tarea más importante: el diseño de estructuras y máquinas que puedan desempeñar una tarea específica en forma segura y económica.

1.5A Determinación de la resistencia última de un material

Un elemento importante que debe considerar un diseñador es cómo se comportará el material cuando esté sometido a una carga. Esto se determina realizando ensayos específicos sobre muestras preparadas del material. Por ejemplo, una probeta de acero puede prepararse y colocarse en una máquina de ensayo de laboratorio para someterla a una fuerza axial céntrica de tensión conocida, como se describe en la sección 2.1B. Al aumentar la magnitud de la fuerza, se miden varios cambios dimensionales en la probeta, por ejemplo, cambios en su longitud y diámetro. Finalmente se alcanzará la máxima fuerza que puede aplicarse a la probeta, la cual se romperá o comenzará a soportar menos carga. Esta máxima fuerza se llama la *carga última* del material y se denota como P_U. Debido a que la carga aplicada es céntrica, puede dividirse la carga última entre el área transversal original de la varilla para obtener el *esfuerzo último normal* del material usado. Este esfuerzo, también conocido como la *resistencia última a la tensión* del material, es

$$\sigma_U = \frac{P_U}{A} \tag{1.23}$$

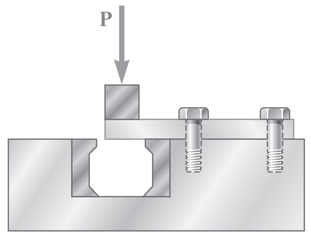


Figura 1.39 Ensayo a cortante simple.

Se encuentran disponibles varios procedimientos de ensayo para determinar el *esfuerzo cortante último* o *resistencia última al corte.* El más común consiste en el torcimiento de un tubo circular (sección 3.2). Uno más directo, aunque menos exacto, consiste en sujetar una barra rectangular o redonda en una herramienta de corte (figura 1.39) y aplicarle una carga *P* que va siempre en aumento hasta obtener la carga última P_U para corte simple. Si el extremo libre de la probeta descansa sobre ambos dados

endurecidos (figura 1.40), se obtiene la carga última para cortante doble. En cualquier caso, el esfuerzo cortante último τ_U es

$$\tau_U = \frac{P_U}{A} \tag{1.24}$$

En el caso del cortante simple, esta área es el área de la sección transversal A de la probeta, mientras que en cortante doble es dos veces el área de la sección transversal.

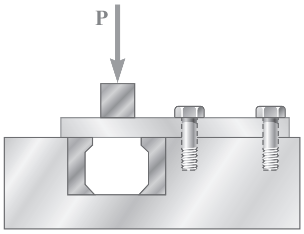


Figura 1.40 Ensayo a cortante doble.

1.5B Carga permisible y esfuerzo permisible: factor de seguridad

La máxima carga que puede soportar un elemento estructural o un componente de maquinaria en condiciones normales de uso es considerablemente más pequeña que la carga última. Esta carga más pequeña se conoce como la *carga permisible* (en ocasiones se denomina *carga de trabajo* o *de diseño*). Así, solo una fracción de la capacidad última de carga del elemento se utiliza cuando se aplica la carga permisible. El remanente de la capacidad portadora de carga del elemento se mantiene en reserva para asegurar su desempeño seguro. La razón de la carga última a la carga permisible se emplea para definir el *factor de seguridad*.[†]

$$\text{Factor de seguridad} = F.S. = \frac{\text{carga última}}{\text{carga permisible}} \tag{1.25}$$

Una definición alterna del factor de seguridad se basa en el uso de esfuerzos:

$$\text{Factor de seguridad} = F.S. = \frac{\text{esfuerzo último}}{\text{esfuerzo permisible}} \tag{1.26}$$

Estas dos expresiones son idénticas cuando existe una relación lineal entre la carga y el esfuerzo. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería esta relación deja de ser lineal al acercarse la carga a su valor último, y el factor de seguridad obtenido de la ecuación (1.26) no proporciona una evaluación válida de la seguridad de un diseño dado. Sin embargo, el *método de diseño por esfuerzo permisible*, basado en el uso de la ecuación (1.26), se utiliza ampliamente.

1.5C Selección del factor de seguridad

La selección del factor de seguridad que debe usarse es una de las tareas más importantes de los ingenieros. Si el factor de seguridad se elige demasiado pequeño, la posibilidad de falla se torna inaceptablemente grande. Por otra parte, si un factor de seguridad es demasiado grande, el resultado es un diseño caro o no funcional. La elección de un factor de seguridad apropiado para una determinada aplicación de diseño requiere de un acertado juicio por parte del ingeniero basado en muchas consideraciones:

1. *Variaciones que pueden ocurrir en las propiedades del elemento.* La composición, resistencia y dimensiones del elemento están sujetas a pequeñas variaciones durante la manufactura. Además, las propiedades del material pueden alterarse y, con ello, introducir esfuerzos residuales debido al calentamiento o deformación que puedan ocurrir durante la manufactura, el almacenamiento, el transporte o la construcción.
2. *Número de cargas que puedan esperarse durante la vida de la estructura o máquina.* Para la mayoría de los materiales el esfuerzo último disminuye al aumentar el número de aplicaciones de carga. Este fenómeno se conoce como *fatiga* y, si se ignora, puede provocar una falla repentina (sección 2.1F).

[†] En algunos campos de la ingeniería, sobre todo en el de la ingeniería aeronáutica, se emplea el *margen de seguridad* en lugar del factor de seguridad. El margen de seguridad se define como el factor de seguridad menos uno; esto es, margen de seguridad = $F.S. - 1.00$.

3. *Tipo de cargas que se han planeado para el diseño, o que puedan ocurrir en el futuro*. Muy pocas situaciones de carga se conocen con certeza: la mayoría de las cargas de diseño son estimaciones de ingeniería. Además, las alteraciones futuras o cambios en el uso pueden introducir cambios en la carga real. Para cargas dinámicas, cíclicas o de impulso, se requieren mayores factores de seguridad.
4. *Tipo de falla.* Los materiales frágiles comúnmente fallan de manera repentina, sin indicación previa de que el colapso es inminente. Por otra parte, los materiales dúctiles, como el acero estructural, con frecuencia sufren una sustancial deformación, llamada *cedencia,* antes de fallar, la cual es una advertencia de que existe la sobrecarga. Sin embargo, la mayoría de las fallas de estabilidad o por pandeo son repentinas, sea frágil el material o no. Cuando existe la posibilidad de falla repentina, debe emplearse un mayor factor de seguridad que cuando la falla es precedida por señales obvias de advertencia.
5. *Incertidumbre debida a los métodos de análisis*. Todos los métodos de diseño se basan en ciertas suposiciones simplificadoras que se traducen en que los esfuerzos calculados sean solo aproximaciones de los esfuerzos reales.
6. *Deterioro que pueda ocurrir en el futuro por mantenimiento incorrecto o por causas naturales inevitables*. Un factor de seguridad mayor es necesario en ubicaciones donde las condiciones como la corrosión y el decaimiento son difíciles de controlar o hasta de descubrir.
7. *Importancia de un elemento dado a la integridad de la estructura completa*. Los refuerzos y los elementos secundarios pueden diseñarse en muchos casos, con un factor de seguridad menor que el empleado para los elementos principales.

Además de lo anterior, hay la consideración adicional relativa al riesgo para la vida y para la propiedad que una falla produciría. Cuando una falla no implica un riesgo para la vida, sino solo un riesgo mínimo para la propiedad, puede considerarse el uso de un factor de seguridad menor. Por último, a menos que se utilice un diseño cuidadoso con un factor de seguridad no excesivo, una estructura o máquina puede no desempeñar la función para la que fue diseñada. Por ejemplo, algunos altos factores de seguridad en aviación pueden tener un efecto inaceptable sobre el peso de una aeronave.

Para la mayor parte de las aplicaciones estructurales y de maquinaria, los factores de seguridad se establecen en las especificaciones de diseño o en los códigos de construcción elaborados por comités de experimentados ingenieros que trabajan con sociedades profesionales, con la industria o con agencias federales, estatales o municipales. Ejemplos de tales especificaciones de diseño y de códigos de construcción en Estados Unidos son:

1. *Acero:* American Institute of Steel Construction, Specification for Structural Steel Buildings.
2. *Concreto:* American Concrete Institute, Building Code Requirement for Structural Concrete.
3. *Madera:* American Forest and Paper Association, National Design Specification for Wood Construction.
4. *Puentes para carreteras:* American Association of State Highway Officials, Standard Specifications for Highway Bridges.

1.5D Diseño por carga y factor de resistencia

El método de esfuerzo permisible requiere que todas las incertidumbres asociadas con el diseño de una estructura o elemento de máquina se agrupen en un solo factor de seguridad. Un método alterno de diseño hace posible distinguir entre las incertidumbres asociadas con la estructura misma y aquellas asociadas con la carga para cuyo soporte está diseñada. Este método, denominado *diseño por carga y factor de resistencia* (*DCFR*), también permite al diseñador distinguir entre las incertidumbres asociadas con la *carga viva,* P_V, esto es, con la carga que será soportada por la estructura, y con la *carga muerta,* P_M, que es el peso de la porción de la estructura que contribuye a la carga total.

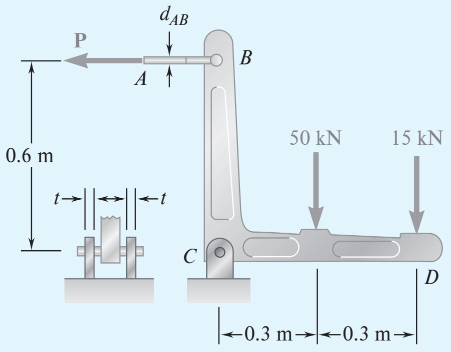
Cuando se emplea este método de diseño, la *carga última*, P_U, de la estructura (esto es, la carga a la que la estructura deja de ser útil), deberá determinarse primero. El diseño propuesto es aceptable si se satisface la siguiente desigualdad:

$$\gamma_D P_D + \gamma_L P_L \leq \phi P_U \tag{1.27}$$

El coeficiente ϕ se denomina *factor de resistencia*; tiene en cuenta las incertidumbres asociadas con la estructura misma y normalmente será menor que 1. Los coeficientes γ_M y γ_V se conocen como los *factores de carga*; tienen en cuenta las incertidumbres asociadas con las cargas viva y muerta, y serán normalmente mayores que 1, al ser γ_V generalmente mayor que γ_M. A pesar de que algunos ejemplos y problemas asignados que utilizan DCFR se han incluido en este capítulo y en los capítulos 5 y 10, el método de diseño de esfuerzo permisible será el empleado en este libro.

Problema modelo 1.3

Se aplican dos fuerzas al soporte *BCD* como se muestra en la figura. *a*) Si se sabe que la varilla de control *AB* será de acero con un esfuerzo normal último de 600 MPa, determine el diámetro de la varilla utilizando un factor de seguridad con respecto a la falla de 3.3. *b*) El pasador en *C* será de un acero con un esfuerzo último al corte de 350 MPa. Encuentre el diámetro del pasador *C* tomando en cuenta que el factor de seguridad con respecto al corte también será de 3.3. *c*) Halle el espesor requerido de los soportes en *C* si se sabe que el esfuerzo de apoyo permisible del acero utilizado es de 300 MPa.



ESTRATEGIA: Considere el cuerpo libre del soporte para determinar la fuerza **P** y la reacción en *C*. Las fuerzas resultantes se usan entonces con los esfuerzos permisibles, determinados a partir del factor de seguridad, para obtener las dimensiones requeridas.

MODELAR: Dibuje el diagrama de cuerpo libre del soporte (figura 1) y el pasador en *C* (figura 2).

ANALIZAR:

Cuerpo libre: soporte entero. Con base en la figura 1, la reacción en *C* está representada por sus componentes $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad P(0.6 \text{ m}) - (50 \text{ kN})(0.3 \text{ m}) - (15 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) = 0 \quad P = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0: \quad C_x = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad C_y = 65 \text{ kN} \qquad C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76.3 \text{ kN}$$

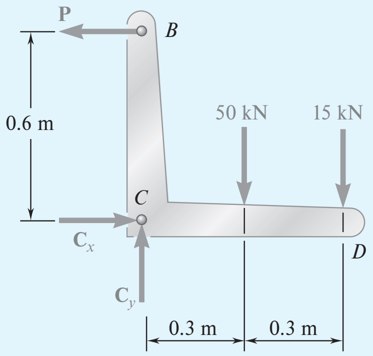


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del soporte.

a) Varilla de control *AB*. Como el factor de seguridad debe ser 3.3, el esfuerzo permisible será

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{600 \text{ MPa}}{3.3} = 181.8 \text{ MPa}$$

Para $P = 40$ kN el área requerida para la sección transversal es

$$A_{\text{req}} = \frac{P}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{40 \text{ kN}}{181.8 \text{ MPa}} = 220 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

$$A_{\text{req}} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = 220 \times 10^{-6} \text{m}^2 \qquad d_{ab} = \mathbf{16.74 \text{ mm}}$$

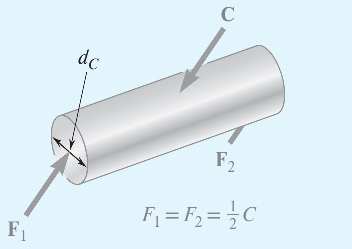


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del pasador en el punto *C*.

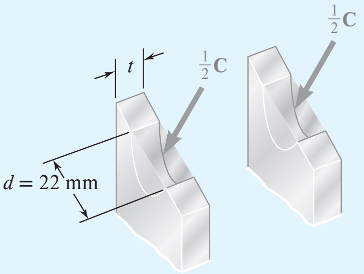


Figura 3 Cargas de apoyo en el soporte de soporte en el punto *C*.

***b)* Corte en el pasador C.** Para un factor de seguridad de 3.3, se tiene

$$\tau_{\text{perm}} = \frac{\tau_U}{F.S.} = \frac{350 \text{ MPa}}{3.3} = 106.1 \text{ MPa}$$

Como se muestra en la figura 2, el pasador se encuentra en cortante doble. Entonces, se escribe

$$A_{\text{req}} = \frac{C/2}{\tau_{\text{perm}}} = \frac{(76.3 \text{ kN})/2}{106.1 \text{ MPa}} = 360 \text{ mm}^2$$

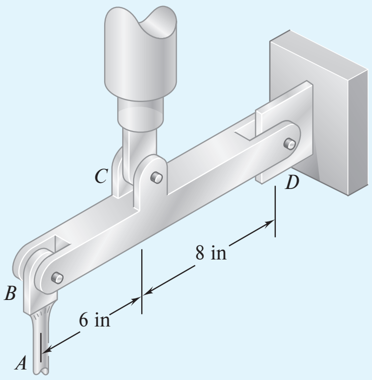
$$A_{\text{req}} = \frac{\pi}{4} d_C^2 = 360 \text{ mm}^2 \qquad d_C = 21.4 \text{ mm} \qquad \textbf{Use: } d_C = \textbf{22 mm} \quad ◀$$

c) Cojinete en C. Si se usa $d = 22$ mm, el área nominal de apoyo para cada soporte es de $22t$. A partir de la figura 3, la fuerza que resiste cada soporte es de $C/2$ y el esfuerzo permisible de apoyo es de 300 MPa. Se escribe

$$A_{\text{req}} = \frac{C/2}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{(76.3 \text{ kN})/2}{300 \text{ MPa}} = 127.2 \text{ mm}^2$$

Por lo tanto, $22t = 127.2$ $\qquad t = 5.78$ mm $\qquad$ **Use: t = 6 mm** ◀

REVISAR y PENSAR: Fue apropiado diseñar el pasador *C* primero y después su soporte, puesto que el diseño del pasador solo era geométricamente dependiente del diámetro, mientras que el diseño del soporte involucraba tanto el diámetro del pasador como el grosor del soporte.



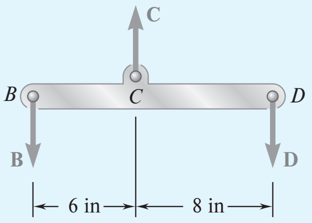


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga *BCD*.

Problema modelo 1.4

La viga rígida *BCD* está unida por pernos a una varilla de control en *B*, a un cilindro hidráulico en *C* y a un apoyo fijo en *D*. Los diámetros de los pernos utilizados son: $d_B = d_D = \frac{3}{8}$ in, $d_C = \frac{1}{2}$ in. Cada perno actúa en cortante doble y está hecho de un acero para el que el esfuerzo último de corte es $\tau_U = 40$ ksi. La varilla de control *AB* tiene un diámetro $d_A = \frac{7}{16}$ in y es de un acero con esfuerzo último a la tensión de $\sigma_U = 60$ ksi. Si el mínimo factor de seguridad debe ser de 3.0 para la unidad completa, encuentre la fuerza ascendente máxima que puede aplicarse al cilindro hidráulico en *C*.

ESTRATEGIA: El factor de seguridad con respecto a la falla debe ser de 3.0 o más en cada uno de los tres pernos y en la varilla de control. Estos cuatro criterios independientes se estudiarán por separado.

MODELAR: Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 1) y los pernos en *B* y *C* (figuras 2 y 3). Determine el valor permisible de la fuerza **C** con base en el criterio de diseño requerido para cada pieza.

ANALIZAR:

Cuerpo libre: Viga *BCD*. Con base en la figura 1, primero se determina la fuerza en *C* en términos de la fuerza en *B* y en términos de la fuerza en *D*.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad B(14 \text{ in}) - C(8 \text{ in}) = 0 \qquad C = 1.750B \qquad \textbf{(1)}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -D(14 \text{ in}) + C(6 \text{ in}) = 0 \qquad C = 2.33D \qquad \textbf{(2)}$$

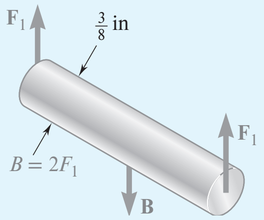


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del pasador en el punto *B*.

Varilla de control. Para un factor de seguridad de 3.0

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{60 \text{ ksi}}{3.0} = 20 \text{ ksi}$$

La fuerza permisible en la varilla de control es

$$B = \sigma_{perm}(A) = (20 \text{ ksi})\tfrac{1}{4}\pi\,(\tfrac{7}{16} \text{ in})^2 = 3.01 \text{ kips}$$

Utilizando la ecuación (1), se halla el máximo valor permisible de C:

$$C = 1.750B = 1.750(3.01 \text{ kips}) \qquad C = 5.27 \text{ kips}$$ ◀

Perno en *B*. $\tau_{perm} = \tau_U/F.S. = (40 \text{ ksi})/3 = 13.33$ ksi. Como el perno está en cortante doble (figura 2), la magnitud permisible de la fuerza **B** ejercida sobre el perno es

$$B = 2F_1 = 2(\tau_{perm}A) = 2(13.33 \text{ ksi})(\tfrac{1}{4}\pi)(\tfrac{3}{8} \text{ in.})^2 = 2.94 \text{ kips}$$

De la ecuación (1): $\quad C = 1.750B = 1.750(2.94 \text{ kips}) \qquad C = 5.15 \text{ kips}$ ◀

Perno en *D*. Como este perno es el mismo que el perno B, la fuerza permisible es $D = B = 2.94$ kips. De la ecuación (2):

$$C = 2.33D = 2.33(2.94 \text{ kips}) \qquad C = 6.85 \text{ kips}$$ ◀

Perno en *C*. Nuevamente se tiene $t_{perm} = 13.33$ ksi. Usando la figura 3, se escribe

$$C = 2F_2 = 2(\tau_{perm}A) = 2(13.33 \text{ ksi})(\tfrac{1}{4}\pi)(\tfrac{1}{2} \text{ in})^2 \qquad C = 5.23 \text{ kips}$$ ◀

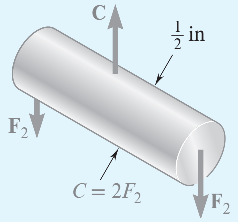


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre del pasador en el punto *C*.

Resumen. Se han encontrado separadamente cuatro valores máximos permisibles para la fuerza en C. Para satisfacer todos estos criterios debe escogerse el valor mínimo.

$$C = 5.15 \text{ kips}$$ ◀

REVISAR y PENSAR: Este ejemplo ilustra que todas las piezas deben satisfacer los criterios de diseño apropiados, y en consecuencia algunas piezas tienen más capacidad de la necesaria.

Problemas

1.29 Dos elementos de madera de sección transversal rectangular uniforme están unidos mediante un empalme sencillo pegado al sesgo, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 11$ kN, determine los esfuerzos normal y cortante en el empalme pegado.

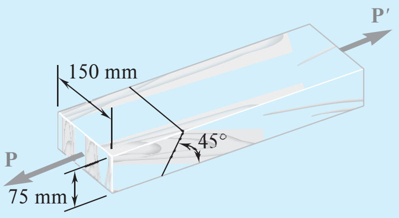


Figura P1.29 y P1.30

1.30 Dos elementos de madera con sección transversal rectangular uniforme están unidos mediante un empalme sencillo pegado al sesgo como se muestra en la figura. Si se sabe que el máximo esfuerzo cortante permisible en el empalme pegado es de 620 kPa, determine *a*) la máxima carga **P** que puede soportarse con seguridad, *b*) el esfuerzo a tensión correspondiente en el empalme.

1.31 La carga **P** de 1.4 kips está soportada por dos elementos de madera con sección transversal uniforme, unidos mediante un empalme sencillo pegado al sesgo, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normales y cortantes en el empalme pegado.

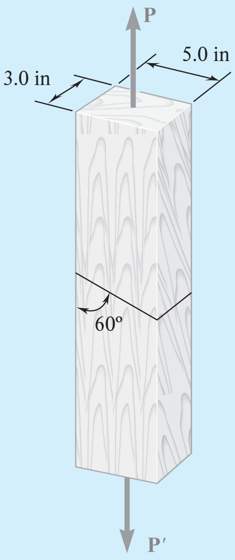


Figura P1.31 y P1.32

1.32 Dos elementos de madera con sección transversal rectangular uniforme están unidos mediante un empalme sencillo pegado al sesgo como se muestra en la figura. Si se sabe que el máximo esfuerzo a tensión permisible en el empalme pegado es de 75 psi, determine *a*) la máxima carga **P** que puede aplicarse con seguridad, *b*) el esfuerzo cortante correspondiente en el empalme.

1.33 Una carga céntrica **P** se aplica al bloque de granito que se muestra en la figura. Si se sabe que el valor máximo resultante del esfuerzo cortante en el bloque es de 2.5 ksi, determine *a*) la magnitud de **P**, *b*) la orientación de la superficie donde ocurre el máximo esfuerzo cortante, *c*) el esfuerzo normal ejercido sobre esa superficie, *d*) el valor máximo del esfuerzo normal en el bloque.

1.34 Una carga **P** de 240 kips se aplica a un bloque de granito como se muestra en la figura. Determine el valor máximo resultante *a*) del esfuerzo normal, *b*) del esfuerzo cortante. Especifique la orientación del plano donde ocurren estos valores máximos.

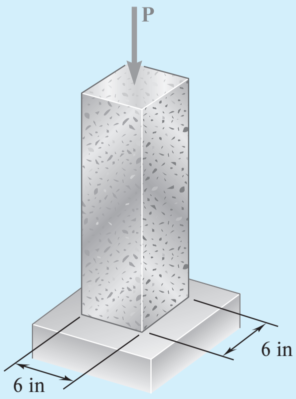


Figura *P1.33* y *P1.34*

1.35 Una tubería de acero de 400 mm de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa de 10 mm de espesor soldando a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 20° con un plano perpendicular al eje de la tubería. Si se sabe que una fuerza axial **P** de 300 kN se aplica a la tubería, determine los esfuerzos normal y cortante en las direcciones respectivas normal y tangencial a la soldadura.

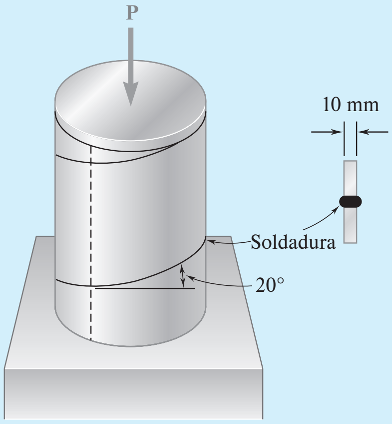


Figura P1.35 y P1.36

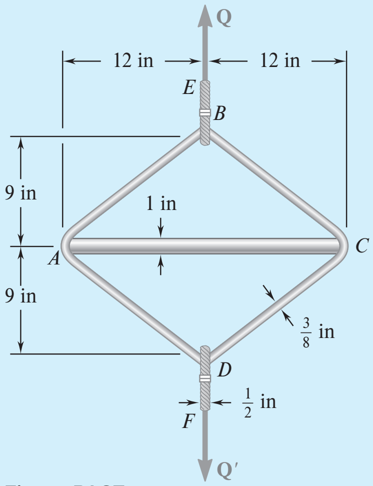


Figura P1.37

1.36 Una tubería de acero de 400 mm de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa de 10 mm de espesor por medio de soldadura a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 20° con un plano perpendicular al eje de la tubería. Si se sabe que los esfuerzos normal y cortante máximos permisibles en las direcciones respectivas normal y tangencial a la soldadura, son de $\sigma =$ 60 MPa y $\tau =$ 36 MPa, determine la magnitud P de la máxima fuerza axial que puede aplicarse a la tubería.

1.37 Un aro de acero *ABCD* de 5 ft de largo y $\frac{3}{8}$ in de diámetro se coloca alrededor de una varilla de aluminio *AC* de 1 in de diámetro como se muestra en la figura. Los cables *BE* y *DF*, cada uno de $\frac{1}{2}$ in de diámetro, se utilizan para aplicar la carga **Q**. Si se sabe que la resistencia última del acero empleado para el aro y los cables es de 70 ksi y que la resistencia última para el aluminio usado en la varilla es de 38 ksi, determine la máxima carga **Q** que puede aplicarse si se desea obtener un factor de seguridad global de 3.

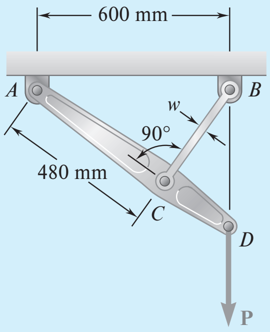


Figura *P1.38* y *P1.39*

1.38 El eslabón *BC* tiene 6 mm de espesor y un ancho $w =$ 25 mm, está fabricado de un acero con una resistencia última a la tensión de 480 MPa. ¿Cuál es el factor de seguridad si la estructura mostrada se diseñó para soportar una carga **P** de 16 kN?

1.39 El eslabón *BC* tiene 6 mm de espesor y es de un acero con una resistencia última a la tensión de 450 MPa. ¿Cuál debe ser su ancho w si la estructura mostrada se diseñó para soportar una carga **P** de 20 kN con un factor de seguridad igual a 3?

1.40 Los elementos *AB* y *BC* de la armadura mostrada están hechos de la misma aleación. Se sabe que una barra cuadrada de 20 mm del mismo material se ensayó hasta la falla y se registró una carga última de 120 kN. Si se debe lograr un factor de seguridad de 3.2 para ambas barras, determine el área de sección transversal requerida *a*) para la barra *AB*, *b*) para la barra *AC*.

1.41 Los elementos *AB* y *BC* de la armadura mostrada están hechos de la misma aleación. Se sabe que una barra cuadrada de 20 mm del mismo material se ensayó hasta la falla y se registró una carga última de 120 kN. Si la barra *AC* tiene un área de sección transversal de 225 mm^2, determine *a*) el factor de seguridad para la barra *AB*, *b*) el área de sección transversal de la barra *AC* si debe tener el mismo factor de seguridad que la barra *AB*.

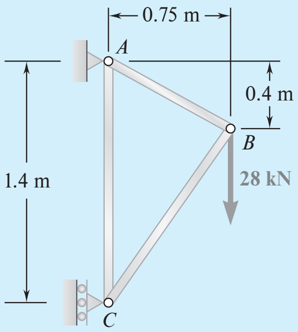


Figura P1.40 y P1.41

1.42 El eslabón AB debe fabricarse con un acero cuya resistencia última al esfuerzo normal sea de 65 ksi. Determine el área de la sección transversal de AB para la cual el factor de seguridad es de 3.20. Suponga que el eslabón se reforzará de manera adecuada alrededor de los pasadores en A y B.

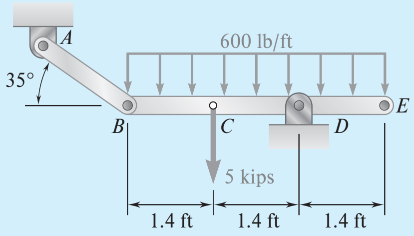


Figura P1.42

1.43 Dos elementos de madera están unidos mediante placas de madera laminada pegados completamente a las superficies de contacto. Si se sabe que la separación entre los extremos de los elementos es de 6 mm y que el esfuerzo cortante último en la junta pegada es de 2.5 MPa, determine la longitud L para la cual el factor de seguridad es de 2.75 considerando la carga mostrada.

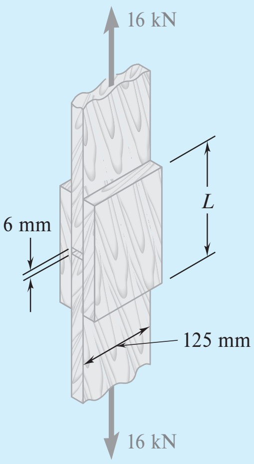


Figura *P1.43*

1.44 Para la junta y la carga del problema 1.43, determine el factor de seguridad cuando $L = 180$ mm.

1.45 Tres pernos de acero de $\frac{3}{4}$ in de diámetro se utilizarán para unir la placa de acero que se muestra en la figura a una viga de madera. Si se sabe que la placa puede soportar una carga $P = 24$ kips y que el esfuerzo cortante último para el acero utilizado es de 52 ksi, determine el factor de seguridad para este diseño.

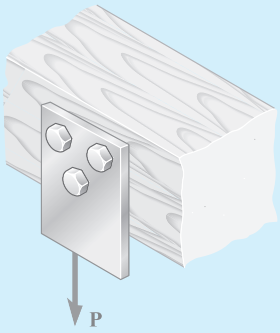


Figura P1.45 y P1.46

1.46 Tres pernos de acero serán utilizados para unir la placa de acero que se muestra en la figura con una viga de madera. Si se sabe que la placa puede soportar una carga $P = 28$ kips, que el esfuerzo cortante último para el acero utilizado es de 52 ksi y que se desea un factor de seguridad de 3.25, determine el diámetro requerido para los pernos.

1.47 Una carga **P** es soportada, como se muestra en la figura, por un pasador de acero que se insertó en un elemento corto de madera que cuelga del techo. La resistencia última de la madera utilizada es de 60 MPa a la tensión y de 7.5 MPa al corte, mientras que la resistencia última del acero es de 145 MPa al corte. Si se sabe que $b = 40$ mm, $c = 55$ mm y $d = 12$ mm, determine la carga **P** si se desea un factor de seguridad general de 3.2.

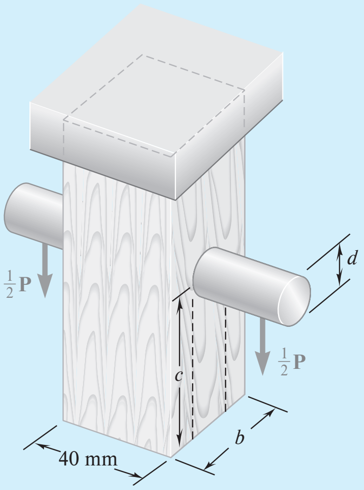


Figura P1.47

1.48 Para el soporte del problema 1.47, se sabe que el diámetro del pasador es $d = 16$ mm y que la magnitud de la carga es $P = 20$ kN. Determine *a*) el factor de seguridad para el pasador, *b*) los valores requeridos de b y c si el factor de seguridad del elemento de madera debe ser el mismo que el que se determinó en el inciso *a*) para el pasador.

1.49 Una placa de acero de $\frac{1}{4}$ in de espesor está empotrada en un bloque horizontal de concreto y se emplea para anclar un cable vertical de alta resistencia como se observa en la figura. El diámetro del orificio en la placa es de $\frac{3}{4}$ in, la resistencia última del acero utilizado es de 36 ksi y el esfuerzo último de unión entre la placa y el concreto es de 300 psi. Si se desea un factor de seguridad de 3.60 cuando $P = 2.5$ kips, determine *a*) el ancho a requerido en la placa, *b*) la profundidad mínima b a la que una placa de ese ancho debería empotrarse en el bloque de concreto. (Desprecie los esfuerzos normales entre el concreto y el extremo de la placa).

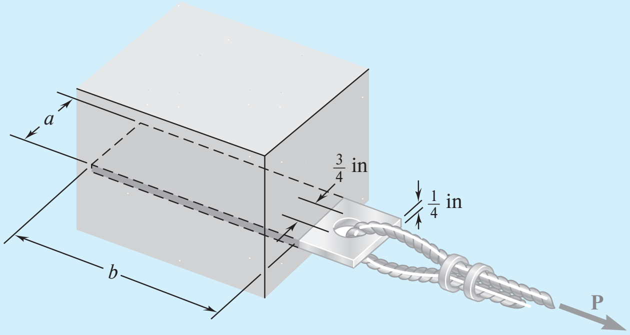


Figura *P1.49*

1.50 Determine el factor de seguridad para el cable anclado del problema 1.49 cuando $P = 2.5$ kips, si se sabe que $a = 2$ in y $b = 6$ in.

1.51 El eslabón AC está hecho de un acero con un esfuerzo normal último de 65 ksi y tiene sección transversal rectangular uniforme de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ in. Está conectado a un soporte en A y al elemento BCD en C mediante pasadores de $\frac{3}{8}$ in de diámetro, mientras que el elemento BCD está conectado a su soporte en B por medio de un pasador de $\frac{5}{16}$ in de diámetro. Todos los pasadores están hechos de acero con un esfuerzo cortante último de 25 ksi y están en cortante simple. Si se desea un factor de seguridad de 3.25, determine la carga máxima **P** que puede aplicarse en D. Observe que el eslabón AC no está reforzado alrededor de los orificios para los pasadores.

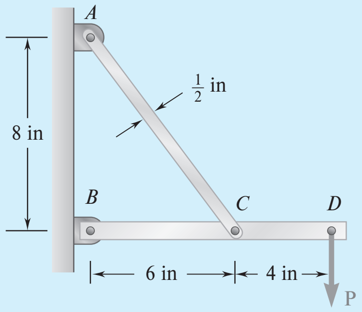


Figura *P1.51*

1.52 Resuelva el problema 1.51 suponiendo que la estructura se ha rediseñado al utilizar pasadores de $\frac{5}{16}$ in de diámetro en A y C y que no se ha realizado ningún otro cambio.

1.53 Cada uno de los dos eslabones verticales CF que conectan los dos elementos horizontales AD y EG tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10×40 mm, y está fabricado con acero con una resistencia última a la tensión de 400 MPa. Cada uno de los pasadores en C y F tiene un diámetro de 20 mm y están elaborados con un acero que tiene una resistencia última a cortante de 150 MPa. Determine el factor general de seguridad para los eslabones CF y para los pasadores que los conectan a los elementos horizontales.

1.54 Resuelva el problema 1.53 suponiendo que los pasadores en C y F fueron sustituidos por pasadores con un diámetro de 30 mm.

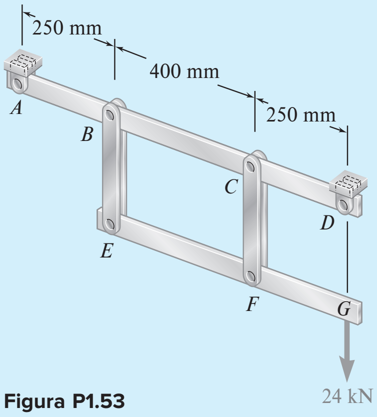


Figura P1.53

1.55 En la estructura mostrada se emplea un pasador de 8 mm de diámetro en *A* y pasadores de 12 mm de diámetro en *B* y en *D*. Si se sabe que el esfuerzo cortante último es de 100 MPa en todas las conexiones y que el esfuerzo normal último es de 250 MPa en cada uno de los dos eslabones que unen *B* y *D*, determine la carga **P** permisible si se desea un factor de seguridad general de 3.0.

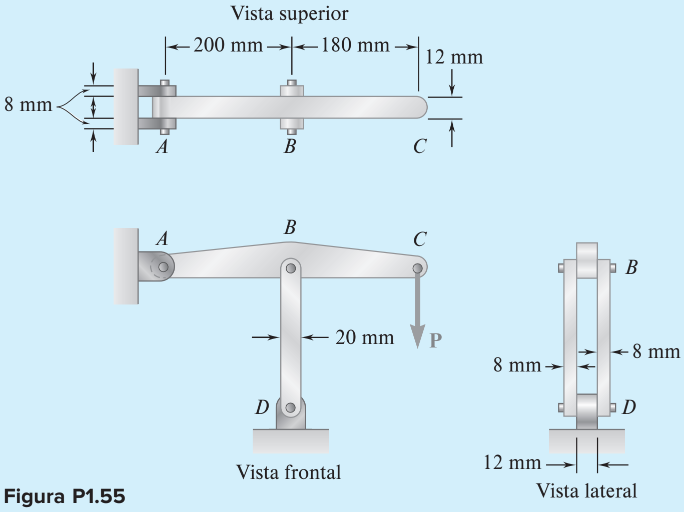


Figura P1.55

1.56 En un diseño alterno para la estructura del problema 1.55 se utilizará un pasador de 10 mm de diámetro en *A*. Si se supone que las otras especificaciones permanecen sin cambio, determine la carga **P** permisible si se desea un factor general de seguridad de 3.0.

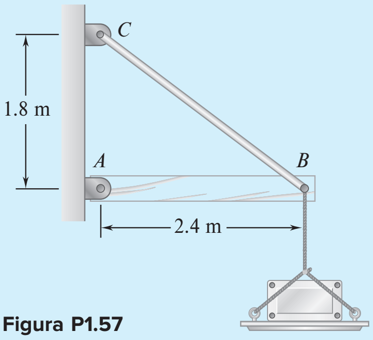


Figura P1.57

***1.57** Una plataforma de 40 kg está unida al extremo *B* de una viga *AB* de madera de 50 kg. La viga se encuentra soportada, como se muestra en la figura, por un pasador en *A* y una varilla delgada de acero *BC* con una carga última de 12 kN. *a*) Utilice el método de diseño por carga y factor de resistencia con un factor de resistencia $\phi = 0.90$ y factores de carga $\gamma_D = 1.25$ y $\gamma_L = 1.6$, para calcular la máxima carga que puede colocarse con seguridad en la plataforma. *b*) ¿Cuál es el factor de seguridad convencional correspondiente para la varilla *BC*?

***1.58** El método de diseño por carga y factor de resistencia se utilizará para seleccionar los dos cables que elevarán y bajarán una plataforma que soportará a dos trabajadores que limpian ventanas. La plataforma pesa 160 lb y puede suponerse que cada uno de los trabajadores pesa 195 libras con su equipo. Como estos trabajadores pueden moverse con libertad sobre la plataforma, 75% de su peso total y el peso de su equipo se utilizarán como la carga viva de diseño de cada cable. *a*) Suponiendo un factor de resistencia $\phi = 0.85$ y factores de carga $\gamma_D = 1.2$ y $\gamma_L = 1.5$, determine la carga última mínima requerida en un cable. *b*) ¿Cuál es el factor de seguridad convencional para los cables seleccionados?

Figura P1.58

Repaso y resumen

Este capítulo se dedicó al concepto de esfuerzo y a una introducción a los métodos usados para el análisis y diseño de máquinas y de estructuras portadoras de carga. Se puso énfasis en el uso del *diagrama de cuerpo libre* para obtener las ecuaciones de equilibrio que después se resolvieron para determinar las reacciones desconocidas. Los diagramas de cuerpo libre también se utilizaron para encontrar las fuerzas internas en los diversos elementos de una estructura.

Carga axial: esfuerzo normal

El concepto de *esfuerzo* se introdujo primero al considerar un elemento de dos fuerzas bajo *carga axial*. El *esfuerzo normal* en ese elemento (figura 1.41) se obtuvo mediante

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

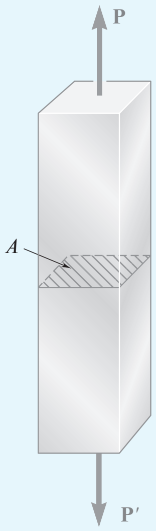


Figura 1.41 Elemento axialmente cargado con sección transversal normal al elemento usado para definir el esfuerzo normal.

El valor de σ obtenido de la ecuación (1.5) representa el *esfuerzo promedio* a través de la sección más que el esfuerzo en un punto específico Q de la sección. Considerando una pequeña área ΔA que rodee al punto Q y la magnitud ΔF de la fuerza ejercida sobre ΔA, se define el esfuerzo en el punto Q como

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1.6}$$

En general, el esfuerzo σ en el punto Q de la ecuación (1.6) es diferente del valor del esfuerzo promedio dado por la ecuación (1.5) y puede verse que varía a través de la sección. Sin embargo, esta variación es pequeña en cualquier sección que se encuentre lejos de los puntos de aplicación de las cargas. Por lo tanto, la distribución de los esfuerzos normales en un elemento cargado axialmente se supone *uniforme*, excepto en la vecindad inmediata de los puntos de aplicación de las cargas.

Para que la distribución de esfuerzos sea uniforme en una sección dada, es necesario que la línea de acción de las cargas **P** y **P′** pase por el centroide C. Tal carga se conoce como carga axial *céntrica*. En el caso de una carga axial *excéntrica*, la distribución de esfuerzos *no* es uniforme.

Fuerzas transversales y esfuerzo cortante

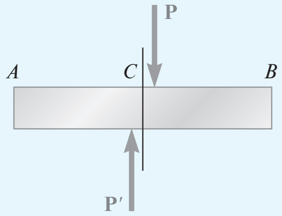


Figura 1.42 Modelo de fuerzas resultantes transversales sobre cualquier lado de C que producen esfuerzo cortante en la sección C.

Cuando las *fuerzas transversales* **P** y **P′** iguales y opuestas de magnitud P se aplican a un elemento AB (figura 1.42), se crean *esfuerzos cortantes* τ sobre cualquier sección localizada entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas. Estos esfuerzos varían mucho a través de la sección y *no puede* suponerse que su distribución sea uniforme. Sin embargo, al dividir la magnitud de P, conocida como el *cortante* en la sección, entre el área A de la sección transversal, el *esfuerzo cortante promedio* es:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} \tag{1.8}$$

Cortante simple y doble

Los esfuerzos cortantes se encuentran en pernos, pasadores o remaches que conectan dos elementos estructurales o componentes de maquinaria. Por ejemplo, el esfuerzo cortante del perno *CD* (figura 1.43), que se encuentra en *cortante simple*, se escribe como

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

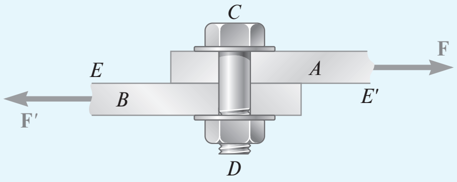


Figura 1.43 Diagrama de una junta en cortante simple.

Los esfuerzos cortantes en los pernos *EG* y *HJ* (figura 1.44), que se encuentran ambos en *cortante doble*, se escriben como

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \tag{1.10}$$

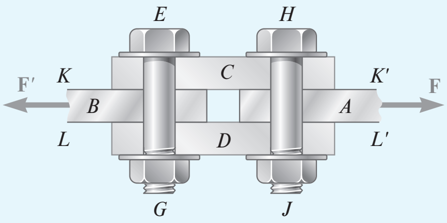


Figura 1.44 Diagrama de cuerpo libre de una junta en cortante doble.

Esfuerzo de apoyo

Los pernos, pasadores y remaches también crean esfuerzos en los elementos que conectan, a lo largo de la *superficie de apoyo* o superficie de contacto. El perno *CD* de la figura 1.43 crea esfuerzos en la superficie semicilíndrica de la placa *A* con la que está en contacto (figura 1.45). Como la distribución de estos esfuerzos es muy complicada, en la práctica se emplea un valor nominal promedio σ_b del esfuerzo, llamado *esfuerzo de apoyo*.

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \tag{1.11}$$

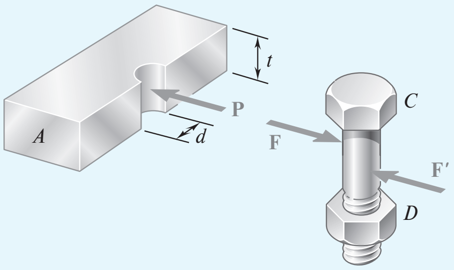


Figura 1.45 Esfuerzo de apoyo de la fuerza *P* y del perno a cortante simple asociado con esta.

Método de solución

Su solución deberá comenzar con un *planteamiento* claro y preciso del problema. Deberán entonces dibujarse uno o varios *diagramas de cuerpo libre* que se emplearán para escribir las *ecuaciones de equilibrio*. Estas ecuaciones se resuelven para determinar las *fuerzas desconocidas*, de las que pueden calcularse los *esfuerzos* y *deformaciones* requeridas. Una vez que se ha obtenido una respuesta, deberá *verificarse con cuidado*.

Estas directrices están incorporadas en la metodología SMART (por sus siglas en inglés) para la resolución de problemas, donde se utilizan los pasos de Estrategia, Modelar, Analizar, Revisar y Pensar. Se recomienda aplicar la metodología SMART para la resolución de todos los problemas asignados en este texto.

Esfuerzos en una sección oblicua

Cuando se crean esfuerzos sobre una *sección oblicua* en un elemento de dos fuerzas bajo carga axial, ocurren tanto esfuerzos *normales* como *cortantes*. Con la denotación de θ para el ángulo formado por la sección con un plano normal (figura 1.46) y A_0 para el área de la sección perpendicular al eje del elemento, el esfuerzo normal σ y el esfuerzo cortante τ sobre la sección oblicua son

$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \tau = \frac{P}{A_0}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{1.14}$$

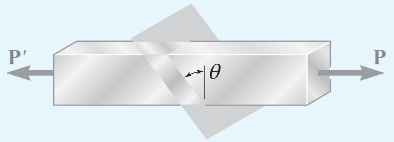


Figura 1.46 Elemento cargado axialmente con un plano de sección oblicuo.

Se observó, a partir de estas fórmulas, que el esfuerzo normal es máximo e igual a $\sigma_m = P/A_0$ para $\theta = 0$, mientras que el esfuerzo cortante es máximo e igual a $\tau_m = P/2A_0$ para $\theta = 45°$. También se advirtió que $\tau = 0$ cuando $\theta = 0$, mientras que $\sigma = P/2A_0$ cuando $\theta = 45°$.

Esfuerzo bajo carga general

Si se considera un pequeño cubo centrado en Q (figura 1.47), σ_x es el esfuerzo normal ejercido sobre una cara del cubo perpendicular al eje x, y τ_{xy} y τ_{xz} son las componentes en y y en z del esfuerzo cortante ejercido sobre la misma cara del cubo. Se repitió este procedimiento para las otras dos caras del cubo y se observó que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ y $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, se concluyó que se requieren *seis componentes de esfuerzo* para definir el estado de esfuerzo en un punto dado Q, específicamente, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}.

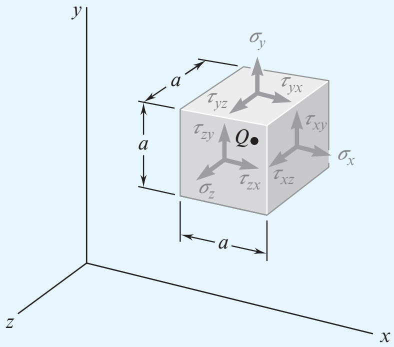


Figura 1.47 Componentes de esfuerzo positivas en el punto Q.

Factor de seguridad

La *carga última* de un elemento estructural o componente de maquinaria dado es la carga a la que se espera que el elemento o componente falle. Se calcula a partir del *esfuerzo último* o *resistencia última* del material usado. La carga última deberá ser considerablemente mayor que la *carga permisible* (esto es, la carga que soportará el elemento o componente en condiciones normales). La razón de la carga última a la carga permisible es el *factor de seguridad*:

$$\text{Factor de seguridad} = F.S. = \frac{\text{carga última}}{\text{carga permisible}} \tag{1.25}$$

Diseño por carga y factor de resistencia

El *diseño por carga y factor de resistencia* (*DCFR*) permite al ingeniero distinguir entre las incertidumbres asociadas con la estructura y aquellas asociadas con la carga.

Problemas de repaso

1.59 En la grúa marina que se muestra en la figura, se sabe que el eslabón *CD* tiene una sección transversal uniforme de 50 × 150 mm. Para la carga mostrada, determine el esfuerzo normal en la porción central de ese eslabón.

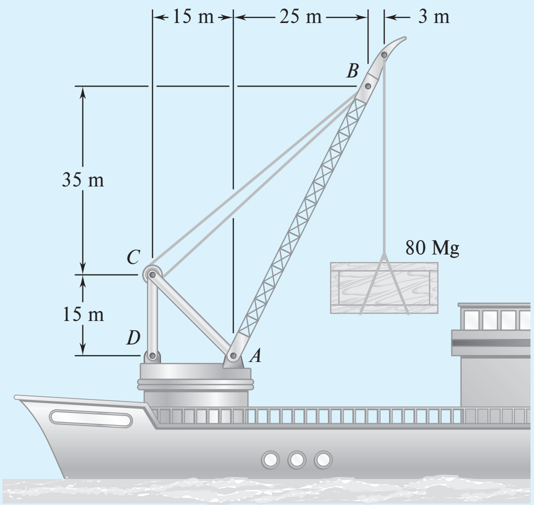


Figura P1.59

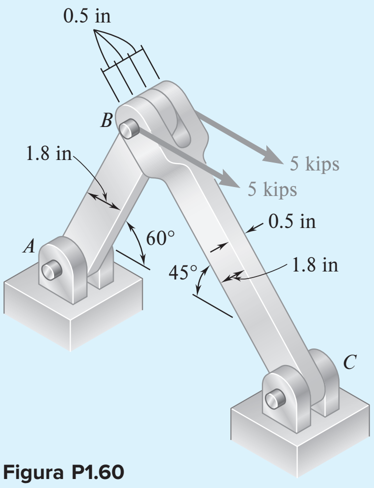


Figura P1.60

1.60 Dos fuerzas horizontales de 5 kips se aplican al pasador *B* en el ensamble que se muestra. Si se sabe que en cada conexión se emplea un pasador de 0.8 in de diámetro, determine el valor máximo del esfuerzo normal promedio *a*) en el eslabón *AB*, *b*) en el eslabón *BC*.

1.61 Para el ensamble y la carga del problema 1.60, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en el pasador en *C*, *b*) el esfuerzo de apoyo promedio en *C* en el elemento *BC*, *c*) el esfuerzo de apoyo promedio en *B* en el elemento *BC*.

1.62 Dos placas de acero deben sujetarse por medio de pernos de acero de alta resistencia de 16 mm de diámetro que embonan con suavidad dentro de espaciadores cilíndricos de latón. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio no debe exceder 200 MPa en los pasadores y 130 MPa en los espaciadores, determine el diámetro exterior de los espaciadores que ofrece el diseño más económico y seguro.

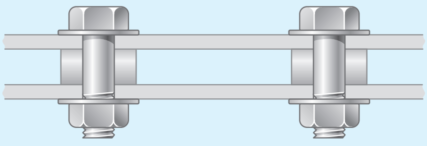


Figura P1.62

1.63 Un par **M** con magnitud de 1 500 N · m se aplica a la manivela de un motor. Para la posición mostrada, determine *a*) la fuerza **P** requerida para mantener en equilibrio al sistema del motor, *b*) el esfuerzo normal promedio en la barra *BC*, la cual tiene una sección transversal uniforme de 450 mm^2.

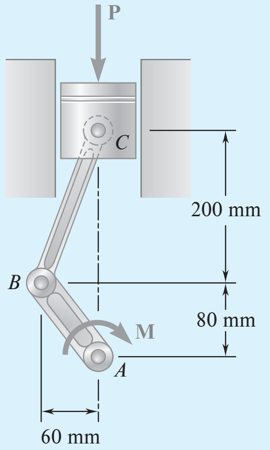


Figura *P1.63*

1.64 Si se sabe que el eslabón *DE* tiene $\frac{1}{8}$ in de espesor y 1 in de ancho, determine el esfuerzo normal en la porción central de dicho eslabón cuando *a*) $\theta = 0$, *b*) $\theta = 90°$.

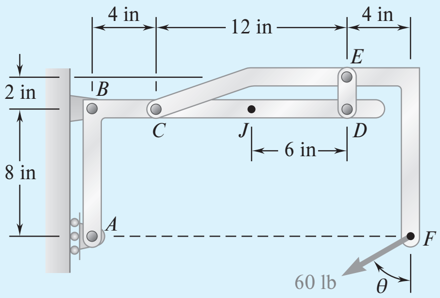


Figura P1.64

1.65 Una varilla de acero *AB* con $\frac{5}{8}$ in de diámetro se ajusta a un orificio redondo cerca del extremo *C* del elemento de madera *CD*. Para la carga mostrada, determine *a*) el esfuerzo máximo normal promedio en la madera, *b*) la distancia *b* para la cual el esfuerzo cortante promedio es de 100 psi sobre las superficies indicadas por líneas punteadas, *c*) el esfuerzo de apoyo promedio sobre la madera.

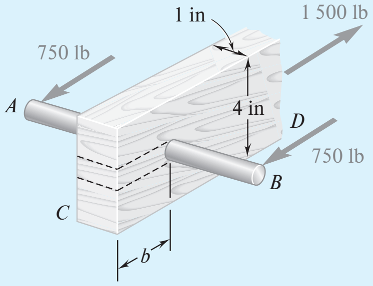


Figura P1.65

1.66 En la estructura de acero que se muestra en la figura, se utiliza un pasador de 6 mm de diámetro en *C* y se emplean pasadores de 10 mm de diámetro en *B* y *D*. El esfuerzo cortante último es de 150 MPa para todas las conexiones y el esfuerzo normal último es de 400 MPa en el eslabón *BD*. Si se desea un factor de seguridad de 3.0, determine la carga máxima **P** que puede aplicarse en *A*. Observe que el eslabón *BD* no está reforzado alrededor de los orificios para los pasadores.

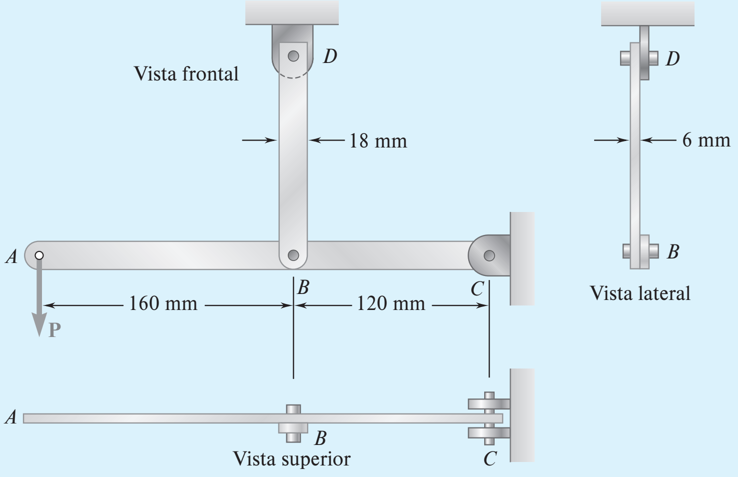


Figura *P1.66*

1.67 El elemento *ABC*, soportado por un pasador y una ménsula en *C* y un cable *BD*, se diseñó para soportar la carga **P** de 16 kN que se muestra en la figura. Si se sabe que la carga última para el cable *BD* es de 100 kN, determine el factor de seguridad con respecto a la falla del cable.

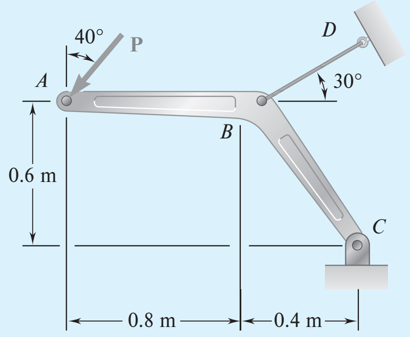


Figura P1.67

1.68 Una fuerza **P** se aplica como se muestra en la figura sobre una barra de refuerzo de acero empotrada en un bloque de concreto. Determine la longitud mínima *L* para la que puede desarrollarse todo el esfuerzo normal permisible en la barra. Exprese los resultados en términos del diámetro *d* de la barra, el esfuerzo normal permisible σ_{perm} en el acero, y el esfuerzo de adherencia permisible promedio τ_{perm} entre el concreto y la superficie cilíndrica de la barra. (Desprecie los esfuerzos normales entre el concreto y el extremo de la barra).

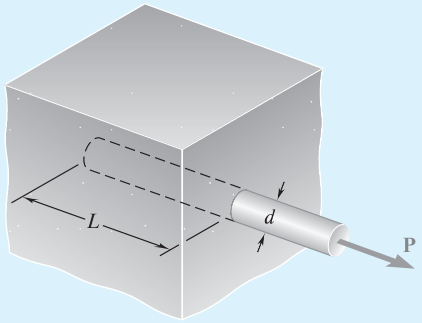


Figura P1.68

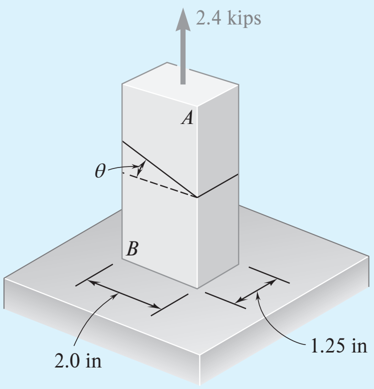


Figura *P1.69* y P1.70

1.69 Las dos porciones del elemento *AB* están adheridas a lo largo de un plano que forma un ángulo θ con la horizontal. Si se sabe que el esfuerzo último para la unión pegada es de 2.5 ksi a tensión y de 1.3 ksi a cortante, determine *a*) el valor de θ para el cual el factor de seguridad del elemento sea máximo, *b*) el valor correspondiente del factor de seguridad. (*Sugerencia:* Iguale las expresiones obtenidas para los factores de seguridad con respecto al esfuerzo normal y al esfuerzo cortante).

1.70 Las dos porciones del elemento *AB* están adheridas a lo largo de un plano que forma un ángulo θ con la horizontal. Si se sabe que el esfuerzo último para la unión pegada es de 2.5 ksi a tensión y de 1.3 ksi a cortante, determine el rango de valores de θ para los que el factor de seguridad de los elementos es de al menos 3.0.

Problemas de computadora

Los siguientes problemas se diseñaron para ser resueltos con una computadora.

1.C1 Una varilla sólida de acero de n elementos cilíndricos soldados se somete a la carga mostrada en la figura. El diámetro del elemento i se denota por d_i y la carga aplicada a su extremo inferior por $\mathbf{P}_i$, donde la magnitud P_i de esta carga se supone positiva si $\mathbf{P}_i$ se dirige hacia abajo, como se muestra en la figura, y negativa si ocurre otra cosa. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda emplearse con unidades SI o de uso común en Estados Unidos para determinar el esfuerzo promedio en cada elemento de la varilla. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 1.1 y 1.3.

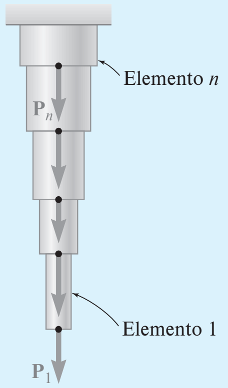


Figura P1.C1

1.C2 Al elemento horizontal *ABC* se le aplica una fuerza de 20 kN como se indica en la figura. El elemento *ABC* tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10 × 50 mm y lo soportan cuatro eslabones verticales, cada uno con sección transversal rectangular uniforme de 8 × 36 mm. Cada uno de los cuatro pasadores en *A*, *B*, *C* y *D* tiene el mismo diámetro *d* y se encuentra en cortante doble. *a*) Escriba un programa de computadora con el fin de calcular, para valores de *d* de 10 a 30 mm, en incrementos de 1 mm, i) el valor máximo del esfuerzo normal promedio en los eslabones que conectan los pernos *B* y *D*, ii) el esfuerzo normal promedio en los eslabones que conectan los pasadores *C* y *E*, iii) el esfuerzo cortante promedio en el perno *B*, iv) el esfuerzo cortante promedio en el pasador *C*, v) el esfuerzo promedio de apoyo en *B* en el elemento *ABC*, vi) el esfuerzo promedio de apoyo en *C* en el elemento *ABC*. *b*) Verifique el programa comparando los valores obtenidos para $d = 16$ mm con las respuestas dadas para los problemas 1.7 y 1.27. *c*) Utilice este programa para encontrar los valores permisibles del diámetro *d* de los pasadores, sabiendo que los valores permisibles para los esfuerzos normal, cortante y de apoyo para el acero utilizado son, respectivamente, 150 MPa, 90 MPa y 230 MPa. *d*) Resuelva el inciso *c*, suponiendo que el espesor del elemento *ABC* se ha reducido de 10 a 8 mm.

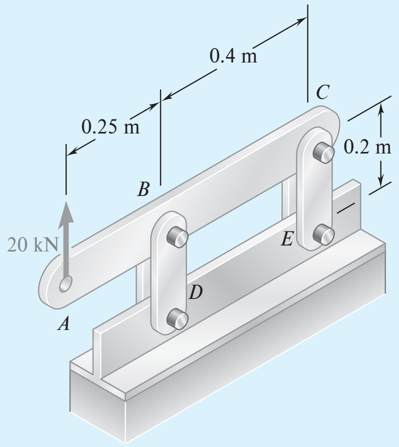


Figura P1.C2

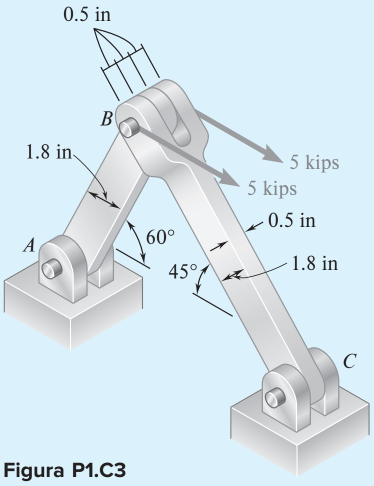


Figura P1.C3

1.C3 Dos fuerzas horizontales de 5 kips se aplican al pasador *B* del ensamble mostrado. Cada uno de los tres pasadores en *A*, *B* y *C* tiene el mismo diámetro *d* y está en cortante doble. *a*) Escriba un programa de computadora que ayude a calcular, para valores de *d* desde 0.50 hasta 1.50 in, utilizando incrementos de 0.05 in. i) el máximo valor del esfuerzo normal promedio en el elemento *AB*, ii) el esfuerzo normal promedio en el elemento *BC*, iii) el esfuerzo cortante promedio en el pasador *A*, iv) el esfuerzo cortante promedio en el pasador *C*, v) el esfuerzo promedio de apoyo en *A* en el elemento *AB*, vi) el esfuerzo promedio de apoyo en *C* en el elemento *BC* y vii) el esfuerzo promedio de apoyo en *B* en el elemento *BC*. *b*) Verifique el programa comparando los valores obtenidos para $d = 0.8$ in con las respuestas dadas para los problemas 1.60 y 1.61. *c*) Emplee este programa para encontrar los valores permisibles para el diámetro *d* de los pasadores, sabiendo que los valores permisibles para los esfuerzos normal, cortante y de apoyo para el acero utilizado son, respectivamente, 22 ksi, 13 ksi y 36 ksi. *d*) Resuelva el inciso *c*), suponiendo que se investiga un nuevo diseño, en el que el espesor y el ancho de los dos elementos se cambian, respectivamente, de 0.5 a 0.3 in y de 1.8 a 2.4 in.

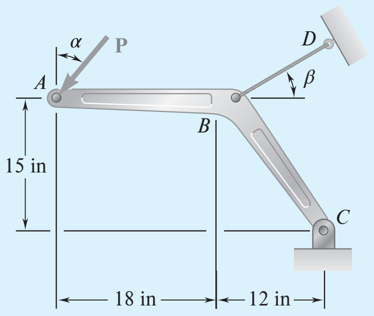


Figura P1.C4

1.C4 Una fuerza **P** de 4 kips que forma un ángulo α con la vertical se aplica, como se muestra en la figura, al elemento *ABC*, que es soportado por un pasador y una ménsula en *C* y por un cable *BD* que forma un ángulo β con la horizontal. *a*) Si se sabe que la carga última del cable es de 25 kips, escriba un programa de computadora para construir una tabla de los valores del factor de seguridad del cable para valores de α y β de 0 a 45°, utilizando incrementos en α y β que corresponden a incrementos de 0.1 en tan α y tan β. *b*) Verifique que, para cualquier valor dado de α, el valor máximo del factor de seguridad se obtiene para $\beta = 38.66°$ y explique por qué. *c*) Determine el valor mínimo posible del factor de seguridad para $\beta = 38.66°$, así como el valor correspondiente de α, y explique el resultado obtenido.

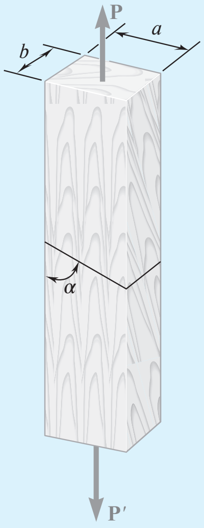


Figura P1.C5

1.C5 Una carga **P** es soportada, como se muestra en la figura, por dos elementos de madera con sección transversal rectangular uniforme que están unidos por un empalme sencillo pegado al sesgo. *a*) Si σ_U y τ_U son, respectivamente, la resistencia última del empalme a tensión y en cortante, escriba un programa de computadora que, para valores dados de *a*, *b*, *P*, σ_U y τ_U, expresados ya sea en unidades SI o de uso común en Estados Unidos, y para valores de α desde 5 hasta 85°, con intervalos de 5°, pueda utilizarse para calcular i) el esfuerzo normal del empalme, ii) el esfuerzo cortante en el empalme, iii) el factor de seguridad relativo a la falla en tensión, iv) el factor de seguridad relativo a la falla a corte, v) el factor general de seguridad para la junta pegada. *b*) Aplique este programa, utilizando las dimensiones y cargas de los elementos de los problemas 1.29 y 1.31, si $\sigma_U = 150$ psi y $\tau_U = 214$ psi para el pegamento utilizado en el problema 1.29, y $\sigma_U = 1.26$ MPa y $\tau_U = 1.50$ MPa para el pegamento utilizado en el problema 1.31. *c*) Verifique en cada uno de estos dos casos que el esfuerzo cortante es máximo para a $\alpha = 45°$.

1.C6 Al elemento *ABC* lo soportan un pasador y una ménsula en *A* y dos eslabones, que están conectados por pasadores al elemento en *B* y a un apoyo fijo en *D*. *a*) Escriba un programa de computadora para calcular la carga permisible P_{perm} para cualesquiera de los valores dados de i) el diámetro d_1 del pasador en *A*, ii) el diámetro común d_2 de los pasadores en *B* y *D*, iii) el esfuerzo normal último σ_U en cada uno de los dos eslabones, iv) el esfuerzo cortante último τ_U en cada uno de los tres pasadores, v) el factor general de seguridad deseado *F.S.* *b*) El programa deberá indicar también cuál de los siguientes

tres esfuerzos es crucial: el esfuerzo normal en los eslabones, el esfuerzo cortante en el pasador en *A* o el esfuerzo cortante en los pasadores en *B* y *D*. *c*) Verifique el programa utilizando los datos de los problemas 1.55 y 1.56, respectivamente, y comparando las respuestas obtenidas para P_{perm} con las propuestas en el texto. *d*) Utilice el programa para determinar la carga permisible P_{perm}, así como cuál de los esfuerzos es crucial, cuando $d_1 = d_2 = 15$ mm, $\sigma_U = 110$ MPa para eslabones de aluminio, $\tau_U = 100$ MPa para pasadores de acero y $F.S. = 3.2$.

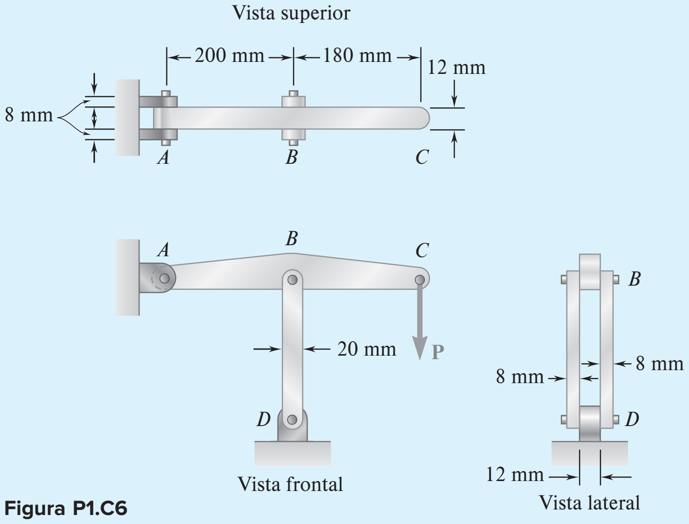
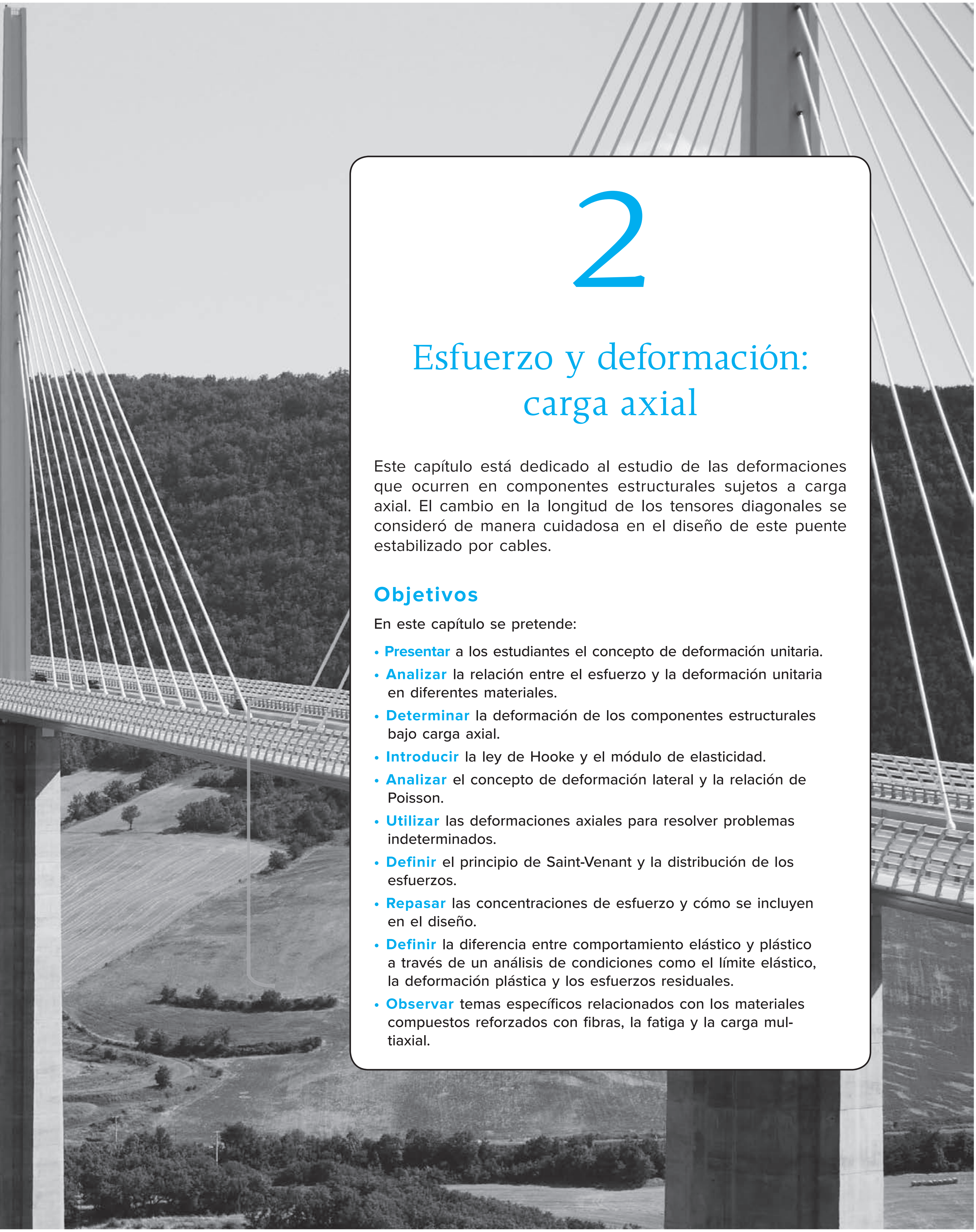


Figura P1.C6



2

Esfuerzo y deformación: carga axial

Este capítulo está dedicado al estudio de las deformaciones que ocurren en componentes estructurales sujetos a carga axial. El cambio en la longitud de los tensores diagonales se consideró de manera cuidadosa en el diseño de este puente estabilizado por cables.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Presentar** a los estudiantes el concepto de deformación unitaria.
- **Analizar** la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria en diferentes materiales.
- **Determinar** la deformación de los componentes estructurales bajo carga axial.
- **Introducir** la ley de Hooke y el módulo de elasticidad.
- **Analizar** el concepto de deformación lateral y la relación de Poisson.
- **Utilizar** las deformaciones axiales para resolver problemas indeterminados.
- **Definir** el principio de Saint-Venant y la distribución de los esfuerzos.
- **Repasar** las concentraciones de esfuerzo y cómo se incluyen en el diseño.
- **Definir** la diferencia entre comportamiento elástico y plástico a través de un análisis de condiciones como el límite elástico, la deformación plástica y los esfuerzos residuales.
- **Observar** temas específicos relacionados con los materiales compuestos reforzados con fibras, la fatiga y la carga multiaxial.

Introducción

2.1 Introducción al esfuerzo y la deformación
2.1A Deformación normal bajo carga axial
2.1B Diagrama esfuerzo-deformación
*2.1C Esfuerzo y deformación verdaderos
2.1D Ley de Hooke; módulo de elasticidad
2.1E Comportamiento elástico contra comportamiento plástico de un material
2.1F Cargas repetidas y fatiga
2.1G Deformaciones de elementos sometidos a carga axial
2.2 Problemas estáticamente indeterminados
2.3 Problemas que involucran cambios de temperatura
2.4 Relación de Poisson
2.5 Cargas multiaxiales. Ley de Hooke generalizada
***2.6 Dilatación y módulo volumétrico de elasticidad**
2.7 Deformación unitaria cortante
2.8 Deformaciones bajo carga axial: relación entre E, ν y G
***2.9 Relaciones de esfuerzo-deformación para materiales compuestos reforzados con fibras**
2.10 Distribución del esfuerzo y de la deformación bajo carga axial: principio de Saint-Venant
2.11 Concentraciones de esfuerzos
2.12 Deformaciones plásticas
***2.13 Esfuerzos residuales**

Introducción

Un aspecto importante del análisis y diseño de estructuras se relaciona con las *deformaciones* causadas por las cargas que se aplican a una estructura. Es clara la importancia de evitar deformaciones tan grandes que impidan a la estructura cumplir el propósito para el que está destinada. Pero el análisis de las deformaciones también puede ayudar en la determinación de esfuerzos. De hecho, no siempre es posible determinar las fuerzas en los elementos de una estructura aplicando únicamente los principios de la estática. Esto se debe a que la estática se basa en la suposición de estructuras rígidas e indeformables. Considerando las estructuras de ingeniería como *deformables* y analizando las deformaciones en sus diversos elementos, será posible calcular las fuerzas que son *estáticamente indeterminadas*. La distribución de esfuerzos en un elemento dado es estáticamente indeterminada, aun cuando la fuerza en tal elemento se conozca.

En este capítulo se considerarán las deformaciones de un elemento estructural como una varilla, barra o placa sometida a *carga axial.* Primero se definirá la *deformación normal* ϵ en un elemento como la *deformación del elemento por unidad de longitud*. Al elaborar la gráfica del esfuerzo σ contra la deformación ϵ a medida que la carga aplicada al elemento se incrementa, se obtendrá el *diagrama de esfuerzo-deformación* para el material utilizado. De dicho diagrama será posible determinar algunas propiedades importantes del material, como su *módulo de elasticidad* y si el material es *dúctil* o *frágil*. Se verá que, aunque el comportamiento de la mayoría de los materiales es independiente de la dirección en la que se aplique la carga, la respuesta de los materiales compuestos reforzados con fibras depende de la dirección de la carga.

Del diagrama esfuerzo-deformación, también se determinará si las deformaciones en la probeta desaparecerán después de que la carga haya sido retirada, en cuyo caso se dice que el material se comporta *elásticamente*, o si resultará en una *deformación permanente* o *deformación plástica*.

Se estudiará al fenómeno de *fatiga*, que causa que los componentes estructurales o de máquinas fallen después de un número muy grande de cargas repetidas, aunque los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico.

En las secciones 2.2 y 2.3 se considerarán *problemas estáticamente indeterminados*, en los que las reacciones y las fuerzas internas *no pueden* determinarse únicamente por la estática. Las ecuaciones de equilibrio que se deducen del diagrama de cuerpo libre del elemento deben ser complementadas por relaciones que involucran deformaciones, las cuales se obtienen de la geometría del problema.

En las secciones 2.4 a 2.8 se introducirán las constantes adicionales asociadas con materiales isotrópicos, es decir, materiales cuyas características mecánicas son independientes de la dirección. Incluyen la *relación de Poisson*, que relaciona las deformaciones lateral y axial, el *módulo volumétrico de elasticidad*, que caracteriza el cambio en el volumen de un material bajo presión hidrostática y el *módulo de rigidez*, que relaciona las componentes del esfuerzo cortante y de la deformación unitaria cortante. También se deducirán las relaciones de esfuerzo-deformación para un material isotrópico bajo carga multiaxial.

Se desarrollarán las relaciones de esfuerzo-deformación que involucran varios valores distintos del módulo de elasticidad, de la relación de Poisson y del módulo de rigidez para materiales compuestos reforzados con fibras bajo carga multiaxial. A pesar de que estos materiales no son isotrópicos, suelen presentar propiedades *ortotrópicas* especiales.

En el capítulo 1 se supuso que los esfuerzos se encuentran distribuidos de manera uniforme en cualquier sección transversal dada y también que estos permanecen dentro del rango elástico. La validez de la primera suposición se estudiará en la sección 2.10, mientras que las *concentraciones de esfuerzos* cerca de agujeros y filetes circulares en barras planas se considerarán en la sección 2.11. Las secciones 2.12 y 2.13 abordarán el análisis de esfuerzos y deformaciones en elementos hechos de materiales dúctiles cuando se sobrepasa el punto de cedencia del material, lo que resulta en *deformaciones plásticas* permanentes y *esfuerzos residuales*.

2.1 INTRODUCCIÓN AL ESFUERZO Y LA DEFORMACIÓN

2.1A Deformación normal bajo carga axial

Considere una varilla BC, de longitud L y con un área uniforme de sección transversal A que está suspendida en B (figura 2.1a). Si se aplica una carga **P** al extremo C, la varilla se alargará (figura 2.1b). Al graficar la magnitud P de la carga contra el alargamiento total δ (letra griega delta), se obtiene un determinado diagrama de carga-deformación (figura 2.2). Si bien este diagrama contiene información útil para el análisis de la varilla considerada, no puede emplearse directamente para predecir la deformación de una varilla del mismo material, pero de diferentes dimensiones. De hecho, se observa que, si un alargamiento δ se produce en la varilla BC por una carga **P**, se requiere una carga 2**P** para causar el mismo alargamiento en una varilla $B'C'$ de la misma longitud L, pero con un área de sección transversal $2A$ (figura 2.3). Se nota que, en ambos casos, el valor del esfuerzo es el mismo: $\sigma = P/A$. Por otra parte, una carga **P** aplicada a la varilla $B''C''$, con la misma área de sección transversal A, pero de longitud $2L$, produce un alargamiento 2δ en dicha varilla (figura 2.4), es decir, un alargamiento que es el doble del alargamiento δ producido en la varilla BC. En ambos casos la razón de alargamiento sobre la longitud de la varilla es la misma e igual a δ/L. Esto introduce el concepto de *deformación unitaria*: se define la *deformación unitaria normal* en una varilla bajo carga axial como la *deformación por unidad de longitud* de dicha varilla. La deformación unitaria normal, ϵ (letra griega épsilon), es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

Al graficar el esfuerzo $\sigma = P/A$ contra la deformación $\epsilon = \delta/L$ se obtiene una curva que es característica de las propiedades del material, pero no depende de las dimensiones de la probeta utilizada. Esta curva se denomina *diagrama de esfuerzo-deformación*.

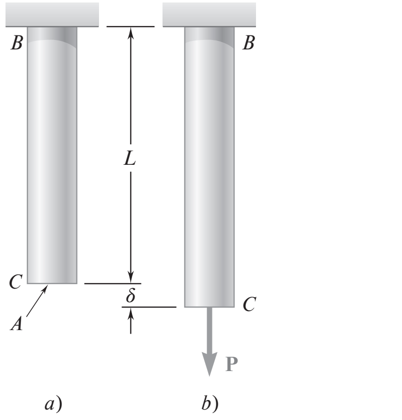


Figura 2.1 Barra cargada axialmente no deformada y deformada.

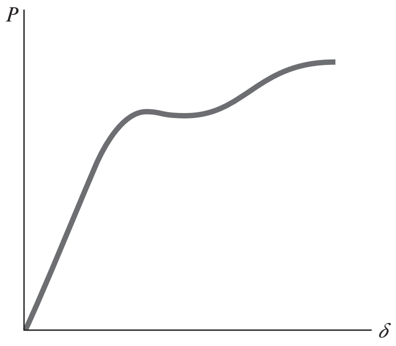


Figura 2.2 Diagrama de carga-deformación.

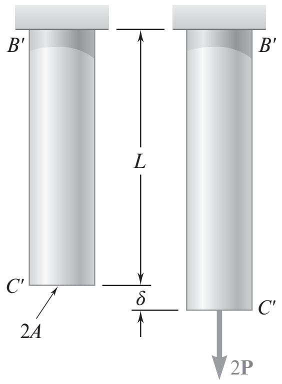


Figura 2.3 Se requiere dos veces la carga para obtener el mismo alargamiento δ cuando se duplica el área de la sección transversal.

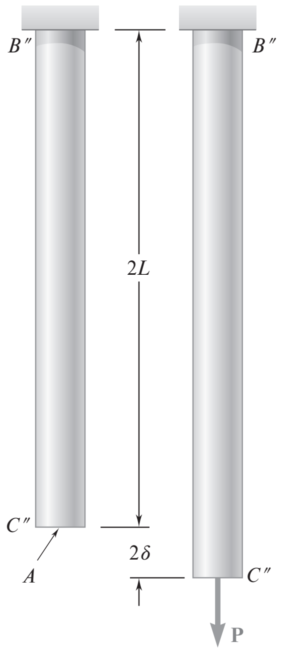


Figura 2.4 El alargamiento se duplica al duplicarse la longitud de la varilla y al mantener iguales la carga **P** y el área A de la sección transversal.

Puesto que la varilla BC de la figura 2.1 tiene una sección transversal uniforme con área A, puede suponerse que el esfuerzo normal σ tiene un valor constante P/A en toda la varilla. La deformación unitaria ϵ es la razón del alargamiento total δ sobre el largo total L de la varilla. Esto también es consistente para toda la varilla. Sin embargo, en el caso de un elemento de área variable de sección transversal A, el esfuerzo normal $\sigma = P/A$ varía a lo largo del elemento, y es necesario definir la deformación unitaria en un punto dado Q considerando un pequeño elemento con longitud sin deformar Δx

(figura 2.5). Si $\Delta\delta$ denota la deformación del elemento bajo la carga dada, la *deformación normal en el punto Q* se define como

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \qquad (2.2)$$

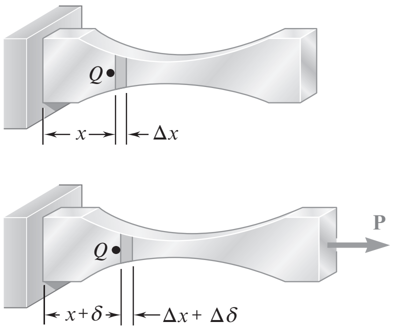


Figura 2.5 Deformación de un elemento con sección transversal variable cargado axialmente.

Como la deformación y la longitud se expresan en las mismas unidades, la deformación normal ϵ obtenida de dividir δ entre L (o $d\delta$ entre dx) es una *cantidad adimensional*. Por lo tanto, se obtiene el mismo valor numérico de la deformación normal en un elemento dado, ya sea que se empleen unidades métricas SI o unidades de uso común en Estados Unidos. Considere, por ejemplo, una barra con una longitud $L = 0.600$ m y sección transversal uniforme, que sufre una deformación $\delta = 150 \times 10^{-6}$ m. La deformación unitaria correspondiente es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \times 10^{-6}\,\text{m}}{0.600\text{ m}} = 250 \times 10^{-6}\text{ m/m} = 250 \times 10^{-6}$$

Advierta que la deformación podría haberse expresado en micrómetros: $\delta = 150\ \mu$m y la respuesta en micros (μ):

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150\,\mu\text{m}}{0.600\text{ m}} = 250\,\mu\text{m/m} = 250\,\mu$$

Si se emplean unidades del sistema inglés, la longitud y la deformación de la misma barra son $L = 23.6$ in y $\delta = 5.91 \times 10^{-3}$ in. La deformación correspondiente es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{5.91 \times 10^{-3}\text{ in}}{23.6\text{ in}} = 250 \times 10^{-6}\,\text{in/in}$$

que es el mismo valor que se encontró al utilizar las unidades del SI. Se acostumbra, sin embargo, cuando las longitudes y las deformaciones se expresan en pulgadas o micropulgadas (μin), conservar las unidades originales en la expresión obtenida para la deformación. Así, en el ejemplo previo, la deformación se registraría como $\epsilon = 250 \times 10^{-6}$ in/in o $\epsilon = 250\ \mu$in/in.

2.1B Diagrama esfuerzo-deformación

Ensayo de tensión. Para obtener el diagrama de esfuerzo-deformación de un material, se lleva a cabo un *ensayo de tensión* sobre una probeta del material. En la fotografía 2.1 se muestra un tipo de probeta. El área de la sección transversal de la sección cilíndrica central de la probeta se determina exactamente y se hacen dos marcas de calibración en dicha porción a una separación de L_0. La distancia L_0 se conoce como la *longitud base* de la probeta.

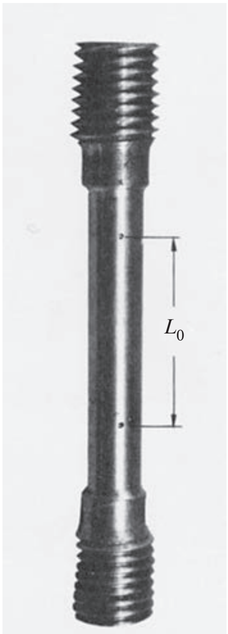
La probeta se coloca en la máquina de ensayo (fotografía 2.2), que se usa para aplicar una carga céntrica **P**. Al aumentar la carga **P**, también se incrementa la distancia L entre las dos marcas base de la probeta (fotografía 2.3). La distancia L se mide con un indicador de carátula, y el alargamiento $\delta = L - L_0$ se registra para cada valor de P. Con frecuencia un segundo indicador de carátula se emplea de manera simultánea para medir y registrar el cambio de diámetro del espécimen. Para cada par de lecturas P y δ, el esfuerzo de ingeniería σ es

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \qquad (2.3)$$

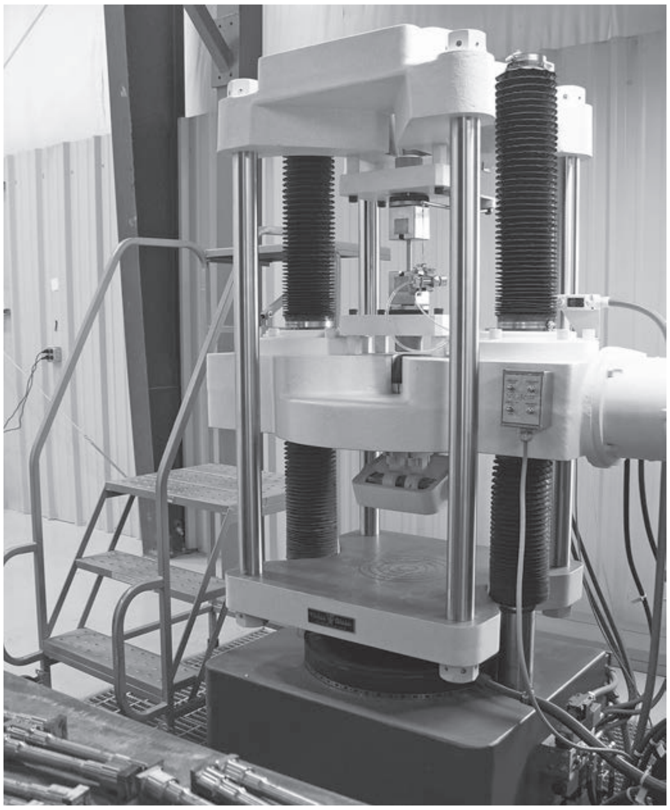
y la deformación unitaria de ingeniería ϵ es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} \qquad (2.4)$$

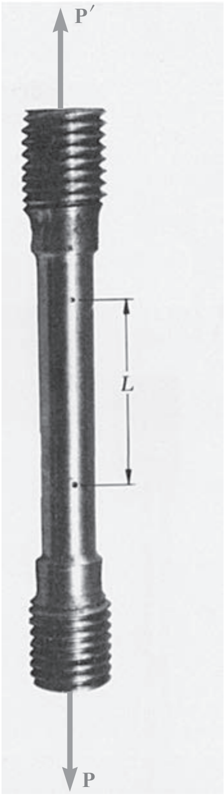
El diagrama de esfuerzo-deformación se puede obtener graficando ϵ como la abscisa y σ como la ordenada.



Fotografía 2.1 Probeta típica para ensayo de tensión. La longitud base sin deformar es L_0.



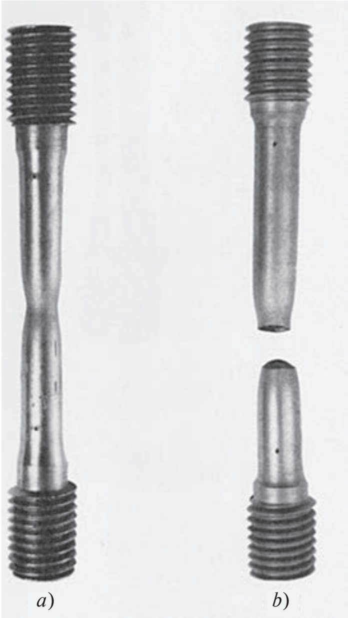
Fotografía 2.2 Máquina universal de pruebas empleada para realizar ensayos a tensión en probetas.



Fotografía 2.3 Probeta de ensayo a tensión con una carga P y una longitud deformada $L > L_0$.

Los diagramas esfuerzo-deformación de los materiales varían en forma considerable, y los distintos ensayos de tensión llevados a cabo sobre el mismo material pueden arrojar resultados diferentes, dependiendo de la temperatura de la probeta y de la velocidad de aplicación de la carga. Sin embargo, es posible distinguir algunas características comunes entre los diagramas de esfuerzo-deformación para dividir los materiales en dos amplias categorías: materiales *dúctiles* y *frágiles*.

Los materiales dúctiles, como el acero estructural, así como muchas aleaciones de otros metales, se caracterizan por su capacidad de *fluir* a temperaturas normales. Al someterse la probeta a una carga que aumenta, su longitud se incrementa primero linealmente con la carga y a una tasa muy lenta. Así, la porción inicial del diagrama de esfuerzo-deformación es una línea recta con una pendiente pronunciada (figura 2.6). No obstante, después de alcanzar un valor crítico σ_Y del esfuerzo, la probeta experimenta una gran deformación con un incremento relativamente pequeño de la carga aplicada. Esta deformación es causada por el deslizamiento del material a lo largo de superficies oblicuas y se debe sobre todo a esfuerzos cortantes. Después de haber alcanzado un cierto valor máximo de carga, el diámetro de una porción de la probeta comienza a disminuir, debido a la inestabilidad local (fotografía 2.4*a*). Este fenómeno se conoce como *estricción.* Después de que comienza la estricción, son suficientes cargas algo menores para lograr que la probeta se alargue aún más, hasta que finalmente se fracture (fotografía 2.4*b*). Puede verse que la fractura ocurre a lo largo de una superficie con forma de cono que forma un ángulo de, aproximadamente, 45° con la superficie original de la probeta. Esto indica que el cortante es el principal responsable de la falla de los materiales dúctiles, y confirma el hecho de que, bajo una carga axial, los esfuerzos cortantes son máximos en las superficies que forman un ángulo de 45° con la carga (vea sección 1.3). Observe en la figura 2.6 que el alargamiento de una probeta dúctil después de la ruptura puede ser de hasta 200 veces su deformación en fluencia. El esfuerzo σ_Y en el que comienza la fluencia se llama *resistencia de fluencia* o *cedencia* del material. El esfuerzo σ_U que corresponde a la máxima carga aplicada al material se conoce como la *resistencia última* y el esfuerzo σ_B correspondiente a la fractura se denomina *resistencia a la fractura.*



Fotografía 2.4 Probetas de material dúctil después de un ensayo: *a*) con estricción en la sección transversal, *b*) fracturada.

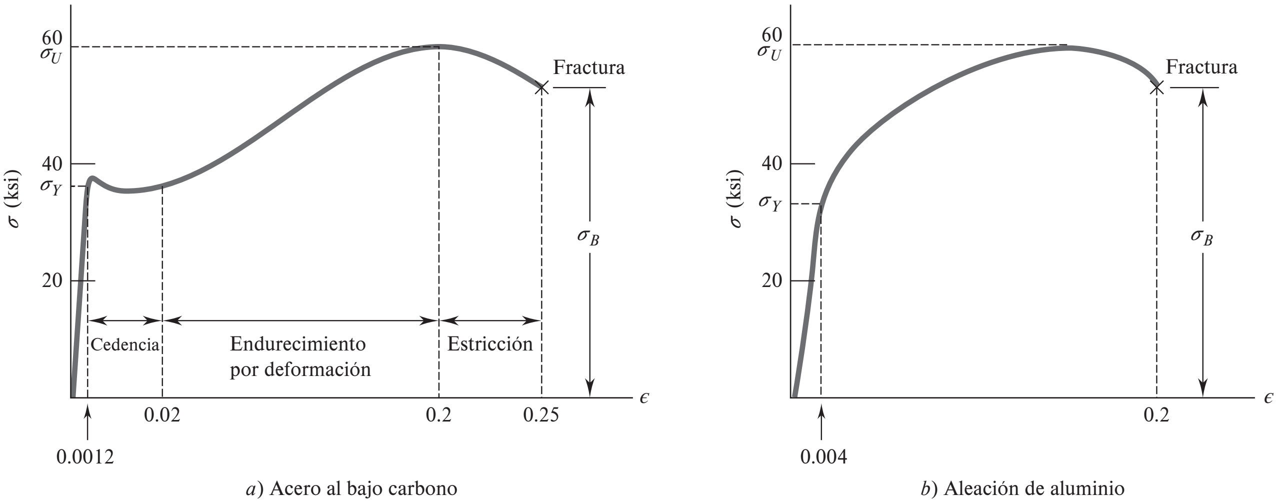


Figura 2.6 Diagramas esfuerzo-deformación de dos materiales dúctiles típicos.

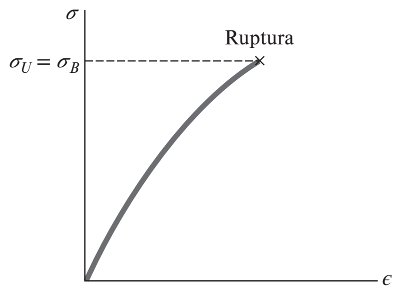
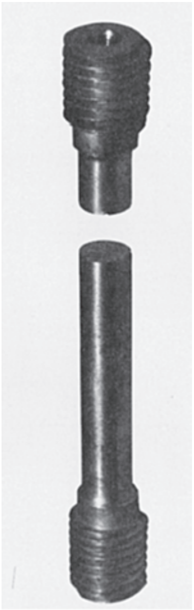


Figura 2.7 Diagrama esfuerzo-deformación para un material frágil típico.



Fotografía 2.5 Probeta de un material frágil después de la ruptura.

Los materiales frágiles como el hierro fundido, el vidrio y la piedra se caracterizan por el fenómeno de que la fractura ocurre sin un cambio notable previo de la tasa de alargamiento (figura 2.7). Así, para los materiales frágiles, no hay diferencia entre la resistencia última y la resistencia a la fractura. Además, la deformación unitaria al momento de la fractura es mucho menor para los materiales frágiles que para los materiales dúctiles. En la fotografía 2.5 se observa que no hay estricción alguna en la probeta en el caso de un material frágil, y que la fractura ocurre a lo largo de una superficie perpendicular a la carga. Por lo tanto, los esfuerzos normales son los principales responsables de la falla de los materiales frágiles.†

Los diagramas esfuerzo-deformación de la figura 2.6 muestran que el acero estructural y el aluminio tienen distintas características de cedencia aunque ambos son dúctiles. En el caso del acero estructural (figura 2.6*a*), el esfuerzo permanece constante a lo largo de un gran rango de valores de deformación después de la aparición de la cedencia o fluencia. Posteriormente debe incrementarse el esfuerzo para seguir alargando la probeta, hasta que se alcance el valor máximo σ_U. Esto se debe a la propiedad del material conocida como *endurecimiento por deformación.* La *resistencia a la cedencia* del acero estructural se determina durante el ensayo de tensión vigilando la carga que se muestra en el indicador de la máquina de ensayo. Después de aumentar en forma estable, se observa que la carga decae en forma súbita a un valor ligeramente menor, que se mantiene por un cierto periodo mientras que la probeta continúa alargándose. En un ensayo realizado con cuidado, puede distinguirse entre el *punto superior de cedencia*, que corresponde a la carga alcanzada justo antes de que comience la fluencia, y el *punto inferior de cedencia*, que corresponde a la carga requerida para mantener la fluencia. Debido a que el punto superior de cedencia es transitorio, debe emplearse el punto inferior de cedencia para determinar la resistencia a la cedencia del material.

En el caso del aluminio (figura 2.6*b*) y de muchos otros materiales dúctiles el esfuerzo continúa aumentando, aunque no linealmente, hasta alcanzar la resistencia última. Entonces comienza la estricción, que conduce inevitablemente a la ruptura. Para tales materiales, la resistencia a la cedencia σ_Y se determina por el método de desviación. La resistencia a la cedencia con una desviación de 0.2%, por ejemplo, se obtiene dibujando por el punto del eje horizontal de abscisa $\epsilon = 0.2\%$ (o $\epsilon = 0.002$), una línea paralela a la porción inicial en línea recta del diagrama de esfuerzo-deformación (figura

† Se ha supuesto que los ensayos de tensión descritos en esta sección se efectuaron en temperaturas normales. Sin embargo, un material que es dúctil a temperaturas normales puede mostrar las características de un material frágil a muy bajas temperaturas, mientras que un material normalmente frágil puede comportarse de manera dúctil a muy altas temperaturas. A temperaturas distintas de la normal, por lo tanto, hay que referirse a un *material en estado dúctil* o a un *material en estado frágil,* más que a un material dúctil o frágil.

2.8). El esfuerzo σ_Y obtenido de esta manera corresponde al punto Y y se define como la resistencia a la cedencia a una desviación de 0.2%.

Una medida estándar de la ductilidad de un material es su *porcentaje de alargamiento*:

$$\text{Porcentaje de alargamiento} = 100 \frac{L_B - L_0}{L_0}$$

donde L_0 y L_B son la longitud inicial de la probeta para ensayo de tensión y su longitud final a la ruptura. El alargamiento mínimo especificado para una longitud calibrada de 2 in para los aceros más usados con resistencias a la cedencia de hasta 50 ksi es de 21%. Esto significa que la deformación promedio a la fractura debería ser al menos de 0.21 in/in.

Otra medida de la ductilidad que en ocasiones se emplea es el *porcentaje de reducción de área*:

$$\text{Porcentaje de reducción de área} = 100 \frac{A_0 - A_B}{A_0}$$

donde A_0 y A_B son, respectivamente, el área inicial de la sección transversal de la probeta y su área de sección transversal mínima a la fractura. Para el acero estructural, es común encontrar porcentajes de reducción de área de 60 a 70%.

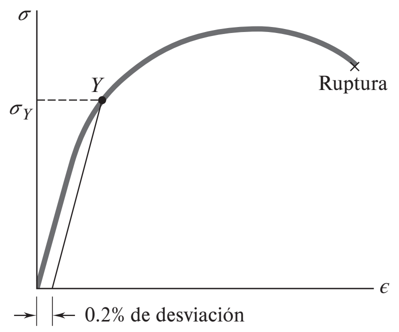


Figura 2.8 Determinación de la resistencia a la cedencia por el método de desviación de 0.2%.

Ensayo de compresión. Si una probeta de material dúctil se cargara a compresión en lugar de a tensión, la curva de esfuerzo-deformación sería esencialmente la misma a lo largo de su porción inicial en línea recta y del comienzo de la porción correspondiente a la cedencia y al endurecimiento por deformación. De relevancia particular es el hecho de que, para un acero dado, la resistencia a la cedencia es la misma tanto a tensión como a compresión. Para valores mayores de deformación, las curvas de esfuerzo-deformación a tensión y a compresión divergen, y deberá advertirse que no puede ocurrir estricción a compresión. Para la mayoría de los materiales frágiles, la resistencia última a compresión es mucho mayor que a tensión. Esto se debe a la presencia de fallas, como cavidades o grietas microscópicas, que tienden a debilitar al material a tensión, mientras que no afectan en forma significativa su resistencia a la falla por compresión.

Un ejemplo de material frágil con diferentes propiedades a tensión y a compresión es el *concreto*, cuyo diagrama esfuerzo-deformación se muestra en la figura 2.9. En el lado de tensión del diagrama, primero se observa un rango elástico lineal en el que la deformación es proporcional al esfuerzo. Después de que se ha alcanzado el punto de cedencia, la deformación aumenta más rápidamente que el esfuerzo hasta que ocurre la fractura. El comportamiento del material bajo compresión es diferente. Primero, el rango elástico lineal es significativamente mayor. Segundo, la ruptura no ocurre cuando el esfuerzo alcanza su máximo valor. En lugar de esto, el esfuerzo decrece en magnitud mientras que la deformación sigue aumentando hasta que la ruptura ocurre. Advierta

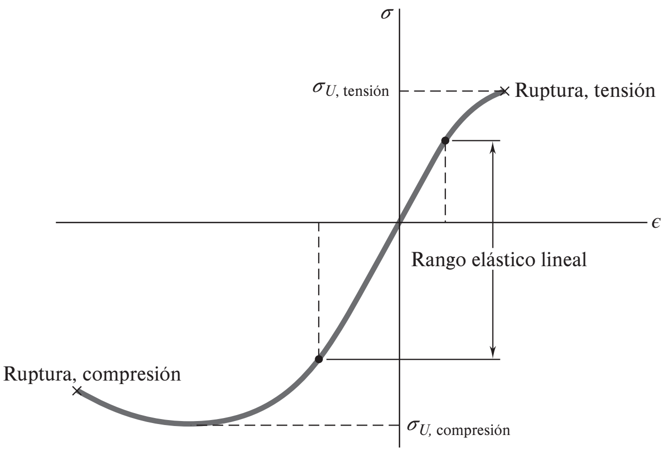


Figura 2.9 El diagrama esfuerzo-deformación del concreto muestra la diferencia en su respuesta a la tensión y a la compresión.

que el módulo de elasticidad, representado por la pendiente de la curva de esfuerzo-deformación en su porción lineal, es la misma en tensión que en compresión. Esto es cierto para la mayoría de los materiales frágiles.

*2.1C Esfuerzo y deformación verdaderos

Recuerde que el esfuerzo graficado en las figuras 2.6 y 2.7 se obtuvo al dividir la carga P entre el área de sección transversal A_0 de la probeta medida antes de que hubiera tenido lugar alguna deformación. Como el área de la sección transversal de la probeta disminuye cuando aumenta P, el esfuerzo graficado en estos diagramas no representa el esfuerzo real en la probeta. La diferencia entre el *esfuerzo ingenieril* $\sigma = P/A_0$ y el *esfuerzo real* $\sigma_t = P/A$ se vuelve evidente en los materiales dúctiles después de que ha aparecido la cedencia. En tanto que el esfuerzo ingenieril σ, que es directamente proporcional a la carga P, disminuye con P durante la fase de estricción, el esfuerzo real σ_t, que es proporcional a P pero también inversamente proporcional a A, sigue aumentando hasta que ocurre la fractura de la probeta.

Muchos científicos utilizan una definición de deformación diferente de la *deformación ingenieril* $\epsilon = \delta/L_0$. En lugar de emplear el alargamiento total δ y el valor original de la longitud calibrada L_0, utilizan todos los valores sucesivos de L que han registrado. Al dividir cada incremento ΔL de la distancia entre las marcas de calibración entre el valor correspondiente de L, se obtiene la deformación unitaria elemental $\Delta\epsilon = \Delta L/L$. Al sumar los valores sucesivos de $\Delta\epsilon$, la *deformación unitaria real* ϵ_t es

$$\epsilon_t = \Sigma\Delta\epsilon = \Sigma(\Delta L/L)$$

Al reemplazar la sumatoria por una integral, también puede expresarse la deformación unitaria real como:

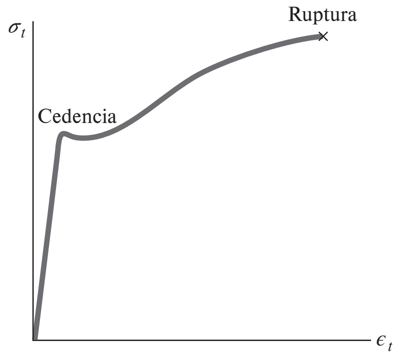


Figura 2.10 Esfuerzo real contra deformación real para un material dúctil típico.

$$\epsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \tag{2.5}$$

Al graficar el esfuerzo real contra la deformación unitaria real (figura 2.10) se refleja con mayor exactitud el comportamiento del material. Como se ha advertido, no hay disminución del esfuerzo real durante la fase de estricción. Además, los resultados obtenidos de los ensayos a tensión y a compresión darán, en esencia, la misma gráfica cuando se utilizan el esfuerzo real y la deformación unitaria real. No ocurre lo mismo para valores grandes de la deformación unitaria cuando se grafica el esfuerzo ingenieril contra la deformación unitaria ingenieril. Sin embargo, los ingenieros, cuya responsabilidad es determinar si una carga P produce un esfuerzo aceptable y una deformación aceptable en un elemento dado, desearán utilizar un diagrama basado en las ecuaciones (2.3) y (2.4); estas expresiones involucran el área de la sección transversal A_0 y la longitud L_0 del elemento en su estado sin deformar, que pueden obtenerse con facilidad.

2.1D Ley de Hooke; módulo de elasticidad

Módulo de elasticidad. La mayor parte de las estructuras de ingeniería se diseñan para sufrir deformaciones relativamente pequeñas, que involucran solo la parte recta del diagrama de esfuerzo-deformación correspondiente. Para esa porción inicial del diagrama (figura 2.6), el esfuerzo σ es directamente proporcional a la deformación ϵ:

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.6}$$

Esta relación se conoce como *ley de Hooke*, en honor de Robert Hooke (1635-1703), científico inglés y uno de los primeros fundadores de la mecánica aplicada. El coeficiente E es el *módulo de elasticidad* del material o *módulo de Young*, en honor del científico inglés Thomas Young (1773-1829). Como la deformación ϵ es una cantidad adimensional, E se expresa en las mismas unidades que el esfuerzo σ —en pascales o en

uno de sus múltiplos si se emplean unidades del SI, y en psi o ksi para las unidades de uso común en Estados Unidos—.

El máximo valor de esfuerzo para el que puede emplearse la ley de Hooke en un material dado se conoce como *límite de proporcionalidad* de ese material. En el caso de los materiales dúctiles que poseen un punto de cedencia bien definido, como en la figura 2.6*a*, el límite de proporcionalidad casi coincide con el punto de cedencia. Para otros materiales, el límite de proporcionalidad no puede definirse con tanta facilidad, ya que es difícil determinar con exactitud el valor del esfuerzo σ para el que la relación entre σ y ϵ deja de ser lineal. Sin embargo, en el caso de tales materiales el uso de la ley de Hooke para valores apenas mayores que el límite real de proporcionalidad no conducirá a ningún error significativo.

Algunas propiedades físicas de los metales estructurales, como la resistencia, la ductilidad y la resistencia a la corrosión, pueden verse muy afectadas debido a causas como la aleación, el tratamiento térmico y el proceso de manufactura empleado. Por ejemplo, se observa en los diagramas de esfuerzo-deformación del hierro puro y de tres diferentes grados de acero (figura 2.11) que existen grandes variaciones en la resistencia a la cedencia, la resistencia última y la deformación unitaria final (ductilidad) entre estos cuatro metales. Todos ellos, sin embargo, poseen el mismo módulo de elasticidad; en otras palabras, su "rigidez" o capacidad para resistir una deformación dentro del rango lineal es la misma. Por lo tanto, si un acero de alta resistencia sustituye a uno de menor resistencia, y si todas las dimensiones permanecen iguales, la estructura tendrá un incremento en su capacidad de carga, pero su rigidez permanecerá sin cambio.

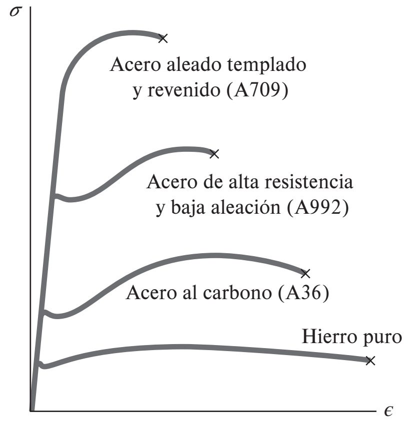


Figura 2.11 Diagramas esfuerzo-deformación para el hierro y diferentes grados de acero.

Para los materiales considerados hasta ahora, la relación entre el esfuerzo normal y la deformación normal, $\sigma = E\epsilon$, es independiente de la dirección de la carga. Esto se debe a que las propiedades mecánicas de cada material, incluyendo su módulo de elasticidad E, son independientes de la dirección considerada. Se dice que tales materiales son *isotrópicos.* Los materiales cuyas propiedades dependen de la dirección considerada se conocen como *anisotrópicos*.

Materiales compuestos reforzados con fibras. Una clase importante de materiales anisotrópicos está formada por los *materiales compuestos reforzados con fibras.* Estos materiales compuestos se obtienen encapsulando fibras de un material resistente y rígido en un material más débil y blando, conocido como *matriz.* Los materiales más empleados como fibras son el grafito, el vidrio y los polímeros, en tanto que varios tipos de resinas se emplean como matrices. La figura 2.12 muestra una capa, o *lámina*, de un material compuesto que consiste en un gran número de fibras paralelas encapsuladas en una matriz. Una carga axial aplicada a la lámina a lo largo del eje x (en una dirección paralela a las fibras) creará un esfuerzo normal σ_x en la lámina y su correspondiente deformación unitaria ϵ_x, que satisfarán la ley de Hooke al aumentarse la carga y en tanto no se alcance el límite elástico de la lámina. De manera similar, una carga axial aplicada a lo largo del eje y (en una dirección perpendicular a la lámina) creará un esfuerzo normal σ_y y una deformación unitaria normal ϵ_y, y una carga axial aplicada a lo largo del eje z creará un esfuerzo normal σ_z y una deformación normal ϵ_z, donde todas satisfarán la ley de Hooke. No obstante, los módulos de elasticidad E_x, E_y y E_z correspondientes a cada una de las anteriores situaciones de carga, serán diferentes. Debido a que las fibras están paralelas al eje x, la lámina ofrecerá una resistencia mucho mayor a la carga dirigida a lo largo del eje x que a la dirigida a lo largo de los ejes y o z, y E_x será mucho mayor que E_y o E_z.

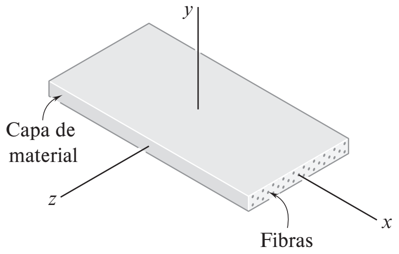


Figura 2.12 Capa de material compuesto reforzado con fibras.

Un *laminado* plano se obtiene superponiendo un número de capas o láminas. Si el laminado será sometido solo a carga axial que cause tensión, las fibras en todas las capas deberán tener la misma orientación que la carga para obtener la máxima resistencia posible. Pero si el laminado puede estar en compresión, el material de la matriz puede no ser tan fuerte como para evitar que las fibras se tuerzan o pandeen. La estabilidad lateral del laminado puede entonces incrementarse colocando algunas de las capas de tal manera que sus fibras queden perpendiculares a la carga. También es posible colocar algunas capas para que sus fibras estén orientadas a 30°, 45° o 60° a la carga a fin de incrementar la resistencia del laminado al cortante en el plano. Los materiales compuestos reforzados con fibras serán analizados con mayor detalle en la sección 2.9, donde se considerará su comportamiento bajo cargas multiaxiales.

2.1E Comportamiento elástico contra comportamiento plástico de un material

Si las deformaciones causadas en una probeta por la aplicación de una carga dada desaparecen cuando se retira la carga, se dice que el material se comporta *elásticamente*. El máximo valor de esfuerzo para el que el material se comporte elásticamente se denomina el *límite elástico* del material.

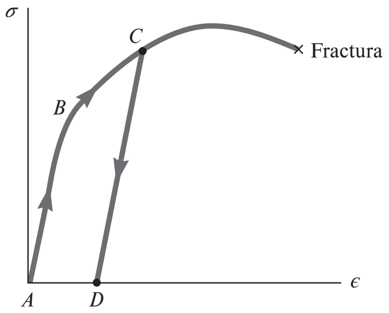


Figura 2.13 Respuesta de esfuerzo-deformación de un material dúctil al que se carga más allá de la cedencia para después descargarlo.

Si el material tiene un punto de cedencia bien definido como en la figura 2.6*a*, el límite elástico, el límite de proporcionalidad y el punto de cedencia son esencialmente los mismos. En otras palabras, el material se comporta elástica y linealmente mientras el esfuerzo se mantenga por debajo del punto de cedencia. Sin embargo, si se alcanza el punto de cedencia, esta ocurre como se describió en la sección 2.1B y, al retirar la carga, el esfuerzo y la deformación unitaria disminuyen de manera lineal, a lo largo de una línea *CD* paralela a la parte recta *AB* de la curva de carga (figura 2.13). Si ϵ no regresa a cero después de que la carga ha sido retirada indica que ha ocurrido una *deformación permanente* o *deformación plástica* en el material. Para la mayor parte de los materiales, la deformación plástica depende no tan solo del máximo valor alcanzado por el esfuerzo, sino también del tiempo que pasa antes de que se retire la carga. La parte dependiente del esfuerzo de la deformación plástica se denomina *deslizamiento*, y la parte dependiente del tiempo, que también está influida por la temperatura, se llama *termoelasticidad.*

Cuando un material no posee un punto de cedencia bien definido, el límite elástico no puede determinarse con precisión. Sin embargo, suponer que el límite elástico es igual a la resistencia a la cedencia, como se ha definido por el método de desviación (sección 2.1B), genera un pequeño error. De hecho, con referencia a la figura 2.8, observe que la línea recta usada para determinar el punto *Y* también representa la curva de descarga después de haber alcanzado un esfuerzo máximo σ_Y. Aunque el material no se comporta de una manera verdaderamente elástica, la deformación plástica resultante es tan pequeña como la desviación elegida.

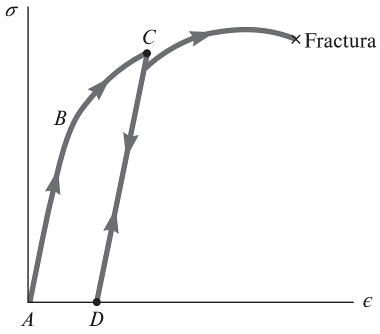


Figura 2.14 Respuesta de esfuerzo-deformación de un material dúctil recargado después de una cedencia y una descarga previas.

Si, después de ser cargada y descargada (figura 2.14), la probeta se carga de nuevo, la nueva curva de carga seguirá muy de cerca la anterior curva hasta que casi alcance el punto *C*; entonces, se doblará a la derecha y se conectará con la porción curva del diagrama de esfuerzo-deformación original. Esta parte recta de la nueva curva de carga es más larga que la correspondiente a la curva inicial. Así, el límite de proporcionalidad y el límite elástico han aumentado como resultado del endurecimiento por deformación ocurrido durante la anterior carga de la probeta. Sin embargo, ya que el punto de ruptura *R* permanece sin cambio, la ductilidad de la probeta, que ahora deberá medirse desde el punto *D*, ha disminuido.

En los análisis anteriores se supuso que la probeta fue cargada dos veces en la misma dirección (es decir, que ambas cargas fueron de tensión). Considere ahora el caso en que la segunda carga se aplica en una dirección opuesta a la primera. Suponga que el material es acero dulce, para el cual el punto de cedencia es el mismo a tensión y a compresión. La carga inicial es de tensión y se aplica hasta que se alcanza el punto *C* en el diagrama de esfuerzo-deformación (figura 2.15). Después de descargar (punto *D*), se aplica una carga de compresión, la cual provoca que el material alcance el punto *H*, donde el esfuerzo es igual a $-\sigma_Y$. Se advierte que la porción *DH* del diagrama esfuerzo-deformación es curva y no muestra ningún punto de cedencia bien definido. A esto se le conoce como *efecto Bauschinger.* Al mantenerse la carga de compresión, el material fluye a lo largo de la línea *HJ*.

Si la carga se retira después de alcanzar el punto *J*, el esfuerzo retorna a cero a lo largo de la línea *JK*, y se observa que la pendiente de *JK* es igual al módulo de elasticidad *E*. La deformación permanente resultante *AK* será positiva, negativa o cero, dependiendo de las longitudes de los segmentos *BC* y *HJ*. Si una carga de tensión se aplica de nuevo a la probeta, la porción del diagrama esfuerzo-deformación que comienza en *K* (línea punteada) se curvará hacia arriba y hacia la derecha hasta que se alcance el esfuerzo de cedencia σ_Y.

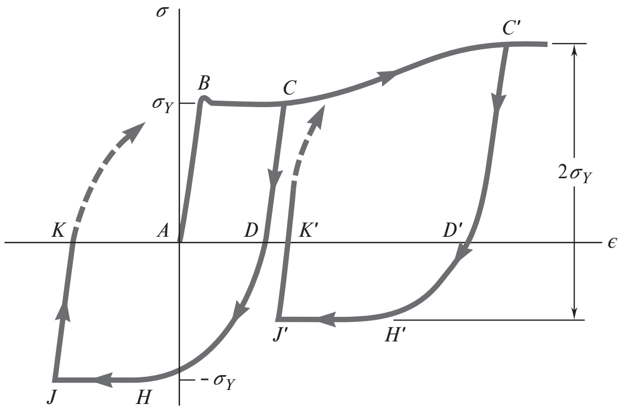


Figura 2.15 Respuesta de esfuerzo-deformación para el acero dulce sometido a dos casos de carga inversa.

Si la carga inicial es lo suficientemente grande para causar el endurecimiento por deformación del material (punto *C*′), la descarga ocurre a lo largo de la línea *C*′*D*′. Al aplicarse la carga inversa, el esfuerzo se vuelve de compresión, alcanzando su valor máximo en *H*′ y manteniéndolo mientras el material cede a lo largo de la línea *H*′*J*′. En tanto el máximo valor para el esfuerzo de compresión sea menor que σ_Y, el cambio total en esfuerzo entre *C*′ y *H*′ es aún igual a $2\sigma_Y$.

Si el punto *K* o *K*′ coincide con el origen *A* del diagrama, la deformación permanente es igual a cero, y parecerá que la probeta ha regresado a su condición original. No obstante, habrán ocurrido cambios internos y la probeta se fracturará sin advertencia previa después de algunas repeticiones de la secuencia de carga. Esto indica que las excesivas deformaciones plásticas a las que ha sido sometida la probeta han causado un cambio radical en las características del material. Por lo tanto, las cargas inversas dentro del rango plástico se permiten pocas veces, por lo que solo se realizan en condiciones cuidadosamente controladas. Tales situaciones ocurren en el enderezado de materiales dañados y en el alineamiento final de una estructura o máquina.

2.1F Cargas repetidas y fatiga

Podría concluirse que una carga dada puede repetirse muchas veces, siempre y cuando los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico. Tal conclusión es correcta para cargas que se repiten unas cuantas docenas o aun centenares de veces. Sin embargo, no es correcta cuando las cargas se repiten millares o millones de veces. En tales casos, la fractura ocurrirá aun cuando el esfuerzo sea mucho más bajo que la resistencia estática a la fractura; este fenómeno se conoce como *fatiga.* Una falla por fatiga es de naturaleza frágil, aun para materiales normalmente dúctiles.

La fatiga debe ser considerada en el diseño de todos los elementos estructurales y de máquinas que se encuentren sujetas a cargas repetitivas o fluctuantes. El número de ciclos de carga que puede esperarse durante la vida útil del componente varía mucho. Por ejemplo, una viga que soporta a una grúa industrial puede cargarse hasta dos millones de veces en 25 años (alrededor de 300 cargas por día de trabajo), el cigüeñal de un automóvil será cargado alrededor de quinientos mil millones de veces si el automóvil opera a lo largo de 200 000 millas, y un álabe individual de una turbina podrá cargarse varios centenares de miles de millones de veces durante su vida.

Algunas cargas son de naturaleza fluctuante. Por ejemplo, el paso del tránsito sobre un puente causará niveles de esfuerzo que fluctuarán alrededor del nivel de esfuerzo debido al peso del puente. Una condición más severa sucede cuando se presenta una inversión completa de la carga durante el ciclo de carga. Los esfuerzos en el eje de un carro de ferrocarril, por ejemplo, se invierten completamente cada media revolución de la rueda.

El número de ciclos de carga necesarios para causar la falla de una probeta a través de cargas sucesivas o cargas inversas repetidas puede determinarse experimentalmente

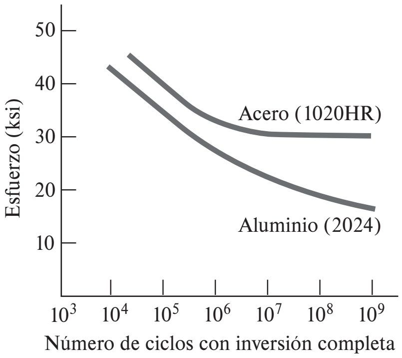
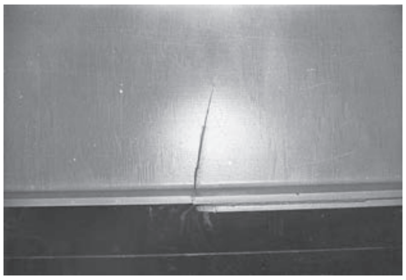


Figura 2.16 Curvas σ-n típicas.



Fotografía 2.6 Grieta por fatiga en un larguero de acero del puente Yellow Mill Pond, en Connecticut, Estados Unidos, antes de su reparación.

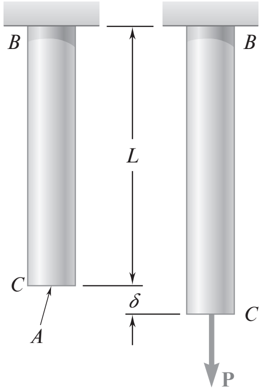


Figura 2.17 Barra cargada axialmente sin deformar y deformada.

para cualquier nivel dado de esfuerzo máximo. Si una serie de ensayos se lleva a cabo, utilizando diferentes niveles de esfuerzo máximo, los datos resultantes podrán graficarse como una curva σ-n. Para cada ensayo, el esfuerzo máximo σ es graficado en la ordenada y el número de ciclos n en la abscisa. Debido al gran número de ciclos requerido para la ruptura, los n ciclos se grafican en una escala logarítmica.

Una curva típica σ-n para el acero se muestra en la figura 2.16. Si el esfuerzo máximo aplicado es alto, se requieren pocos ciclos, relativamente, para causar la ruptura. Al reducirse la magnitud del esfuerzo máximo, el número de ciclos requeridos para causar la ruptura aumenta hasta que se alcanza el *límite de resistencia*. Este es el esfuerzo para el cual la falla no ocurre, aun cuando haya un número infinitamente grande de ciclos de carga. Para un acero al bajo carbono, como el acero estructural, el límite de resistencia es aproximadamente la mitad de su resistencia última.

Para los metales no ferrosos, como el aluminio y el cobre, una curva típica σ-n (figura 2.16) muestra que el esfuerzo requerido para la falla continúa disminuyendo al aumentar el número de ciclos de carga. Para tales metales, el *límite de fatiga* es el esfuerzo que corresponde a la falla después de un número específico de ciclos de carga.

El examen de especímenes de prueba, ejes, resortes y otros componentes que han fallado por fatiga muestra que la falla se inició en una grieta microscópica o en otra imperfección similar. En cada carga, la grieta se agrandó ligeramente. Durante los sucesivos ciclos de carga, la grieta se propagó en el material hasta que la cantidad de material sin dañar fue insuficiente para soportar la carga máxima, y una falla frágil y abrupta ocurrió. Por ejemplo, en la fotografía 2.6 se muestra una grieta por fatiga en el puente de una carretera, que inició en la irregularidad asociada con la soldadura de una cubierta y después se propagó a través de la brida y hacia el alma. Debido a que la falla por fatiga puede iniciarse en cualquier grieta o imperfección, la condición superficial de una probeta tiene un efecto importante en el límite de resistencia obtenido en el ensayo. El límite de resistencia para probetas maquinadas y pulidas es mayor que para componentes laminados o forjados, o para componentes corroídos. En aplicaciones para el mar o cercanas a él, o en otras aplicaciones donde se espera corrosión, se espera una reducción de hasta 50% en el límite de resistencia.

2.1G Deformaciones de elementos sometidos a carga axial

Considere una varilla homogénea BC de longitud L y sección transversal uniforme de área A sujeta a una carga axial céntrica **P** (figura 2.17). Si el esfuerzo axial resultante $\sigma = P/A$ no excede el límite de proporcionalidad del material, se aplica la ley de Hooke y

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.6}$$

de donde sigue que

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \tag{2.7}$$

Recuerde que la deformación ϵ se definió en la sección 2.1A como $\epsilon = \delta/L$, por lo que

$$\delta = \epsilon L \tag{2.8}$$

y al sustituir ϵ de la ecuación (2.7) en la ecuación (2.8):

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.9}$$

La ecuación (2.9) se usará solo si la varilla es homogénea (E constante), tiene una sección transversal uniforme con área A y está cargada en sus extremos. Si la varilla está cargada en otros puntos, o si consta de varias porciones con distintas secciones transversales y, posiblemente, distintos materiales, debe dividirse en partes que satisfagan de manera individual las condiciones requeridas para la aplicación de la fórmula (2.9). Si se usa la fuerza interna P_i, la longitud L_i, el área de sección transversal A_i y el módu-

lo de elasticidad E_i, correspondientes a la parte i, la deformación de la varilla entera será

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.10}$$

En el caso de un elemento con sección transversal variable (figura 2.18), la deformación ϵ depende de la posición del punto Q donde se le calcula y se define como $\epsilon = d\delta/dx$ (sección 2.1A). Al despejar $d\delta$ y sustituir ϵ de la ecuación (2.7), la deformación de un elemento de longitud dx es

$$d\delta = \epsilon\, dx = \frac{P\, dx}{AE}$$

El alargamiento total δ del elemento se obtiene al integrar esta expresión sobre la longitud L del elemento:

$$\delta = \int_0^L \frac{P\, dx}{AE} \tag{2.11}$$

La ecuación (2.11) deberá emplearse en lugar de (2.9) cuando el área de la sección transversal A sea una función de x, o cuando la fuerza interna P dependa de x, como es el caso de una varilla suspendida y sometida a la acción de su propio peso.

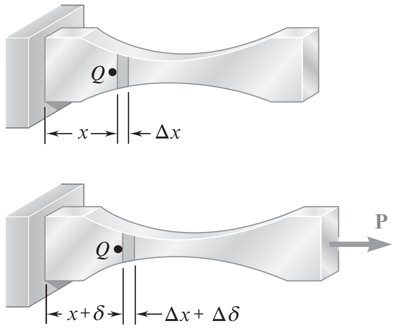


Figura 2.18 Deformación de un elemento con sección transversal variable cargado axialmente.

Aplicación de conceptos 2.1

Determine la deformación de la varilla de acero mostrada en la figura 2.19*a* bajo las cargas dadas ($E = 29 \times 10^6$ psi).

En la figura 2.19*b* se divide la varilla en tres partes componentes, por lo que

$$L_1 = L_2 = 12 \text{ in} \qquad L_3 = 16 \text{ in}$$
$$A_1 = A_2 = 0.9 \text{ in}^2 \qquad A_3 = 0.3 \text{ in}^2$$

Para encontrar las fuerzas internas P_1, P_2 y P_3, se deben hacer cortes a través de cada una de las partes, dibujando cada vez un diagrama de cuerpo libre de la porción de la varilla localizada a la derecha de la sección (figura 2.19*c*). Cada uno de los cuerpos libres está en equilibrio; por lo tanto

$$P_1 = 60 \text{ kips} = 60 \times 10^3 \text{ lb}$$
$$P_2 = -15 \text{ kips} = -15 \times 10^3 \text{ lb}$$
$$P_3 = 30 \text{ kips} = 30 \times 10^3 \text{ lb}$$

Con base en la ecuación (2.10)

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$
$$= \frac{1}{29 \times 10^6}\left[\frac{(60 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(-15 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(30 \times 10^3)(16)}{0.3}\right]$$
$$\delta = \frac{2.20 \times 10^6}{29 \times 10^6} = 75.9 \times 10^{-3} \text{ in}$$

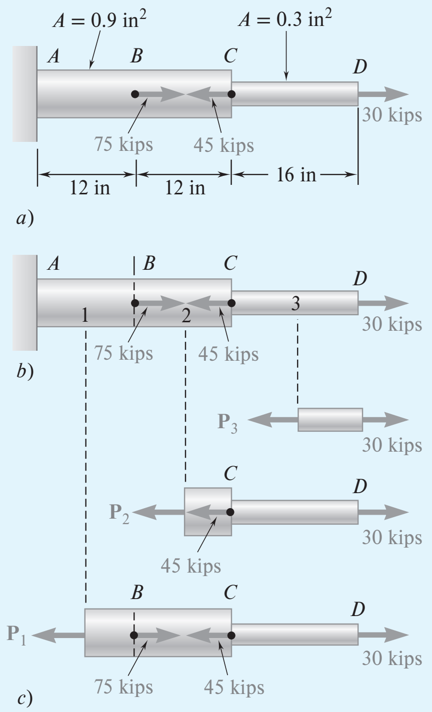


Figura 2.19 *a*) Varilla cargada axialmente. *b*) Varilla dividida en tres secciones. *c*) Tres diagramas de cuerpo libre seccionados con fuerzas internas resultantes P_1, P_2 y P_3.

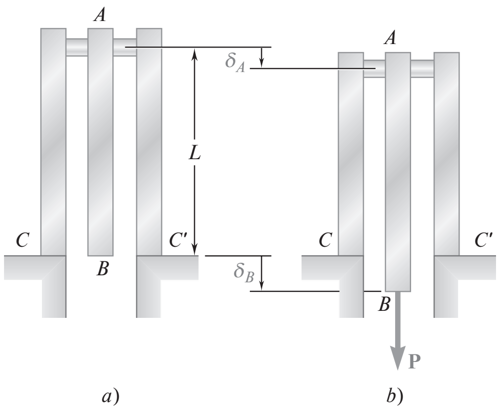


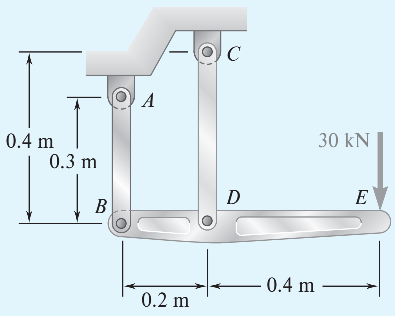
Figura 2.20 Ejemplo del desplazamiento relativo de un extremo, como se muestra en la barra de en medio. *a*) Sin carga. *b*) Con carga y deformación.

La varilla *BC* de la figura 2.17, que se utilizó para deducir la ecuación (2.9), y la varilla *AD* de la figura 2.19 tienen un extremo sujeto a un soporte fijo. En cada caso, la deformación δ de la varilla fue igual al desplazamiento de su extremo libre. Sin embargo, cuando ambos extremos de una varilla se mueven, la deformación de la varilla se mide por el *desplazamiento relativo* de un extremo de la varilla con respecto al otro. Considere el ensamble mostrado en la figura 2.20*a*, compuesto por tres barras elásticas de longitud L conectadas con un pasador rígido en A. Si una carga **P** se aplica en B (figura 2.20*b*), cada una de las tres barras se deformará. Como las barras *AC* y *AC′* están unidas a soportes fijos en C y C', su deformación común se mide por el desplazamiento δ_A del punto A. Por otra parte, ya que ambos extremos de la barra *AB* se mueven, la deformación de *AB* se mide por la diferencia entre los desplazamientos δ_A y δ_B de los puntos A y B (es decir, por el desplazamiento relativo de B con respecto a A). Si se denota este desplazamiento relativo por $\delta_{B/A}$,

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE} \qquad (2.12)$$

donde A es el área de la sección transversal *AB* y E es el módulo de elasticidad.

Problema modelo 2.1



La barra rígida *BDE* se soporta en dos eslabones *AB* y *CD*. El eslabón *AB* está hecho de aluminio ($E = 70$ GPa) y tiene un área de sección transversal de 500 mm^2; el eslabón *CD* es de acero ($E = 200$ GPa) y tiene un área de sección transversal de 600 mm^2. Para la fuerza mostrada de 30 kN, determine la deflexión *a*) de *B*, *b*) de *D*, *c*) de *E*.

ESTRATEGIA: Considere el cuerpo libre de la barra rígida para determinar la fuerza interna de cada eslabón. Si se conocen estas fuerzas y las propiedades de los eslabones, es posible evaluar sus deformaciones. Después se puede utilizar geometría simple para determinar la deflexión de *E*.

MODELAR: Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la barra rígida (figura 1) y los dos eslabones (figuras 2 y 3).

ANALIZAR:

Cuerpo libre: barra *BDE* (figura 1)

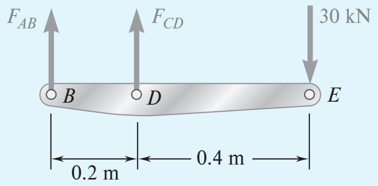


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la barra rígida *BDE*.

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $\quad -(30 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) + F_{CD}(0.2 \text{ m}) = 0$

$F_{CD} = +90 \text{ kN} \qquad F_{CD} = 90 \text{ kN}$ *tensión*

$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$: $\quad -(30 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) - F_{AB}(0.2 \text{ m}) = 0$

$F_{AB} = -60 \text{ kN} \qquad F_{AB} = 60 \text{ kN}$ *compresión*

***a*) Deflexión de *B*.** Como la fuerza interna en el eslabón *AB* es compresiva (figura 2), $P = -60$ kN y

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6} \text{ m}$$

El signo negativo indica una contracción del elemento *AB*. Por lo tanto, la deflexión del extremo *B* es hacia arriba:

$$\delta_B = \mathbf{0.514 \text{ mm}} \uparrow$$

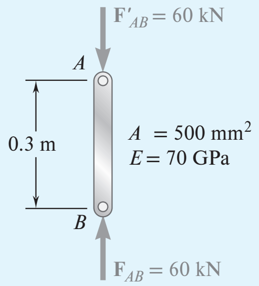


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del elemento de dos fuerzas *AB*.

***b*) Deflexión de *D*.** Como en la varilla *CD* (figura 3), $P = 90$ kN, se escribe

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6} \text{ m} \qquad \delta_D = \mathbf{0.300 \text{ mm}} \downarrow$$

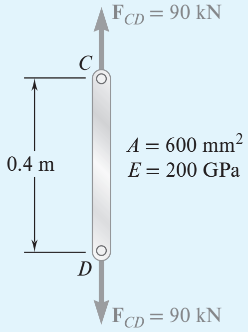


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre del elemento de dos fuerzas *CD*.

***c*) Deflexión de *E*.** Con referencia a la figura 4, se denota con *B*′ y *D*′ las posiciones desplazadas de los puntos *B* y *D*. Ya que la barra *BDE* es rígida, los puntos *B*′, *D*′ y *E*′ se encuentran en línea recta. Por consiguiente,

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \qquad \frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x} \qquad x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \qquad \frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(400 \text{ mm}) + (73.7 \text{ mm})}{73.7 \text{ mm}}$$

$$\delta_E = \mathbf{1.928 \text{ mm}} \downarrow$$

REVISAR y PENSAR: Si se compara la magnitud relativa y la dirección de las deflexiones resultantes, se puede ver que las respuestas obtenidas son consistentes con la carga y el diagrama de deflexión de la figura 4.

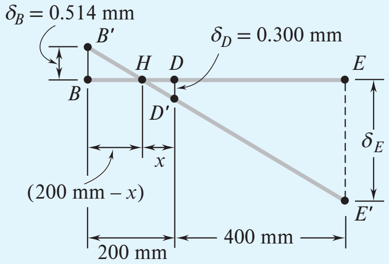
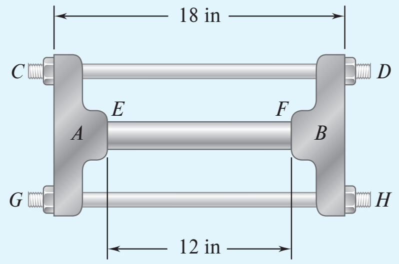


Figura 4 Las deflexiones en *B* y *D* de la barra rígida se usan para encontrar δ_E.

Problema modelo 2.2



Las piezas de fundición rígidas A y B están conectadas por dos pernos de acero de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro CD y GH y se encuentran en contacto con los extremos de una varilla de aluminio de 1.5 in de diámetro EF. Cada perno tiene una cuerda única con un paso de 0.1 in y, después de ajustarse, las tuercas D y H se aprietan un cuarto de vuelta. Si se sabe que E es de 29×10^6 psi para el acero y 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine el esfuerzo normal en la varilla.

ESTRATEGIA: Al apretar las tuercas ocurre un desplazamiento de los extremos de los pernos con respecto a la pieza fundida rígida que es igual a la diferencia de desplazamientos entre los pernos y la varilla. Esto dará una relación entre las fuerzas internas de los pernos y la barra que, combinada con un análisis de cuerpo libre de la fundición rígida, le permitirá descomponer estas fuerzas y determinar la tensión normal correspondiente en la varilla.

MODELAR: Dibuje los diagramas de cuerpo libre de los pernos y la varilla (figura 1) y la fundición rígida (figura 2).

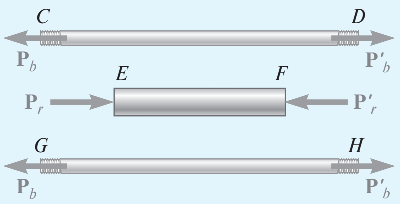


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre de los pernos y la barra de aluminio.

ANALIZAR:

Deformaciones

Pernos CD y GH. Al apretar las tuercas se crea tensión en los pernos (figura 1). Debido a la simetría, ambos están sometidos a la misma fuerza interna P_b y sufren la misma deformación δ_b. Por consiguiente,

$$\delta_b = +\frac{P_b L_b}{A_b E_b} = +\frac{P_b(18 \text{ in})}{\frac{1}{4}\pi(0.75 \text{ in})^2(29 \times 10^6 \text{ psi})} = +1.405 \times 10^{-6} P_b \quad (1)$$

Varilla EF. La varilla está en compresión (figura 1), donde P_r es la magnitud de la fuerza y δ_r es la deformación:

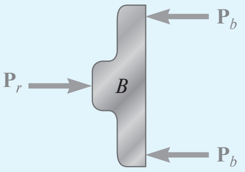


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la fundición rígida.

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r(12 \text{ in})}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} = -0.6406 \times 10^{-6} P_r \quad (2)$$

Desplazamiento de D relativo a B. Al apretar las tuercas un cuarto de vuelta, los extremos D y H de los pernos sufren un desplazamiento de $\frac{1}{4}(0.1 \text{ in})$ *relativo a la fundición* B. Considerando el extremo D,

$$\delta_{D/B} = \tfrac{1}{4}(0.1 \text{ in}) = 0.025 \text{ in} \quad (3)$$

Pero $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$, donde δ_D y δ_B representan los desplazamientos de D y B. Si se supone que la pieza A está sujeta en una posición fija mientras que las tuercas en D y H se aprietan, estos desplazamientos son iguales a las deformaciones de los pernos y de la varilla, respectivamente. Entonces,

$$\delta_{D/B} = \delta_b - \delta_r \quad (4)$$

Al sustituir de las ecuaciones (1), (2) y (3) en la ecuación (4),

$$0.025 \text{ in} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6} P_r \quad (5)$$

Cuerpo libre: fundición *B* (figura 2)

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F = 0: \qquad P_r - 2P_b = 0 \qquad P_r = 2P_b \tag{6}$$

Fuerzas en los pernos y la varilla. Al sustituir P_r de la ecuación (6) en la (5), se tiene

$$0.025 \text{ in} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6} (2P_b)$$

$$P_b = 9.307 \times 10^3 \text{ lb} = 9.307 \text{ kips}$$

$$P_r = 2P_b = 2(9.307 \text{ kips}) = 18.61 \text{ kips}$$

Esfuerzo en la varilla

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A_r} = \frac{18.61 \text{ kips}}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in})^2} \qquad \sigma_r = 10.53 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Este es un ejemplo de un problema *estáticamente indeterminado*, donde la determinación de las fuerzas en los elementos no se puede encontrar solo mediante el equilibrio. Al considerar las características del desplazamiento relativo de los elementos, se pueden obtener ecuaciones adicionales necesarias para resolver tales problemas. Las situaciones de este tipo se estudiarán con más detalle en la siguiente sección.

Problemas

2.1 Un hilo de nailon se somete a una fuerza de tensión de 8.5 N. Si se sabe que E = 3.3 GPa y que la longitud del hilo aumenta en 1.1%, determine *a*) el diámetro del hilo, *b*) el esfuerzo en el hilo.

2.2 Un alambre de acero de 4.8 ft de largo y $\frac{1}{4}$ in de diámetro se somete a una carga de tensión de 750 lb. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) el alargamiento del alambre, *b*) el esfuerzo normal correspondiente.

2.3 Un alambre de acero con longitud de 18 m y diámetro de 5 mm, debe usarse en la fabricación de una viga de concreto preesforzado. Se observa que el alambre se estira 45 mm al aplicarle una fuerza de tensión **P**. Si se sabe que E = 200 GPa, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) el esfuerzo normal correspondiente en el alambre.

2.4 Dos marcas de calibración se colocan a una separación exacta de 250 mm en una varilla de aluminio, que tiene un diámetro de 12 mm, con E = 73 GPa y una resistencia última de 140 MPa. Si se sabe que la distancia entre las marcas de calibración es de 250.28 mm después de que se aplica una carga, determine *a*) el esfuerzo en la varilla, *b*) el factor de seguridad.

2.5 Un tubo de aluminio no debe estirarse más de 0.05 in cuando se le aplique una carga de tensión. Si se sabe que $E = 10.1 \times 10^6$ psi y que el esfuerzo normal permisible máximo es de 14 ksi, determine *a*) la longitud permisible máxima del tubo, *b*) el área requerida para el tubo si la carga de tensión es de 127.5 kips.

2.6 Una barra de control hecha de latón amarillo no debe estirarse más de 3 mm cuando la tensión en el alambre sea de 4 kN. Si se sabe que E = 105 GPa y que el esfuerzo normal permisible máximo es de 180 MPa, determine *a*) el menor diámetro de varilla que debe usarse, *b*) la longitud máxima correspondiente de la varilla.

2.7 Una varilla de control hecha de acero con 5.5 ft de longitud no debe estirarse más de 0.04 in cuando se le aplica una carga de tensión de 2 kips. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) el diámetro mínimo de varilla que debería usarse, *b*) el esfuerzo normal correspondiente causado por la carga.

2.8 Un tubo de hierro fundido se usa para soportar una carga de compresión. Si se sabe que $E = 10 \times 10^6$ psi y que el cambio permisible máximo en longitud es de 0.025%, determine *a*) el esfuerzo normal máximo en la tubería, *b*) el grosor de pared mínimo para una carga de 1 600 lb si el diámetro exterior del tubo es de 2.0 in.

2.9 Una varilla de acero de 4 m de largo no debe estirarse más de 3 mm y el esfuerzo normal no debe superar 150 MPa cuando la varilla esté sometida a una carga axial de 10 kN. Si se sabe que E = 200 GPa, determine el diámetro requerido para la varilla.

2.10 Un hilo de nailon está sometido a una tensión de 10 N. Si se sabe que E = 3.2 GPa, que el esfuerzo normal permisible máximo es de 40 MPa y que la longitud del hilo no debe aumentar más de 1%, determine el diámetro requerido del hilo.

2.11 Un bloque de 10 in de longitud y de 1.8 × 1.6 in de sección transversal debe soportar una carga céntrica a compresión **P**. El material que se empleará es un bronce para el que $E = 14 \times 10^6$ psi. Determine la carga máxima que puede aplicarse, si se sabe que el esfuerzo normal no debe exceder 18 ksi y que el decremento en longitud del bloque debe ser, cuando mucho, de 0.12% de su longitud original.

2.12 Una barra cuadrada hecha de latón amarillo no debe estirarse más de 2.5 mm cuando se somete a una carga de tensión. Si se sabe que E = 105 GPa y que la resistencia a la tensión permisible es de 180 MPa, determine *a*) la longitud máxima permisible de la barra, *b*) las dimensiones requeridas de la sección transversal si la carga a tensión es de 40 kN.

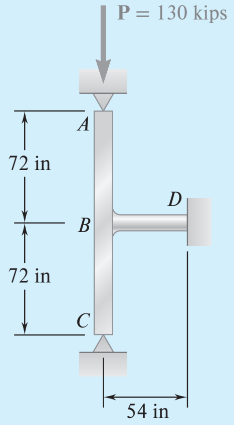


Figura P2.13

2.13 La varilla *BD* está hecha de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y se utiliza para reforzar al elemento axialmente comprimido *ABC*. La máxima fuerza que puede desarrollarse en el elemento *BD* es de 0.02*P*. Si el esfuerzo no debe exceder 18 ksi y el máximo cambio en longitud de *BD* no debe sobrepasar 0.001 veces la longitud de *ABC*, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para la varilla del elemento *BD*.

2.14 El cable BC de 4 mm de diámetro es de un acero con E = 200 GPa. Si se sabe que el máximo esfuerzo en el cable no debe exceder 190 MPa y que la elongación del cable no debe sobrepasar 6 mm, encuentre la carga máxima **P** que puede aplicarse como se muestra en la figura.

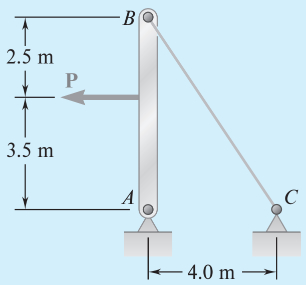


Figura P2.14

2.15. Una sola carga axial de magnitud P = 15 kips se aplica al extremo C de la varilla de acero ABC. Si se sabe que $E = 30 \times 10^6$ psi, determine el diámetro d de la porción BC para el cual la deflexión del punto C será 0.05 in.

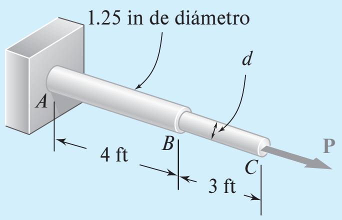


Figura P2.15

2.16 Un tubo de aluminio (E = 70 GPa) con una longitud de 250 mm, un diámetro exterior de 36 mm y un diámetro interior de 28 mm puede cerrarse en ambos extremos por medio de tapas roscadas de hilo sencillo con un paso de 1.5 mm. Con una tapa completamente enroscada, en el interior del tubo se coloca una varilla de latón sólido (E = 105 GPa) de 25 mm de diámetro y después se enrosca la segunda tapa. Como la varilla es ligeramente más larga que el tubo, se observa que la tapa debe forzarse contra la varilla girándola un cuarto de vuelta antes de que pueda estar enroscada por completo. Determine *a*) el esfuerzo normal promedio en el tubo y en la varilla, *b*) las deformaciones del tubo y de la varilla.

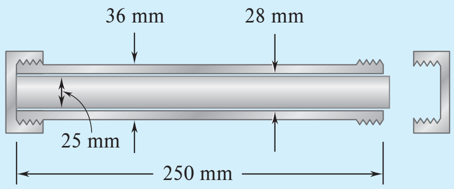


Figura *P2.16*

2.17 La probeta que se muestra en la figura fue cortada de una hoja de vinilo ($E = 0.45 \times 10^6$ psi) con $\frac{1}{4}$ in de espesor y está sometida a una carga de tensión de 350 lb. Determine *a*) el alargamiento total de la probeta, *b*) la deformación de su porción central BC.

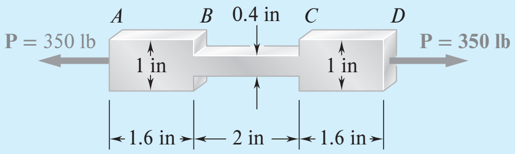


Figura P2.17

2.18 El tubo de latón AB (E = 105 GPa) tiene un área en su sección transversal de 140 mm^2 y se fija mediante un tapón en A. El tubo está unido en B a una placa rígida que a su vez está unida en C a la parte baja de un cilindro de aluminio (E = 72 GPa) con un área en su sección transversal de 250 mm^2. El cilindro después se suspende de un soporte en D. A fin de cerrar el cilin-

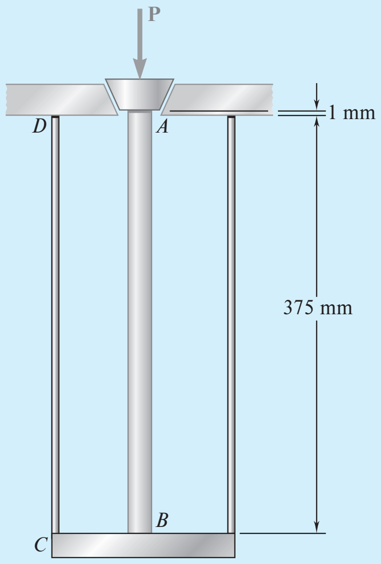


Figura *P2.18*

dro, el tapón debe moverse hacia abajo, a través de 1 mm. Determine la fuerza **P** que debe aplicarse al cilindro.

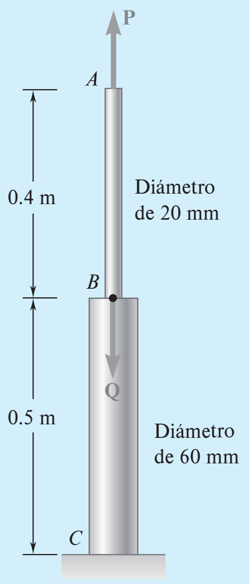


Figura P2.19 y P2.20

2.19 Las dos porciones de la varilla *ABC* están hechas de un aluminio para el que E = 70 GPa. Si se sabe que la magnitud de **P** es de 4 kN, encuentre *a*) el valor de **Q** para que la deflexión en *A* sea cero, *b*) la deflexión correspondiente de *B*.

2.20 La varilla *ABC* está hecha de un aluminio para el que E = 70 GPa. Si se sabe que P = 6 kN y que Q = 42 kN, determine la deflexión de *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

2.21 Para la armadura de acero (E = 200 GPa) y las cargas mostradas en la figura, determine las deformaciones de los elementos *AB* y *AD*, si se sabe que sus áreas de sección transversal respectivas son de 2 400 mm^2 y 1 800 mm^2.

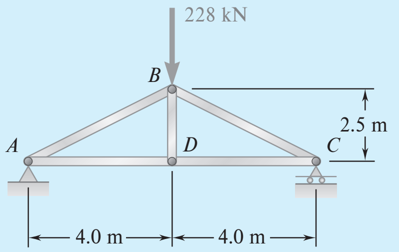


Figura P2.21

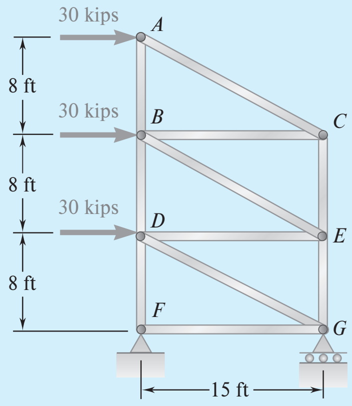


Figura *P2.22*

2.22 Para la armadura de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y las cargas mostradas en la figura, determine las deformaciones de los elementos *BD* y *DE*, si se sabe que sus áreas de sección transversal respectivas son de 2 in^2 y 3 in^2.

2.23 Los elementos *AB* y *BC* están hechos de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) con áreas respectivas en sus secciones transversales de 0.80 in^2 y 0.64 in^2. Para las cargas mostradas, determine la elongación *a*) del elemento *AB*, *b*) del elemento *BC*.

2.24 El marco de acero mostrado (E = 200 GPa) tiene un larguero diagonal *BD* con un área de 1 920 mm^2. Determine la carga máxima permisible **P** si el cambio en la longitud del elemento *BD* no debe exceder 1.6 mm.

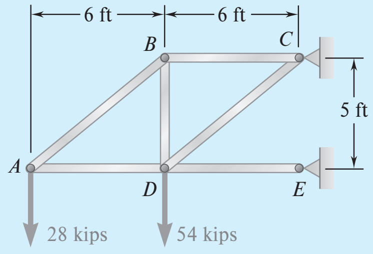


Figura P2.23

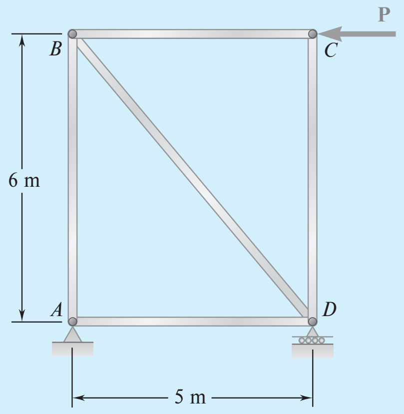


Figura P2.24

2.25 El eslabón *BD* está hecho de latón (E = 105 GPa) y tiene un área en su sección transversal de 240 mm^2. El eslabón *CE* está hecho de aluminio (E = 72 GPa) y tiene un área en su sección transversal de 300 mm^2. Si se sabe que soportan al elemento rígido *ABC*, determine la fuerza máxima **P** que puede aplicarse verticalmente en el punto *A* si la deflexión en este punto no debe exceder de 0.35 mm.

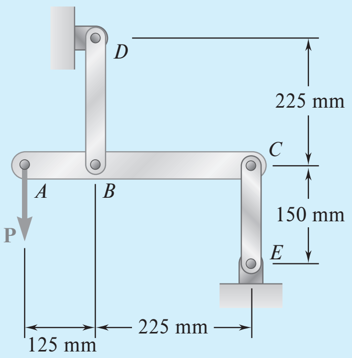


Figura P2.25

2.26 Los elementos *ABC* y *DEF* están unidos mediante eslabones de acero (E = 200 GPa). Cada uno de los eslabones está hecho con un par de placas de 25 × 35 mm. Determine el cambio en la longitud *a*) del elemento *BE*, *b*) del elemento *CF*.

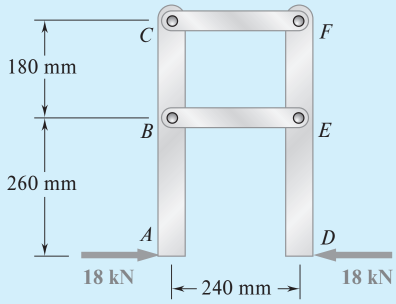


Figura P2.26

2.27 Cada uno de los eslabones *AB* y *CD* está hecho de aluminio ($E = 10.9 \times 10^6$ psi) y tienen un área de sección transversal de 0.2 in^2. Si se sabe que soportan al elemento rígido *BC*, determine la deflexión del punto *E*.

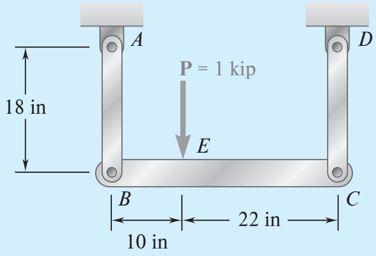


Figura P2.27

2.28 La longitud del alambre de acero de $\frac{3}{32}$ in de diámetro *CD* ha sido ajustada de forma que, si no se aplica ninguna carga, existe una distancia de $\frac{1}{16}$ in entre el extremo *B* de la viga rígida *ACB* y un punto de contacto *E*. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine el sitio sobre la viga donde debe colocarse un bloque de 50 lb para provocar un contacto entre *B* y *E*.

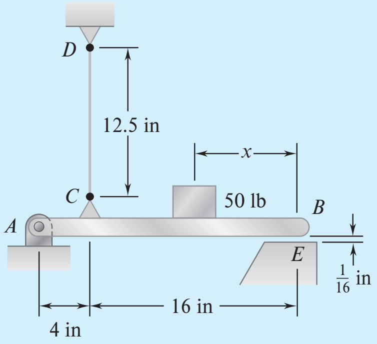


Figura P2.28

2.29 Un cable homogéneo de longitud *L* y sección transversal uniforme se cuelga de un extremo. *a*) Si se denota con ρ la densidad (masa por unidad de volumen) del cable y con *E* su módulo de elasticidad, determine la elongación que sufre el cable debido a su propio peso. *b*) Demuestre que para obtener la misma elongación debe aplicarse en cada uno de los extremos del cable en posición horizontal una fuerza igual a la mitad de su peso.

2.30 La carga vertical **P** se aplica en el centro *A* de la sección superior de un frustro de cono circular con altura *h*, radio mínimo *a* y radio máximo *b*. Si se denota con *E* el módulo de elasticidad del material y se desprecia el efecto de su peso, determine la deflexión del punto *A*.

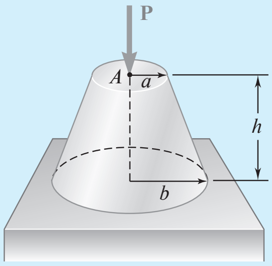


Figura P2.30

2.31 Si ϵ es la "deformación unitaria ingenieril" de un modelo en tensión, demuestre que la deformación unitaria real es $\epsilon_t = \ln(1 + \epsilon)$.

2.32 El volumen de una probeta de tensión es esencialmente constante mientras ocurre la deformación plástica. Si el diámetro inicial de la probeta es d_1, demuestre que cuando el diámetro es d, la deformación unitaria real es $\epsilon_t = 2 \ln(d_1/d)$.

2.2 PROBLEMAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

En los problemas considerados en la sección precedente, siempre se pueden emplear los diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas internas producidas en las distintas porciones de un elemento bajo unas condiciones dadas de carga. Sin embargo, hay muchos problemas en los cuales no es posible determinar las fuerzas internas usando solo la estática. En la mayoría de estos problemas las reacciones mismas, que son fuerzas externas, no pueden hallarse simplemente dibujando un diagrama de cuerpo libre del elemento y escribiendo las correspondientes ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio deben complementarse con relaciones que involucran las deformaciones obtenidas considerando la geometría del problema. Debido a que la estática no es suficiente para determinar las reacciones o las fuerzas internas, los problemas de este tipo se conocen como *estáticamente indeterminados*. Los siguientes ejemplos mostrarán cómo manejar este tipo de problemas.

Aplicación de conceptos 2.2

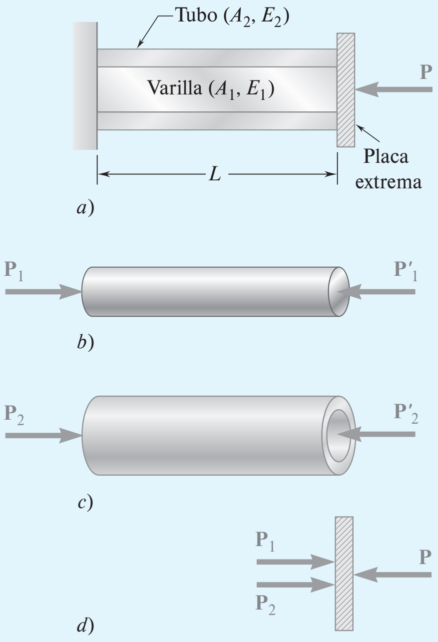


Figura 2.21 *a*) Carga concéntrica y tubo, cargado por la fuerza *P*. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la varilla. *c*) Diagrama de cuerpo libre del tubo. *d*) Diagrama de cuerpo libre de la placa extrema.

Una varilla de longitud L, área de sección transversal A_1 y módulo de elasticidad E_1, se ha colocado dentro de un tubo con la misma longitud L, pero de área de sección transversal A_2 y módulo de elasticidad E_2 (figura 2.21*a*). ¿Cuál es la deformación de la varilla y del tubo cuando una fuerza **P** se ejerce en la placa rígida del extremo como se muestra en la figura?

Las fuerzas axiales en la varilla y en el tubo son P_1 y P_2, respectivamente. Se dibujan diagramas de cuerpo libre de los tres elementos (figuras 2.21*b*, *c*, *d*). Solo la figura 2.21*d* da alguna información significativa, como:

$$P_1 + P_2 = P \tag{1}$$

Es claro que una ecuación no es suficiente para determinar las dos fuerzas internas desconocidas P_1 y P_2. El problema es estáticamente indeterminado.

No obstante, la geometría del problema muestra que las deformaciones δ_1 y δ_2 de la varilla y del tubo deben ser iguales. Tomando en cuenta la ecuación (2.9), se escribe

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \qquad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \tag{2}$$

Al igualar las deformaciones δ_1 y δ_2,

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \tag{3}$$

Las ecuaciones (1) y (3) pueden resolverse simultáneamente para obtener P_1 y P_2:

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \qquad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

Cualquiera de las ecuaciones (2) podrá emplearse para determinar la deformación común de la varilla y del tubo.

Aplicación de conceptos 2.3

Una barra AB de longitud L y sección transversal uniforme se sujeta a soportes rígidos en A y B antes de cargarse. ¿Cuáles son los esfuerzos en las porciones AC y BC debido a la aplicación de la carga P en el punto C (figura 2.22*a*)?

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.22*b*), se obtiene la ecuación de equilibrio

$$R_A + R_B = P \tag{1}$$

Ya que esta ecuación no es suficiente para determinar las dos reacciones desconocidas R_A y R_B, el problema es estáticamente indeterminado.

Sin embargo, las reacciones pueden determinarse si se observa de la geometría que el alargamiento total de la barra δ debe ser cero. Los alargamientos de las porciones AC y BC son δ_1 y δ_2, respectivamente, por lo que

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

Si se usa la ecuación (2.9), δ_1 y δ_2 pueden expresarse en términos de las fuerzas internas correspondientes P_1 y P_2,

$$\delta = \frac{P_1L_1}{AE} + \frac{P_2L_2}{AE} = 0 \tag{2}$$

Se advierte de los diagramas de cuerpo libre mostrados respectivamente en los incisos *b*) y *c*) de la figura 2.22*c* que $P_1 = R_A$ y $P_2 = -R_B$. Al llevar estos valores a la ecuación (2),

$$R_AL_1 - R_BL_2 = 0 \tag{3}$$

Las ecuaciones (1) y (3) pueden resolverse simultáneamente para R_A y R_B; se obtiene $R_A = PL_2/L$ y $R_B = PL_1/L$. Los esfuerzos deseados σ_1 en AC y σ_2 en BC se obtienen dividiendo, respectivamente, $P_1 = R_A$ y $P_2 = -R_B$ entre el área de sección transversal de la barra:

$$\sigma_1 = \frac{PL_2}{AL} \qquad \sigma_2 = -\frac{PL_1}{AL}$$

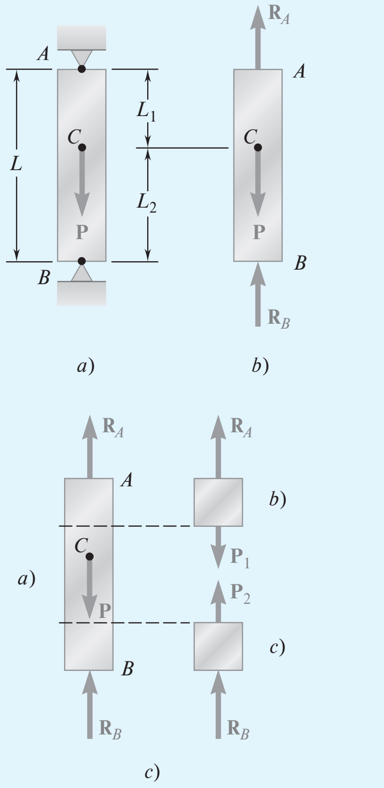
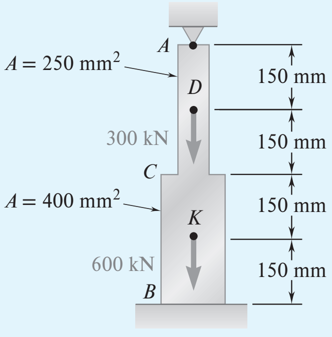


Figura 2.22 *a*) Barra restringida con carga axial. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la barra. *c*) Diagramas de cuerpo libre de las secciones arriba y debajo del punto C usado para determinar las fuerzas internas P_1 y P_2.

Método de superposición. Una estructura es estáticamente indeterminada cuando está sostenida por más soportes de los necesarios para mantener su equilibrio. Esto da como resultado más reacciones desconocidas que ecuaciones de equilibrio disponibles. A menudo es conveniente considerar una de las reacciones como *redundante* y eliminar el soporte correspondiente. Debido a que las condiciones dadas del problema no pueden cambiarse, la reacción redundante debe mantenerse en la solución. Pero se considerará como una *carga desconocida* que, junto con las otras cargas, debe producir deformaciones compatibles con las restricciones originales. La solución real del problema se obtiene considerando, en forma separada, las deformaciones producidas por las cargas dadas y por la reacción redundante y sumando, o *superponiendo*, los resultados obtenidos. Las condiciones generales bajo las que el efecto combinando de varias cargas puede obtenerse de esta manera se analizan en la sección 2.5.

Aplicación de conceptos 2.4



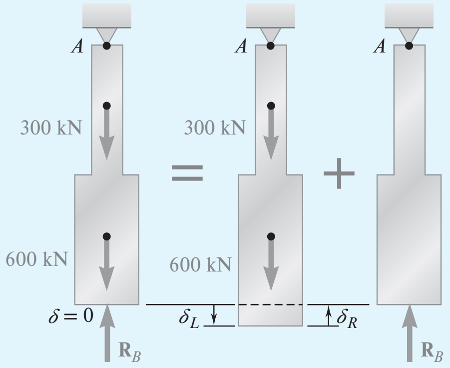
a)

Determine las reacciones en A y B para la barra de acero y la carga mostradas en la figura 2.23*a*, suponiendo un ensamble ajustado en ambos apoyos antes de que se apliquen las cargas.

Considere la reacción en B como redundante y libere la barra de ese soporte. La reacción $\mathbf{R}_B$ se considera ahora como una carga desconocida y se determinará a partir de la condición de que la deformación δ de la barra debe ser igual a cero.

La solución se obtiene considerando la deformación δ_L causada por las cargas dadas y la deformación δ_R debida a la reacción redundante $\mathbf{R}_B$ (figura 2.23*b*).

La deformación δ_L se obtiene de la ecuación (2.10) después de que la barra se divide en cuatro partes, como se muestra en la figura 2.23*c*. Se sigue el mismo procedimiento que en la Aplicación de conceptos 2.1:



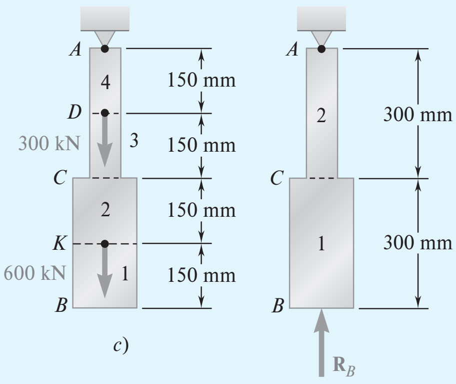
b)

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3\,\text{N} \qquad P_4 = 900 \times 10^3\,\text{N}$$
$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 \qquad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$
$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150\,\text{m}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (2.10),

$$\delta_L = \sum_{i=1}^{4} \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(0 + \frac{600 \times 10^3\,\text{N}}{400 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} + \frac{600 \times 10^3\,\text{N}}{250 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} + \frac{900 \times 10^3\,\text{N}}{250 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} \right) \frac{0.150\,\text{m}}{E}$$

$$\delta_L = \frac{1.125 \times 10^9}{E} \qquad \textbf{(1)}$$



c) *d*)

Figura 2.23 *a*) Barra restringida cargada axialmente. *b*) Las reacciones se encontrarán al liberar la restricción en el punto *B* y al agregar una fuerza compresiva en ese mismo punto, para fortalecer la deformación cero en el punto *B*. c) Diagrama de cuerpo libre de la estructura liberada. *d*) Diagrama de cuerpo libre de la fuerza de reacción añadida en el punto *B* para fortalecer la deformación cero en ese punto.

Considerando ahora la deformación δ_R debida a la reacción redundante R_B, se divide la barra en dos porciones, como se muestra en la figura 2.23*d*

$$P_1 = P_2 = -R_B$$
$$A_1 = 400 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 \qquad A_2 = 250 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$
$$L_1 = L_2 = 0.300\,\text{m}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (2.10),

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = -\frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} \qquad \textbf{(2)}$$

Exprese el alargamiento total δ de la barra como cero:

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

y al sustituir δ_L y δ_R de las ecuaciones (1) y (2) en las ecuaciones (3),

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

Al despejar R_B, se tiene

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

La reacción R_A en el soporte superior se obtiene del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.23*e*),

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

Una vez que las reacciones se han determinado, los esfuerzos y las deformaciones en la barra se obtienen fácilmente. Debe observarse que, aunque el alargamiento total de la barra es cero, cada una de sus partes *se deforma* bajo la carga y las condiciones de restricción dadas.

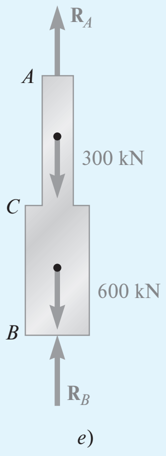


Figura 2.23 (*cont.*) e) Diagrama de cuerpo libre completo de *ACB*.

Aplicación de conceptos 2.5

Determine las reacciones en A y en B para la barra de acero y carga de la Aplicación de conceptos 2.4, suponiendo ahora que existe un claro de 4.5 mm entre la barra y el piso antes de que se apliquen las cargas (figura 2.24). Suponga que $E = 200$ GPa.

Considerando la reacción en B como redundante, se calculan las deformaciones δ_L y δ_R causadas, respectivamente, por las cargas dadas y por la reacción redundante $\mathbf{R}_B$. Sin embargo, en este caso el alargamiento total no es cero, sino $\delta = 4.5$ mm. Por lo tanto,

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad \textbf{(1)}$$

Al sustituir δ_L y δ_R en la ecuación (1) y al recordar que $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9$ Pa, se tiene que

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{200 \times 10^9} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Al despejar R_B,

$$R_B = 115.4 \times 10^3 \text{ N} = 115.4 \text{ kN}$$

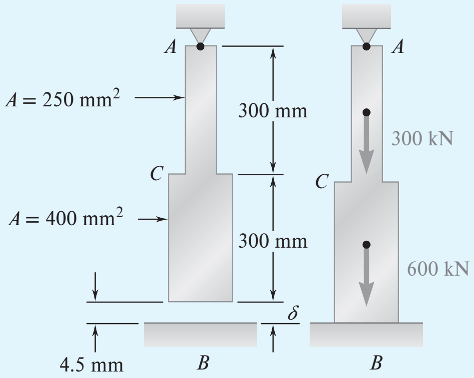


Figura 2.24 Barra de secciones múltiples de la Aplicación de conceptos 2.4 con una separación inicial de 4.5 mm en el punto *B*. La carga pone en contacto a la barra con la restricción.

La reacción en A se obtiene del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.23*e*):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115.4 \text{ kN} = 785 \text{ kN}$$

2.3 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN CAMBIOS DE TEMPERATURA

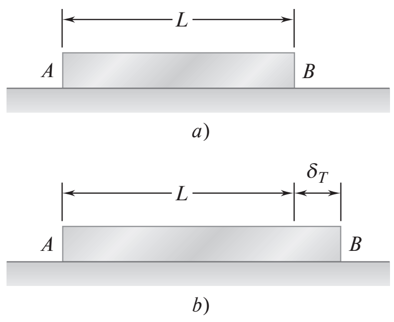


Figura 2.25 Alargamiento de una varilla no restringida debido al aumento de la temperatura.

Considere una varilla homogénea *AB* con sección transversal uniforme que descansa libremente en una superficie horizontal lisa (figura 2.25*a*). Si la temperatura de la varilla se eleva en ΔT, se observa que la varilla se alarga por una cantidad δ_T, que es proporcional tanto al cambio de temperatura ΔT como a la longitud L de la varilla (figura 2.25*b*). Aquí

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{2.13}$$

donde α es una característica constante del material, llamada *coeficiente de expansión térmica.* Como δ_T y L se expresan en unidades de longitud, α representa una cantidad *por grado C* o *por grado F*, dependiendo si el cambio de temperatura se expresa en grados Celsius o Fahrenheit.

Con la deformación δ_T debe asociarse una deformación $\epsilon_T = \delta_T/L$. Al recordar la ecuación (2.13),

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \tag{2.14}$$

La deformación ϵ_T se conoce como *deformación unitaria térmica*, ya que es causada por el cambio en la temperatura de la varilla. Sin embargo, *no existe esfuerzo asociado con la deformación* ϵ_T.

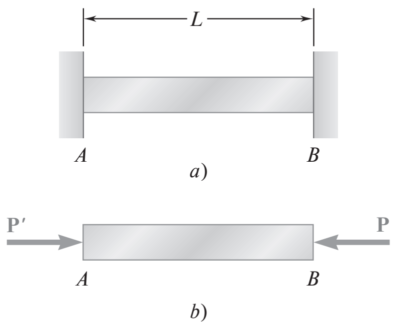


Figura 2.26 Cuando la temperatura de la varilla se incrementa mientras los extremos *A* y *B* están restringidos, se desarrolla la fuerza **P**.

Ahora suponga que la misma varilla *AB* de longitud L se coloca entre dos soportes fijos a una distancia L uno del otro (figura 2.26*a*). Nuevamente, no existe esfuerzo ni deformación en esta condición inicial. Si se eleva la temperatura en ΔT, la varilla no puede alargarse debido a las restricciones impuestas en sus extremos; la elongación δ_T de la varilla es cero. Como la varilla es homogénea y de sección transversal uniforme, la deformación ϵ_T en cualquier punto es $\epsilon_T = \delta_T/L$ y, por lo tanto, también cero. Sin embargo, los soportes ejercerán fuerzas **P** y **P′** iguales y opuestas sobre la varilla después de que se haya elevado la temperatura, para evitar que se elongue (figura 2.26*b*). Entonces se crea un estado de esfuerzo (sin su correspondiente deformación) en la varilla.

El problema creado por el cambio de temperatura ΔT es estáticamente indeterminado. Por lo tanto, la magnitud P de las reacciones en los soportes se determina a partir de la condición de que la elongación de la varilla es cero. Utilizando el método de superposición descrito en la sección 2.2, se libera la varilla de su apoyo *B* (figura 2.27*a*) y se le permite alargarse libremente mientras sufre el cambio de temperatura ΔT (figura 2.27*b*). De acuerdo con la ecuación (2.13), el alargamiento correspondiente es

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

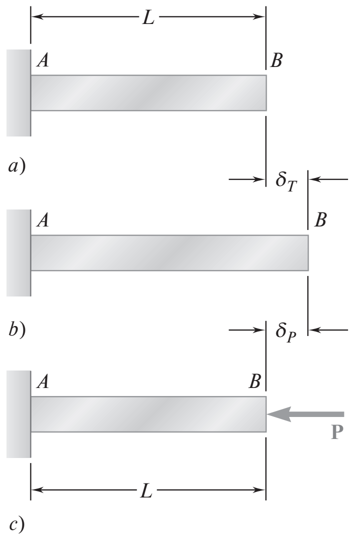


Figura 2.27 Método de superposición para encontrar la fuerza en el punto *B* de la varilla restringida *AB* que experimenta expansión térmica. *a*) longitud inicial de la varilla; *b*) longitud de la varilla expandida térmicamente; *c*) la fuerza **P** empuja al punto *B* de nuevo hasta la deformación cero.

Al aplicar ahora al extremo *B* la fuerza **P** que representa la reacción redundante, y emplear la ecuación (2.9), se obtiene una segunda deformación (figura 2.27*c*)

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

Al expresar que el alargamiento total δ debe ser cero, se tiene

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

de donde se concluye que

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

El esfuerzo en la varilla debido al cambio de temperatura ΔT es

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T) \tag{2.15}$$

La ausencia de alguna deformación en la varilla *solo se aplica al caso de una varilla homogénea con sección transversal uniforme*. Cualquier otro problema que implique una estructura restringida sometida a un cambio de temperatura debe analizarse en las condiciones aplicables. Sin embargo, puede usarse el mismo enfoque general, es decir, se puede considerar por separado la deformación debida al cambio de temperatura y la debida a la reacción redundante y superponer las soluciones obtenidas.

Aplicación de conceptos 2.6

Determine los valores del esfuerzo en las porciones *AC* y *CB* de la barra de acero mostrada en la figura 2.28*a* cuando la temperatura de la barra es de –50 °F, sabiendo que existe un buen ajuste en ambos soportes rígidos cuando la temperatura es de +75 °F. Utilice los valores de $E = 29 \times 10^6$ psi y $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/°F$ para el acero.

Se determinan las reacciones en los soportes. Como el problema es estáticamente indeterminado, se desprende la barra de su apoyo en *B* y se le deja pasar por el cambio de temperatura

$$\Delta T = (-50\ °F) - (75\ °F) = -125\ °F$$

La deformación correspondiente (figura 2.28*c*) es

$$\begin{aligned}\delta_T &= \alpha(\Delta T)L = (6.5 \times 10^{-6}/°F)(-125\ °F)(24\ \text{in})\\ &= -19.50 \times 10^{-3}\ \text{in}\end{aligned}$$

Al aplicar ahora la fuerza desconocida $\mathbf{R}_B$ en el extremo *B* (figura 2.28*d*), se utiliza la ecuación (2.10) para expresar la deformación correspondiente δ_R. Al sustituir

$$L_1 = L_2 = 12\ \text{in}$$
$$A_1 = 0.6\ \text{in}^2 \qquad A_2 = 1.2\ \text{in}^2$$
$$P_1 = P_2 = R_B \qquad E = 29 \times 10^6\ \text{psi}$$

en la ecuación (2.10), se escribe

$$\begin{aligned}\delta_R &= \frac{P_1L_1}{A_1E} + \frac{P_2L_2}{A_2E}\\ &= \frac{R_B}{29 \times 10^6\ \text{psi}}\left(\frac{12\ \text{in}}{0.6\ \text{in}^2} + \frac{12\ \text{in}}{1.2\ \text{in}^2}\right)\\ &= (1.0345 \times 10^{-6}\ \text{in/lb})R_B\end{aligned}$$

Al expresar que el alargamiento total de la barra debe ser cero como resultado de las restricciones impuestas, se escribe

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_T + \delta_R = 0\\ &= -19.50 \times 10^{-3}\ \text{in} + (1.0345 \times 10^{-6}\ \text{in/lb})\ R_B = 0\end{aligned}$$

de lo que se obtiene

$$R_B = 18.85 \times 10^3\ \text{lb} = 18.85\ \text{kips}$$

La reacción en *A* es igual y opuesta.

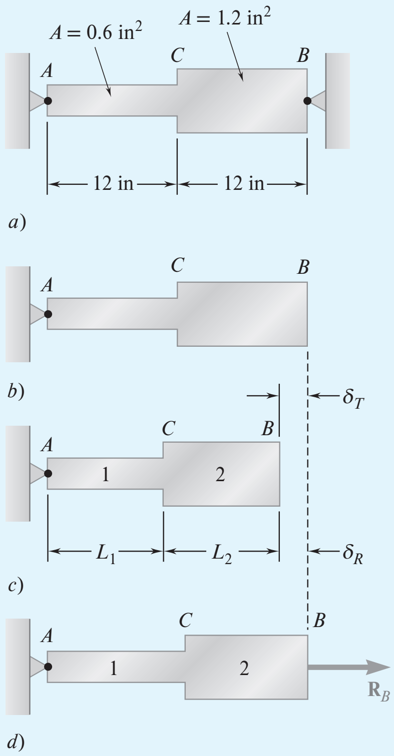


Figura 2.28 *a*) Barra restringida. *b*) Barra a +75 °F de temperatura. *c*) Barra a temperatura más baja. *d*) Fuerza R_B necesaria para lograr la deformación cero en el punto *B*.

Note que las fuerzas en las dos porciones de la barra son $P_1 = P_2 = 18.85$ kips; se obtienen los siguientes valores de esfuerzo en las porciones *AC* y *CB* de la barra:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{18.85 \text{ kips}}{0.6 \text{ in}^2} = +31.42 \text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{18.85 \text{ kips}}{1.2 \text{ in}^2} = +15.71 \text{ ksi}$$

No puede enfatizarse demasiado el hecho de que, a pesar de que el *alargamiento total* de la barra debe ser cero, las deformaciones de las porciones *AC* y *CB no son cero*. Una solución para el problema basada en la suposición de que estas deformaciones son cero sería equivocada. Tampoco puede suponerse que los valores de la deformación unitaria en *AC* o en *CB* sean iguales a cero. Para ampliar este punto, determine la deformación ϵ_{AC} en la porción *AC* de la barra. La deformación ϵ_{AC} puede dividirse en dos partes componentes; una es la deformación térmica ϵ_T producida en la barra sin restricciones por el cambio de temperatura ΔT (figura 2.28*c*). De la ecuación (2.14),

$$\begin{aligned}\epsilon_T = \alpha\,\Delta T &= (6.5 \times 10^{-6}/°\text{F})(-125\,°\text{F}) \\ &= -812.5 \times 10^{-6} \text{ in/in}\end{aligned}$$

La otra componente de ϵ_{AC} se asocia con el esfuerzo σ_1 debido a la fuerza $\mathbf{R}_B$ aplicada a la barra (figura 2.28*d*). De la ley de Hooke, se expresa esta componente de la deformación como

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{+31.42 \times 10^3 \text{ psi}}{29 \times 10^6 \text{ psi}} = +1\,083.4 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

Al sumar las dos componentes de la deformación en *AC*, se obtiene

$$\begin{aligned}\epsilon_{AC} = \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} &= -812.5 \times 10^{-6} + 1\,083.4 \times 10^{-6} \\ &= +271 \times 10^{-6} \text{ in/in}\end{aligned}$$

Un cálculo similar da la deformación de la porción *CB* de la barra:

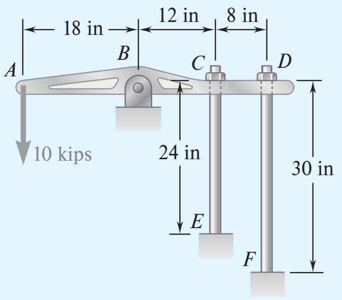
$$\begin{aligned}\epsilon_{CB} = \epsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} &= -812.5 \times 10^{-6} + 541.7 \times 10^{-6} \\ &= -271 \times 10^{-6} \text{ in/in}\end{aligned}$$

Las deformaciones δ_{AC} y δ_{CB} de las dos porciones de la barra son

$$\begin{aligned}\delta_{AC} = \epsilon_{AC}(AC) &= (+271 \times 10^{-6})(12 \text{ in}) \\ &= +3.25 \times 10^{-3} \text{ in} \\ \delta_{CB} = \epsilon_{CB}(CB) &= (-271 \times 10^{-6})(12 \text{ in}) \\ &= -3.25 \times 10^{-3} \text{ in}\end{aligned}$$

Así, aunque la suma $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ de las dos deformaciones es cero, ninguna de ellas es cero.

Problema modelo 2.3



La varilla *CE* de $\frac{1}{2}$ in de diámetro y la varilla *DF* de $\frac{3}{4}$ in de diámetro están unidas a la barra rígida *ABCD* como se muestra en la figura. Si se sabe que las varillas son de aluminio y al usar $E = 10.6 \times 10^6$ psi, determine *a*) la fuerza en cada varilla causada por la carga mostrada, *b*) la deflexión correspondiente en el punto *A*.

ESTRATEGIA: Para resolver este problema estáticamente indeterminado, se debe proporcionar equilibrio estático con un análisis de la deflexión relativa de las dos varillas.

MODELAR: Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 1).

ANALIZAR:

Estática. Considerando el cuerpo libre de la barra *ABCD* en la figura 1, se advierte que la reacción en *B* y las fuerzas ejercidas por las varillas son indeterminadas. Sin embargo, utilizando la estática,

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (10 \text{ kips})(18 \text{ in}) - F_{CE}(12 \text{ in}) - F_{DF}(20 \text{ in}) = 0$$

$$12F_{CE} + 20F_{DF} = 180 \qquad (1)$$

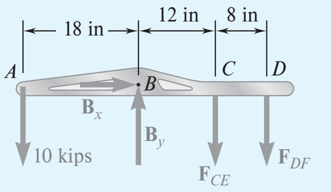


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la barra rígida *ABCD*.

Geometría. Después de la aplicación de la carga de 10 kips, la posición de la barra es *A'BC'D'* (figura 2). De los triángulos semejantes *BAA'*, *BCC'* y *BDD'*,

$$\frac{\delta_C}{12 \text{ in}} = \frac{\delta_D}{20 \text{ in}} \qquad \delta_C = 0.6\delta_D \qquad (2)$$

$$\frac{\delta_A}{18 \text{ in}} = \frac{\delta_D}{20 \text{ in}} \qquad \delta_A = 0.9\delta_D \qquad (3)$$

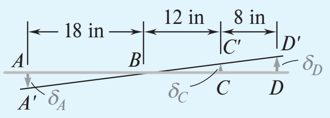


Figura 2 Desplazamientos linealmente proporcionales a lo largo de la barra rígida *ABCD*.

Deformaciones. Con la ecuación (2.9) y los datos mostrados en la figura 3, se escribe

$$\delta_C = \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} \qquad \delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

Al sustituir δ_C y δ_D en la ecuación (2), se escribe

$$\delta_C = 0.6\delta_D \qquad \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} = 0.6\frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

$$F_{CE} = 0.6\frac{L_{DF}}{L_{CE}}\frac{A_{CE}}{A_{DF}}F_{DF} = 0.6\left(\frac{30 \text{ in}}{24 \text{ in}}\right)\left[\frac{\frac{1}{4}\pi(\frac{1}{2} \text{ in})^2}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4} \text{ in})^2}\right]F_{DF} \qquad F_{CE} = 0.333F_{DF}$$

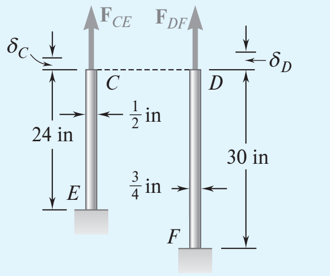


Figura 3 Fuerzas y deformaciones en *CE* y *DF*.

Fuerza en cada varilla. Al sustituir F_{CE} en la ecuación (1) y tener en cuenta que todas las fuerzas se han expresado en kips,

$$12(0.333F_{DF}) + 20F_{DF} = 180 \qquad F_{DF} = 7.50 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

$$F_{CE} = 0.333F_{DF} = 0.333(7.50 \text{ kips}) \qquad F_{CE} = 2.50 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

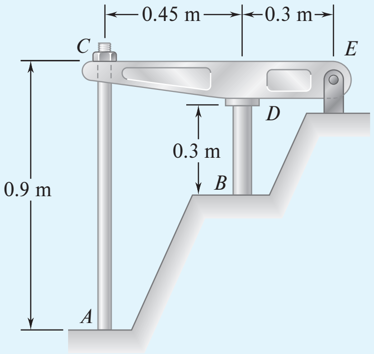
Deflexiones. La deflexión del punto D es

$$\delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E} = \frac{(7.50 \times 10^3 \text{ lb})(30 \text{ in})}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4} \text{ in})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} \qquad \delta_D = 48.0 \times 10^{-3} \text{ in}$$

Al utilizar la ecuación (3), se tiene

$$\delta_A = 0.9\delta_D = 0.9(48.0 \times 10^{-3} \text{ in}) \qquad \delta_A = 43.2 \times 10^{-3} \text{ in} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Debe hacerse notar que como la barra rígida gira alrededor de B, las deflexiones en C y D son proporcionales a su distancia desde el punto pivote B, pero *las fuerzas ejercidas por las varillas en este punto no lo son*. Al ser estáticamente indeterminadas, estas fuerzas dependen de los atributos de deflexión de las varillas, así como del equilibrio de la barra rígida.



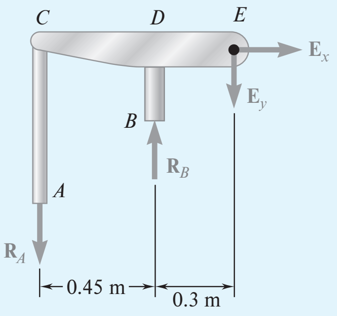


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del perno, el cilindro y la barra.

Problema modelo 2.4

La barra rígida CDE está unida a un apoyo con pasador en E y descansa sobre el cilindro de latón de 30 mm de diámetro BD. Una varilla de acero de 22 mm de diámetro AC pasa a través de un agujero en la barra y está asegurada por una tuerca que se encuentra ajustada cuando todo el ensamble se encuentra a 20 °C. La temperatura del cilindro de latón se eleva entonces a 50°C mientras que la varilla de acero permanece a 20 °C. Suponiendo que no había esfuerzos presentes antes del cambio de temperatura, determine el esfuerzo en el cilindro.

Varilla AC: Acero	Cilindro BD: Latón
$E = 200$ GPa	$E = 105$ GPa
$\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/°C$	$\alpha = 20.9 \times 10^{-6}/°C$

ESTRATEGIA: Se puede utilizar el método de superposición, considerando a $\mathbf{R}_B$ como redundante. Al remover el soporte en B, la elevación de la temperatura del cilindro causa que el punto B se mueva hacia d_T. La reacción $\mathbf{R}_B$ debe causar una deflexión δ_1, igual a δ_T de modo que la deflexión final de B sea cero (figura 2).

MODELAR: Dibuje el diagrama de cuerpo libre de todo el ensamble (figura 1).

ANALIZAR:

Estática. Considerando el cuerpo libre del ensamble completo, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \qquad R_A(0.75 \text{ m}) - R_B(0.3 \text{ m}) = 0 \qquad R_A = 0.4R_B \qquad (1)$$

Deflexión δ_T. Debido a la elevación de temperatura de 50° – 20° = 30 °C, la longitud del cilindro de latón aumenta en δ_T (figura 2*a*).

$$\delta_T = L(\Delta T)\alpha = (0.3 \text{ m})(30 \text{ °C})(20.9 \times 10^{-6}/\text{°C}) = 188.1 \times 10^{-6} \text{ m} \downarrow$$

Deflexión δ_1. Se advierte de la figura 2*b*) que $\delta_D = 0.4\delta_C$ y que $\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D}$.

$$\delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A(0.9 \text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0.022 \text{ m})^2(200 \text{ GPa})} = 11.84 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_D = 0.40\delta_C = 0.4(11.84 \times 10^{-9} R_A) = 4.74 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B(0.3 \text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0.03 \text{ m})^2(105 \text{ GPa})} = 4.04 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

De la ecuación (1) se tiene que $R_A = 0.4R_B$, por lo que

$$\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} = [4.74(0.4R_B) + 4.04R_B]10^{-9} = 5.94 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

Pero $\delta_T = \delta_1$: $\quad 188.1 \times 10^{-6} \text{ m} = 5.94 \times 10^{-9} R_B \quad R_B = 31.7 \text{ kN}$

Esfuerzo en el cilindro: $\sigma_B = \dfrac{R_B}{A} = \dfrac{31.7 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi(0.03 \text{ m})^2}$ $\quad \sigma_B = 44.8 \text{ MPa}$ ◀

REVISAR y PENSAR: Este ejemplo ilustra los grandes esfuerzos que se pueden desarrollar en los sistemas estáticamente indeterminados, debido incluso a cambios modestos en la temperatura. Observe que si este ensamble fuera estáticamente determinado (es decir, si se removiera la varilla de acero), no se hubiera desarrollado ningún esfuerzo en el cilindro debido al cambio de temperatura.

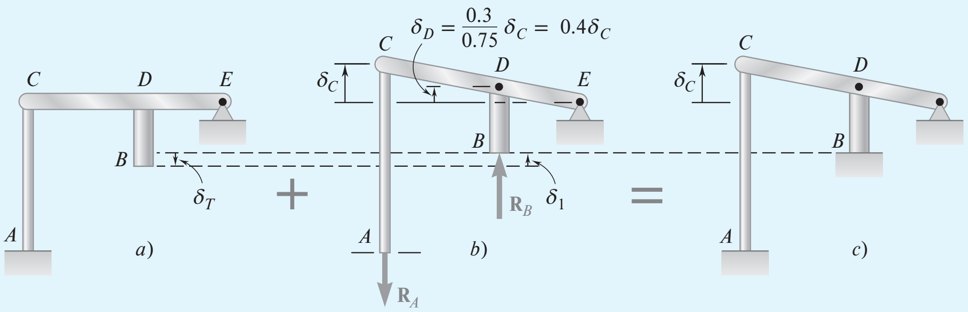


Figura 2 Superposición de deformaciones de la fuerza térmica y de restricción. *a*) Con el soporte en *B* retirado. *b*) Aplicación de la reacción en *B*. *c*) Posición final.

Problemas

2.33 Se aplica una fuerza céntrica axial $P = 450$ kN al bloque compuesto que se muestra en la figura, por medio de una placa extrema rígida. Si se sabe que $h = 10$ mm, determine el esfuerzo normal en *a*) el núcleo de latón, *b*) las placas de aluminio.

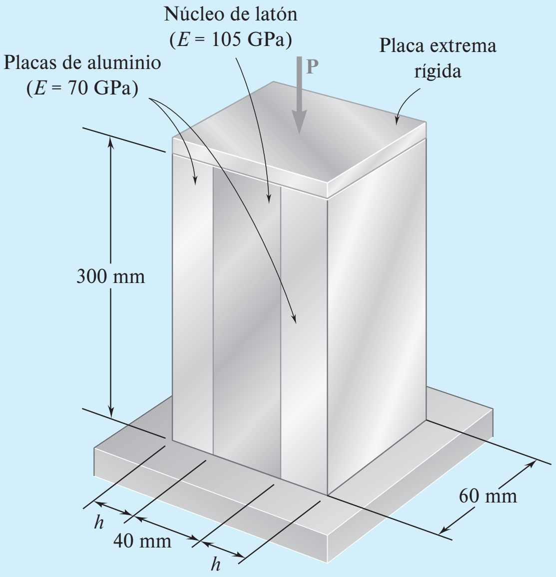


Figura P2.33

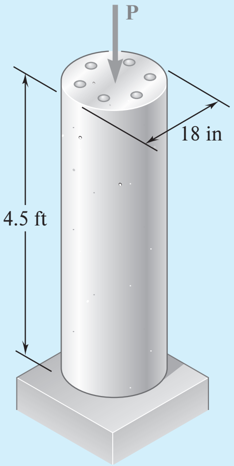


Figura P2.35

2.34 Para el bloque compuesto que se muestra en el problema 2.33, determine *a*) el valor de h si la porción de la carga soportada por las placas de aluminio es la mitad de la porción de la carga soportada por el núcleo de latón, *b*) la carga total si el esfuerzo en el latón es de 80 MPa.

2.35 El poste de concreto de 4.5 ft está reforzado con seis barras de acero, cada una con un diámetro de $1\frac{1}{8}$ in. Si se sabe que $E_s = 29 \times 10^6$ psi y $E_c = 4.2 \times 10^6$ psi, determine los esfuerzos normales en el acero y en el concreto cuando se aplica al poste una fuerza céntrica axial **P** de 350 kips.

2.36 Para el poste del problema 2.35, determine la fuerza céntrica máxima que puede aplicarse si el esfuerzo normal permisible es de 20 ksi en el acero y 2.4 ksi en el concreto.

2.37 En el ensamble que se muestra en la figura se aplica una fuerza axial de 200 kN por medio de placas rígidas en los extremos. Determine *a*) el esfuerzo normal en la coraza de aluminio, *b*) la deformación correspondiente del ensamble.

2.38 La longitud del ensamble mostrado disminuye 0.40 mm cuando se aplica una fuerza axial por medio de placas rígidas en los extremos. Determine *a*) la magnitud de la fuerza aplicada, *b*) el esfuerzo correspondiente en el núcleo de latón.

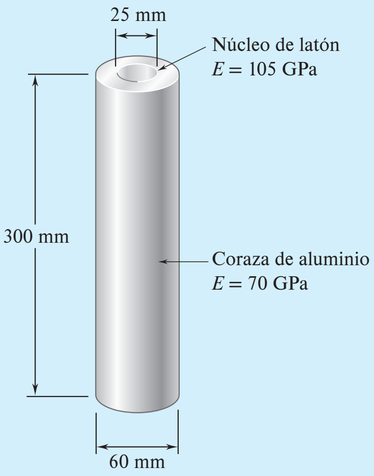


Figura *P2.37* y *P2.38*

2.39 Una barra de poliestireno, consistente en dos partes cilíndricas *AB* y *BC*, está restringida en ambos extremos y se somete a dos cargas de 6 kips como se muestra en la figura. Si se sabe que $E = 0.45 \times 10^6$ psi, determine *a*) las reacciones en *A* y *C*, *b*) el esfuerzo normal en cada parte de la varilla.

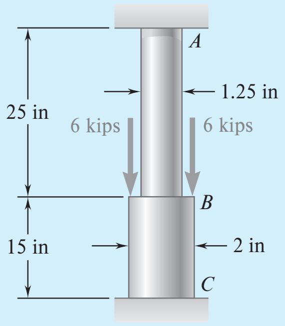


Figura P2.39

2.40 Tres varillas de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) soportan una carga **P** de 8.5 kips. Cada una de las varillas *AB* y *CD* tiene un área de sección transversal de 0.32 in^2 y la varilla *EF* tiene un área de sección transversal de 1 in^2. No tome en cuenta la deformación de la barra *BED* para determinar *a*) el cambio de longitud en la varilla *EF* y *b*) el esfuerzo en cada varilla.

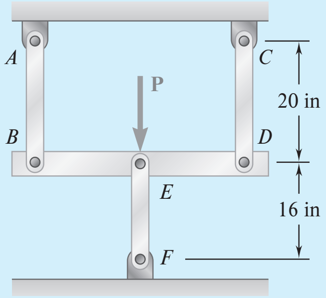


Figura *P2.40*

2.41 Dos varillas cilíndricas, una de acero y la otra de latón, se unen en *C* y están restringidas por soportes rígidos en *A* y en *E*. Para la carga mostrada y sabiendo que $E_s = 200$ GPa y $E_b = 105$ GPa, determine *a*) las reacciones en *A* y en *E*, *b*) la deflexión del punto *C*.

2.42 Retome el problema 2.41, y ahora suponga que la varilla *AC* está hecha de latón y que la varilla *CE* está fabricada de acero.

2.43 Cada una de las varillas *BD* y *CE* está hecha de latón ($E = 105$ GPa) y tiene un área en su sección transversal de 200 mm^2. Determine la deflexión del extremo *A* del elemento rígido *ABC* causada por la carga de 2 kN.

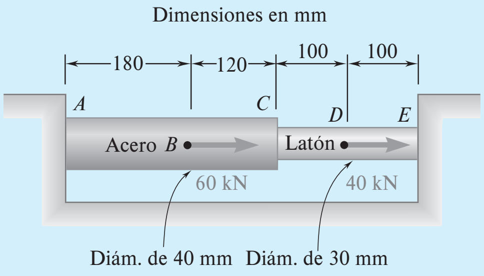


Figura P2.41

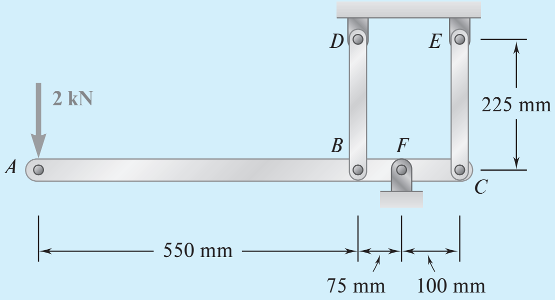


Figura P2.43

2.44 La barra rígida *AD* está soportada por dos alambres de acero de $\frac{1}{16}$ in. de diámetro ($E = 29 \times 10^6$ psi), un pasador y una ménsula en *A*. Si se sabe que los alambres estaban originalmente tensos, determine *a*) la tensión adicional en cada alambre cuando se aplica una carga **P** de 220 lb en *D*, *b*) la deflexión correspondiente del punto *D*.

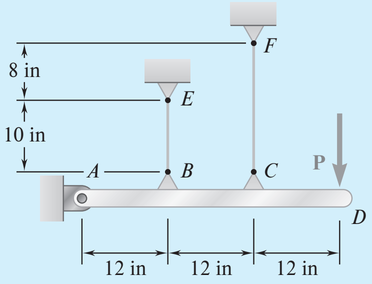


Figura P2.44

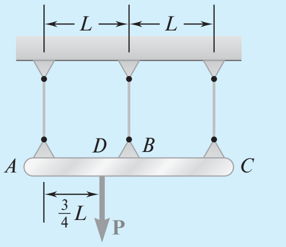


Figura P2.45

2.45 La barra rígida *ABC* está suspendida de tres alambres del mismo material. El área de la sección transversal del alambre en *B* es igual a la mitad del área de la sección transversal de los alambres en *A* y *C*. Determine la tensión en cada alambre causada por la carga **P** mostrada.

2.46 La barra rígida *AD* está soportada por dos alambres de acero de $\frac{1}{16}$ in de diámetro ($E = 29 \times 10^6$ psi), un pasador y una ménsula en *D*. Si se sabe que los alambres estaban originalmente tensos, determine *a*) la tensión adicional en cada alambre cuando se aplica una carga **P** de 120 lb en *B*, *b*) la deflexión correspondiente del punto *B*.

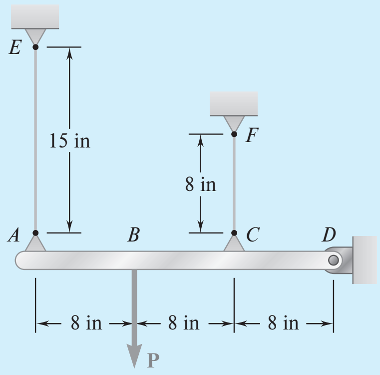


Figura P2.46

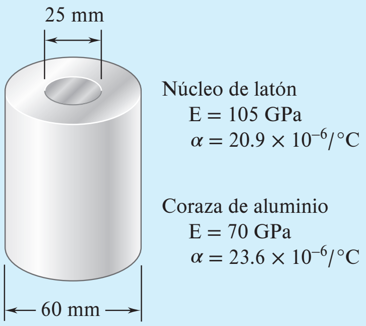


Figura P2.47

2.47 La coraza de aluminio que se muestra en la figura está completamente unida al núcleo de latón y el ensamble se encuentra libre de esfuerzo a una temperatura de 15 °C. Considerando solo deformaciones axiales, determine el esfuerzo en el aluminio cuando la temperatura alcanza 195 °C.

2.48 Resuelva el problema 2.47 suponiendo que el núcleo está hecho de acero (E_s = 200 GPa, $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}$/°C) en vez de latón.

2.49 La coraza de latón ($\alpha_b = 11.6 \times 10^{-6}$/°F) está unida por completo al núcleo de acero ($\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}$/°F). Determine el incremento máximo permisible en temperatura si el esfuerzo en el núcleo de acero no debe exceder de 8 ksi.

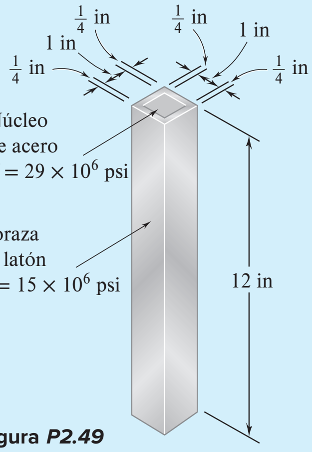


Figura P2.49

2.50 El poste de concreto ($E_c = 3.6 \times 10^6$ psi y $\alpha_c = 5.5 \times 10^{-6}$/°F) está reforzado con seis varillas de acero, cada una de $\frac{7}{8}$ in de diámetro ($E_s = 29 \times 10^6$ psi,

y $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}$/°F). Determine los esfuerzos normales que se inducen en el acero y en el concreto debido a una elevación en la temperatura de 65 °F.

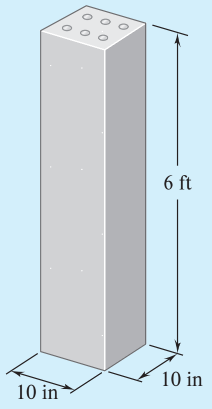


Figura P2.50

2.51 Una varilla que consiste en dos porciones cilíndricas *AB* y *BC* está restringida en ambos extremos. La porción *AB* es de acero (E_s = 200 GPa, $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}$/°C), y la porción *BC* está hecha de latón (E_b = 105 GPa, $\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}$/°C). Si se sabe que la varilla se encuentra inicialmente sin esfuerzos, determine la fuerza de compresión inducida en *ABC* cuando la temperatura se eleva 50 °C.

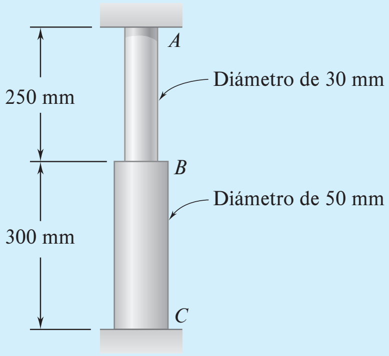


Figura P2.51

2.52 Una barra consistente en dos porciones cilíndricas *AB* y *BC* está restringida en ambos extremos. La porción *AB* es de acero ($E_s = 29 \times 10^6$ psi, $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}$/°F) y la porción *BC* es de aluminio ($E_a = 10.4 \times 10^6$ psi, $\alpha_a = 13.3 \times 10^{-6}$/°F). Si se sabe que la barra está inicialmente libre de esfuerzo, determine *a*) los esfuerzos normales inducidos en las porciones *AB* y *BC* por una elevación de temperatura de 70 °F, *b*) la deflexión correspondiente del punto *B*.

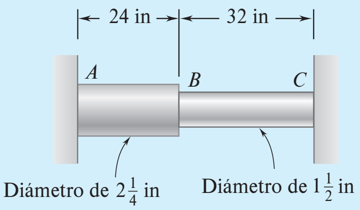


Figura P2.52

2.53 Resuelva el problema 2.52 suponiendo que la porción *AB* de la varilla compuesta está hecha de aluminio y que la porción *BC* es de acero.

2.54 Los rieles de una vía de acero para ferrocarril (E_s = 200 GPa, $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}$/°C) fue tendida a una temperatura de 6 °C. Determine el esfuerzo normal en los rieles cuando la temperatura alcance 48 °C, suponiendo que los rieles *a*) están soldados para formar una vía continua, *b*) tienen 10 m de longitud con separaciones de 3 mm entre ellos.

2.55 Dos barras de acero (E_s = 200 GPa, $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}$/°C) se emplean para reforzar una barra de latón (E_b = 105 GPa, $\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}$/°C) que está sujeta a una carga P = 25 kN. Cuando se fabricaron las barras de acero, la distancia entre los centros de los agujeros que debían ajustarse a los pasadores se redujo 0.5 mm en relación con los 2 m que se necesitaban. Por ello las barras de acero se colocaron en un horno para aumentar su longitud, con el fin de que se ajustaran a los pasadores. Después de este proceso, la temperatura de las barras de acero se redujo a la temperatura ambiente. Determine *a*) el incremento en la temperatura que hizo posible que la barra de acero se ajustara a los pasadores, *b*) el esfuerzo en la barra de latón después de aplicar la carga sobre ella.

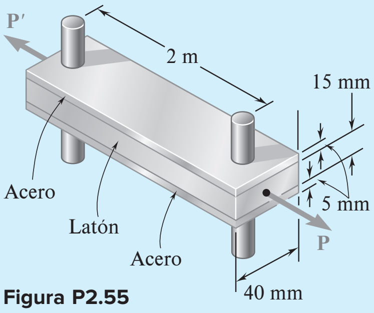


Figura P2.55

2.56 Determine la carga máxima *P* que puede aplicarse a la barra de latón del problema 2.55 si el esfuerzo permisible en las barras de acero es de 30 MPa y el esfuerzo permisible en la barra de latón es de 25 MPa.

2.57 Una varilla de aluminio (E_a = 70 GPa, α_a = 23.6 × 10^{-6}/°C) y un eslabón de acero (E_s = 200 GPa, α_s = 11.7 × 10^{-6}/°C) tienen las dimensiones mostradas a una temperatura de 20°C. El eslabón de acero se calienta hasta que la barra de aluminio se puede ajustar libremente en el eslabón. Enseguida, la temperatura de todo el ensamble se eleva a 150 °C. Determine el esfuerzo normal estándar *a*) en la varilla, *b*) en el eslabón.

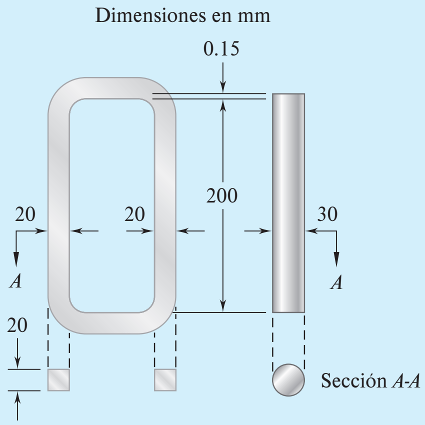


Figura *P2.57*

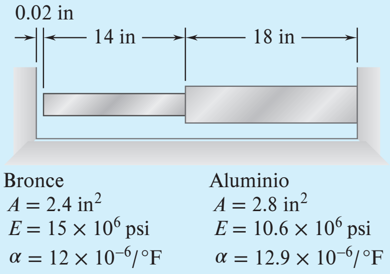


Figura P2.58 y P2.59

2.58 Si se sabe que existe una separación de 0.02 in cuando la temperatura es de 75 °F, determine *a*) la temperatura en que el esfuerzo normal de la barra de aluminio será igual a –11 ksi, *b*) la longitud exacta correspondiente de la barra de aluminio.

2.59 Determine *a*) la fuerza de compresión en las barras mostradas después de una elevación en la temperatura de 180 °F, *b*) el cambio correspondiente en la longitud de la barra de bronce.

2.60 A temperatura ambiente (20 °C) hay un espacio de 0.5 mm entre los extremos de las varillas mostradas en la figura. Posteriormente, cuando la temperatura alcanza 140 °C, determine *a*) el esfuerzo normal en la varilla de aluminio, *b*) el cambio de longitud de la varilla de aluminio.

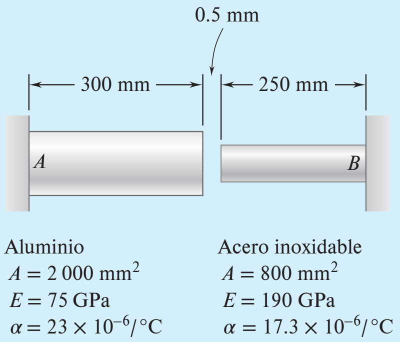


Figura *P2.60*

2.4 RELACIÓN DE POISSON

Cuando una barra esbelta homogénea se carga axialmente, el esfuerzo y la deformación unitaria resultantes satisfacen la ley de Hooke, siempre y cuando no se exceda el límite elástico del material. Suponiendo que la carga **P** está dirigida a lo largo del eje x (figura 2.29*a*), $\sigma_x = P/A$, donde A es el área de la sección transversal de la barra. Por la ley de Hooke,

$$\epsilon_x = \sigma_x/E \tag{2.16}$$

donde E es el módulo de elasticidad del material.

Además, los esfuerzos normales en las caras perpendiculares a los ejes y y z son cero: $\sigma_y = \sigma_z = 0$ (figura 2.29*b*). Parecería lógico concluir que las deformaciones correspondientes ϵ_y y ϵ_z también son cero. Pero esto *no es el caso*. En todos los materiales de ingeniería, la elongación que produce una fuerza axial de tensión **P** en la dirección de la fuerza se acompaña de una contracción en cualquier dirección transversal (figura 2.30).† En esta sección y en las siguientes se supondrá que todos los materiales considerados son *homogéneos* e *isotrópicos* (es decir, que sus propiedades mecánicas son independientes tanto de la *posición* como de la *dirección*). Esto significa que la deformación unitaria debe tener el mismo valor para cualquier dirección transversal. Por lo tanto, para la carga mostrada en la figura 2.29 debe tenerse que $\epsilon_y = \epsilon_z$. Este valor se conoce como *deformación lateral.* Una constante importante para un material dado es su *relación de Poisson*, llamada así en honor del matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840), y que se denota con la letra griega ν (nu).

$$\nu = -\frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} \tag{2.17}$$

o bien

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2.18}$$

para la condición de carga representada en la figura 2.29. Note el uso de un signo menos en las ecuaciones anteriores para obtener un valor positivo de ν, puesto que las deformaciones axiales y laterales de todos los materiales de ingeniería tienen signos opuestos.‡ Al resolver la ecuación (2.18) para encontrar ϵ_y y ϵ_z, y utilizando la ecuación (2.16), se escriben las siguientes relaciones que describen completamente las condiciones de deformación bajo una carga axial aplicada en una dirección paralela al eje x:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \tag{2.19}$$

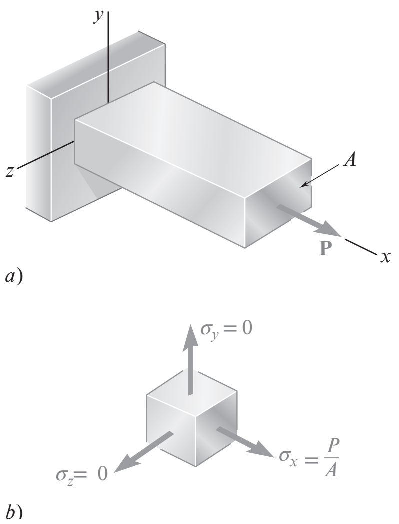


Figura 2.29 Una barra en tensión uniaxial y un elemento representativo de esfuerzo.

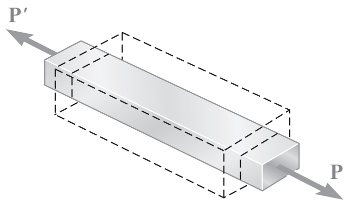


Figura 2.30 Los materiales experimentan contracción transversal cuando se alargan mediante carga axial.

Aplicación de conceptos 2.7

Se observa que una varilla de 500 mm de longitud y 16 mm de diámetro, elaborada con un material homogéneo e isotrópico, aumenta su longitud en 300 μm y reduce su diámetro en 2.4 μm al someterse a una carga axial de 12 kN. Determine el módulo de elasticidad y la relación de Poisson del material.

† Sería tentador, pero igualmente erróneo, suponer que el volumen de la varilla permanece sin cambio como resultado del efecto combinado de la elongación axial y de la contracción transversal (vea la sección 2.6).

‡ Sin embargo, algunos materiales experimentales, como las espumas poliméricas, se expanden lateralmente cuando se estiran. Como las deformaciones axial y lateral tienen el mismo signo, la relación de Poisson de estos materiales es negativa. (Vea Roderic Lakes, "Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio", en *Science*, 27 de febrero de 1987, volumen 235, pp. 1038-1040.)

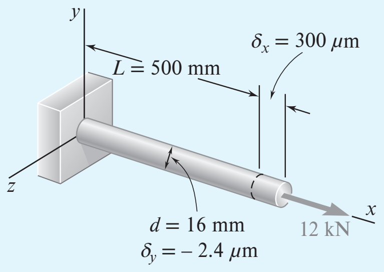


Figura 2.31 Barra cargada axialmente.

El área de la sección transversal de la varilla es

$$A = \pi r^2 = \pi(8 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 201 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

Al elegir el eje x a lo largo del eje de la varilla (figura 2.31), se escribe

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3\ \text{N}}{201 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 59.7\ \text{MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300\ \mu\text{m}}{500\ \text{mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4\ \mu\text{m}}{16\ \text{mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

De la ley de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$,

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59.7\ \text{MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99.5\ \text{GPa}$$

y de la ecuación (2.18),

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0.25$$

2.5 CARGAS MULTIAXIALES. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

Todos los ejemplos considerados hasta el momento en este capítulo han tratado con elementos esbeltos sujetos a cargas axiales, es decir, con fuerzas dirigidas a lo largo de un solo eje. Considere ahora elementos estructurales sometidos a cargas que actúan en las direcciones de los tres ejes coordenados y que producen esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z, todos distintos de cero (figura 2.32). Esta condición se conoce como *carga multiaxial.* Advierta que ésta no es la condición generalizada de esfuerzos descrita en la sección 1.3, ya que no se incluyen esfuerzos cortantes entre los esfuerzos mostrados en la figura 2.32.

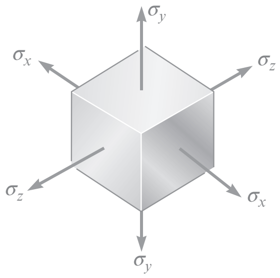


Figura 2.32 Estado de esfuerzo para cargas multiaxiales.

Sea un elemento de un material isotrópico con forma cúbica (figura 2.33*a*). Puede suponerse que el lado del cubo sea igual a la unidad, ya que siempre es posible seleccionar el lado del cubo como una unidad de longitud. Bajo la carga multiaxial dada, el elemento se deformará hasta ser un *paralelepípedo rectangular* de lados iguales $1 + \epsilon_x$, $1 + \epsilon_y$ y $1 + \epsilon_z$, donde ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z son los valores de la deformación normal en las direcciones de los tres ejes coordenados (figura 2.33*b*). Note que, como resultado de las deformaciones de los otros elementos del material, el elemento en consideración también puede sufrir una traslación, pero en este momento solo interesa la *deformación real* del elemento, y no cualquier posible desplazamiento del cuerpo rígido.

Para expresar las componentes de la deformación ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z en términos de las componentes del esfuerzo σ_x, σ_y y σ_z, se considerará por separado el efecto de cada componente de esfuerzo y se combinarán los resultados. El enfoque que se propone utilizar aquí se empleará repetidamente en este libro, y se basa en el *principio de superposición,* el cual establece que el efecto de una carga combinada dada sobre una estructura puede obtenerse *determinando por separado los efectos de las distintas cargas y combinando los resultados*, siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

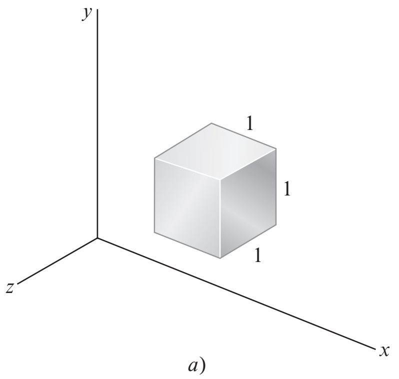
1. Cada efecto está linealmente relacionado con la carga que lo produce.
2. La deformación resultante de cualquier carga dada es pequeña y no afecta las condiciones de aplicación de las otras cargas.

En el caso de una carga multiaxial, la primera condición será satisfecha si los esfuerzos no exceden el límite de proporcionalidad del material, y la segunda condición también se cumplirá si el esfuerzo en cualquier cara dada no causa deformaciones en las otras que sean lo suficientemente grandes para afectar el cálculo de los esfuerzos en esas caras.

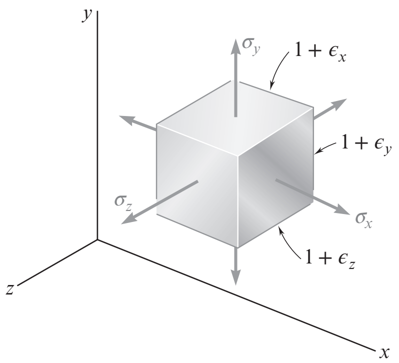
Considerando primero el efecto de la componente de esfuerzo σ_x, recuerde de la sección 2.4 que σ_x causa una deformación igual a σ_x/E en la dirección x y deformaciones iguales a $-\nu\sigma_x/E$ en las direcciones y y z. De manera similar, si la componente σ_y se aplica por separado, causará una deformación σ_y/E en la dirección y y deformaciones $-\nu\sigma_y/E$ en las otras dos direcciones. Finalmente, la componente de esfuerzo σ_z ocasionará una deformación unitaria σ_z/E en la dirección z y deformaciones $-\nu\sigma_z/E$ en las direcciones x y y. Al combinar los resultados, se concluye que las componentes de deformación correspondientes a la carga multiaxial dada son

$$
\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.20)}
$$

Las ecuaciones (2.20) se conocen como *ley de Hooke generalizada para la carga multiaxial de un material isotrópico homogéneo*. Como ya se indicó, los resultados obtenidos son válidos solo si los esfuerzos no exceden el límite de proporcionalidad, y en tanto las deformaciones involucradas sean pequeñas. Además, recuerde que un valor positivo para una componente de esfuerzo significa tensión, y un valor negativo significa compresión. De igual manera, un valor positivo para una componente de deformación indica expansión en la dirección correspondiente, y un valor negativo indica contracción.



a)



b)

Figura 2.33 Deformación de un cubo unitario bajo cargas multiaxiales: *a*) sin carga; *b*) deformado.

Aplicación de conceptos 2.8

El bloque de acero mostrado (figura 2.34) se somete a presión uniforme en todas sus caras. Si sabe que el cambio de longitud del borde AB es de -1.2×10^{-3} in, encuentre *a*) el cambio de longitud en los otros dos bordes, y *b*) la presión p aplicada a las caras del bloque. Suponga que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$.

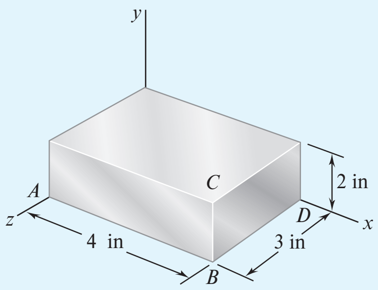


Figura 2.34 Bloque de acero bajo la presión uniforme p.

***a*) Cambio de longitud de los otros bordes.** Al sustituir $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ en la ecuación (2.20), se encuentra que las tres componentes de deformación tienen el valor común

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \qquad \textbf{(1)}$$

Ya que

$$
\begin{aligned}
\epsilon_x &= \delta_x/AB = (-1.2 \times 10^{-3}\text{ in})/(4\text{ in}) \\
&= -300 \times 10^{-6}\text{ in/in}
\end{aligned}
$$

se obtiene

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_x = -300 \times 10^{-6}\text{ in/in}$$

de lo que resulta

$$
\begin{aligned}
\delta_y &= \epsilon_y(BC) = (-300 \times 10^{-6})(2\text{ in}) = -600 \times 10^{-6}\text{ in} \\
\delta_z &= \epsilon_z(BD) = (-300 \times 10^{-6})(3\text{ in}) = -900 \times 10^{-6}\text{ in}
\end{aligned}
$$

***b*) Presión.** Al despejar la ecuación (1) para encontrar p,

$$p = -\frac{E\epsilon_x}{1 - 2\nu} = -\frac{(29 \times 10^6 \text{ psi})(-300 \times 10^{-6})}{1 - 0.58}$$

$$p = 20.7 \text{ ksi}$$

*2.6 DILATACIÓN Y MÓDULO VOLUMÉTRICO DE ELASTICIDAD

En esta sección se examinará el efecto de los esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z sobre el volumen de un elemento de material isotrópico. Considere el elemento mostrado en la figura 2.33. En su estado no esforzado, tiene la forma de un cubo de volumen unitario, y bajo los esfuerzos σ_x, σ_y, σ_z, se deforma en un paralelepípedo rectangular cuyo volumen es:

$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

Como las deformaciones ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z son mucho más pequeñas que la unidad, sus productos son más pequeños aún y pueden omitirse en la expansión del producto. Por lo tanto,

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

El cambio en el volumen e del elemento es

$$e = v - 1 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1$$

o bien

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{2.21}$$

Como el elemento tenía originalmente un volumen unitario, e representa *el cambio de volumen por unidad de volumen* y se conoce como *dilatación* del material. Al sustituir ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z de las ecuaciones (2.20) en la ecuación (2.21), el cambio es

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad \textbf{(2.22)}^\dagger$$

Cuando un cuerpo está sujeto a una presión hidrostática uniforme p, cada una de las componentes de esfuerzo es igual a $-p$ y la ecuación (2.22) da

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E}p \tag{2.23}$$

Al introducir la constante

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \tag{2.24}$$

† Ya que la dilatación e representa un cambio de volumen, debe ser independiente de la orientación del elemento considerado. Se deduce de las ecuaciones (2.21) y (2.22) que las cantidades $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ y $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ son también independientes de la orientación del elemento. Esta propiedad se verificará en el capítulo 7.

La ecuación (2.23) se escribe en la forma

$$e = -\frac{p}{k} \tag{2.25}$$

La constante k se conoce como el *módulo volumétrico de elasticidad* o *módulo de compresibilidad* del material, que se expresa en pascales o en psi.

Debido a que un material estable sometido a presión hidrostática solo puede *disminuir* en volumen, la dilatación e en la ecuación (2.25) es negativa, de lo que sigue que el módulo volumétrico de elasticidad k es una cantidad positiva. Con referencia a la ecuación (2.24), $1 - 2\nu > 0$ o $\nu < \frac{1}{2}$. Recuerde de la sección 2.4 que ν es positiva para todos los materiales de ingeniería. Así, para cualquier material de ingeniería,

$$0 < \nu < \tfrac{1}{2} \tag{2.26}$$

Se advierte que un material ideal con ν igual a cero podría estirarse en una dirección sin ninguna contracción lateral. Por otra parte, un material ideal para el que $\nu = \frac{1}{2}$ y $k = \infty$, sería perfectamente incompresible ($e = 0$). Con referencia a la ecuación (2.22) también se advierte que, ya que $\nu < \frac{1}{2}$ en el rango elástico, el estirar un material de ingeniería en una dirección, por ejemplo en la dirección x ($\sigma_x > 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$), resultaría en un incremento de su volumen ($e > 0$).†

Aplicación de conceptos 2.9

Determine el cambio de volumen ΔV del bloque de acero que se muestra en la figura 2.34, cuando se somete a la presión hidrostática $p = 180$ MPa. Utilice $E = 200$ GPa y $\nu = 0.29$.

De la ecuación (2.24), el módulo volumétrico del acero es

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{200\,\text{GPa}}{3(1 - 0.58)} = 158.7\ \text{GPa}$$

y de la ecuación (2.25), la dilatación es

$$e = -\frac{p}{k} = -\frac{180\ \text{MPa}}{158.7\ \text{GPa}} = -1.134 \times 10^{-3}$$

Ya que el volumen V del bloque en su estado sin esfuerzo es

$$V = (80\ \text{mm})(40\ \text{mm})(60\ \text{mm}) = 192 \times 10^3\ \text{mm}^3$$

y dado que e representa el cambio en el volumen por unidad de volumen, $e = \Delta V/V$,

$$\Delta V = eV = (-1.134 \times 10^{-3})(192 \times 10^3\ \text{mm}^3)$$

$$\Delta V = -218\ \text{mm}^3$$

2.7 DEFORMACIÓN UNITARIA CORTANTE

Cuando en la sección 2.5 se dedujeron las relaciones (2.20) entre los esfuerzos normales y las deformaciones normales en un material isotrópico homogéneo, se supuso que no había esfuerzos cortantes involucrados. En la situación más general de esfuerzo re-

† Sin embargo, en el rango plástico, el volumen del material permanece casi constante.

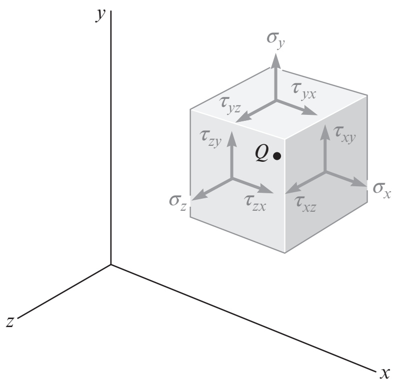


Figura 2.35 Componentes positivas de esfuerzo en el punto *Q* para un estado general de esfuerzo.

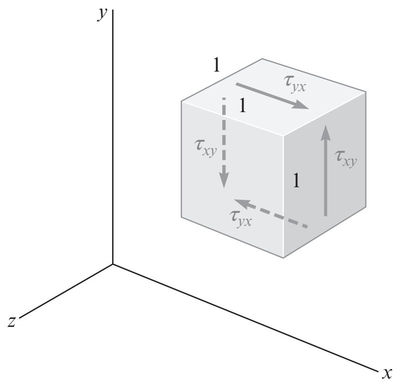


Figura 2.36 Elemento cúbico sujeto a esfuerzos cortantes.

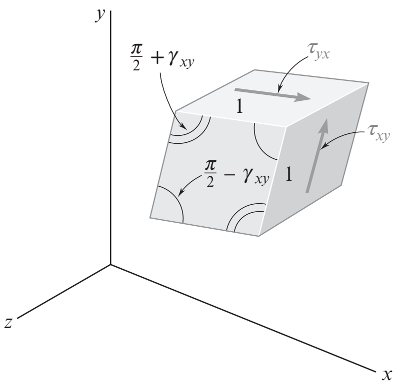


Figura 2.37 Deformación de un elemento cúbico debido a esfuerzos cortantes.

presentada en la figura 2.35, los esfuerzos cortantes τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx} estarán presentes (así como los esfuerzos cortantes correspondientes τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}). Estos esfuerzos no tienen un efecto directo sobre las deformaciones normales y, mientras todas las deformaciones involucradas permanezcan pequeñas, no afectarán la deducción ni la validez de las ecuaciones (2.20). Sin embargo, los esfuerzos cortantes tienden a deformar un elemento cúbico de material hacia la forma de un paralelepípedo *oblicuo.*

Considere un elemento cúbico (figura 2.36) sometido solo a esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} aplicados a las caras del elemento respectivamente perpendiculares a los ejes *x* y *y*. (De la sección 1.4, recuerde que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$). Se observa que el cubo se deforma en un romboide con lados iguales a uno (figura 2.37). Dos de los ángulos formados por las cuatro caras bajo esfuerzo se reducen de a $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$, mientras que los otros dos aumentan de a $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$. El pequeño ángulo γ_{xy} (expresado en radianes) define la *deformación a cortante* que corresponde a las direcciones *x* y *y*. Cuando la deformación involucra una *reducción* del ángulo formado por las dos caras orientadas respectivamente hacia los ejes *x* y *y* positivos (como se observa en la figura 2.37), se dice que la deformación a cortante γ_{xy} es *positiva*; de lo contrario es negativa.

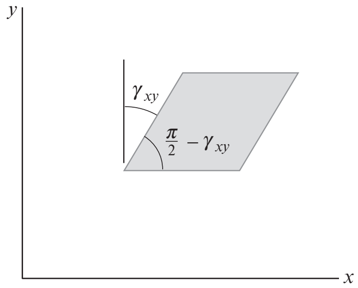


Figura 2.38 Elemento cúbico visto en el plano *xy* después de la rotación rígida.

Como resultado de las deformaciones de otros elementos del material, el elemento considerado también puede experimentar una rotación completa. Aquí se abordará la *deformación real* del elemento, y no cualquier posible desplazamiento superimpuesto del cuerpo rígido.†

Al graficar los valores sucesivos de τ_{xy} contra los valores correspondientes de γ_{xy}, se obtiene el diagrama correspondiente esfuerzo-deformación a cortante para el material. (Esto puede llevarse a cabo realizando un ensayo de torsión, como se verá en el capítulo 3). Este diagrama es similar al diagrama esfuerzo-deformación normal obtenido para el mismo material a partir del ensayo de tensión descrito anteriormente. Sin embargo, los valores obtenidos para la resistencia de cedencia, resistencia última, etc., son aproximadamente la mitad de los valores en corte que sus equivalentes en tensión. Como en el caso de los esfuerzos y deformaciones normales, la porción inicial del diagrama esfuerzo-deformación a corte es una línea recta. Para valores del esfuerzo cortante que no sobrepasan el límite de proporcionalidad a corte, se puede escribir para cualquier material isotrópico homogéneo,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{2.27}$$

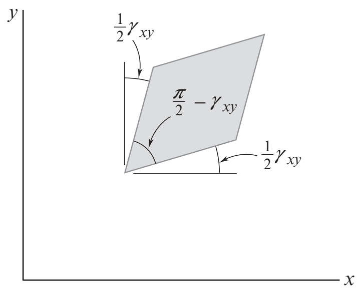


Figura 2.39 Elemento cúbico visto en el plano *xy* con igual rotación de las caras *x* y *y*.

† Al definir la deformación γ_{xy} algunos autores suponen arbitrariamente que la deformación del elemento se acompaña de una rotación de cuerpo rígido de tal manera que las caras horizontales del elemento no giran. La deformación γ_{xy} se representa, entonces, por el ángulo a través del cual las otras dos caras han girado (figura 2.38). Otros suponen una rotación de cuerpo rígido tal que las caras horizontales giran $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ en sentido contrario a las manecillas del reloj y las caras verticales a través de $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ en sentido horario (figura 2.39). Como ambas suposiciones son innecesarias y pueden crear confusión, en este texto se ha preferido asociar la deformación a corte γ_{xy} con el *cambio de ángulo* formado por las dos caras, más que con la *rotación de una cara dada* bajo condiciones restrictivas.

Esta relación se conoce como *ley de Hooke para esfuerzo y deformación a cortante*, y la constante G se llama *módulo de rigidez* o *módulo de cortante* del material. Dado que la deformación γ_{xy} se definió como un ángulo en radianes, es adimensional, y el módulo G se expresa en las mismas unidades que τ_{xy}, es decir, en pascales o en psi. El módulo de rigidez G de cualquier material dado es menos de la mitad pero más de la tercera parte del módulo de elasticidad E de ese material.†

Considere ahora un pequeño elemento de material sometido a esfuerzos cortantes τ_{yz} y τ_{zy} (figura 2.40*a*), donde la deformación unitaria a corte γ_{yz} es el cambio en el ángulo formado por las caras bajo esfuerzo. La deformación unitaria a corte γ_{zx} se define de manera similar considerando un elemento sometido a esfuerzos cortantes τ_{zx} y τ_{xz} (figura 2.40*b*). Para los valores de esfuerzo que no exceden el límite de proporcionalidad, pueden escribirse las dos relaciones adicionales:

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \tag{2.28}$$

donde la constante G es la misma que en la ecuación (2.27).

Para la condición general de esfuerzo representada en la figura 2.35, y en tanto ninguno de los esfuerzos involucrados exceda el correspondiente límite de proporcionalidad, es posible aplicar el principio de superposición y combinar los resultados. La ley de Hooke generalizada para un material isotrópico homogéneo bajo la condición más generalizada de esfuerzos es

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}\\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}\\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Un análisis de las ecuaciones (2.29) conduce a tres distintas constantes, E, ν y G, que se usan para predecir las deformaciones causadas en un material dado por una combinación arbitraria de esfuerzos. En realidad, solo dos de estas constantes deben determinarse experimentalmente para cualquier material dado. En la siguiente sección se explica que la tercera constante puede obtenerse mediante un cálculo muy sencillo.

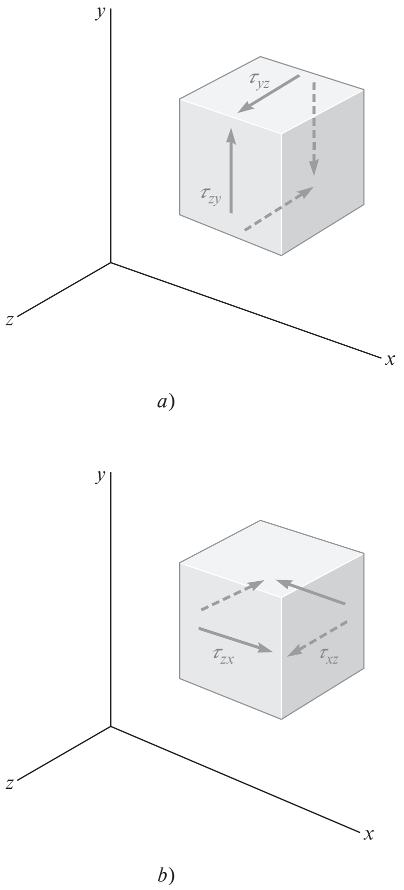


Figura 2.40 Estados de cortante puro en: *a*) plano *yz*; *b*) plano *xz*.

Aplicación de conceptos 2.10

Un bloque rectangular de material con un módulo de rigidez $G = 90$ ksi se une a dos placas rígidas horizontales. La placa inferior está fija, mientras que la placa superior se somete a una fuerza horizontal **P** (figura 2.41*a*). Si se sabe que la placa superior se mueve 0.04 in. bajo la acción de la fuerza, halle *a*) la deformación unitaria promedio a corte del material, *b*) la fuerza **P** ejercida sobre la placa superior.

***a*) Deformación unitaria cortante.** Se seleccionan ejes coordenados centrados en el punto medio C del borde AB y dirigidos como se muestra en la figura 2.41*b*. La deformación unitaria cortante γ_{xy} es igual al ángulo formado por la vertical y por la línea CF que une los puntos medios de los bordes AB y DE. Al advertir que es un ángulo muy pequeño y recordando que debe expresarse en radianes, se escribe

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0.04 \text{ in}}{2 \text{ in}} \qquad \gamma_{xy} = 0.020 \text{ rad}$$

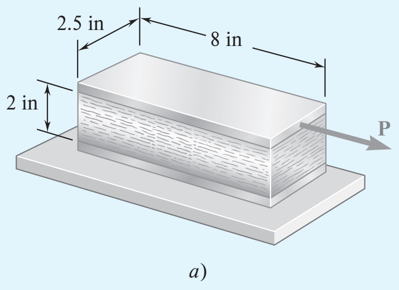


Figura 2.41 *a*) Bloque rectangular cargado a cortante.

† Vea el problema 2.90.

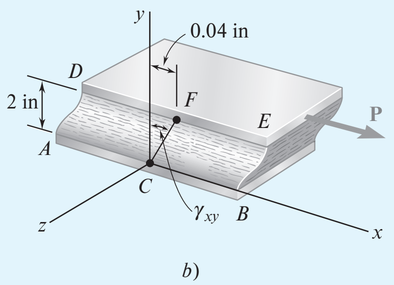


Figura 2.41 (*cont.*) *b*) Bloque deformado que muestra la deformación unitaria cortante.

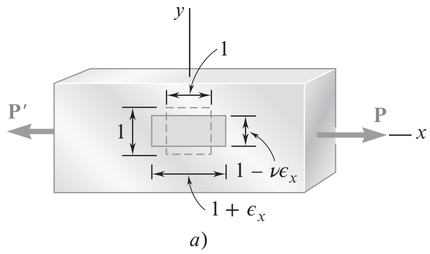
***b*) Fuerza ejercida sobre la placa superior.** Primero se determina el esfuerzo cortante τ_{xy} en el material. Utilizando la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación unitaria cortantes,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (90 \times 10^3 \text{ psi})(0.020 \text{ rad}) = 1\,800 \text{ psi}$$

La fuerza ejercida sobre la placa superior es,

$$P = \tau_{xy} A = (1\,800 \text{ psi})(8 \text{ in})(2.5 \text{ in}) = 36.0 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P = 36.0 \text{ kips}$$



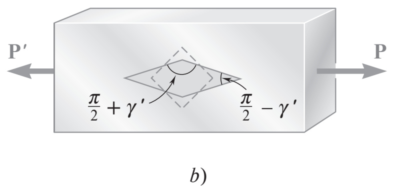


Figura 2.42 Representaciones de la deformación unitaria en una barra cargada axialmente: *a*) el elemento cúbico de deformación aparece alineado con los ejes coordenados; *b*) el elemento cúbico de deformación aparece rotado 45° con respecto al eje *z*.

2.8 DEFORMACIONES BAJO CARGA AXIAL: RELACIÓN ENTRE E, ν Y G

En la sección 2.4 se mostró que una barra delgada sometida a una carga axial de tensión **P** dirigida a lo largo del eje x se alargará en la dirección x y se contraerá en ambas direcciones transversales y y z. Si ϵ_x denota la deformación axial, la deformación lateral es expresada como $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, donde ν es la relación de Poisson. Así, un elemento en la forma de un cubo con un lado igual a uno y orientado como se muestra en la figura 2.42*a* se deformará como un paralelepípedo rectangular de lados $1 + \epsilon_x$, $1 - \nu\epsilon_x$ y $1 - \nu\epsilon_x$. (Note que solo una cara del elemento se muestra en la figura). Por otra parte, si el elemento está orientado a 45° de la carga, se observa que la cara mostrada en la figura 2.42*b* se deforma como un rombo. Por lo tanto, la carga axial **P** causa una deformación cortante γ' igual a la cantidad por la que cada uno de los ángulos que muestra la figura 2.42*b* aumenta o disminuye.†

El hecho de que las deformaciones cortantes, además de las deformaciones normales, resulten de una carga axial no deberá sorprender, ya que al final de la sección 1.4 se observó que una carga axial **P** causa esfuerzos normales y cortantes de igual magnitud en cuatro de las caras de un elemento orientado a 45° del eje del elemento. Esto se ilustró en la figura 1.38, que, por conveniencia, se repite aquí. En la sección 1.3, también se mostró que el esfuerzo cortante es máximo en un plano que forma un ángulo de 45° con el eje de la carga. Se deduce de la ley de Hooke para los esfuerzos y deformaciones cortantes que la deformación unitaria a corte γ' asociada con el elemento de la figura 2.42*b* es también máxima: $\gamma' = \gamma_m$.

Aunque se hará un estudio más detallado de las transformaciones de la deformación en el capítulo 7, en esta sección se deducirá una relación entre la máxima deformación cortante $\gamma' = \gamma_m$ asociada con el elemento de la figura 2.42*b* y la deformación unitaria normal ϵ_x en la dirección de la carga. Considere el elemento prismático obtenido de intersecar el elemento cúbico de la figura 2.42*a* con un plano diagonal (figura 2.43*a* y *b*). Con referencia a la figura 2.42*a*, este nuevo elemento se deformará como el elemento mostrado en la figura 2.43*c*, que tiene lados horizontales y verticales iguales a $1 + \epsilon_x$ y $1 - \nu\epsilon_x$. Pero el ángulo formado por las caras oblicuas y horizontales del elemento de la figura 2.43*b* es precisamente la mitad de uno de los ángulos rectos en el elemento

† Observe que la carga **P** también produce deformaciones unitarias normales en el elemento que se muestra en la figura 2.42*b* (vea el problema 2.72).

cúbico considerado en la figura 2.42*b*. El ángulo β en el que se deforma este ángulo debe ser igual a la mitad de $\frac{\pi}{2} - \gamma_m$. Por lo tanto,

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

Al aplicar la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos,

$$\tan\beta = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \tan\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan\frac{\gamma_m}{2}}$$

o, como $\gamma_m/2$ es un ángulo muy pequeño,

$$\tan\beta = \frac{1 - \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \frac{\gamma_m}{2}} \tag{2.30}$$

En la figura 2.43*c*, se observa que

$$\tan\beta = \frac{1 - \nu\epsilon_x}{1 + \epsilon_x} \tag{2.31}$$

Al igualar los miembros de la derecha de las ecuaciones (2.30) y (2.31), y al despejar γ_m, se tiene

$$\gamma_m = \frac{(1 + \nu)\epsilon_x}{1 + \frac{1 - \nu}{2}\epsilon_x}$$

Ya que $\epsilon_x \ll 1$, el denominador en la expresión obtenida puede suponerse igual a uno. Por lo tanto,

$$\gamma_m = (1 + \nu)\epsilon_x \tag{2.32}$$

que es la relación deseada entre la máxima deformación unitaria cortante γ_m y la deformación axial ϵ_x.

Para obtener una relación entre las constantes E, ν y G, se recuerda que, por la ley de Hooke, $\gamma_m = \tau_m/G$ y que, para una carga axial, $\epsilon_x = \sigma_x/E$. La ecuación (2.32) puede escribirse como

$$\frac{\tau_m}{G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{E}$$

o bien

$$\frac{E}{G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{\tau_m} \tag{2.33}$$

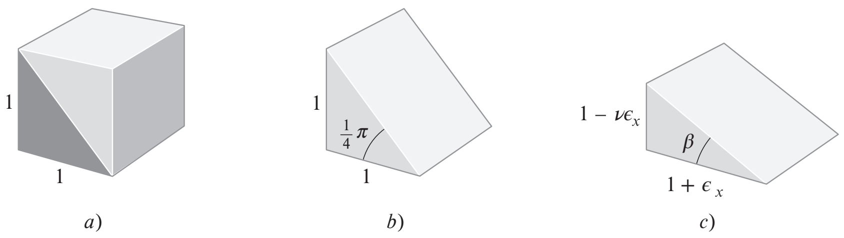


Figura 2.43 *a*) Elemento cúbico unitario de deformación que se seccionará en un plano diagonal. *b*) Sección sin deformar del elemento unitario. *c*) Sección deformada del elemento unitario.

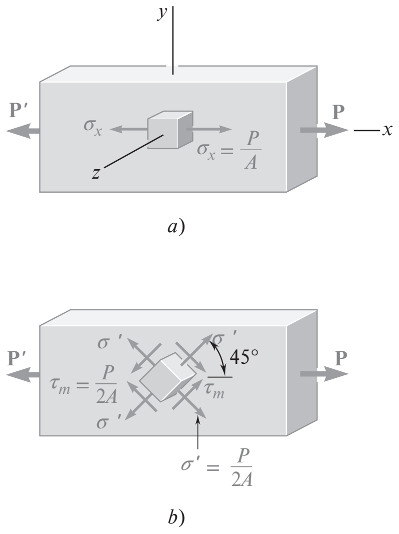


Figura 1.38 (repetida)

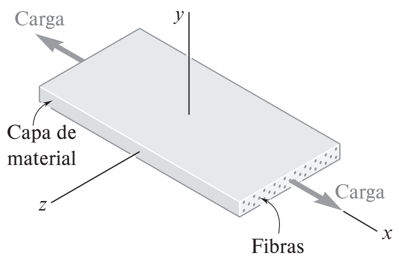
De la figura 1.38, recuerde que $\sigma_x = P/A$ y que $\tau_m = P/2A$, donde A es el área de la sección transversal del elemento. Por lo tanto, $\sigma_x/\tau_m = 2$. Al sustituir este valor en la ecuación (2.33) y al dividir ambos miembros entre 2, se obtiene la relación

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \tag{2.34}$$

que puede usarse para determinar una de las constantes E, ν o G a partir de las otras dos. Por ejemplo, al despejar G de la ecuación (2.34),

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{2.35}$$

*2.9 RELACIONES DE ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA MATERIALES COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRAS



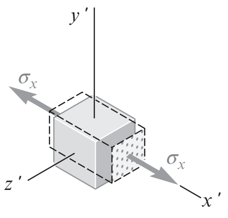


Figura 2.44 Material ortotrópico compuesto, reforzado con fibras, bajo una carga de tensión uniaxial.

Los materiales compuestos reforzados con fibras se obtienen encapsulando fibras de un material resistente y rígido en un material más débil y blando, que se conoce como *matriz.* La relación entre el esfuerzo normal y la correspondiente deformación unitaria normal creada en una lámina o capa de un material compuesto depende de la dirección en que se aplica la carga. Se requieren diferentes módulos de elasticidad, Ex, Ey y Ez, para describir la relación entre el esfuerzo normal y la deformación normal, según si la carga se aplica en una dirección paralela a las fibras, perpendicular a la capa o transversal.

Se considera de nuevo la capa de material compuesto analizada en la sección 2.1D y se le someterá a una carga uniaxial de tensión paralela a sus fibras (figura 2.44*a*). Se supone que las propiedades de las fibras y de la matriz han sido combinadas o "integradas" en un material homogéneo ficticio equivalente que posee estas propiedades combinadas. En un pequeño elemento de esa capa de material combinado (figura 2.44*b*), el esfuerzo normal correspondiente es σ_x y $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Como se indicó en la sección 2.1D, la deformación normal correspondiente en la dirección x es $\epsilon_x = \sigma_x/E_x$, donde E_x es el módulo de elasticidad del material compuesto en la dirección x. Como se vio para los materiales isotrópicos, la elongación del material en la dirección x se acompaña de contracciones en las direcciones y y z. Tales contracciones dependen de la colocación de las fibras en la matriz y generalmente serán diferentes. Por lo tanto, las deformaciones laterales ϵ_y y ϵ_z también serán diferentes, y las relaciones de Poisson correspondientes son

$$\nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad \text{y} \quad \nu_{xz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2.36}$$

Observe que el primer subíndice en cada una de las relaciones de Poisson ν_{xy} y ν_{xz} en las ecuaciones (2.36) se refiere a la dirección de la carga, y el segundo a la dirección de la contracción.

En el caso de una *carga multiaxial* de una capa de material compuesto, pueden utilizarse ecuaciones similares a las ecuaciones (2.20) de la sección 2.5 para describir la relación esfuerzo-deformación. En este caso, se involucrarán tres valores diferentes del módulo de elasticidad y seis valores de la relación de Poisson. Se escribe

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z} \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z} \\
\epsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Puede considerarse que las ecuaciones (2.37) definen la transformación del esfuerzo en deformación para una capa dada. De la propiedad general de dichas transformaciones, se deduce que los coeficientes de las componentes de esfuerzo son simétricos:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \qquad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \qquad \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \tag{2.38}$$

Estas ecuaciones muestran que, aunque diferentes, las relaciones de Poisson ν_{xy} y ν_{yx} no son independientes. Cualquiera de ellas puede obtenerse de la otra si los valores correspondientes del módulo de elasticidad son conocidos. Lo mismo es cierto para ν_{yz} y ν_{zy} y para ν_{zx} y ν_{xz}.

Considere ahora el efecto de los esfuerzos cortantes sobre las caras de un pequeño elemento de la capa combinada. Como se señaló en la sección 2.7 en el caso de materiales isotrópicos, estos esfuerzos vienen en pares de vectores iguales y opuestos aplicados a lados opuestos del elemento dado y no tienen efecto sobre las deformaciones normales. Por lo tanto, las ecuaciones (2.37) permanecen válidas. Sin embargo, los esfuerzos cortantes crearán deformaciones cortantes que se definen por ecuaciones similares a las últimas tres de las ecuaciones (2.29) de la sección 2.7, excepto que ahora deben utilizarse tres diferentes valores del módulo de rigidez, G_{xy}, G_{yz} y G_{zx}:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \tag{2.39}$$

El hecho de que las tres componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z se expresen solo en términos de los esfuerzos normales y no dependan de cualesquiera de los esfuerzos cortantes, caracteriza a los *materiales ortotrópicos* y los distingue de otros materiales anisotrópicos.

Como en la sección 2.1D, un *laminado* plano se obtiene superponiendo un cierto número de capas o láminas. Si las fibras en todas las capas reciben la misma orientación para resistir mejor una carga axial de tensión, el laminado mismo será ortotrópico. Si la estabilidad lateral del laminado se incrementa colocando algunas de sus capas de tal manera que sus fibras estén en ángulo recto con las fibras de las otras capas, el laminado resultante también será ortotrópico. Por otra parte, si alguna de las capas de un laminado se coloca de tal manera que sus fibras no sean ni paralelas ni perpendiculares a las fibras de las otras capas, el laminado, en general, no será ortotrópico.†

Aplicación de conceptos 2.11

Un cubo de 60 mm está hecho con capas de grafito epóxico reforzado con fibras alineadas en la dirección x. El cubo se sujeta a una carga compresiva de 140 kN en la dirección x. Las propiedades del material compuesto son: $E_x = 155.0$ GPa, $E_y = 12.10$ GPa, $E_z = 12.10$ GPa, $\nu_{xy} = 0.248$, $\nu_{xz} = 0.248$ y $\nu_{yz} = 0.458$. Determine los cambios en las dimensiones del cubo, sabiendo que *a*) el cubo es libre de expandirse en las direcciones y y z (figura 2.45*a*); *b*) el cubo es libre de expandirse en la dirección z, pero está restringido de expandirse en la dirección y por dos placas fijas sin fricción (figura 2.45*b*).

***a*) Libre en las direcciones *y* y *z*.** Se determina el esfuerzo σ_x en la dirección de la carga.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-140 \times 10^3 \text{ N}}{(0.060 \text{ m})(0.060 \text{ m})} = -38.89 \text{ MPa}$$

† Para más información sobre materiales compuestos reforzados con fibras, vea Hyer, M. W., *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*, DEStech Publications, Inc., Lancaster, PA, 2009.

Como el cubo no está cargado ni restringido en las direcciones y y z, se tiene que $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Así, los elementos de la derecha en las ecuaciones (2.37) se reducen a sus primeros términos. Al sustituir los datos dados en estas ecuaciones,

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{-38.89 \text{ MPa}}{155.0 \text{ GPa}} = -250.9 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0.248)(-38.89 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} = +62.22 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0.248)(-38.69 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} = +62.22 \times 10^{-6}$$

Los cambios en las dimensiones del cubo se obtienen multiplicando las deformaciones unitarias correspondientes por la longitud $L = 0.060$ m de cada lado del cubo:

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-250.9 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = -15.05\,\mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +3.73\,\mu\text{m}$$

$$\delta_z = \epsilon_z L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +3.73\,\mu\text{m}$$

***b*) Libre en la dirección *z*, restringido en la dirección *y*.** El esfuerzo en la dirección x es el mismo que en el inciso a, es decir, $\sigma_x = 38.89$ MPa. Puesto que el cubo es libre de expandirse en la dirección z como en el inciso a, $\sigma_z = 0$. Pero ya que el cubo está ahora restringido en la dirección y, el esfuerzo σ_y no es cero. Por otra parte, debido a que el cubo no puede expandirse en la dirección y, $\delta_y = 0$. Por lo tanto, $\epsilon_y = \delta_y/L = 0$. Si se hace $\sigma_z = 0$ y $\epsilon_y = 0$ en la segunda de las ecuaciones (2.37) y se despeja σ_y de esa ecuación:

$$\sigma_y = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy}\sigma_x = \left(\frac{12.10}{155.0}\right)(0.248)(-38.89 \text{ MPa})$$

$$= -752.9 \text{ kPa}$$

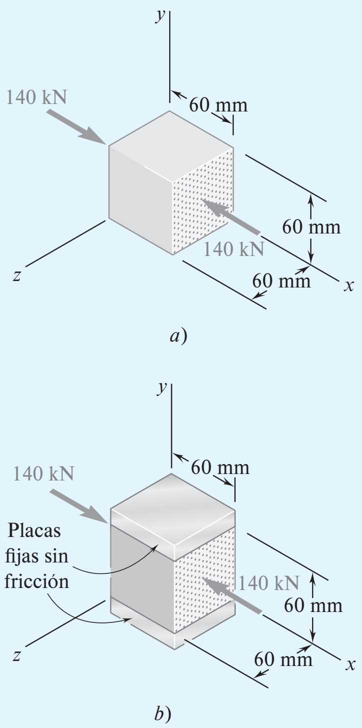


Figura 2.45 Cubo de grafito epóxico que experimenta carga de compresión a lo largo de la dirección de la fibra; *a*) cubo no restringido; *b*) cubo restringido en la dirección *y*.

Ahora que se han determinado las tres componentes del esfuerzo, se utilizarán la primera y la última de las ecuaciones (2.37) para calcular las componentes de deformación ϵ_x y ϵ. Pero la primera de estas ecuaciones contiene la relación de Poisson ν_{yx} y, como se vio antes, esta razón *no es igual* a la relación ν_{xy} que estuvo entre los datos dados. Para calcular ν_{yx} se emplea la primera de las ecuaciones (2.48) y se escribe

$$\nu_{yx} = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy} = \left(\frac{12.10}{155.0}\right)(0.248) = 0.01936$$

Ahora se establece $\sigma_z = 0$ en la primera y tercera ecuaciones (2.37) y se sustituyen los valores dados de E_x, E_y, ν_{xz} y ν_{yz}, así como los valores obtenidos de σ_x, σ_y y ν_{yx}, de donde resulta

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} = \frac{-38.89 \text{ MPa}}{155.0 \text{ GPa}} - \frac{(0.01936)(-752.9 \text{ kPa})}{12.10 \text{ GPa}}$$

$$= -249.7 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} = -\frac{(0.248)(-38.89 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} - \frac{(0.458)(-752.9 \text{ kPa})}{12.10 \text{ GPa}}$$

$$= +90.72 \times 10^{-6}$$

Los cambios en las dimensiones del cubo se obtienen multiplicando las deformaciones correspondientes por la longitud $L = 0.060$ m de la arista del cubo:

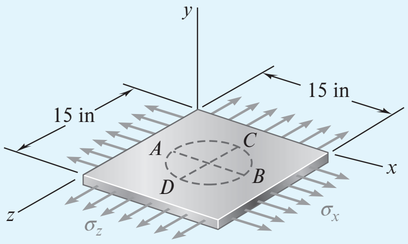
$$\delta_x = \epsilon_x L = (-249.7 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = -14.98\,\mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (0)(0.060 \text{ m}) = 0$$

$$\delta_z = \epsilon_z L = (+90.72 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +5.44\,\mu\text{m}$$

Al comparar los resultados de los incisos *a* y *b*, se advierte que la diferencia entre los valores obtenidos para la deformación δ_x en la dirección de las fibras es despreciable. No obstante, la diferencia entre los valores obtenidos para la deformación lateral δ_z no es despreciable cuando el cubo se restringe de deformarse en la dirección *y*.

Problema modelo 2.5



Un círculo con diámetro $d = 9$ in, se marca en una placa de aluminio sin esforzar cuyo espesor es $t = \frac{3}{4}$ in. Las fuerzas que actúan después en el plano de la placa causan esfuerzos normales $\sigma_x = 12$ ksi y $\sigma_z = 20$ ksi. Para $E = 10 \times 10^6$ psi y $\nu = \frac{1}{3}$, determine el cambio en *a*) la longitud del diámetro *AB*, *b*) la longitud del diámetro *CD*, *c*) el espesor de la placa y *d*) el volumen de la placa.

ESTRATEGIA: Se puede utilizar la ley generalizada de Hooke para determinar las componentes de la deformación unitaria. Después, estas deformaciones se pueden utilizar para evaluar los diferentes cambios dimensionales en la placa y, a través de la dilatación, también evaluar el cambio de volumen.

ANALIZAR:

Ley de Hooke. Advierta que $\sigma_y = 0$. Utilizando las ecuaciones (2.20) se encuentra la deformación en cada una de las direcciones coordenadas.

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[(12 \text{ ksi}) - 0 - \frac{1}{3}(20 \text{ ksi})\right] = +0.533 \times 10^{-3} \text{ in/in}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[-\frac{1}{3}(12 \text{ ksi}) + 0 - \frac{1}{3}(20 \text{ ksi})\right] = -1.067 \times 10^{-3} \text{ in/in}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[-\frac{1}{3}(12 \text{ ksi}) - 0 + (20 \text{ ksi})\right] = +1.600 \times 10^{-3} \text{ in/in}$$

***a*) Diámetro *AB*.** El cambio en longitud es $\delta_{B/A} = \epsilon_x d$.

$$\delta_{B/A} = \epsilon_x d = (+0.533 \times 10^{-3} \text{ in/in})(9 \text{ in})$$

$$\delta_{B/A} = +4.8 \times 10^{-3} \text{ in} \quad \blacktriangleleft$$

***b*) Diámetro *CD*.**

$$\delta_{C/D} = \epsilon_z d = (+1.600 \times 10^{-3} \text{ in/in})(9 \text{ in})$$

$$\delta_{C/D} = +14.4 \times 10^{-3} \text{ in} \quad ◀$$

***c*) Espesor.** Al recordar que $t = \frac{3}{4}$ in,

$$\delta_t = \epsilon_y t = (-1.067 \times 10^{-3} \text{ in/in})(\tfrac{3}{4} \text{ in})$$

$$\delta_t = -0.800 \times 10^{-3} \text{ in} \quad ◀$$

***d*) Volumen de la placa.** Al utilizar la ecuación (2.21),

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (+0.533 - 1.067 + 1.600)10^{-3} = +1.067 \times 10^{-3}$$

$$\Delta V = eV = +1.067 \times 10^{-3}[(15 \text{ in})(15 \text{ in})(\tfrac{3}{4} \text{ in})]$$

$$\Delta V = +0.180 \text{ in}^3 \quad ◀$$

Problemas

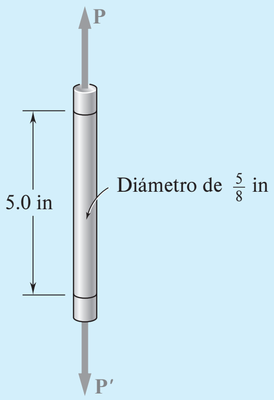


Figura P2.61

2.61 Se usa una prueba estándar a tensión para determinar las propiedades de un plástico experimental. La probeta es una varilla de $\frac{5}{8}$ in de diámetro y se somete a una fuerza de tensión de 800 lb. Si se observa un alargamiento de 0.45 in y una disminución en diámetro de 0.025 in en una longitud calibrada de 5 in, determine el módulo de elasticidad, el módulo de rigidez y la relación de Poisson para el material.

2.62 Un tramo de 2 m de tubería de acero de 240 mm de diámetro exterior y 10 mm de espesor de pared se emplea como columna corta para soportar una

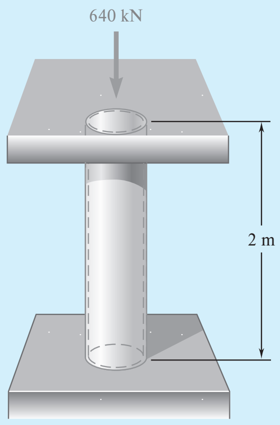


Figura *P2.62*

carga axial céntrica de 640 kN. Dado que $E = 73$ GPa y $\nu = 0.33$, determine *a*) el cambio de longitud de la tubería, *b*) el cambio en su diámetro exterior, *c*) el cambio en su espesor de pared.

2.63 Una línea con pendiente 4:10 se marca sobre una placa de latón amarillo rodado en frío, la cual tiene una anchura de 150 mm y un espesor de 6 mm. Si se sabe que $E = 105$ GPa y $\nu = 0.34$, determine la pendiente de la línea cuando la placa se somete a una carga axial céntrica de 200 kN como la que se muestra en la figura.

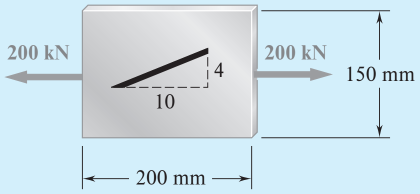


Figura P2.63

2.64 Se aplica una carga de tensión de 2.75 kN a una probeta elaborada con una placa plana de acero con 1.6 mm de espesor ($E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$). Determine el cambio resultante *a*) en la longitud calibrada de 50 mm, *b*) en el ancho de la porción *AB* de la probeta, *c*) en el espesor de la porción *AB*, *d*) en el área de la sección transversal de la porción *AB*.

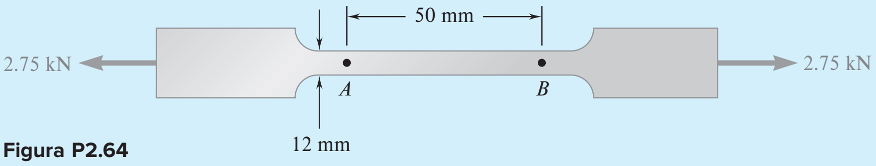


Figura P2.64

2.65 En un ensayo estándar a tensión se somete una varilla de acero de 22 mm de diámetro a una fuerza de tensión de 75 kN. Si se sabe que $\nu = 0.30$ y $E = 200$ GPa, determine *a*) la elongación de la varilla en una longitud calibrada de 200 mm, *b*) el cambio en el diámetro de la varilla.

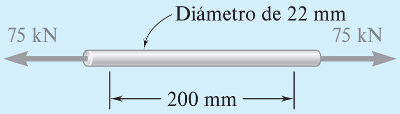


Figura *P2.65*

2.66 El cambio de diámetro de un perno grande de acero se mide cuidadosamente mientras se aprieta la tuerca. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine la fuerza interna en el perno, si se observa que el diámetro disminuye en 0.5×10^{-3} in.

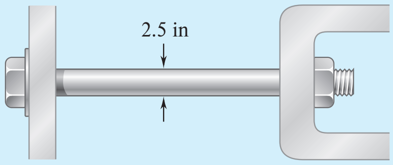


Figura P2.66

2.67 A la varilla de aluminio *AD* se le ajusta una coraza que se emplea para aplicar una presión hidrostática de 48 MPa a la porción *BC* de 240 mm de la varilla. Si se sabe que $E = 105$ GPa y que $\nu = 0.33$, determine *a*) el cambio en la longitud total *AD*, *b*) el cambio en el diámetro del punto medio de la varilla.

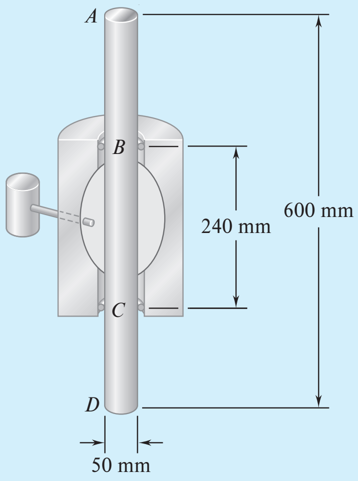


Figura P2.67

2.68 Una tela utilizada en estructuras infladas con aire se sujeta a una carga biaxial que resulta en esfuerzos normales $\sigma_x = 18$ ksi y $\sigma_z = 24$ ksi. Si se sabe que

las propiedades de la tela pueden aproximarse a $E = 12.6 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.34$, determine el cambio en longitud de *a*) el lado *AB*, *b*) el lado *BC*, *c*) la diagonal *AC*.

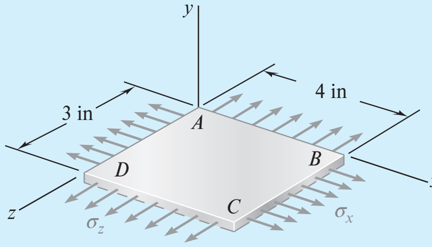


Figura P2.68

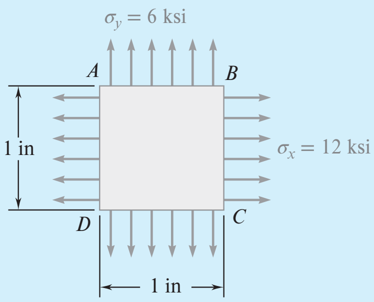


Figura P2.69

2.69 Un cuadro de 1 in se grabó en uno de los lados de un gran recipiente de acero a presión. Después de la presurización, la condición de esfuerzo biaxial en el cuadro es como se muestra en la figura. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine el cambio en la longitud de *a*) el lado *AB*, *b*) el lado *BC*, *c*) la diagonal *AC*.

2.70 El bloque mostrado en la figura es de una aleación de magnesio para la que $E = 45$ GPa y $\nu = 0.35$. Si se sabe que $\sigma_x = -180$ MPa, determine *a*) la magnitud de σ_y para la cual el cambio en la altura del bloque será cero, *b*) el cambio correspondiente en el área de la cara *ABCD*, *c*) el cambio correspondiente en el volumen del bloque.

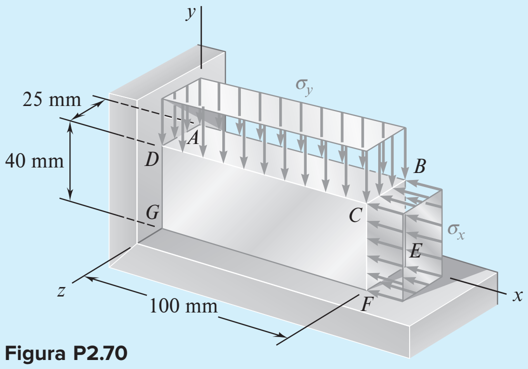


Figura P2.70

2.71 La placa homogénea *ABCD* se encuentra sujeta a carga biaxial como lo muestra la figura. Se sabe que $\sigma_z = \sigma_0$ y que el cambio en la longitud de la placa en la dirección *x* debe ser cero, es decir, $\epsilon_x = 0$. Si *E* es el módulo de elasticidad y ν la relación de Poisson, determine *a*) la magnitud requerida de σ_x, *b*) la relación σ_0/ϵ_z.

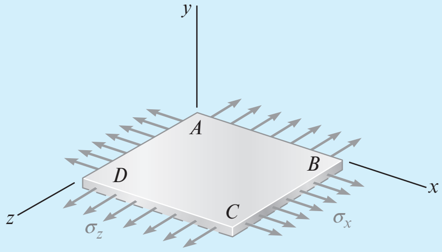


Figura *P2.71*

2.72 Para un elemento sometido a carga axial, exprese la deformación unitaria normal ϵ' en una dirección que forma un ángulo de 45° con el eje de la carga en términos de la deformación axial ϵ_x a partir de *a*) la comparación de las hipotenusas de los triángulos mostrados en la figura 2.43, que representan, respectivamente, a un elemento antes y después de la deformación; *b*) el uso de los valores de los esfuerzos correspondientes σ' y σ_x que se muestran en la figura 1.38, y la ley de Hooke generalizada.

2.73 En muchas situaciones se sabe que el esfuerzo normal en una dirección dada es cero, por ejemplo $\sigma_z = 0$ en el caso de la placa delgada que se muestra en la figura. Para este caso, que se conoce como *esfuerzo plano*, demuestre que si las deformaciones ϵ_x y ϵ_y se han determinado experimentalmente, σ_x, σ_y y ϵ_z se pueden expresar como sigue:

$$\sigma_x = E\frac{\epsilon_x + \nu\epsilon_y}{1 - \nu^2}$$
$$\sigma_y = E\frac{\epsilon_y + \nu\epsilon_x}{1 - \nu^2}$$
$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

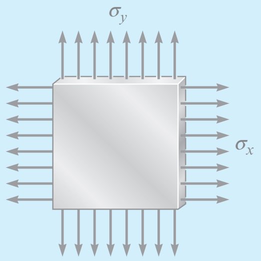


Figura P2.73

2.74 En muchas situaciones las restricciones físicas evitan que ocurra deformación unitaria en una dirección dada, por ejemplo $\epsilon_z = 0$ en el caso mostrado, donde el movimiento longitudinal del prisma se evita en todo punto. Las secciones planas perpendiculares al eje longitudinal permanecen planas y a la misma distancia. Demuestre que para esta situación, que se conoce como *deformación plana*, es posible expresar σ_z, ϵ_x y ϵ_y como sigue:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y]$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$

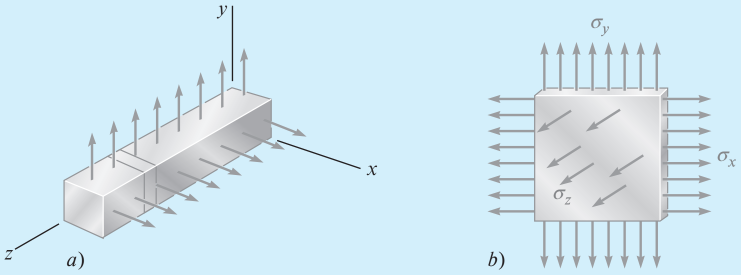


Figura P2.74

2.75 El bloque plástico mostrado en la figura está adherido a un soporte rígido y a una placa vertical a la que se aplica una carga **P** de 55 kips. Si se sabe que para el plástico usado $G = 150$ ksi, determine la deflexión de la placa.

2.76 ¿Cuál es la carga **P** que debe aplicarse a la placa del problema 2.75 para producir una deflexión de $\frac{1}{16}$ in?

2.77 Dos bloques de caucho con un módulo de rigidez $G = 12$ MPa están unidos a soportes rígidos y a la placa AB. Si se sabe que $c = 100$ mm y $P = 45$ kN, determine las dimensiones mínimas permisibles a y b de los bloques si el

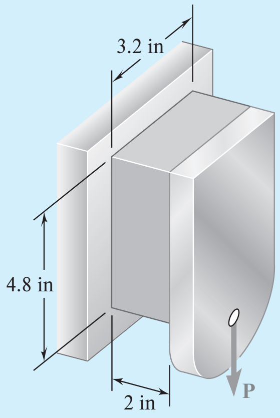


Figura *P2.75*

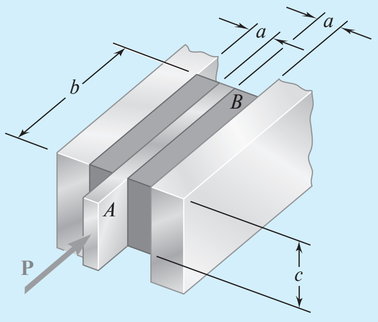


Figura P2.77 y P2.78

esfuerzo cortante en el caucho no debe exceder de 1.4 MPa y la deflexión de la placa debe ser al menos de 5 mm.

2.78 Dos bloques de caucho con un módulo de rigidez $G = 10$ MPa están unidos a soportes rígidos y a la placa AB. Si se sabe que $b = 200$ mm y $c = 125$ mm, determine la carga máxima permisible P y el grosor mínimo permisible a de los bloques, si el esfuerzo cortante en el caucho no debe exceder de 1.5 MPa y la deflexión de la placa debe ser al menos de 6 mm.

2.79 Un apoyo elastomérico ($G = 130$ psi) se emplea para soportar una viga de un puente, como se muestra en la figura, a fin de suministrar flexibilidad durante terremotos. La viga no debe desplazarse más de $\frac{3}{8}$ in al aplicar una carga lateral de 5 kips. Si se sabe que el esfuerzo cortante máximo permisible es de 60 psi, determine *a*) la dimensión b mínima permisible, *b*) el grosor a mínimo requerido.

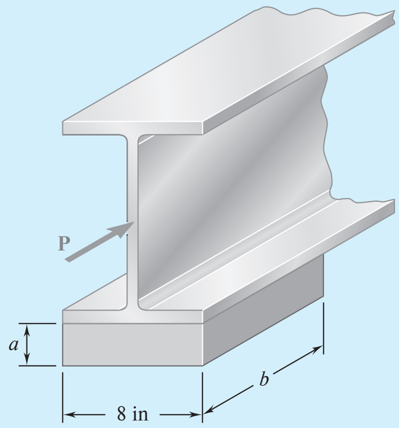


Figura P2.79

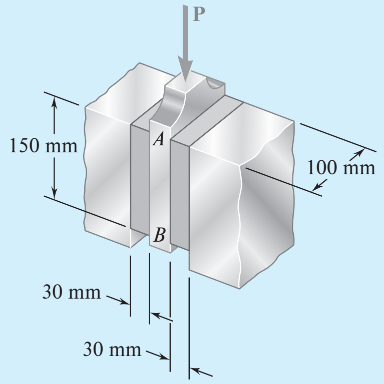


Figura P2.81 y P2.82

2.80 Para el apoyo elastomérico del problema 2.79 con $b = 10$ in y $a = 1$ in, determine el módulo de corte G y el esfuerzo cortante τ para una carga lateral máxima $P = 5$ kips y un desplazamiento máximo $\delta = 0.4$ in.

2.81 Una unidad para aislamiento de vibraciones se compone de dos bloques de caucho duro adheridos a la placa AB y a soportes rígidos como se muestra en la figura. Si se sabe que una fuerza de magnitud $P = 25$ kN causa una deflexión $\delta = 1.5$ mm en la placa AB, determine el módulo de rigidez del caucho empleado.

2.82 Una unidad para aislamiento de vibraciones se compone de dos bloques de caucho duro, con un módulo de rigidez $G = 19$ MPa, adheridos a la placa AB y a soportes rígidos como se muestra en la figura. Si se denota con P la magnitud de la fuerza aplicada a la placa y con δ la deflexión correspondiente, determine la constante de resorte efectiva, $k = P/\delta$, para el sistema.

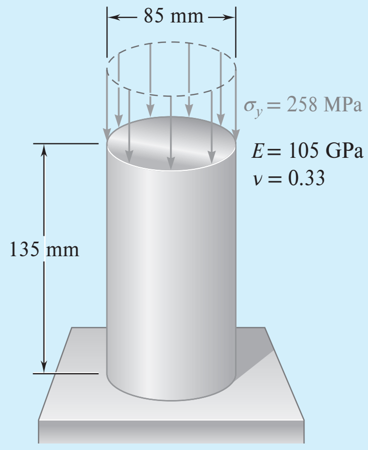


Figura P2.84

***2.83** Una esfera sólida de acero de 6 in de diámetro se introduce en el océano hasta un punto donde la presión es de 7.1 ksi (alrededor de 3 millas bajo la superficie). Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine *a*) la disminución en el diámetro de la esfera, *b*) la disminución en el volumen de la esfera, *c*) el porcentaje de incremento en la densidad de la esfera.

***2.84** *a*) Para la carga axial mostrada en la figura, determine el cambio en altura y el cambio en volumen del cilindro de latón mostrado. *b*) Resuelva el inciso *a*), suponiendo que la carga es hidrostática con $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -70$ MPa.

***2.85** Determine la dilatación e y el cambio de volumen del tramo de 8 in de la varilla mostrada en la figura si a) la varilla es de acero con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, b) la varilla es de aluminio con $E = 10.6 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.35$.

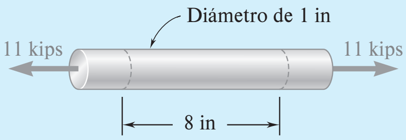


Figura P2.85

***2.86** Determine el cambio de volumen del segmento calibrado de 50 mm AB en el problema 2.64, a) calculando la dilatación del material, b) restando el volumen original de la porción AB de su volumen final.

***2.87** Un soporte para aislamiento de vibraciones se compone de una varilla A con radio $R_1 = 10$ mm y un tubo B con radio interior $R_2 = 25$ mm adheridos a un cilindro hueco de caucho con 80 mm de longitud y con un módulo de rigidez $G = 12$ MPa. Determine la fuerza máxima permisible **P** que puede aplicarse a la varilla A si su deflexión no debe exceder 2.50 mm.

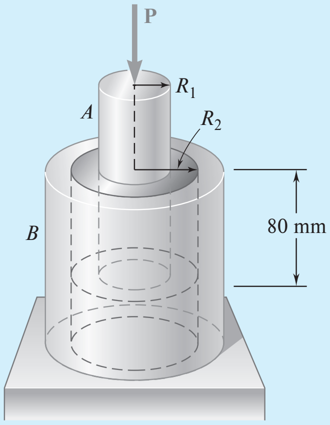


Figura *P2.87* y P2.88

***2.88** Un soporte para aislamiento de vibraciones consiste de una varilla A con radio R_1 y un tubo B con radio interior R_2 adheridos a un cilindro hueco de caucho con 80 mm de longitud y con un módulo de rigidez $G = 10.93$ MPa. Determine el valor requerido de la razón R_2/R_1 si una fuerza **P** de 10 kN debe causar una deflexión de 2 mm en la varilla A.

***2.89** Las constantes del material E, G, k y ν están relacionadas por las ecuaciones (2.24) y (2.34). Muestre que cualquiera de estas constantes puede expresarse en términos de cualesquiera otras dos constantes. Por ejemplo, demuestre que a) $k = GE/(9G - 3E)$ y b) $\nu = (3k - 2G)/(6k + 2G)$.

***2.90** Muestre que para cualquier material dado, la razón G/E del módulo de rigidez sobre el módulo de elasticidad, es siempre menor que $\frac{1}{2}$ pero mayor que $\frac{1}{3}$. [*Sugerencia:* Utilice la ecuación (2.34) y la sección 2.1E].

***2.91** Un cubo compuesto con lados de 40 mm y con las propiedades indicadas en la figura está fabricado en fibras de polímero vítreo alineadas en la dirección x. El cubo está restringido contra las deformaciones en las direcciones y y z y se somete a una carga de tensión de 65 kN en la dirección x. Determine a) el cambio en la longitud del cubo en la dirección x, b) los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z.

$E_x = 50$ GPa $\nu_{xz} = 0.254$
$E_y = 15.2$ GPa $\nu_{xy} = 0.254$
$E_z = 15.2$ GPa $\nu_{zy} = 0.428$

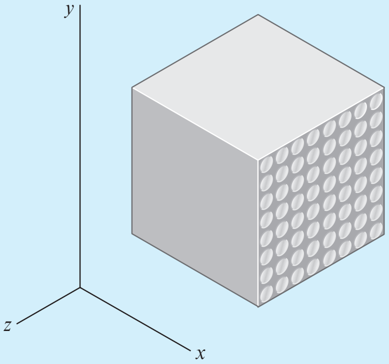


Figura P2.91

***2.92** El cubo compuesto del problema 2.91 está restringido contra la deformación en la dirección z y está estirado en 0.035 mm en la dirección x debido a una carga de tensión en dicha dirección. Determine a) los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z, b) el cambio en dimensión en la dirección y.

2.10 DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO Y LA DEFORMACIÓN BAJO CARGA AXIAL: PRINCIPIO DE SAINT-VENANT

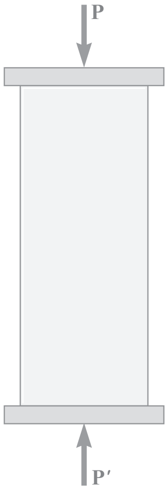
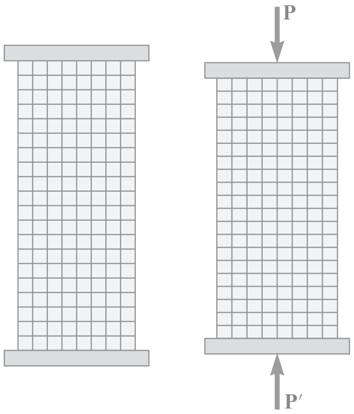


Figura 2.46 Carga axial aplicada mediante placas rígidas.



a) *b*)

Figura 2.47 Carga axial aplicada sobre un modelo de caucho mediante placas rígidas.

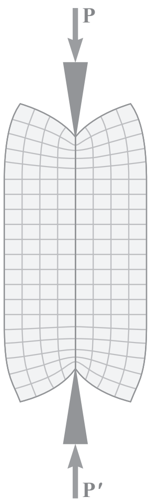


Figura 2.48 Carga axial concentrada aplicada sobre un modelo de caucho.

Hasta ahora se ha supuesto que en cualquier elemento cargado axialmente, los esfuerzos normales se encuentran distribuidos de manera uniforme en cualquier sección perpendicular al eje del elemento. Como se vio en la sección 1.2A, tal supuesto puede estar bastante equivocado en la vecindad inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. Sin embargo, la determinación de los esfuerzos en una sección dada de un elemento requiere de la solución de un problema estáticamente indeterminado.

En la sección 2.2 se vio que los problemas estáticamente indeterminados que involucran la determinación de *fuerzas* pueden resolverse considerando las *deformaciones* causadas por estas fuerzas. Por lo tanto, es razonable concluir que la determinación de los *esfuerzos* en un elemento requiere del análisis de las deformaciones producidas por los esfuerzos en el elemento. En esencia, este es el enfoque encontrado en los libros de texto avanzados, donde la teoría matemática de la elasticidad se emplea para determinar la distribución de esfuerzos que corresponde a varios modos de aplicación de las cargas en los extremos de un elemento. Dadas las limitadas herramientas matemáticas que se tienen a disposición, el análisis de esfuerzos se restringirá al caso particular de dos placas rígidas que se emplean para transmitir las cargas a un elemento elaborado con un material isotrópico homogéneo (figura 2.46).

Si las cargas se aplican en el centro de cada placa,[†] las placas se moverán una hacia la otra sin girar, acortando el elemento y aumentando su ancho y espesor. Se supone que el elemento permanecerá recto, que las secciones planas seguirán planas, y que todos los elementos del miembro se deformarán de la misma manera, ya que tal suposición es compatible con las condiciones finales dadas. La figura 2.47 muestra un modelo de caucho antes y después de la carga.[‡] Ahora, si todos los elementos se deforman de la misma manera, la distribución de deformaciones unitarias a través del miembro debe ser uniforme. En otras palabras, la deformación unitaria axial ϵy y la deformación unitaria lateral $\epsilon_x = -\nu\epsilon_y$ son constantes. Pero, si los esfuerzos no sobrepasan el límite de proporcionalidad, se aplica la ley de Hooke y $\sigma_y = E\epsilon_y$, de lo que sigue que el esfuerzo normal σ_y también es constante. Por lo tanto, la distribución de esfuerzos es uniforme a través del elemento y, en cualquier punto,

$$\sigma_y = (\sigma_y)_{\text{prom}} = \frac{P}{A}$$

Si las cargas están concentradas, como en la figura 2.48, los elementos en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas se encuentran sometidos a esfuerzos muy grandes, mientras que otros elementos cerca de los extremos del miembro no están afectados por la carga. Esto resulta en grandes deformaciones y esfuerzos que ocurren cerca de los puntos de aplicación de las cargas, mientras que no ocurren deformaciones en las esquinas. Cuando se consideran elementos cada vez más lejos de los extremos, se nota una igualación progresiva de las deformaciones involucradas y, por lo tanto, una distribución casi uniforme de las deformaciones y de los esfuerzos a través de una sección del miembro. Esto se ilustra en la figura 2.49, la cual muestra el resto del cálculo por métodos matemáticos avanzados de la distribución de esfuerzos a través de varias secciones de una placa rectangular delgada sometida a cargas concentradas. Se advierte que a una distancia *b* de cada extremo, donde *b* es el ancho de la placa, la distribución de esfuerzos es casi uniforme a través de la sección, y el valor del esfuerzo

[†] Dicho con mayor precisión, la línea común de acción de las cargas deberá pasar a través del centroide de la sección transversal (confróntese la sección 1.2A).

[‡] Observe que para elementos largos y esbeltos, es posible otra configuración y prevalecen si la carga es lo suficientemente grande. El elemento se *pandea* y se curva. Esto se analizará en el capítulo 10.

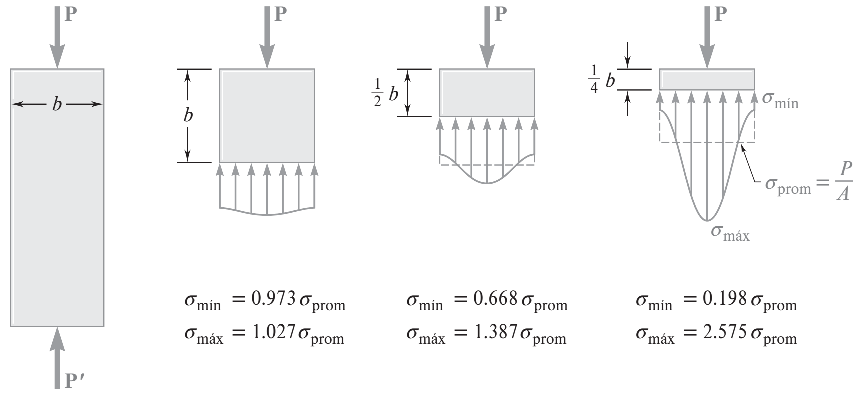


Figura 2.49 Distribuciones del esfuerzo en una placa sometida a cargas axiales concentradas.

σ_y en cualquier punto de esa sección puede suponerse igual al valor promedio P/A. Por consiguiente, a una distancia igual o mayor que el ancho del elemento, la distribución de los esfuerzos a través de una sección dada es la misma, sea que el elemento esté cargado como en la figura 2.46 o en la figura 2.48. En otras palabras, excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas, la distribución de esfuerzos puede suponerse independiente del modo de aplicación de la carga. Este enunciado, que se aplica no solo a cargas axiales sino prácticamente a cualquier tipo de carga, se conoce como el *principio de Saint-Venant*, en honor del matemático e ingeniero francés Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886).

Aunque el principio de Saint-Venant permite reemplazar una carga dada por una más sencilla con el propósito de calcular los esfuerzos en un elemento estructural, deberán recordarse dos puntos importantes al aplicar este principio:

1. La carga real y la utilizada para calcular los esfuerzos deben ser *estáticamente equivalentes*.
2. Los esfuerzos no pueden calcularse de esta manera en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. Deben utilizarse métodos teóricos o experimentales avanzados para determinar la distribución de esfuerzos en estas áreas.

Deberá observarse también que las placas empleadas para obtener una distribución uniforme de esfuerzos en el elemento de la figura 2.47 deben permitir la libre expansión del elemento hacia los lados. Así, las placas no pueden estar unidas rígidamente al elemento; debe suponerse que solo están en contacto con él, y lo suficientemente lisas para no impedir la expansión lateral del elemento. Aun cuando tales condiciones de extremos pueden lograrse con un elemento a compresión, no pueden realizarse físicamente con uno en tensión. No importa si puede fabricarse un aditamento que permita cargar un elemento de tal manera que la distribución de esfuerzos en el elemento sea uniforme. Lo importante es ser capaz de *imaginar un modelo* que permita tal distribución de esfuerzos, y tener este modelo en mente para que más tarde pueda comparárselo con las condiciones reales de carga.

2.11 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Como se vio en la sección precedente, los esfuerzos cerca de los puntos de aplicación de cargas concentradas pueden alcanzar valores mucho más grandes que el valor promedio del esfuerzo en el elemento. Cuando un elemento estructural contiene una discontinuidad, como un agujero o un cambio repentino en su sección transversal, también pueden ocurrir grandes esfuerzos localizados. Las figuras 2.50 y 2.51 muestran la distribución de esfuerzos en las secciones críticas correspondientes a dos situaciones como

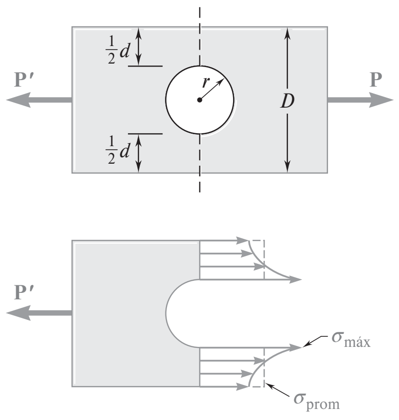


Figura 2.50 Distribución de esfuerzos cerca de un agujero circular en una barra plana bajo carga axial.

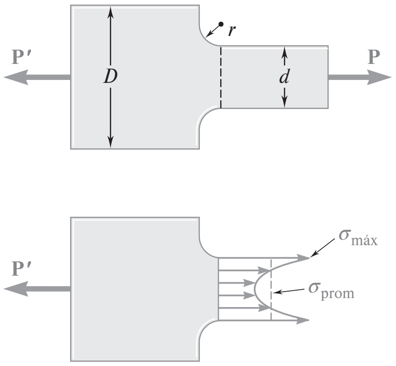
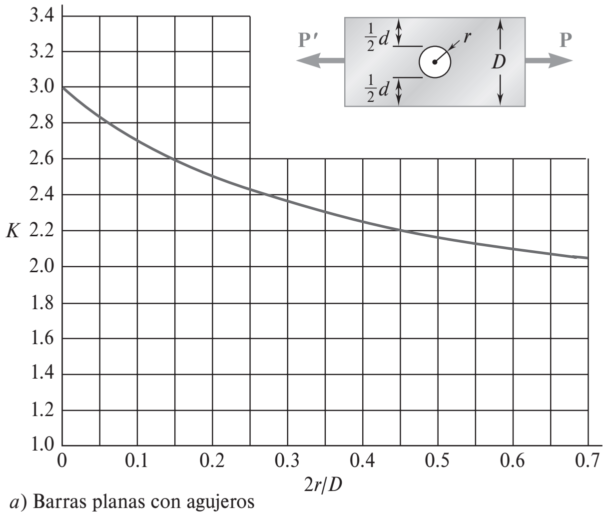


Figura 2.51 Distribución de esfuerzos cerca de los filetes en una barra plana bajo carga axial.

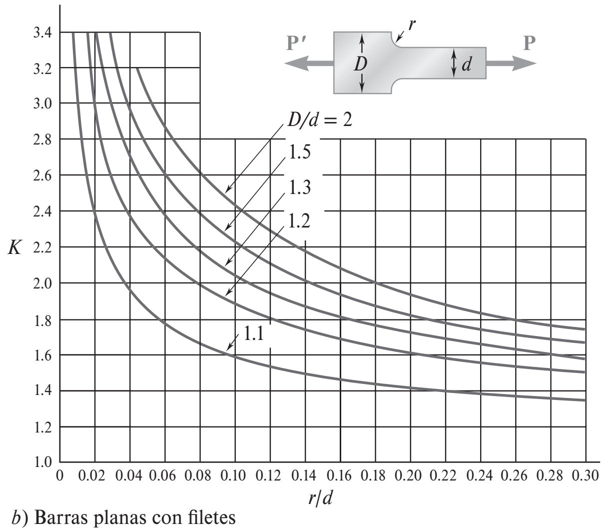
las mencionadas. La figura 2.50 ilustra una barra plana con un *agujero circular* y muestra la distribución de esfuerzos en un corte que pasa a través del centro del agujero. La figura 2.51 ilustra una barra plana con dos porciones de diferentes anchos conectadas por *filetes*; muestra la distribución de esfuerzos en la parte más angosta de la conexión, donde ocurren los esfuerzos más altos.

Estos resultados se obtuvieron en forma experimental por el método fotoelástico. Afortunadamente para el ingeniero, los resultados obtenidos son independientes del tamaño del elemento y del material utilizado; solo dependen de las razones de los parámetros geométricos involucrados (es decir, de la razón $2r/D$ en el caso de un agujero circular, y de las razones r/d y D/d en el caso de los filetes). Además, el diseñador está más interesado en el *valor máximo* del esfuerzo en una sección dada, que en la distribución real de los esfuerzos en dicha sección, ya que su preocupación principal es determinar *si* el esfuerzo permisible será excedido bajo una carga dada, *y no* dónde se excederá este valor. Por este motivo, la razón

$$K = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{prom}} \tag{2.40}$$



a) Barras planas con agujeros



b) Barras planas con filetes

Figura 2.52 Factores de concentración de esfuerzos para barras planas bajo carga axial. Observe que el esfuerzo promedio se debe calcular a través de la sección más angosta: $\sigma_{prom} = P/td$, donde t es el espesor de la barra. (Fuente: W. D. Pilkey y D. F. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 3a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 2008).

se calcula en la sección crítica (más angosta) de la discontinuidad. Esta razón se conoce como *factor de concentración de esfuerzos* de la discontinuidad dada. Los factores de concentración de esfuerzo pueden calcularse de una vez por todas en términos de las razones de los parámetros geométricos involucrados, y los resultados obtenidos pueden ser expresados en la forma de tablas o gráficas, como se muestra en la figura 2.52. Para determinar el máximo esfuerzo que ocurre cerca de una discontinuidad en un elemento dado sometido a una carga axial P dada, el diseñador solo necesita calcular el esfuerzo promedio $\sigma_{prom} = P/A$ en la sección crítica, y multiplicar el resultado obtenido por el valor apropiado del factor de concentración de esfuerzos K. Observe que este procedimiento es válido solo mientras $\sigma_{máx}$ no exceda el límite de proporcionalidad del material, ya que los valores de K graficados en la figura 2.52 se obtuvieron suponiendo una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria.

Aplicación de conceptos 2.12

Determine la máxima carga axial **P** que puede soportar con seguridad una barra plana de acero que consta de dos porciones, ambas de 10 mm de espesor, y anchos de 40 y 60 mm, conectadas con filetes de radio $r = 8$ mm. Suponga un esfuerzo normal permisible de 165 MPa.

Primero se calculan las razones

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1.50 \qquad \frac{r}{d} = \frac{8 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0.20$$

Al utilizar la curva en la figura 2.52*b* que corresponde a $D/d = 1.50$, se encuentra que el valor del factor de concentración de esfuerzo que corresponde a $r/d = 0.20$ es

$$K = 1.82$$

Al llevar este valor a la ecuación (2.40) y despejar σ_{prom},

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_{máx}}{1.82}$$

Pero $\sigma_{máx}$ no puede exceder el esfuerzo permisible $\sigma_{perm} = 165$ MPa. Al sustituir este valor de $\sigma_{máx}$, el esfuerzo promedio de la porción más angosta ($d = 40$ mm) de la barra no deberá sobrepasar el valor

$$\sigma_{prom} = \frac{165 \text{ MPa}}{1.82} = 90.7 \text{ MPa}$$

Al recordar que $\sigma_{prom} = P/A$,

$$P = A\sigma_{prom} = (40 \text{ mm})(10 \text{ mm})(90.7 \text{ MPa}) = 36.3 \times 10^3 \text{ N}$$
$$P = 36.3 \text{ kN}$$

2.12 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

Los resultados obtenidos en las secciones precedentes se basaron en la suposición de una relación lineal del esfuerzo y la deformación, donde el límite de proporcionalidad del material nunca estuvo excedido. Ésta es una suposición razonable en el caso de los materiales frágiles, que se fracturan sin ceder. En el caso de los materiales dúctiles, sin

embargo, esta suposición implica que la resistencia a la cedencia del material no se excede. Las deformaciones permanecerán, entonces, dentro del rango elástico y el elemento estructural bajo consideración recuperará su forma original después de que todas las cargas hayan sido retiradas. Sin embargo, si los esfuerzos en cualquier parte del elemento exceden la resistencia a la cedencia del material, ocurren deformaciones plásticas y la mayoría de los resultados en las anteriores secciones dejan de ser válidos. Por ello debe realizarse un análisis más profundo, basado en relaciones no lineales de esfuerzo y deformación.

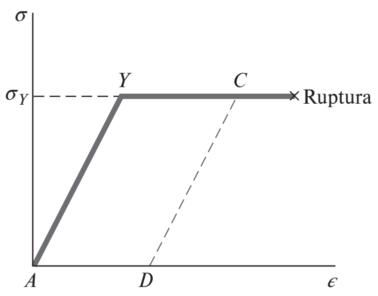


Figura 2.53 Diagrama esfuerzo-deformación para un material elastoplástico idealizado.

Aunque un análisis que tenga en cuenta la relación real entre el esfuerzo y la deformación está más allá del alcance de este libro, se ganará una visión considerable del comportamiento plástico considerando un *material elastoplástico* idealizado para el que el diagrama esfuerzo-deformación consta de los dos segmentos en línea recta mostrados en la figura 2.53. Note que el diagrama de esfuerzo-deformación para el acero dulce en los rangos elástico y plástico es similar a esta idealización. Mientras que el esfuerzo σ sea menor que la resistencia a la cedencia σ_Y, el material se comporta elásticamente y obedece la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Cuando σ alcanza el valor σ_Y, el material empieza a fluir y continúa deformándose plásticamente bajo una carga constante. Si la carga se retira, la descarga ocurre a lo largo del segmento de recta CD paralelo a la porción inicial AY sobre la curva de carga. El segmento AD del eje horizontal representa la deformación unitaria correspondiente a la deformación permanente o deformación plástica resultante de la carga y descarga de la probeta. A pesar de que ningún material real se comporta exactamente como se muestra en la figura 2.53, este diagrama de esfuerzo-deformación será útil para analizar las deformaciones plásticas de materiales dúctiles como el acero dulce.

Aplicación de conceptos 2.13

Una varilla de longitud $L = 500$ mm y área de sección transversal $A = 60$ mm^2 es de un material elastoplástico que tiene un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa en el rango elástico y un punto de cedencia $\sigma_Y = 300$ MPa. La varilla se somete a una carga axial hasta que se estira 7 mm; al llegar a ese punto la carga se retira. ¿Cuál es la deformación permanente resultante?

Con referencia al diagrama de la figura 2.53, se encuentra que la deformación máxima, representada por la abscisa del punto C, es

$$\epsilon_C = \frac{\delta_C}{L} = \frac{7\ \text{mm}}{500\ \text{mm}} = 14 \times 10^{-3}$$

Por otra parte, el esfuerzo de cedencia, representado por la abscisa del punto Y, es

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{300 \times 10^6\ \text{Pa}}{200 \times 10^9\ \text{Pa}} = 1.5 \times 10^{-3}$$

La deformación después de descargar está representada por la abscisa ϵ_D del punto D. Se observa de la figura 2.53 que

$$\begin{aligned}\epsilon_D &= AD = YC = \epsilon_C - \epsilon_Y \\ &= 14 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3} = 12.5 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

La deformación permanente es la deformación δ_D correspondiente a la deformación ϵ_D.

$$\delta_D = \epsilon_D L = (12.5 \times 10^{-3})(500\ \text{mm}) = 6.25\ \text{mm}$$

Aplicación de conceptos 2.14

Una varilla cilíndrica de 30 in de largo con un área de sección transversal $A_r = 0.075$ in^2 se coloca dentro de un tubo de la misma longitud y con área de sección transversal $A_t = 0.100$ in^2. Los extremos de la varilla y del tubo están unidos a un soporte rígido por un lado, y a una placa rígida por el otro, como se muestra en el corte longitudinal de la figura 2.54*a*. Se supone que tanto la varilla como el tubo son elastoplásticos, con módulos de elasticidad $E_r = 30 \times 10^6$ psi y $E_t = 15 \times 10^6$ psi, y resistencias a la cedencia $(\sigma_r)_Y = 36$ ksi y $(\sigma_t)_Y = 45$ ksi. Dibuje el diagrama de carga-deflexión para ensamble cuando se aplica una carga **P** a la placa como se muestra.

Determine la fuerza interna y la elongación de la varilla cuando comienza a ceder:

$$(P_r)_Y = (\sigma_r)_Y A_r = (36 \text{ ksi})(0.075 \text{ in}^2) = 2.7 \text{ kips}$$

$$(\delta_r)_Y = (\epsilon_r)_Y L = \frac{(\sigma_r)_Y}{E_r} L = \frac{36 \times 10^3 \text{ psi}}{30 \times 10^6 \text{ psi}} (30 \text{ in})$$

$$= 36 \times 10^{-3} \text{ in}$$

Puesto que el material es elastoplástico, el diagrama de fuerza-alargamiento *solamente de la varilla* consiste en una línea recta oblicua y una línea recta horizontal, como se muestra en la figura 2.54*b*. Siguiendo el mismo procedimiento para el tubo, se tiene que

$$(P_t)_Y = (\sigma_t)_Y A_t = (45 \text{ ksi})(0.100 \text{ in}^2) = 4.5 \text{ kips}$$

$$(\delta_t)_Y = (\epsilon_t)_Y L = \frac{(\sigma_t)_Y}{E_t} L = \frac{45 \times 10^3 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} (30 \text{ in})$$

$$= 90 \times 10^{-3} \text{ in}$$

El diagrama de carga-deflexión *solamente del tubo* se muestra en la figura 2.54*c*. Al observar que la carga y la deflexión de la combinación varilla-tubo son

$$P = P_r + P_t \qquad \delta = \delta_r = \delta_t$$

se dibuja el diagrama carga-deformación requerido sumando las ordenadas de los diagramas obtenidos para la varilla y para el tubo (figura 2.54*d*). Los puntos Y_r y Y_t corresponden al inicio de la cedencia.

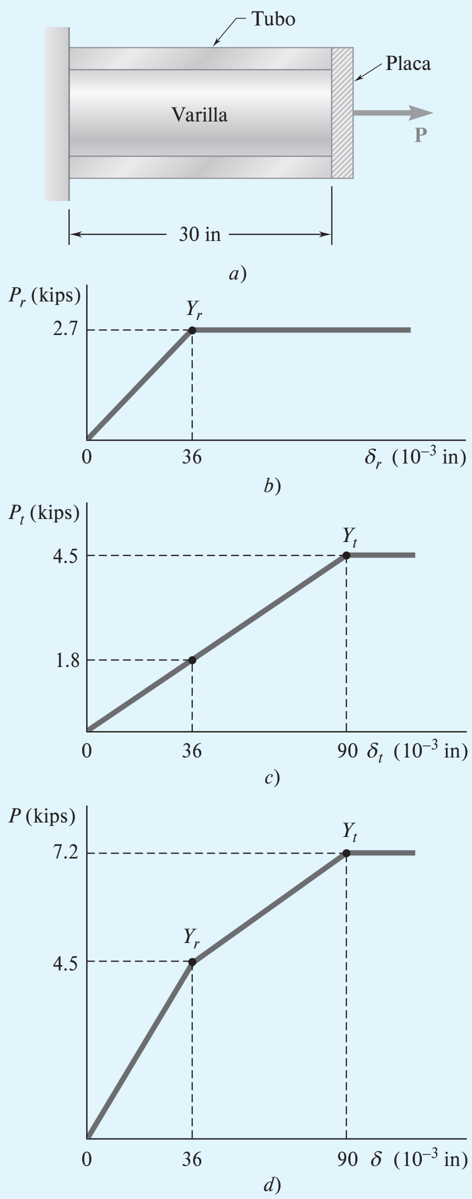


Figura 2.54 *a*) Ensamble concéntrico de varilla y tubo cargado axialmente mediante una placa rígida. *b*) Respuesta de carga-deflexión de la varilla. *c*) Respuesta de carga-deflexión del tubo. *d*) Respuesta combinada de carga-deflexión del ensamble de varilla y tubo.

Aplicación de conceptos 2.15

Si la carga **P** aplicada al ensamble varilla-tubo de la Aplicación de conceptos 2.14 se incrementa de cero a 5.7 kips y se reduce de nuevo a cero, determine *a*) la elongación máxima del ensamble y *b*) la deformación permanente después de retirar la carga.

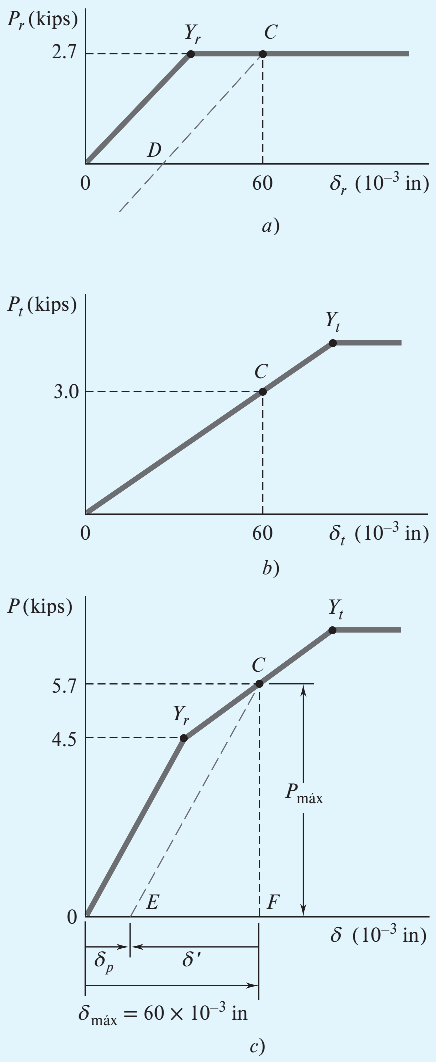


Figura 2.55 *a*) Respuesta de carga-deflexión de la varilla con descarga elástica (línea punteada clara). *b*) Respuesta de carga-deflexión del tubo; note que las cargas dadas no hacen que el tubo ceda, de modo que la descarga está a lo largo de la línea de carga elástica original.
c) Respuesta combinada de carga-deflexión del ensamble de varilla y tubo con descarga elástica (línea punteada clara).

***a*) Elongación máxima.** Con referencia a la figura 2.54*d*, la carga $P_{máx} =$ 5.7 kips corresponde a un punto localizado en el segmento Y_rY_t del diagrama de carga-deflexión del ensamble. Así, la varilla ha alcanzado el rango plástico, con $P_r = (P_r)_Y = 2.7$ kips y $\sigma_r = (\sigma_r)_Y = 36$ ksi. Sin embargo, el tubo todavía está en el rango elástico con

$$P_t = P - P_r = 5.7 \text{ kips} - 2.7 \text{ kips} = 3.0 \text{ kips}$$

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A_t} = \frac{3.0 \text{ kips}}{0.1 \text{ in}^2} = 30 \text{ ksi}$$

$$\delta_t = \epsilon_t L = \frac{\sigma_t}{E_t} L = \frac{30 \times 10^3 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} (30 \text{ in}) = 60 \times 10^{-3} \text{ in}$$

La elongación máxima del ensamble es

$$\delta_{máx} = \delta_t = 60 \times 10^{-3} \text{ in}$$

***b*) Deformación permanente.** Al disminuir la carga **P** desde 5.7 kips hasta cero, las fuerzas internas P_r y P_t decrecen a lo largo de una línea recta, como se muestra en la figura 2.55*a* y *b*. La fuerza P_r disminuye a lo largo de la línea *CD* paralela a la posición inicial de la curva de carga, mientras que la fuerza P_t disminuye a lo largo de la curva original de carga, ya que el esfuerzo de cedencia no fue excedido en el tubo. Su suma *P* se reducirá a lo largo de una línea *CE* paralela a la porción $0Y_r$ de la curva carga-deflexión para el ensamble (figura 2.55*c*). Con referencia a la figura 2.55*c*, se encuentra que la pendiente de $0Y_r$ (y por lo tanto *CE*) es

$$m = \frac{4.5 \text{ kips}}{36 \times 10^{-3} \text{ in}} = 125 \text{ kips/in}$$

El segmento de línea *FE* en la figura 2.55*c* representa la deformación δ' del ensamble durante la fase de descarga, el segmento $0E$ es la deformación permanente d_p después de retirar la carga **P**. Del triángulo *CEF* se tiene que

$$\delta' = -\frac{P_{máx}}{m} = -\frac{5.7 \text{ kips}}{125 \text{ kips/in}} = -45.6 \times 10^{-3} \text{ in}$$

La deformación permanente es

$$\delta_P = \delta_{máx} + \delta' = 60 \times 10^{-3} - 45.6 \times 10^{-3}$$
$$= 14.4 \times 10^{-3} \text{ in}$$

Concentraciones de esfuerzo. Recuerde que el análisis de las concentraciones de esfuerzo de la sección 2.11 se efectuó bajo el supuesto de que la relación esfuerzo-deformación unitaria es lineal. Las distribuciones de esfuerzo mostradas en las figuras 2.50 y 2.51, y los valores de los factores de concentración de esfuerzos graficados en la figura 2.52 no pueden usarse cuando hay deformaciones plásticas, es decir, cuando el valor de $\sigma_{máx}$ excede la resistencia a la cedencia σ_Y.

Considere otra vez la barra plana con un agujero circular de la figura 2.50, y suponga que el material es elastoplástico, es decir, que su diagrama de esfuerzo-deformación es como se muestra en la figura 2.53. Mientras no ocurra deformación plástica, la distribución de esfuerzo será como se indica en la sección 2.11 (figura 2.50*a*). Se observa que el área bajo la curva de distribución de esfuerzos representa la integral $\int \sigma \, dA$,

que es igual a la carga P. Así, esta área y el valor $\sigma_{máx}$, deben aumentar al incrementarse la carga P. Mientras $\sigma_{máx} \leq \sigma_Y$, todas las distribuciones sucesivas de esfuerzo obtenidas al aumentar P tendrán la forma mostrada en la figura 2.50 y repetida en la figura 2.56*a*. Sin embargo, al aumentar P por encima del valor P_Y que corresponde a $\sigma_{máx} = \sigma_Y$ (figura 2.56*b*), la curva de distribución de esfuerzo se debe aplanar en la cercanía del agujero (figura 2.56*c*), ya que el esfuerzo en el material considerado no puede exceder el valor σ_Y. Esto indica que el material está cediendo en la cercanía del agujero. Al aumentar más la carga P, la zona plástica donde ocurre la cedencia se sigue expandiendo, hasta que alcanza los bordes de la placa (figura 2.56*d*). En ese punto, la distribución de esfuerzos a través de la placa es uniforme, $\sigma = \sigma_Y$ y el valor correspondiente de la carga $P = P_U$ es el valor máximo que puede aplicarse a la barra sin causar ruptura.

Es interesante comparar el valor máximo P_Y de la carga que puede aplicarse sin producir deformación permanente en la barra con el valor P_U que causará la ruptura. Al recordar la definición del esfuerzo promedio, $\sigma_{prom} = P/A$, donde A es el área neta de la sección transversal, y la definición del factor de concentración de esfuerzos, $K = \sigma_{máx} = \sigma_{prom}$, se escribe

$$P = \sigma_{prom} A = \frac{\sigma_{máx} A}{K} \qquad (2.41)$$

para cualquier valor de $\sigma_{máx}$ que no exceda σ_Y. Cuando $\sigma_{máx} = \sigma_Y$ (figura 2.56*b*), $P = P_Y$, y la ecuación (2.40) da

$$P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K} \qquad (2.42)$$

Por otro lado, cuando $P = P_U$ (figura 2.56*d*) se tiene que $\sigma_{prom} = \sigma_Y$ y

$$P_U = \sigma_Y A \qquad (2.43)$$

Al comparar las ecuaciones (2.42) y (2.43),

$$P_Y = \frac{P_U}{K} \qquad (2.44)$$

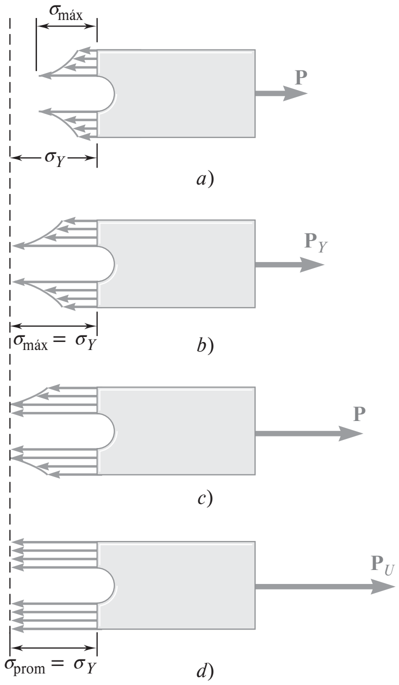


Figura 2.56 Distribución de esfuerzos en un material elástico-perfectamente plástico bajo una carga creciente.

*2.13 ESFUERZOS RESIDUALES

En la aplicación 2.13 de la sección anterior, se consideró una varilla estirada más allá del punto de cedencia. Al retirarse la carga, la varilla no recuperó su longitud original; había sido deformada permanentemente. Sin embargo, después de que se quitó la carga, todos los esfuerzos desaparecieron. No debe suponerse que este siempre es el caso. De hecho, cuando solo algunas de las partes de una estructura indeterminada sufren deformaciones plásticas, como en la Aplicación de conceptos 2.15, o cuando distintas partes de la estructura sufren diferentes deformaciones plásticas, los esfuerzos en varias partes de la estructura no regresarán a cero, por lo general, después de que la carga haya sido retirada. Los esfuerzos, llamados *esfuerzos residuales*, permanecerán en las distintas partes de la estructura.

A pesar de que el cálculo de los esfuerzos residuales en una estructura real pueden ser muy complicados, el ejemplo siguiente proporcionará una comprensión general del método que debe emplearse para su determinación.

Cambios de temperatura. Las deformaciones plásticas debidas a cambios de temperatura también pueden producir esfuerzos residuales. Por ejemplo, considere un pequeño tapón que debe soldarse a una placa grande (figura 2.58). El tapón puede considerarse como una pequeña varilla AB que será soldada a través de un pequeño agujero en la placa. Durante el proceso de soldadura, la temperatura de la varilla se elevará a más de 1 000 °C, temperatura a la que su módulo de elasticidad, rigidez y esfuerzo, serán casi cero. Como la placa es grande, su temperatura no aumentará signi-

Aplicación de conceptos 2.16

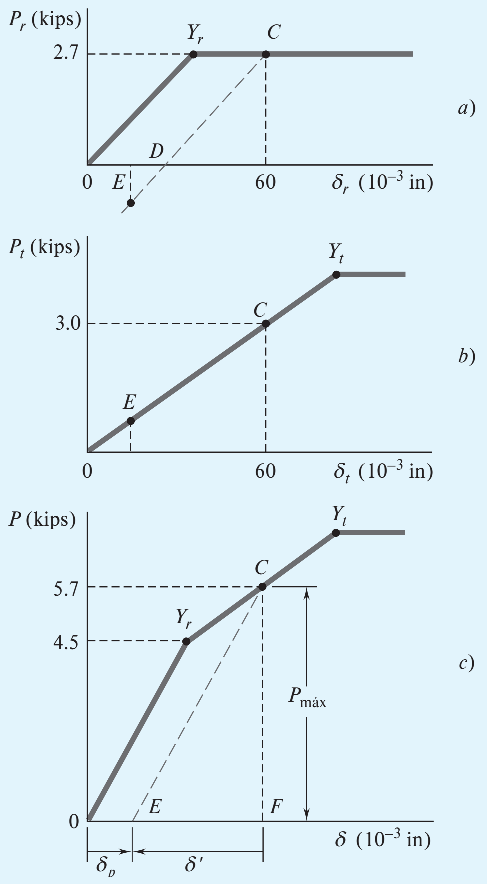


Figura 2.57 *a*) Respuesta carga-deflexión de la varilla con descarga elástica (línea punteada clara). *b*) Respuesta carga-deflexión del tubo, por lo que la descarga está a lo largo de la línea de carga elástica con esfuerzo de tensión residual. *c*) Respuesta combinada carga-deflexión del ensamble de varilla y tubo con descarga elástica (línea discontinua clara).

Determine los esfuerzos residuales en la varilla y el tubo de la figura 2.54*a* después de que la carga **P** aumenta de cero a 5.7 kips y luego se reduce de nuevo a cero.

Se observa en los diagramas de la figura 2.57 (similar a la de la Aplicación de conceptos previa) que, después de que la carga **P** ha regresado a cero, las fuerzas internas P_r y P_t *no* son iguales a cero. Sus valores se indican por el punto E en los incisos *a* y *b*. Los esfuerzos correspondientes no son iguales a cero incluso después de que el ensamble ha sido descargado. Para determinar estos esfuerzos residuales, primero se determinarán los esfuerzos inversos σ'_r y σ'_t causados por la descarga y se sumarán a los esfuerzos máximos $\sigma_r = 36$ ksi y $\sigma_t = 30$ ksi encontrados en la parte *a* de la Aplicación de conceptos 2.15.

La deformación que causa la descarga es la misma en el tubo y en la varilla. Es igual a δ'/L, donde δ' es la deformación del ensamble durante la descarga, que fue encontrado en la Aplicación de conceptos 2.15:

$$\epsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-45.6 \times 10^{-3} \text{ in}}{30 \text{ in}} = -1.52 \times 10^{-3} \text{ in/in}$$

Los esfuerzos inversos correspondientes en la varilla y en el tubo son

$$\sigma'_r = \epsilon' E_r = (-1.52 \times 10^{-3})(30 \times 10^6 \text{ psi}) = -45.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma'_t = \epsilon' E_t = (-1.52 \times 10^{-3})(15 \times 10^6 \text{ psi}) = -22.8 \text{ ksi}$$

Entonces, los esfuerzos residuales se encuentran superponiendo los esfuerzos debidos a la carga y los esfuerzos inversos debidos a la descarga.

$$(\sigma_r)_{res} = \sigma_r + \sigma'_r = 36 \text{ ksi} - 45.6 \text{ ksi} = -9.6 \text{ ksi}$$

$$(\sigma_t)_{res} = \sigma_t + \sigma'_t = 30 \text{ ksi} - 22.8 \text{ ksi} = +7.2 \text{ ksi}$$

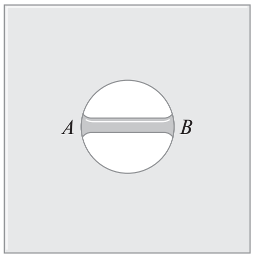


Figura 2.58 Barra pequeña soldada a una placa grande.

ficativamente por encima de la temperatura ambiente (20 °C). Así, al terminar la soldadura, se tendrá la varilla AB a una $T = 1\,000$ °C, sin esfuerzo, unida a una placa que se encuentra a 20 °C.

Al enfriarse la varilla, aumenta su módulo de elasticidad y, alrededor de los 500 °C, se aproximará a su valor normal de alrededor de 200 GPa. Al disminuir aún más la temperatura de la varilla, se supone una situación similar a la considerada en la sección 2.3 y que se ilustra en la figura 2.26. Al despejar ΔT de la ecuación (2.15) e igualando σ a la resistencia de cedencia, si se supone $\sigma_Y = 300$ MPa para el acero usado y $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C, encontramos el cambio de temperatura que hará que la varilla ceda:

$$\Delta T = -\frac{\sigma}{E\alpha} = -\frac{300 \text{ MPa}}{(200 \text{ GPa})(12 \times 10^{-6}/°\text{C})} = -125\,°\text{C}$$

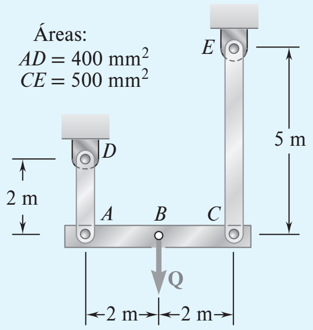
Esto significa que la varilla comenzará a ceder alrededor de 375 °C y continuará cediendo a un nivel casi constante de esfuerzo mientras se enfría a temperatura ambiente. Como resultado de la operación de soldadura, un esfuerzo residual (aproximadamente igual a la resistencia de cedencia del acero utilizado) se crea en el tapón y en la soldadura.

Los esfuerzos residuales también ocurren como resultado del enfriamiento de los metales fundidos o laminados en caliente. En estos casos, las capas externas se enfrían con mayor rapidez que el núcleo interior. Esto provoca que las capas externas adquieran de nuevo su rigidez (E regresa a su valor normal) más rápidamente que el núcleo interior. Cuando el elemento completo ha retornado a la temperatura ambiente, el núcleo interior se habrá contraído más que las capas externas. El resultado son esfuerzos residuales longitudinales de tensión en el núcleo interno y esfuerzos residuales de compresión en las capas exteriores.

Los esfuerzos residuales debidos a la soldadura, la fundición y el laminado en caliente pueden ser muy grandes (del orden de magnitud de la resistencia a la cedencia). Es posible eliminar estos esfuerzos, cuando es necesario, recalentando el elemento a alrededor de 600 °C, y después permitiéndole enfriarse lentamente en un periodo de 12 a 24 horas.

Problema modelo 2.6

La viga rígida ABC está suspendida de dos varillas de acero, como se muestra en la figura *a*, y está inicialmente en posición horizontal. El punto medio B de la viga se deflecta 10 mm hacia abajo por la aplicación lenta de la fuerza **Q**, después de lo cual la fuerza se retira lentamente. Si se sabe que el acero empleado para las varillas es elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 300$ MPa, determine *a*) el valor máximo requerido de Q y la posición correspondiente de la viga, y *b*) la posición final de la viga.



ESTRATEGIA: Se puede suponer que la deformación plástica ocurrirá primero en la varilla AD (la que es una buena suposición: *¿por qué?*), y después verificar esta suposición.

MODELAR Y ANALIZAR:

Estática. Como **Q** se aplica en el punto medio de la viga (figura 1),

$$P_{AD} = P_{CE} \qquad \text{y} \qquad Q = 2P_{AD}$$

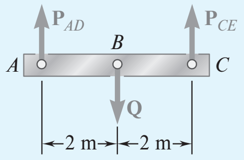


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga rígida.

Acción elástica (figura 2). El valor máximo de Q y la deflexión elástica máxima del punto A ocurren cuando $\sigma = \sigma_Y$ en la varilla AD.

$$(P_{AD})_{\text{máx}} = \sigma_Y A = (300 \text{ MPa})(400 \text{ mm}^2) = 120 \text{ kN}$$

$$Q_{\text{máx}} = 2(P_{AD})_{\text{máx}} = 2(120 \text{ kN}) \qquad Q_{\text{máx}} = 240 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

$$\delta_{A_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_Y}{E} L = \left(\frac{300 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}}\right)(2 \text{ m}) = 3 \text{ mm}$$

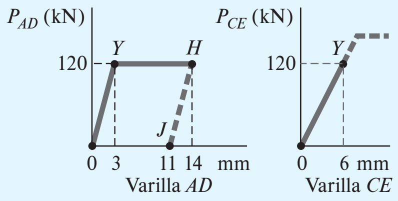


Figura 2 Diagramas de carga-deflexión para las varillas de acero.

Puesto que $P_{CE} = P_{AD} = 120$ kN, el esfuerzo en la varilla CE es

$$\sigma_{CE} = \frac{P_{CE}}{A} = \frac{120 \text{ kN}}{500 \text{ mm}^2} = 240 \text{ MPa}$$

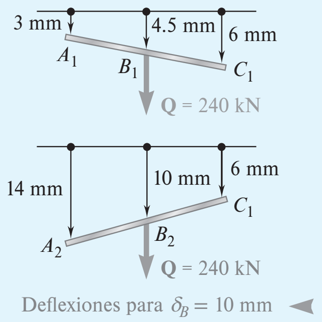


Figura 3 Deflexión de la viga completamente cargada.

La deflexión correspondiente del punto C es

$$\delta_{C_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_{CE}}{E} L = \left(\frac{240 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}}\right)(5 \text{ m}) = 6 \text{ mm}$$

La deflexión correspondiente del punto B es

$$\delta_{B_1} = \tfrac{1}{2}(\delta_{A_1} + \delta_{C_1}) = \tfrac{1}{2}(3 \text{ mm} + 6 \text{ mm}) = 4.5 \text{ mm}$$

Como $\delta_B = 10$ mm, se concluye que ocurrirá deformación plástica.

Deformación plástica. Para $Q = 240$ kN, la deformación plástica ocurre en la varilla AD, donde $\sigma_{AD} = \sigma_Y = 300$ MPa. Ya que el esfuerzo en la varilla CE está dentro del rango elástico, δ_C permanece igual a 6 mm. De la figura 3, la deflexión δ_A para la que $\delta_B = 10$ mm se obtiene escribiendo

$$\delta_{B_2} = 10 \text{ mm} = \tfrac{1}{2}(\delta_{A_2} + 6 \text{ mm}) \qquad \delta_{A_2} = 14 \text{ mm}$$

Descarga. Al retirarse lentamente la fuerza **Q**, la fuerza P_{AD} disminuye a lo largo de la línea HJ paralela a la porción inicial del diagrama carga-deflexión de la varilla AD. La deflexión final del punto A es

$$\delta_{A_3} = 14 \text{ mm} - 3 \text{ mm} = 11 \text{ mm}$$

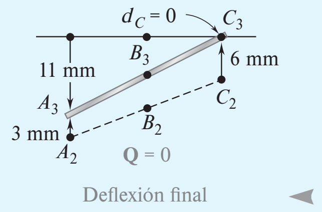


Figura 4 Deflexión final de la viga con la carga eliminada.

Como el esfuerzo en la varilla CE permaneció dentro del rango elástico, se advierte que la deflexión final del punto C es cero. En la figura 4 se ilustra la posición final de la viga.

REVISAR y PENSAR: Debido a la simetría en este problema determinado, las fuerzas axiales en las varillas son iguales. Dado que las varillas tienen propiedades materiales idénticas y que el área de la sección transversal de la varilla AD es más pequeña que la de la varilla CE, se esperaría que la varilla AD llegara primero a la cedencia (como se supuso en el paso de ESTRATEGIA).

Problemas

2.93 Si se sabe que, para la placa mostrada, el esfuerzo permisible es de 125 MPa, determine el valor máximo permisible de P cuando *a*) $r = 12$ mm, *b*) $r = 18$ mm.

2.94 Si se sabe que $P = 38$ kN, determine el esfuerzo máximo cuando *a*) $r = 10$ mm, *b*) $r = 16$ mm, *c*) $r = 18$ mm.

2.95 Un agujero debe perforarse en la placa en A. Los diámetros de las brocas disponibles para perforar el agujero van de $\frac{1}{2}$ a $1\frac{1}{2}$ in en incrementos de $\frac{1}{4}$ in.

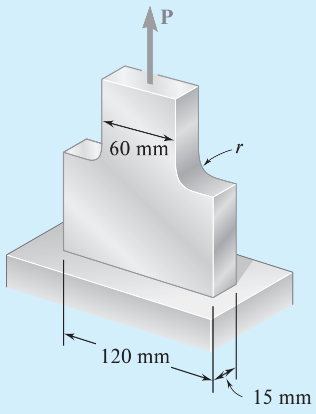


Figura P2.93 y P2.94

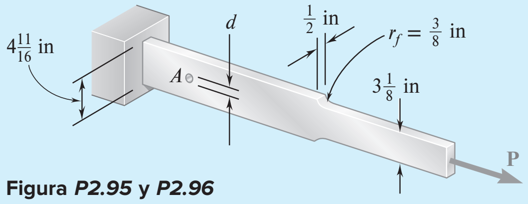


Figura *P2.95* y *P2.96*

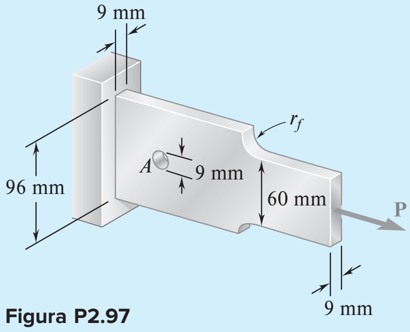


Figura P2.97

Si el esfuerzo permisible en la placa es de 21 ksi, determine *a*) el diámetro *d* de la broca más grande que puede utilizarse si la carga permisible **P** en el agujero debe exceder a la de los filetes, *b*) la carga permisible correspondiente **P**.

2.96 *a*) Para $P = 13$ kips y $d = \frac{1}{2}$ in, determine el esfuerzo máximo en la placa mostrada. *b*) Resuelva el inciso *a*), suponiendo que no se perfora el agujero en *A*.

2.97 Si se sabe que el agujero tiene un diámetro de 9 mm, determine *a*) el radio r_f de los filetes para el cual ocurre el mismo esfuerzo máximo en el agujero *A* y en los filetes, *b*) la carga máxima permisible **P** correspondiente si el esfuerzo permisible es de 100 MPa.

2.98 Para $P = 100$ kN, determine el mínimo grosor *t* de la placa que se requiere si el esfuerzo permisible es de 125 MPa.

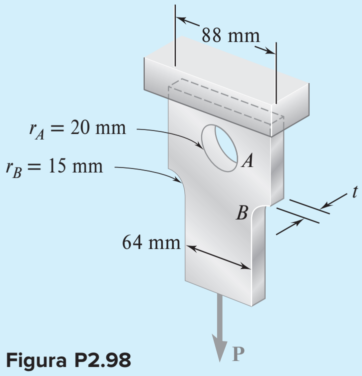


Figura P2.98

2.99 *a*) Si se sabe que el esfuerzo permisible es de 20 ksi, determine la magnitud máxima permisible de la carga axial céntrica **P**. *b*) Determine el cambio porcentual en la magnitud permisible máxima de **P** si las partes realzadas se retiran de los extremos de la probeta.

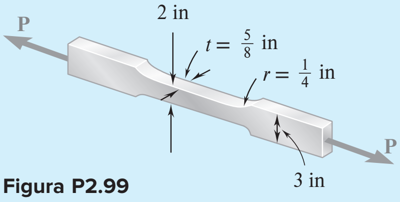


Figura P2.99

2.100 Se aplica una carga axial céntrica a la barra de acero mostrada en la figura. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 20$ ksi, determine la carga **P** máxima permisible.

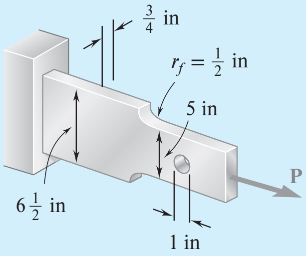


Figura P2.100

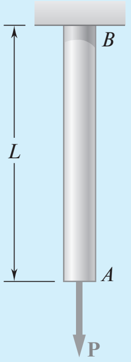


Figura P2.101 y P2.102

2.101 La varilla cilíndrica AB tiene una longitud $L = 5$ ft y un diámetro de 0.75 in, está hecha de un acero suave que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi. Una fuerza **P** se aplica a la barra y después se retira para darle una deformación permanente δ_p. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la máxima cantidad δ_m a la que debe estirarse la barra si el valor deseado de δ_p es *a*) 0.1 in, *b*) 0.2 in.

2.102 La varilla cilíndrica AB tiene una longitud $L = 6$ ft y un diámetro de 1.25 in, está hecha de un acero suave que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi. Una fuerza **P** se aplica a la barra hasta que el extremo A se ha movido hacia abajo en una cantidad δ_m. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la deformación permanente de la barra después de que se elimina la fuerza, sabiendo que *a*) $\delta_m = 0.125$ in, *b*) $\delta_m = 0.250$ in.

2.103 La varilla AB es de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Después de que la varilla se ha conectado a una palanca rígida CD, se encuentra que el extremo C está 6 mm más alto de lo debido. Entonces se aplica una fuerza vertical **Q** a C hasta que este punto se mueve a la posición C'. Determine la magnitud requerida de **Q** y la deflexión δ_1 si la palanca debe regresar elásticamente a la posición horizontal cuando **Q** se retira.

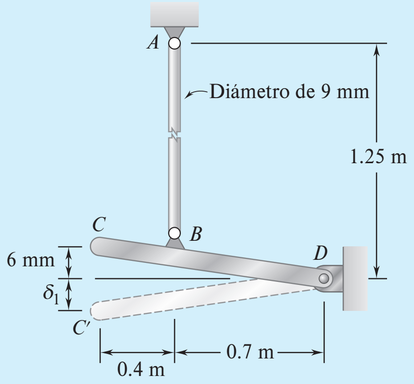


Figura *P2.103*

2.104 Resuelva el problema 2.103, suponiendo que el punto de cedencia del acero dulce es de 250 MPa.

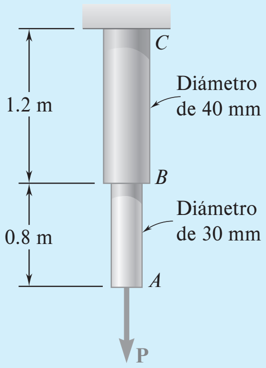


Figura P2.105 y P2.106

2.105 La varilla ABC consta de dos porciones cilíndricas AB y BC; está hecha de un acero suave que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la varilla y después se retira para darle una deformación permanente de $\delta_p = 2$ mm. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la máxima cantidad δ_m a la que debe estirarse la varilla para obtener la deformación permanente deseada.

2.106 La varilla ABC consta de dos porciones cilíndricas AB y BC, está hecha de un acero suave que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Se aplica una fuerza **P** a la varilla hasta que el extremo A se ha movido hacia abajo en una cantidad $\delta_m = 5$ mm. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la deformación permanente de la varilla después de que se elimina la fuerza.

2.107 La varilla AB consta de dos secciones cilíndricas AC y BC, cada una con un área de sección transversal de 1 750 mm^2. La porción AC está hecha de un

acero dulce con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, y la porción BC es de acero de alta resistencia con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Una carga **P** se aplica en C como se muestra en la figura. Si ambos aceros se suponen elastoplásticos, determine *a*) la máxima deflexión de C si P se incrementa gradualmente desde cero hasta 975 kN y al llegar ahí se reduce de nuevo a cero, *b*) el máximo esfuerzo en cada porción de la varilla, *c*) la deflexión permanente de C.

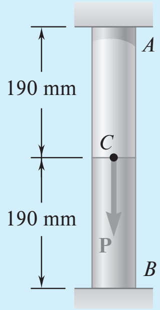


Figura P2.107

2.108 Para la varilla compuesta del problema 2.107, si P se incrementa de manera gradual desde cero hasta que la deflexión en el punto C alcanza un valor máximo de $\delta_m = 0.3$ mm y, al llegar a este punto, se reduce de nuevo a cero, determine *a*) el valor máximo de P, *b*) el esfuerzo máximo de cada porción de la varilla, *c*) la deflexión permanente de C después de retirar la carga.

2.109 Cada uno de los cables tiene un área en su sección transversal de 100 mm^2 y está hecho de un material elastoplástico para el que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa. Una fuerza **Q** se aplica en el punto C de la barra rígida ABC y se incrementa de manera gradual desde 0 hasta 50 kN y después se reduce de nuevo hasta cero. Puesto que los cables estaban inicialmente tensos, determine *a*) el esfuerzo máximo que ocurre en el cable BD, *b*) la deflexión máxima del punto C, *c*) el desplazamiento final del punto C. (*Sugerencia:* En el inciso *c*, el cable CE no está tenso).

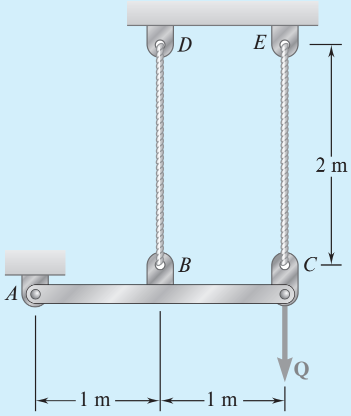


Figura *P2.109*

2.110 Resuelva el problema 2.109 suponiendo que los cables son reemplazados por varillas que tienen la misma área en su sección transversal y están hechas del mismo material. Suponga además que las varillas se refuerzan de tal manera que puedan soportar cargas de compresión.

2.111 Dos barras de acero templado, cada una de $\frac{3}{16}$ in. de grosor, se unen a una barra de acero dulce de $\frac{1}{2}$ in. Esta barra compuesta se sujeta a una carga axial céntrica de magnitud P. Ambos aceros son elastoplásticos con $E = 29 \times 10^6$ psi y resistencias a la cedencia iguales a 100 ksi y 50 ksi, respectivamente, para el acero templado y el dulce. La carga P se incrementa en forma gradual desde cero hasta que la deformación de la barra alcanza un valor máximo $\delta_m = 0.04$ in., y después se reduce de nuevo a cero. Calcule *a*) el valor máximo de P, *b*) el esfuerzo máximo en las barras de acero templado, *c*) la deformación permanente una vez que la carga se retira.

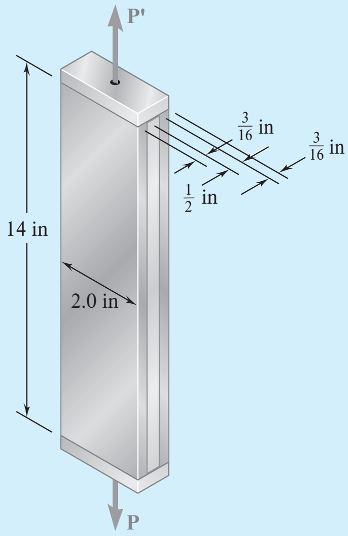


Figura P2.111

2.112 Para la barra compuesta del problema 2.111, si P se incrementa gradualmente desde cero hasta 98 kips y después disminuye hasta cero, determine *a*) la

deformación máxima de la barra, *b*) el esfuerzo máximo en las barras de acero templado, *c*) la deformación permanente después de que la carga se retira.

2.113 La barra rígida *ABC* se soporta en dos eslabones, *AD* y *BE*, de sección transversal rectangular uniforme de 37.5 × 6 mm, los cuales están hechos de acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. La magnitud de la fuerza **Q** aplicada en *B* se incrementa gradualmente desde cero a 260 kN. Si se sabe que $a = 0.640$ m, determine *a*) el valor del esfuerzo normal en cada eslabón, *b*) la máxima deflexión del punto *B*.

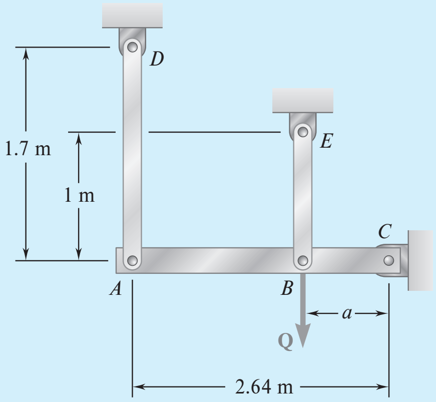


Figura P2.113

2.114 Resuelva el problema 2.113, si se sabe que $a = 1.76$ m y que la magnitud de la fuerza **Q** que se aplica en *B* se incrementa gradualmente desde cero hasta 135 kN.

***2.115** Resuelva el problema 2.113, suponiendo que la magnitud de la fuerza **Q** aplicada en *B* se incrementa gradualmente desde cero hasta 260 kN y después se disminuye hasta cero. Si se sabe que $a = 0.640$ m, determine *a*) el esfuerzo residual en cada eslabón, *b*) la deflexión final en el punto *B*. Suponga que los eslabones se apuntalan de tal manera que puedan soportar cargas compresivas sin pandearse.

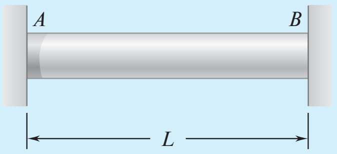


Figura P2.116

2.116 Una varilla uniforme de acero con área de sección transversal *A* se une a unos soportes rígidos y se encuentra sin esforzar a una temperatura de 45 °F. Se supone que el acero es elastoplástico con $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. Si se sabe que $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$/°F, determine el esfuerzo en la barra *a*) cuando la temperatura se eleva a 320°F, *b*) después de que la temperatura ha regresado a 45 °F.

2.117 La varilla de acero *ABC* está unida a soportes rígidos y se encuentra sin esforzar a una temperatura de 25 °C. Se supone que el acero es elastoplástico,

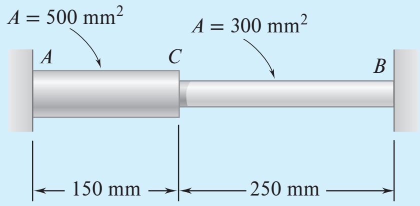


Figura P2.117

con E = 200 GPa y σ_Y = 250 MPa. La temperatura de ambas porciones de la varilla se eleva entonces a 150 °C. Si se sabe que $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/°C$, determine *a*) el esfuerzo en ambas partes de la varilla, *b*) la deflexión del punto *C*.

***2.118** Resuelva el problema 2.117, suponiendo que la temperatura de la varilla se eleva a 150 °C y después regresa a 25 °C.

****2.119*** Para la barra compuesta del problema 2.111, determine los esfuerzos residuales en las barras de acero templado si *P* se incrementa gradualmente desde cero hasta 98 kips y después se disminuye de nuevo a cero.

****2.120*** Para la barra compuesta del problema 2.111, determine los esfuerzos residuales en las barras de acero templado si *P* se incrementa gradualmente desde cero hasta que la deformación en la barra alcanza un valor máximo $\delta_m = 0.04$ in y después se disminuye de nuevo hasta cero.

***2.121** Dos barras angostas de aluminio están unidas a los costados de una placa gruesa de acero como se muestra en la figura. Al principio, a una T_1 = 70 °F, todos los esfuerzos son cero. Si se sabe que la temperatura se elevará lentamente hasta T_2 y después se reducirá a T_1, determine *a*) la máxima temperatura T_2 que *no* resulta en esfuerzos residuales, *b*) la temperatura T_2 que resultará en un esfuerzo residual en el aluminio igual a 58 ksi. Suponga $\alpha_a = 12.8 \times 10^{-6}/°F$ para el aluminio y $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}/°F$ para el acero. Suponga, además, que el aluminio es elastoplástico con $E = 10.9 \times 10^6$ psi y σ_Y = 58 ksi. (*Sugerencia:* No tome en cuenta los pequeños esfuerzos en la placa).

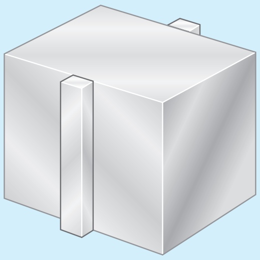


Figura P2.121

***2.122** La barra *AB* tiene un área en su sección transversal de 1 200 mm² y es de un acero que se supone elastoplástico con E = 200 GPa y σ_Y = 250 MPa. Si se sabe que la fuerza **F** aumenta desde 0 hasta 520 kN y después disminuye de nuevo a cero, determine *a*) la deflexión permanente del punto *C*, *b*) el esfuerzo residual en la barra.

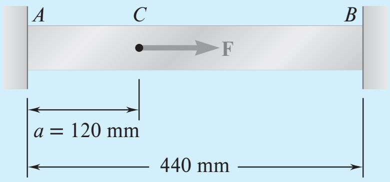


Figura P2.122

***2.123** Resuelva el problema 2.122, suponiendo que a = 180 mm.

Repaso y resumen

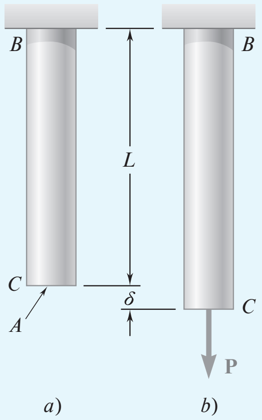


Figura 2.59 Varilla cargada axialmente sin deformar y deformada.

Deformación normal

Al considerar una varilla de longitud L y sección transversal uniforme y denotar con δ su deformación bajo una carga axial **P** (figura 2.59), se define la *deformación normal* ϵ en la varilla como la *deformación por unidad de longitud*:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

En el caso de una varilla con sección transversal variable, la deformación normal en cualquier punto dado Q se encuentra considerando un pequeño elemento de la varilla en Q.

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Diagrama de esfuerzo-deformación

Al graficar el esfuerzo σ contra la deformación ϵ a medida que aumenta la carga, se obtiene un *diagrama de esfuerzo-deformación*. Este diagrama puede utilizarse para distinguir entre materiales *frágiles* y *dúctiles*. Un material frágil se fractura sin cambio previo notable en su tasa de elongación (figura 2.60), mientras que un material dúctil *cede* después de que un esfuerzo crítico σ_Y (el *esfuerzo de cedencia*) ha sido alcanzado (figura 2.61). La probeta sufre una gran deformación antes de fracturarse, con un incremento relativamente pequeño de la carga aplicada. Un ejemplo de material frágil con propiedades diferentes a tensión y a compresión es el *concreto*.

Ley de Hooke y módulo de elasticidad

La parte inicial del diagrama esfuerzo-deformación es una línea recta. Esto significa que, para deformaciones pequeñas, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación:

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.6}$$

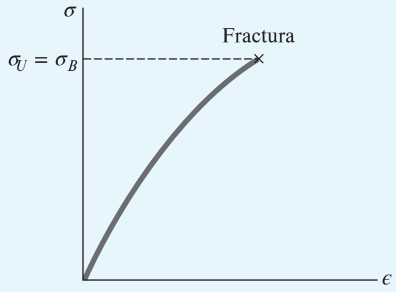


Figura 2.60 Diagrama de esfuerzo-deformación para un material frágil típico.

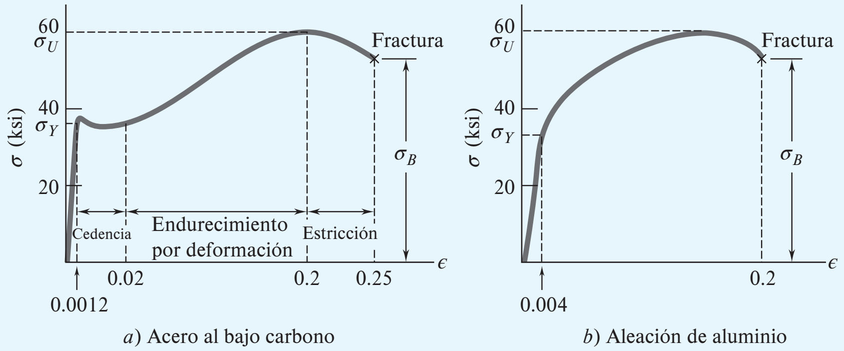


Figura 2.61 Diagramas de esfuerzo-deformación para dos materiales metálicos dúctiles típicos.

Esta relación es la *ley de Hooke* y el coeficiente E es el *módulo de elasticidad* del material. El máximo esfuerzo para el que la ecuación (2.4) es aplicable se llama *límite de proporcionalidad.*

Las propiedades de los materiales *isotrópicos* son independientes de la dirección, mientras que las propiedades de los materiales *anisotrópicos* dependen de la dirección. Los *materiales compuestos reforzados con fibras* están hechos de fibras de un material fuerte y rígido incrustadas en capas de un material más débil y blando (figura 2.62).

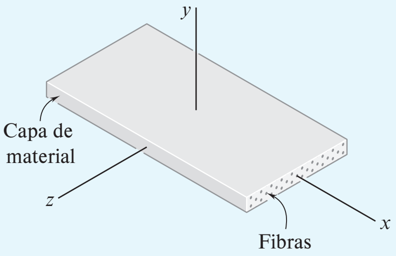


Figura 2.62 Capa de material compuesto reforzado con fibras.

Límite elástico y deformación plástica

Si las deformaciones causadas en una probeta por la aplicación de una carga dada desaparecen cuando la carga se retira, se dice que el material se comporta *elásticamente*. El máximo esfuerzo para el que esto ocurre se llama *límite elástico* del material. Si el límite elástico se excede, el esfuerzo y la deformación unitaria disminuyen de forma lineal cuando la carga se retira y la deformación no regresa a cero (figura 2.63), lo que indica que ha ocurrido una *deformación permanente* o *deformación plástica* del material.

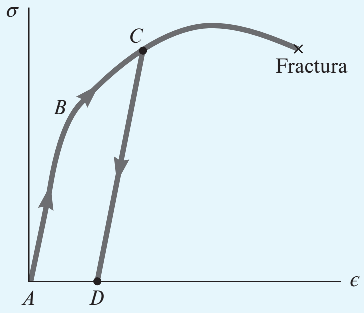


Figura 2.63 Respuesta de esfuerzo-deformación de un material dúctil al que se carga más allá de la cedencia para después descargarlo.

Fatiga y límite de resistencia

La *fatiga* causa la falla de componentes estructurales o de máquina después de un gran número de cargas repetidas, a pesar de que los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico. Un ensayo estándar de fatiga consiste en determinar el número n de ciclos sucesivos de carga y descarga requeridos para causar la falla de una probeta para cualquier nivel dado de esfuerzo máximo σ, y graficar la curva σ-n resultante. El valor de σ para el que no ocurre la falla, aun para un número indefinidamente grande de ciclos, se conoce como el *límite de resistencia.*

Deformación elástica bajo carga axial

Si una varilla de longitud L y sección transversal uniforme de área A se somete, en su extremo, a una carga axial céntrica **P** (figura 2.64), la deformación correspondiente es

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.9}$$

Si la varilla se carga en varios puntos o consta de varias partes de varias secciones transversales y posiblemente de distintos materiales, la deformación δ de la varilla debe expresarse como la suma de las deformaciones de sus partes componentes:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.10}$$

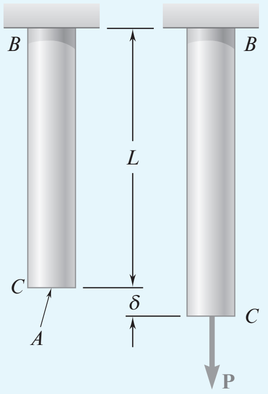


Figura 2.64 Varilla cargada axialmente sin deformar y deformada.

Problemas estáticamente indeterminados

Los *problemas estáticamente indeterminados* son aquellos en los que las reacciones y las fuerzas internas *no pueden* determinarse solo por la estática. Las ecuaciones de equilibrio deducidas del diagrama de cuerpo libre del elemento en consideración se complementan por relaciones que involucran deformaciones y que se obtienen de la geometría del problema. Las fuerzas en la varilla y en el tubo de la figura 2.65, por ejemplo, se determinaron observando que su suma es igual a P, y que causan deformaciones iguales en la varilla y en el tubo. De manera similar, las reacciones en los apoyos de la barra de la figura 2.66 no pudieron obtenerse del diagrama de cuerpo libre de la barra únicamente, pero sí pudieron determinarse expresando que el alargamiento total de la barra debe ser igual a cero.

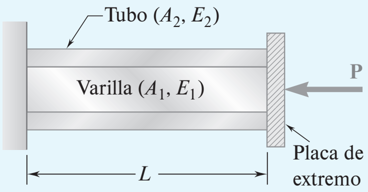


Figura 2.65 Problema estáticamente indeterminado donde la varilla y el tubo concéntricos tienen la misma deformación pero diferentes esfuerzos.

Problemas con cambios de temperatura

Cuando la temperatura en una varilla AB de largo L y *sin restricciones* se incrementa en ΔT, su alargamiento es

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{2.13}$$

donde α es el *coeficiente de expansión térmica* del material. La deformación unitaria correspondiente, llamada *deformación térmica*, es

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \tag{2.14}$$

y que *no hay esfuerzo* asociado con esta deformación. Sin embargo, si la varilla AB es *restringida* por soportes fijos (figura 2.67), se crean esfuerzos en la varilla al aumentar la temperatura, debido a las reacciones en los soportes. Para determinar la magnitud P de las reacciones, se desprende la varilla de su soporte en B (figura 2.68*a*). La deformación δ_T de la varilla ocurre cuando se expande debido al cambio de temperatura (figura 2.86*b*). La deformación δ_P generada por la fuerza **P** se requiere para regresarla a su longitud original, de manera que pueda reconectarse con el soporte en B (figura 2.68*c*).

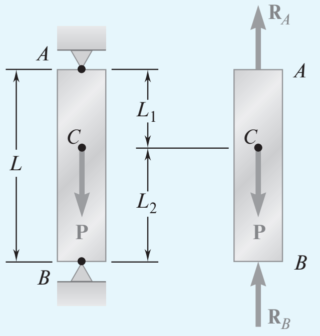


Figura 2.66 *a*) Elemento cargado axialmente y estáticamente indeterminado. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

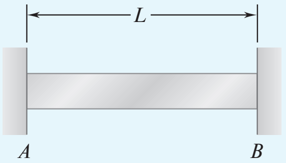


Figura 2.67 Barra completamente restringida de longitud L.

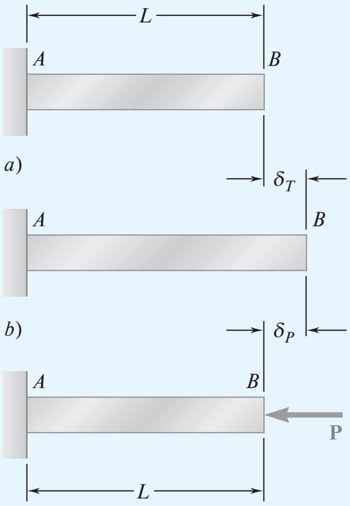


Figura 2.68 Determinación de reacciones para la barra de la figura 2.67, sometida a un aumento de temperatura. *a*) Soporte en B retirado. *b*) Expansión térmica. *c*) Aplicación de la reacción del soporte para contrarrestar la expansión térmica.

Deformación lateral y relación de Poisson

Cuando una carga axial **P** se aplica a una barra homogénea y esbelta (figura 2.69), causa una deformación, no solo a lo largo del eje de la barra sino también en cualquier dirección transversal. Esta deformación se conoce como *deformación lateral*, y la razón de la deformación lateral a la deformación axial se denomina *relación de Poisson*:

$$\nu = -\frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} \tag{2.17}$$

Carga multiaxial

La condición de deformación bajo una carga axial en la dirección x es

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \tag{2.19}$$

Una *carga multiaxial* causa el estado de esfuerzos mostrado en la figura 2.70. La condición de deformación resultante se describe mediante la *ley de Hooke generalizada* para una carga multiaxial.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dilatación

Si un elemento de material se somete a los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z, se deformará y resultará un cierto cambio de volumen. El *cambio de volumen por volumen unitario* se conoce como la *dilatación* del material:

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2.22}$$

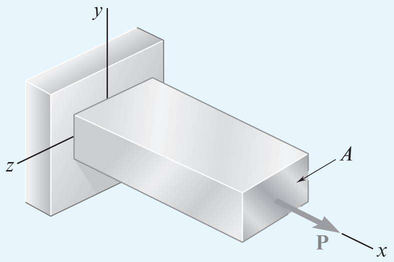


Figura 2.69 Una barra en tensión uniaxial.

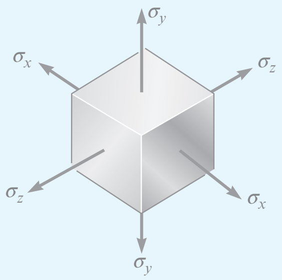


Figura 2.70 Estado de esfuerzos para una carga multiaxial.

Módulo volumétrico

Cuando un material se somete a una presión hidrostática p,

$$e = -\frac{p}{k} \qquad (2.25)$$

donde k es el *módulo volumétrico* del material:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \qquad (2.24)$$

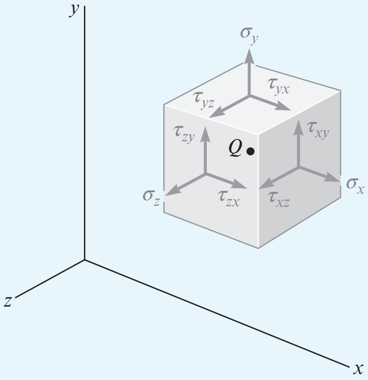


Figura 2.71 Componentes positivas del esfuerzo en el punto Q para un estado general de esfuerzos.

Deformación cortante: módulo de rigidez

El estado de esfuerzos en un material bajo las condiciones de carga más generales involucra esfuerzos cortantes además de esfuerzos normales (figura 2.71). Los esfuerzos cortantes tienden a deformar un elemento cúbico de material como un paralelepípedo oblicuo. Los esfuerzos τ_{xy} y τ_{yx} mostrados en la figura 2.72 hacen que los ángulos, formados por las caras en las que actúan, aumenten o disminuyan por un pequeño ángulo γ_{xy}. Este ángulo define la *deformación cortante* correspondiente a las direcciones x y y. Al definir de manera similar las deformaciones cortantes γ_{yz} y γ_{zx}, se escribieron las siguientes relaciones:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \qquad (2.27, 28)$$

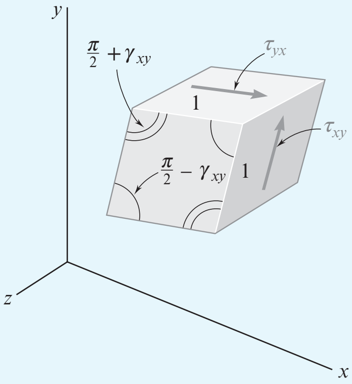


Figura 2.72 Deformación de un elemento cúbico unitario debido al esfuerzo cortante.

que son válidas para cualquier material isotrópico homogéneo dentro de su límite de proporcionalidad a cortante. La constante G es el *módulo de rigidez* del material y las relaciones obtenidas expresan la *ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación cortantes*. Junto con las ecuaciones (2.20), forman un grupo de ecuaciones que representan la ley de Hooke generalizada para un material isotrópico homogéneo bajo la condición de esfuerzos más general.

Mientras que una carga axial ejercida en una barra esbelta produce solo esfuerzos normales, tanto axiales como transversales, en un elemento de material orientado a lo largo del eje de la barra, producirá tanto esfuerzos normales como cortantes en un elemento girado 45° (figura 2.73). Las tres constantes E, ν y G no son independientes; satisfacen la relación

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \qquad (2.34)$$

que puede emplearse para hallar cualquiera de las tres constantes en términos de las otras dos.

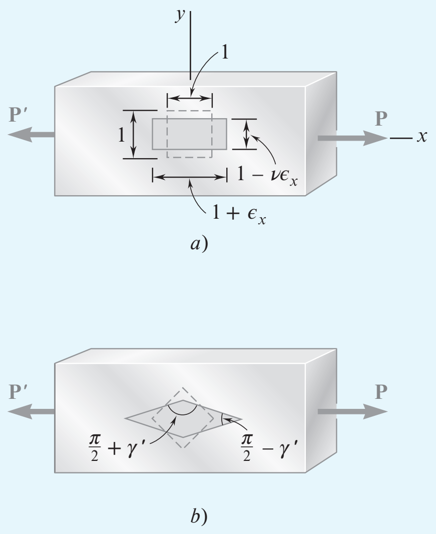


Figura 2.73 Representaciones de la deformación en una barra cargada axialmente: *a*) elemento cúbico de deformación con las caras alineadas con los ejes coordenados; *b*) elemento cúbico de deformación con las caras giradas 45° con respecto al eje *z*.

Principio de Saint-Venant

El *principio de Saint-Venant* establece que, excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas, la distribución de esfuerzos en un elemento dado es independiente del modo de aplicación de las cargas. Este principio permite suponer una distribución uniforme de esfuerzos en un elemento sometido a cargas axiales concentradas, excepto cerca de los puntos de aplicación de las cargas, donde ocurrirán concentraciones de esfuerzos.

Concentraciones de esfuerzos

También ocurrirán concentraciones de esfuerzos cerca de las discontinuidades en elementos estructurales, como agujeros o cambios repentinos en la sección transversal. La razón del máximo valor del esfuerzo que ocurre cerca de la discontinuidad sobre el esfuerzo promedio calculado en la sección crítica se conoce como el *factor de concentración de esfuerzos* de la discontinuidad:

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{prom}}} \tag{2.40}$$

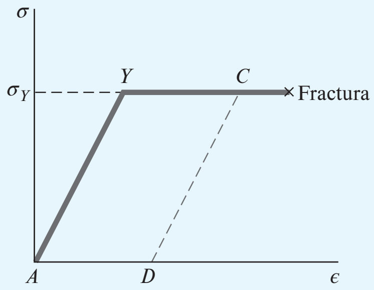


Figura 2.74 Diagrama de esfuerzo-deformación para un material elastoplástico idealizado.

Deformaciones plásticas

Las *deformaciones plásticas* ocurren en elementos estructurales hechos de un material dúctil cuando los esfuerzos en alguna parte del elemento exceden la resistencia a la cedencia del material. Un *material elastoplástico* idealizado se caracteriza por el diagrama de esfuerzo-deformación mostrado en la figura 2.74. Cuando una estructura indeterminada sufre deformaciones plásticas, los esfuerzos no suelen regresar a cero después de que la carga se retira. Los esfuerzos remanentes en las distintas partes de la estructura se denominan *esfuerzos residuales* y pueden determinarse sumando los esfuerzos máximos alcanzados durante la fase de carga y los esfuerzos inversos correspondientes a la fase de descarga.

Problemas de repaso

2.124 El alambre uniforme *ABC*, cuya longitud sin estirar es $2l$, se conecta a los soportes mostrados en la figura y se le aplica una carga vertical **P** en el punto medio *B*. Si *A* es el área de la sección transversal del alambre y *E* su módulo de elasticidad, demuestre que para $\delta \ll l$, la deflexión en el punto medio *B* es

$$\delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}}$$

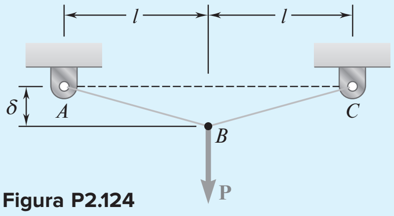


Figura P2.124

2.125 La varilla de aluminio *ABC* ($E = 10.1 \times 10^6$ psi), que consiste en dos porciones cilíndricas *AB* y *BC*, debe reemplazarse con una varilla cilíndrica de acero *DE* ($E = 29 \times 10^6$ psi) de la misma longitud global. Determine el diámetro *d* mínimo requerido de la varilla de acero si su deformación vertical no debe exceder la deformación de la varilla de aluminio bajo la misma carga y si el esfuerzo permisible en la varilla de acero no debe superar 24 ksi.

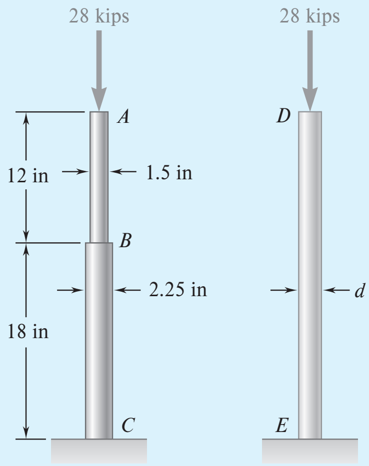


Figura P2.125

2.126 Dos varillas cilíndricas sólidas están unidas en *B* y se someten a la carga mostrada en la figura. La varilla *AB* está hecha de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y la varilla *BC* de latón ($E = 15 \times 10^6$ psi). Determine *a*) el alargamiento total de la varilla compuesta *ABC*, *b*) la deflexión del punto *B*.

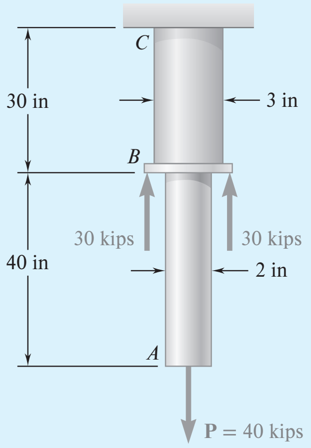


Figura *P2.126*

2.127 La tira de latón *AB* se encuentra unida a un soporte fijo en *A* y descansa sobre un soporte rugoso en *B*. Si se sabe que el coeficiente de fricción entre la tira y el soporte en *B* es de 0.60, determine el descenso en temperatura para el cual sería inminente un deslizamiento.

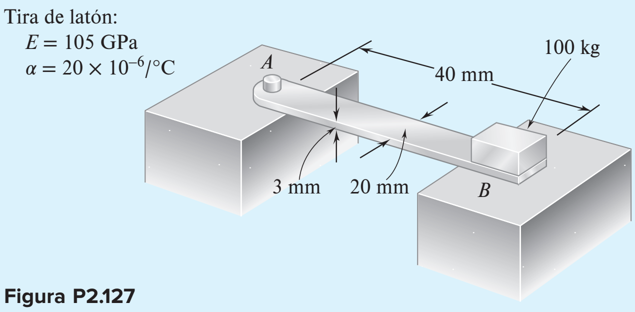


Figura P2.127

2.128 La probeta que se muestra en la figura está compuesta por una varilla cilíndrica de acero de 1 in de diámetro y por dos mangas de 1.5 in de diámetro exterior unidas a la varilla. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la

carga **P** tal que el alargamiento total sea de 0.002 in, *b*) la deformación correspondiente de la porción central *BC*.

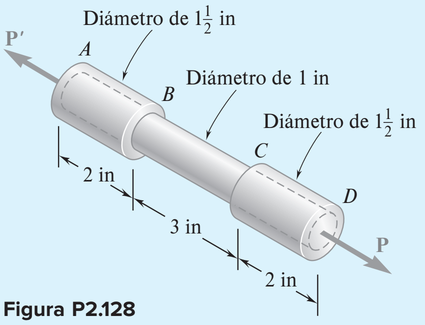


Figura P2.128

2.129 Cada uno de los cuatro eslabones verticales que conectan los dos elementos rígidos horizontales que se muestran en la figura está hecho de aluminio (E = 70 GPa) y tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10 × 40 mm. Para la carga mostrada, determine la deflexión *a*) del punto *E*, *b*) del punto *F* y *c*) del punto *G*.

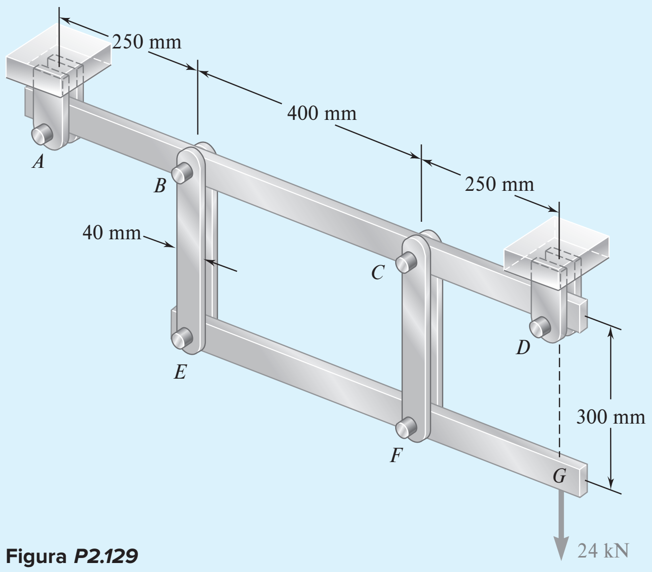


Figura P2.129

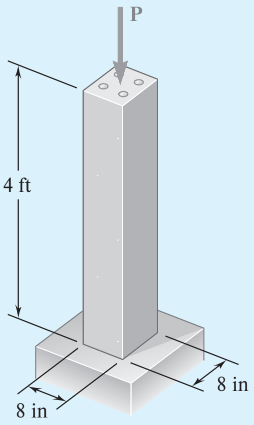


Figura P2.130

2.130 Un poste de concreto de 4 ft está reforzado con cuatro barras de acero, cada una con un diámetro de $\frac{3}{4}$ in. Si se sabe que $E_s = 29 \times 10^6$ psi y $E_c = 3.6 \times 10^6$ psi, determine los esfuerzos normales en el acero y en el concreto cuando se aplica al poste una carga céntrica axial **P** de 150 kips.

2.131 Las varillas de acero *BE* y *CD* tienen cada una un diámetro de 16 mm (E = 200 GPa); los extremos de las varillas tienen rosca simple con un paso de 2.5 mm. Si se sabe que después de haber sido enroscada, la tuerca en *C* se aprieta una vuelta completa, determine *a*) la tensión en la varilla *CD*, *b*) la deflexión del punto *C* del elemento rígido *ABC*.

2.132 El ensamble mostrado consiste en una coraza de aluminio ($E_a = 10.6 \times 10^6$ psi, $\alpha_a = 12.9 \times 10^{-6}$/°F) completamente unida a un núcleo de acero (E_s = 29 × 10^6 psi, $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}$/°F) y está libre de esfuerzo. Determine *a*) el cambio de temperatura máximo permisible si el esfuerzo en la coraza de aluminio no debe exceder 6 ksi, *b*) el cambio correspondiente en la longitud del ensamble.

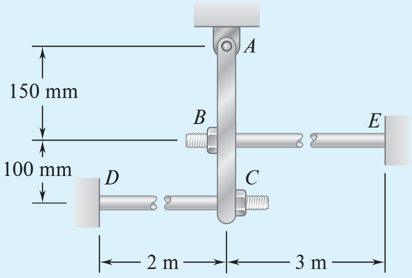


Figura P2.131

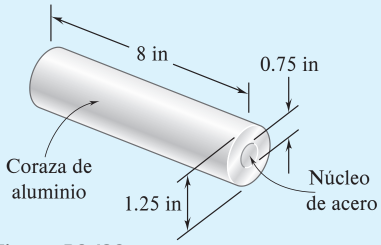


Figura *P2.132*

2.133 El bloque de plástico mostrado en la figura está adherido a una base fija y a una placa rígida horizontal a la que se aplica una fuerza **P**. Si se sabe que para el plástico usado $G = 55$ ksi, determine la deflexión de la placa cuando $P = 9$ kips.

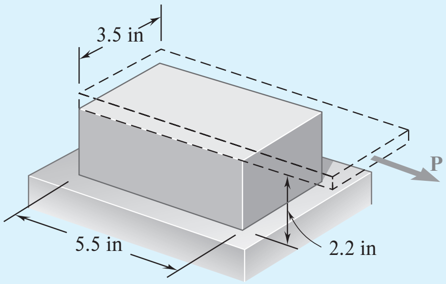


Figura P2.133

2.134 La probeta de aluminio que se muestra en la figura está sujeta a dos fuerzas axiales céntricas iguales y opuestas de magnitud *P*. *a*) Si se sabe que $E = 70$ GPa y $\sigma_{perm} = 200$ MPa, determine el valor permisible máximo de *P* y la elongación total correspondiente de la probeta. *b*) Resuelva el inciso *a* suponiendo que la probeta ha sido reemplazada por una barra de aluminio de la misma longitud y una sección transversal rectangular uniforme de 60 × 15 mm.

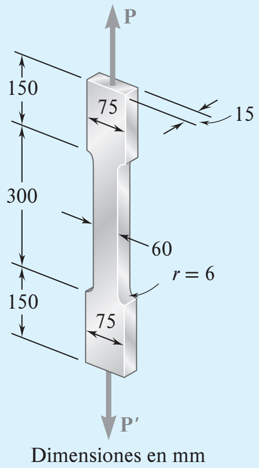


Figura *P2.134*

2.135 La varilla uniforme *BC* tiene un área de sección transversal uniforme *A* y está hecha de un acero suave que puede suponerse elastoplástico con un módulo de elasticidad *E* y una resistencia a la cedencia σ_Y. Con el sistema de bloque y resorte mostrado en la figura, se desea simular la deflexión del extremo *C* de la varilla conforme se aplica y se retira gradualmente la fuerza axial **P**; esto es, la deflexión de los puntos *C* y *C′* debe ser la misma para todos los valores de *P*. Si μ es el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie horizontal, obtenga una expresión para *a*) la masa *m* requerida para el bloque, *b*) la constante *k* requerida para el resorte.

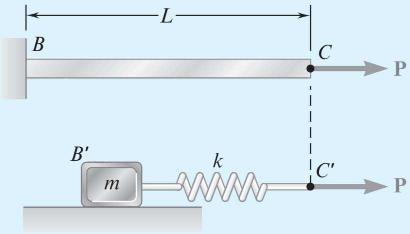


Figura P2.135

Problemas de computadora

Los siguientes problemas están diseñados para resolverse con la ayuda de una computadora. Escriba cada programa para que pueda usarse con unidades SI o de uso común en Estados Unidos, de tal manera que los elementos cilíndricos sólidos puedan definirse por su diámetro o por el área de su sección transversal.

2.C1 Una varilla de n elementos, en el que cada elemento es homogéneo y de sección transversal uniforme, se somete a la carga mostrada. La longitud del elemento i está denotada por L_i, su área de sección transversal por A_i, su módulo de elasticidad mediante E_i, y la carga aplicada a su extremo derecho es $\mathbf{P}_i$; la magnitud P_i de esta carga se supone positiva si $\mathbf{P}_i$ va hacia la derecha, de lo contrario se considera negativa. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda usarse para determinar el esfuerzo normal promedio en cada elemento, la deformación en cada elemento y el alargamiento total de la varilla. *b*) Utilice tal programa para resolver los problemas 2.20 y 2.126.

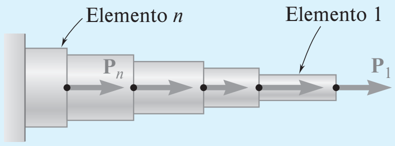


Figura P2.C1

2.C2 La varilla horizontal AB con ambos extremos fijos tiene n elementos homogéneos de sección transversal uniforme y está sometida a la carga mostrada en la figura. La longitud del elemento i está denotada por L_i, su área de sección transversal por A_i, su módulo de elasticidad mediante E_i, y la carga aplicada a su extremo derecho es $\mathbf{P}_i$; la magnitud P_i de esta carga se supone positiva si $\mathbf{P}_i$ va hacia la derecha, de lo contrario se considera negativa. (Advierta que $P_1 = 0$). *a*) Escriba un programa para computadora que pueda emplearse para determinar las reacciones en A y B, el esfuerzo normal promedio en cada elemento, y la deformación de cada elemento. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.41 y 2.42.

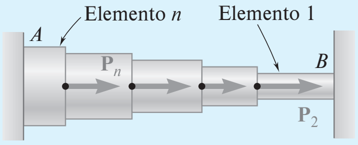


Figura P2.C2

2.C3 La varilla AB tiene n elementos, cada uno de los cuales es homogéneo y de sección transversal uniforme. El extremo A se encuentra fijo, mientras que existe una separación inicial δ_0 entre el extremo B y la superficie fija vertical situada a la derecha. La longitud del elemento i es L_i, su área de sección transversal A_i, su módulo de elasticidad se denota mediante E_i, y su coeficiente de expansión térmica es α_i. Después de que la temperatura de la varilla se

ha aumentado en ΔT, la separación en B se cierra y las superficies verticales ejercen fuerzas iguales y opuestas sobre la varilla. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda usarse para determinar la magnitud de las reacciones en A y B, el esfuerzo normal y la deformación en cada elemento. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.59 y 2.60.

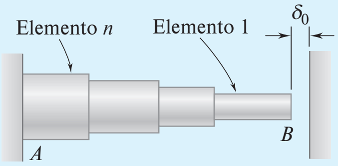


Figura P2.C3

2.C4 La barra AB tiene longitud L y está hecha a partir de dos materiales diferentes con área de sección transversal, módulo de elasticidad y resistencia a la cedencia dados. La barra se somete, como se muestra en la figura, a una carga **P** que se incrementa gradualmente desde cero hasta que la deformación alcanza un valor máximo δ_m y entonces se reduce de nuevo a cero. *a*) Escriba un programa de computadora que, para cada uno de los 25 valores de δ_m igualmente espaciados en un rango que se extiende desde 0 hasta un valor igual al 120% de la deformación que cause que ambos materiales cedan, pueda emplearse para determinar el valor máximo P_m de la carga, el esfuerzo normal máximo en cada material, la deformación permanente δ_p de la barra, y el esfuerzo residual en cada material. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.111 y 2.112.

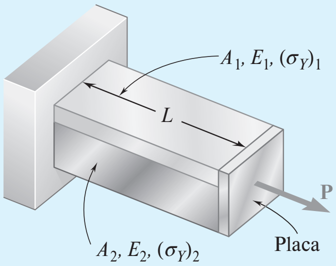


Figura P2.C4

2.C5 La placa tiene un orificio central que la atraviesa de lado a lado. El factor de concentración de esfuerzos para una barra plana bajo carga axial y con un agujero central es

$$K = 3.00 - 3.13\left(\frac{2r}{D}\right) + 3.66\left(\frac{2r}{D}\right)^2 - 1.53\left(\frac{2r}{D}\right)^3$$

donde r es el radio del agujero y D el ancho de la barra. Escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para determinar la carga permisible **P** para valores dados de r, D, el espesor t de la barra y el esfuerzo permisible σ_{perm} del material. Si se sabe que $t = \frac{1}{4}$ in, $D = 3.0$ in y $\sigma_{perm} = 16$ ksi, determine la carga permisible **P** para valores de r desde 0.125 in hasta 0.75 in, con incrementos de 0.125 in.

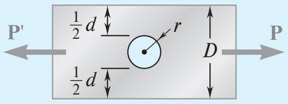


Figura P2.C5

2.C6 Un cono sólido truncado es sometido a una carga axial **P** como se muestra en la figura. El alargamiento exacto del cono es $(PL)/(2\pi c^2 E)$. Reemplace el cono con n cilindros circulares de igual espesor y escriba un programa para computadora que pueda usarse para calcular el alargamiento del cono truncado. ¿Cuál es el error porcentual de la respuesta obtenida con el programa si se usa *a*) $n = 6$, *b*) $n = 12$, *c*) $n = 60$?

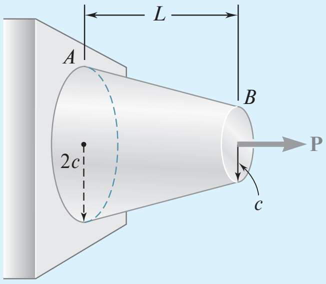
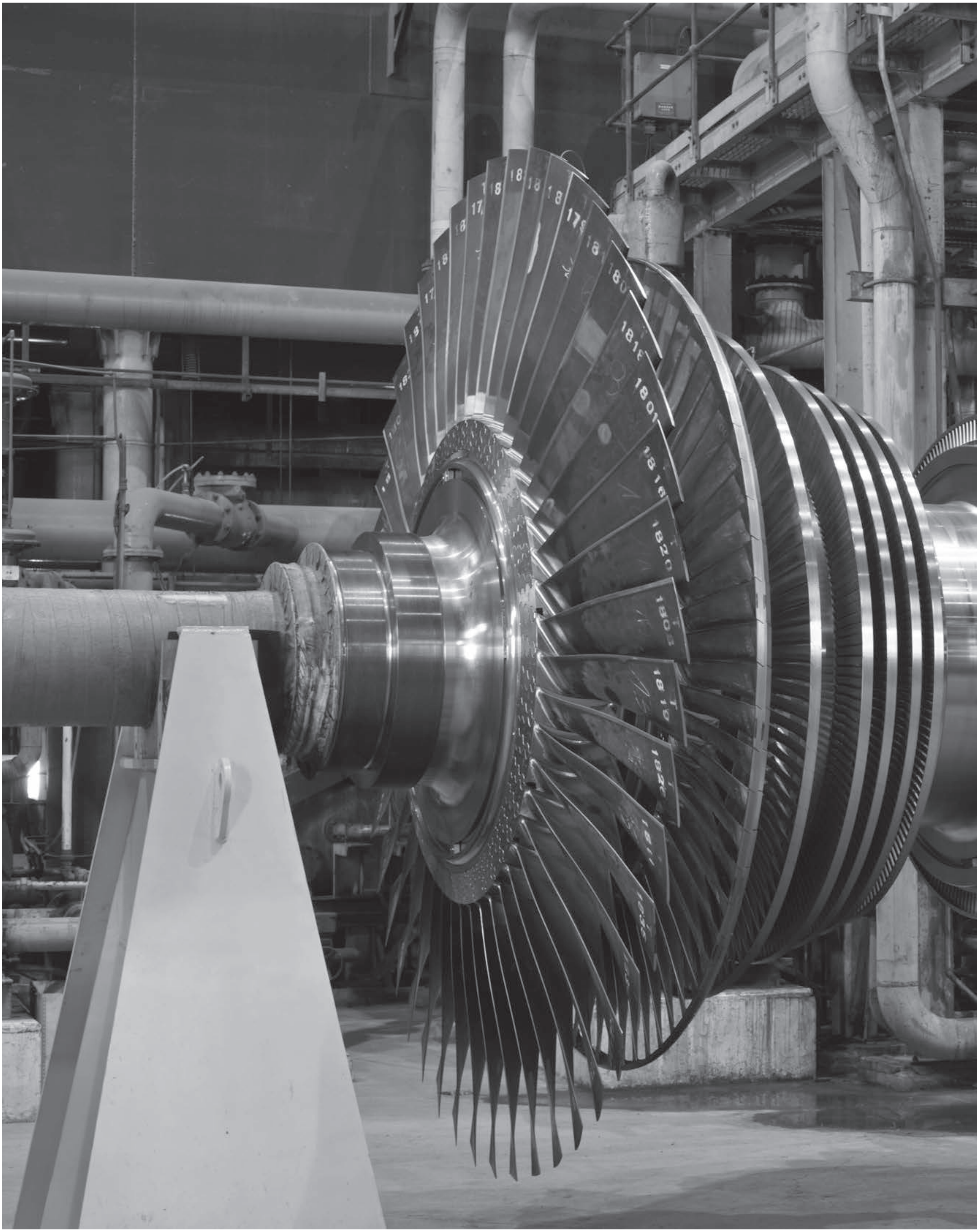


Figura P2.C6



3

Torsión

En el motor de jet que se muestra en la fotografía, el eje central conecta los componentes del motor para desarrollar el empuje que impulsa al avión.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Presentar a los estudiantes** el concepto de torsión en elementos estructurales y partes de máquinas.
- **Definir** los esfuerzos y deformaciones cortantes en un eje circular sujeto a la torsión.
- **Definir el ángulo** de torsión en términos del par de torsión aplicado, la geometría del eje y el material.
- **Utilizar** las deformaciones torsionales para resolver problemas indeterminados.
- **Diseñar ejes** para la transmisión de potencia.
- **Revisar** las concentraciones de esfuerzo y cómo se incluyen en los problemas de torsión.
- **Describir** la respuesta elástica-perfectamente plástica de ejes circulares.
- **Analizar** la torsión para elementos no circulares.
- **Definir** el comportamiento de los ejes huecos de pared delgada.

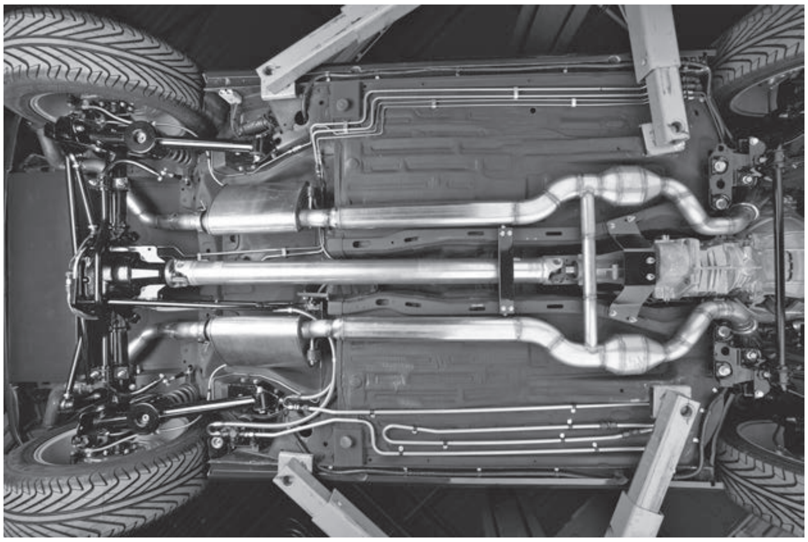
Introducción

3.1 **Ejes circulares en torsión**
3.1A Esfuerzos en un eje
3.1B Deformaciones en un eje circular
3.1C Esfuerzos en el rango elástico
3.2 **Ángulo de torsión en el rango elástico**
3.3 **Ejes estáticamente indeterminados**
3.4 **Diseño de ejes de transmisión**
3.5 **Concentraciones de esfuerzo en ejes circulares**
*3.6 **Deformaciones plásticas en ejes circulares**
*3.7 **Ejes circulares hechos de un material elastoplástico**
*3.8 **Esfuerzos residuales en ejes circulares**
*3.9 **Torsión de elementos no circulares**
*3.10 **Ejes huecos de pared delgada**

Introducción

En este capítulo se analizarán los elementos estructurales y partes de maquinaria que se encuentran en *torsión*, donde los esfuerzos y las deformaciones en elementos de sección transversal circular se someten a pares torsionales, o *pares de torsión*, **T** y **T′** (figura 3.1). Estos pares tienen una magnitud común *T* y sentidos opuestos. Son cantidades vectoriales que pueden representarse mediante flechas curvas (figura 3.1*a*) o por vectores de par (figura 3.1*b*).

Los elementos sometidos a torsión se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería. La aplicación más común la representan los *ejes de transmisión*, que se emplean para transmitir potencia de un punto a otro (fotografía 3.1). Estos ejes pueden ser sólidos, como se muestra en la figura 3.1, o huecos.



Fotografía 3.1 En el tren de transmisión automotriz que se muestra, el eje transmite potencia del motor hacia las ruedas traseras.

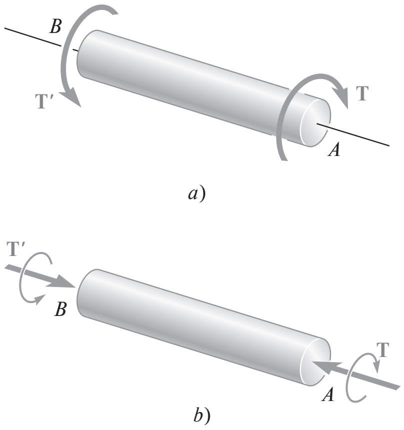


Figura 3.1 Dos maneras equivalentes de representar un par de torsión en un diagrama de cuerpo libre.

El sistema que se muestra en la figura 3.2*a* consiste en una turbina *A* y un generador eléctrico *B* conectados por un eje de transmisión *AB*. Separando el sistema en sus tres partes componentes (figura 3.2*b*), la turbina ejerce un par torsional o par de torsión **T** sobre el eje, el cual ejerce después un par de torsión igual sobre el generador. El generador reacciona ejerciendo un par de torsión igual y opuesto **T′** sobre el eje, y el eje reacciona ejerciendo el par de torsión **T′** sobre la turbina.

Primero se analizarán los esfuerzos y las deformaciones que ocurren en ejes circulares. Después se demostrará una propiedad importante de los ejes circulares: *cuando un eje circular se somete a torsión, todas las secciones transversales permanecen planas y sin distorsión*. Por consiguiente, mientras que las diversas secciones transversales a lo largo del eje giran a través de distintos ángulos, cada sección transversal gira como una placa sólida rígida. Esta propiedad permitirá determinar la *distribución de los esfuerzos cortantes sobre un eje circular y obtener en conclusión que la deformación a cortante varía linealmente con la distancia medida desde el eje de la flecha*.

Se utilizan las deformaciones en el *rango elástico* y la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación cortantes, a fin de determinar la *distribución de esfuerzos cortantes* en un eje circular, así como para deducir las *fórmulas para la torsión elástica.*

En la sección 3.2 se determinará el *ángulo de torsión* de un eje circular sujeto a un par de torsión dado, suponiendo deformaciones elásticas. La solución de problemas que involucran *ejes estáticamente indeterminados* se considerará en la sección 3.3.

En la sección 3.4 se estudiará el *diseño de ejes de transmisión*, mediante la determinación de las características físicas requeridas de un eje en términos de su velocidad de rotación y de la potencia que debe ser transmitida.

En la sección 3.5 se aprenderá a calcular las concentraciones de esfuerzos cuando existe un cambio abrupto en el diámetro del eje. En las secciones 3.6 a 3.8 se conside-

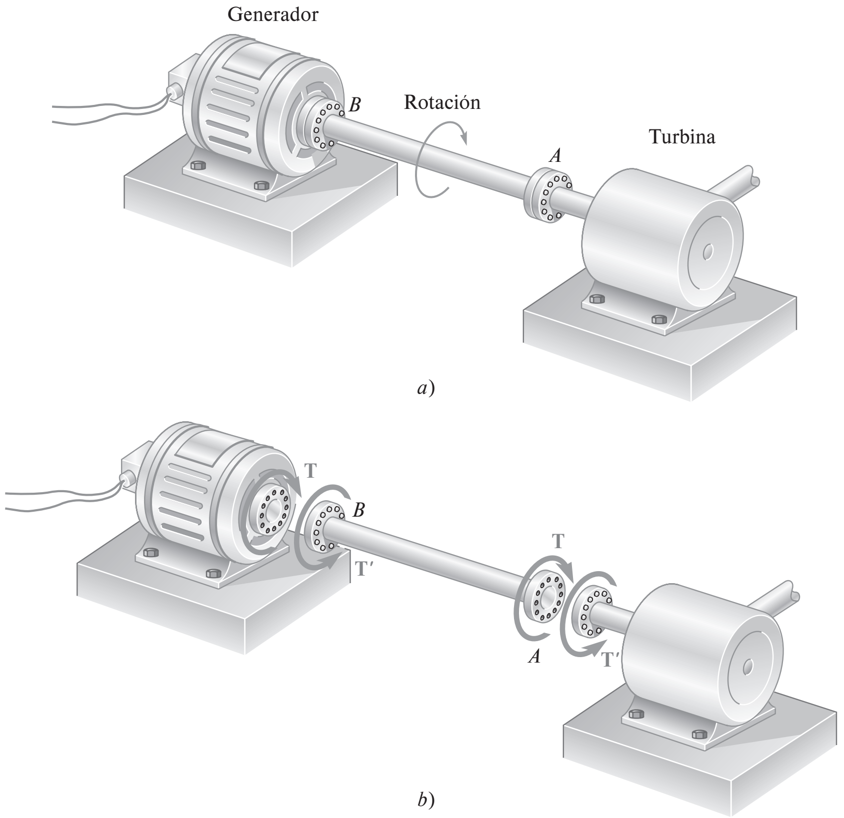


Figura 3.2 *a*) Un generador recibe potencia a un número constante de revoluciones por minuto desde una turbina a través del eje *AB*. *b*) Diagrama de cuerpo libre del eje *AB* en conjunto con los pares de accionamiento y reacción en el generador y la turbina, respectivamente.

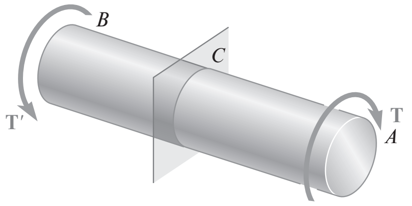


Figura 3.3 Eje sujeto a pares de torsión y un plano de sección en *C*.

rarán los esfuerzos y las deformaciones en ejes circulares hechos de un material dúctil cuando se excede el punto de cedencia del material. Después se aprenderá a determinar las *deformaciones plásticas* permanentes y los *esfuerzos residuales* que permanecen en un eje después de que se le ha cargado más allá del punto de cedencia del material.

En las últimas secciones de este capítulo se estudiará la torsión de elementos no circulares (sección 3.9) y se analizará la distribución de esfuerzos en ejes huecos no circulares de pared delgada (sección 3.10).

3.1 EJES CIRCULARES EN TORSIÓN

3.1A Esfuerzos en un eje

Considere un eje *AB* sometido en *A* y en *B* a pares de torsión **T** y **T**′ iguales y opuestos. Se pasa una sección perpendicular al eje de la flecha a través de algún punto arbitrario *C* (figura 3.3). El diagrama de cuerpo libre de la porción *BC* del eje debe incluir las fuerzas cortantes elementales *d***F**, que son perpendiculares al radio del eje. Éstas surgen de los pares de torsión que la porción *AC* ejerce sobre *BC* al torcerse el eje (figura 3.4*a*). Las condiciones de equilibrio para *BC* requieren que el sistema de estas fuerzas sea equivalente a un par de torsión interno **T**, igual y opuesto a **T**′ (figura 3.4*b*). Al denotar la distancia perpendicular ρ desde la fuerza *d***F** hasta el eje de la flecha, y expresando que la suma de momentos de las fuerzas cortantes *d***F** alrededor del eje es igual en magnitud al par **T**, se escribe

$$\int \rho dF = T$$

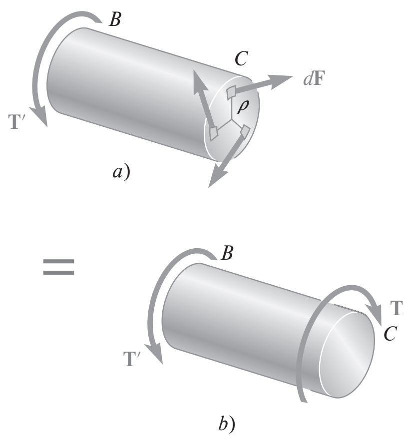


Figura 3.4 *a*) Diagrama de cuerpo libre de la sección *BC* con par de torsión en *C* representado por las contribuciones de los pequeños elementos del área que soportan fuerzas *dF* en un radio ρ desde el centro de la sección. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la sección *BC*, donde la suma de todos los elementos de área pequeños resulta en el par de torsión *T*.

Como $dF = \tau dA$, donde τ es el esfuerzo cortante en el elemento de área dA, también se puede escribir

$$\int \rho(\tau dA) = T \tag{3.1}$$

Aunque estas ecuaciones expresan una condición importante que deben satisfacer los esfuerzos cortantes en cualquier sección transversal del eje, *no* indican cómo están distribuidos estos esfuerzos en la sección transversal. Por lo tanto, la distribución real de esfuerzos bajo una carga dada es *estáticamente indeterminada* (es decir, que esta distribución *no puede determinarse mediante los métodos de la estática*). Sin embargo, en la sección 1.2A se supuso que los esfuerzos normales producidos por una carga axial céntrica estaban distribuidos uniformemente, y este supuesto se justificó en la sección 2.10, excepto en la cercanía de cargas concentradas. Una suposición similar con respecto a la distribución de esfuerzos cortantes en un eje elástico *estaría equivocada*. Debe evitarse cualquier juicio con respecto a la distribución de esfuerzos en un eje hasta que se hayan analizado las *deformaciones* que se producen en el mismo. Esto se efectuará en la siguiente sección.

Como se indicó en la sección 1.4, el esfuerzo cortante no puede tener lugar únicamente en un plano. Considere el pequeño elemento de eje mostrado en la figura 3.5. El par de torsión aplicado al eje produce esfuerzos cortantes τ en las caras perpendiculares al eje de la flecha. No obstante, las condiciones de equilibrio (sección 1.4) requieren la existencia de esfuerzos iguales en las caras formadas por los dos planos que contienen al eje de la flecha. Puede demostrarse que tales esfuerzos cortantes ocurren realmente en torsión considerando un "eje" elaborado de cintas separadas sujetas con pasadores en ambos extremos a discos, como se muestra en la figura 3.6*a*. Si se pintan marcas en dos cintas adyacentes, se observa que las cintas se deslizan una con respecto a la otra cuando se aplican pares iguales y opuestos a los extremos del "eje" (figura 3.6*b*). Aunque no ocurrirá deslizamiento en un eje de un material homogéneo y cohesionado, la tendencia al deslizamiento existirá, lo cual muestra que ocurren esfuerzos en planos longitudinales así como en los planos perpendiculares al eje de la flecha.†

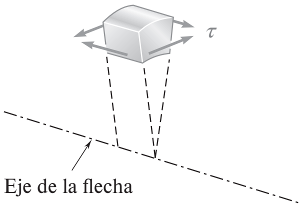


Figura 3.5 Elemento pequeño de un eje que muestra cómo actúan las componentes de esfuerzo cortante.

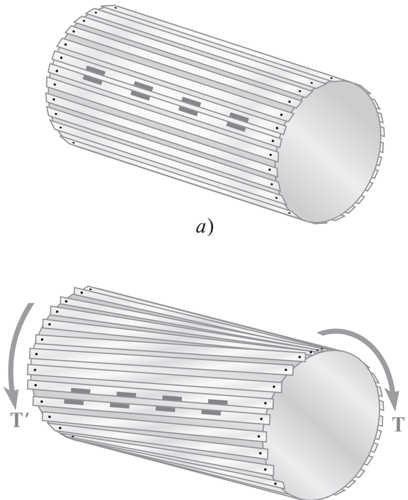


Figura 3.6 Demostración de un esfuerzo cortante en un eje *a*) sin deformar; *b*) cargado y deformado.

3.1B Deformaciones en un eje circular

Características de la deformación. Considere un eje circular unido a un soporte fijo en uno de sus extremos (figura 3.7*a*). Si se aplica un par de torsión **T** al otro extremo, el eje se torcerá, al girar su extremo libre a través de un ángulo ϕ llamado *ángulo de torsión* (figura 3.7*b*). Dentro de un cierto rango de valores de T, el ángulo de torsión ϕ es proporcional a T. También ϕ es proporcional a la longitud L del eje. En otras palabras, el ángulo de torsión para un eje del mismo material y con la misma sección transversal, pero del doble de longitud, se duplicará bajo el mismo par de torsión **T**.

Cuando un eje circular se somete a torsión, *toda sección transversal permanece plana y sin distorsión*. Dicho de otra manera, mientras que las distintas secciones transversales a lo largo del eje giran diferentes cantidades, cada sección transversal gira como una placa sólida rígida. Esto se ilustra en la figura 3.8*a*, que muestra las deformaciones en un modelo de caucho sometido a torsión. Esta propiedad es característica de ejes circulares, sólidos o huecos, pero no de los elementos con sección transversal no circular. Por ejemplo, cuando una barra con sección transversal cuadrada se somete a torsión, sus distintas secciones transversales se tuercen y no permanecen planas (figura 3.8*b*).

Las secciones transversales de un eje circular permanecen planas y sin distorsión debido a que un eje circular es *simétrico axialmente* (es decir, su apariencia es la misma cuando se ve desde una posición fija y se gira alrededor de su eje por un ángulo arbitrario). Las barras cuadradas, por otro lado, conservan la misma apariencia solo si se les gira 90° o 180°. De manera teórica, la simetría axial de los ejes circulares puede emplearse para probar que sus secciones transversales permanecen planas y sin distorsión.

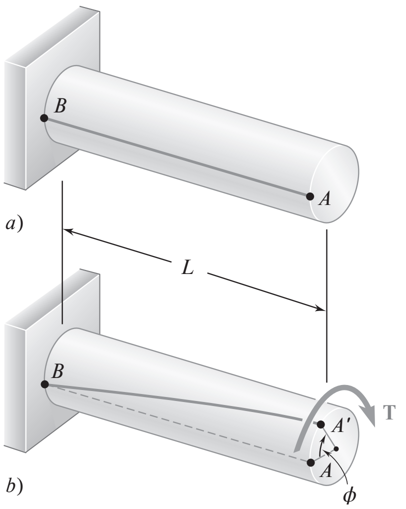


Figura 3.7 Eje con soporte fijo y la línea *AB* que muestra una deformación bajo carga de torsión: *a*) sin cargar; *b*) cargada.

† El torcimiento de un tubo de cartón que se ha ranurado en toda su longitud es otra demostración de la existencia de esfuerzos cortantes sobre los planos longitudinales.

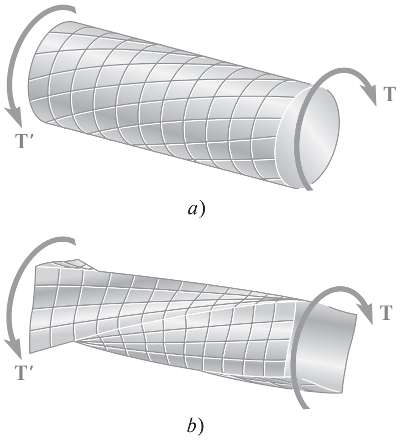


Figura 3.8 Comparación de deformaciones en ejes *a*) circulares y *b*) cuadrados.

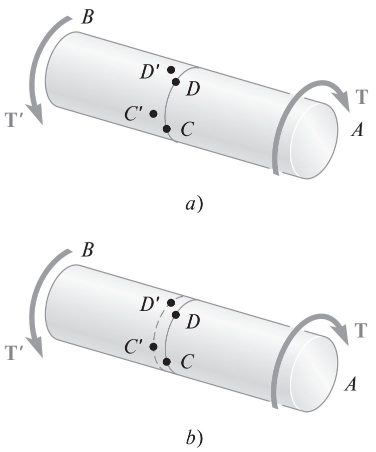


Figura 3.9 Eje sometido a torsión.

Considere los puntos *C* y *D* localizados en la circunferencia de una sección transversal dada, y sean *C*′ y *D*′ las posiciones que ocupan después de que el eje ha sido torcido (figura 3.9*a*). La simetría axial requiere que la rotación que hubiera causado que *D* llegara a *D*′ lleve a *C* a *C*′. Por lo tanto, *C*′ y *D*′ deben estar en la circunferencia de un círculo, y el arco *C*′*D*′ debe ser igual al arco *CD* (figura 3.9*b*).

Suponga que *C*′ y *D*′ sí están en un círculo diferente y que el círculo nuevo está a la izquierda del círculo original, como se muestra en la figura 3.9*b*. La misma situación prevalecerá para cualquier otra sección transversal, ya que todas las secciones transversales del eje están sometidas al mismo par de torsión interno *T*; de esta manera un observador que vea al eje desde su extremo *A* concluirá que la carga provoca que cualquier círculo dado dibujado sobre el eje se *aleje*. Pero para un observador localizado en *B*, la carga dada se ve igual (un par en sentido horario en primer plano y un par en sentido antihorario al fondo), donde el círculo se mueve *hacia* él. Esta contradicción prueba que *C*′ y *D*′ se encuentran en el mismo círculo que *C* y que *D*. Por lo tanto, al ser torcido el eje, el círculo original solo gira sobre su propio plano. Ya que el mismo razonamiento puede aplicarse a cualquier círculo concéntrico más pequeño localizado en la sección transversal, toda la sección transversal permanece plana (figura 3.10).

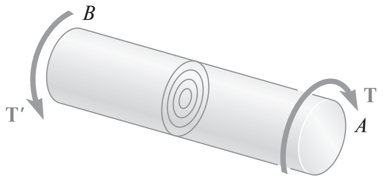


Figura 3.10 Círculos concéntricos en una sección transversal.

El argumento anterior no excluye la posibilidad de que los distintos círculos concéntricos de la figura 3.10 giren en cantidades diferentes cuando se tuerce el eje. Pero si ése fuera el caso, un diámetro dado de la sección transversal sería distorsionado en una curva, como se muestra en la figura 3.11*a*. Un observador que viera esta curva desde *A* concluiría que las capas externas del eje se tuercen más que las internas, mientras que un observador colocado en *B* concluirá lo contrario (figura 3.11*b*). Esta inconsistencia indica que cualquier diámetro de una sección transversal dada permanece recto (figura 3.11*c*) y, por lo tanto, que cualquier sección transversal dada de un eje circular permanece plana y sin distorsión.

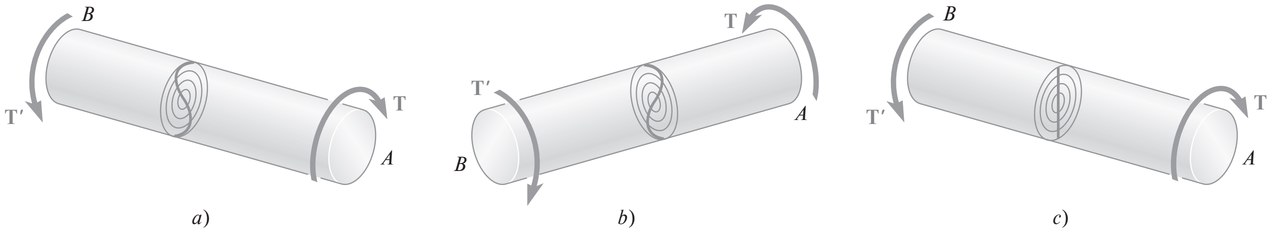


Figura 3.11 Deformaciones potenciales de las líneas del diámetro, si los círculos concéntricos de la sección giran diferentes cantidades (*a*, *b*) o la misma cantidad *c*).

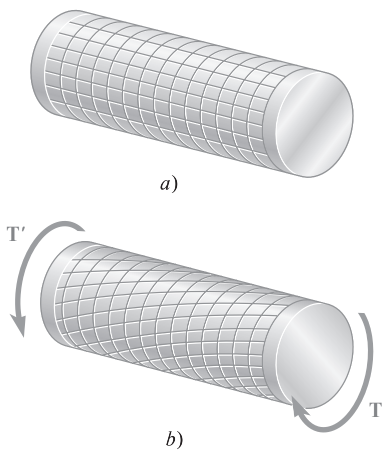


Figura 3.12 Visualización de la deformación que resulta de pares de torsión: *a*) sin deformación, *b*) con deformación.

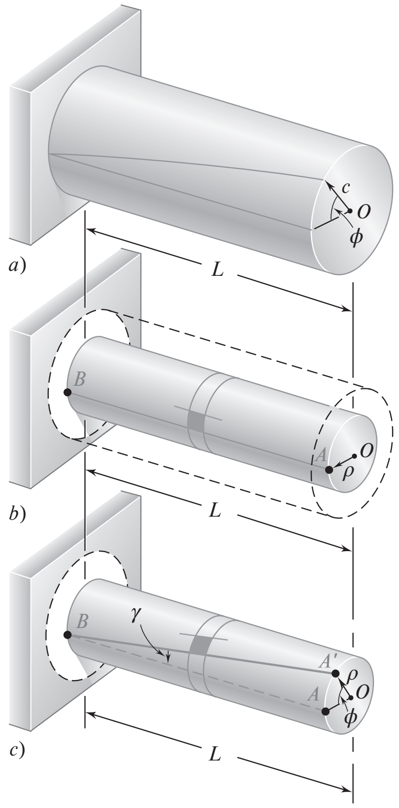


Figura 3.13 Deformación unitaria cortante. *a*) El ángulo de torsión ϕ. *b*) Porción no deformada del eje de radio ρ. *c*) Porción deformada del eje; el ángulo de torsión ϕ y la deformación cortante γ comparten la misma longitud de arco *AA′*.

Ahora considere el modo de aplicación de los pares de torsión **T** y **T′**. Si *todas* las secciones del eje, desde un extremo hasta el otro, deben permanecer planas y sin distorsión, los pares se aplican de tal manera que los extremos mismos del eje permanezcan planos y sin distorsión. Esto puede lograrse aplicando los pares **T** y **T′** a placas rígidas, que se encuentren sólidamente unidas a los extremos del eje (figura 3.12*a*). Todas las secciones permanecerán planas y sin distorsión cuando la carga se aplique, y las deformaciones resultantes serán uniformes a lo largo de todo el eje. Todos los círculos igualmente espaciados, que se muestran en la figura 3.12*a*, girarán en la misma cantidad en relación con sus vecinos, y cada una de las líneas rectas se convertirá en una curva (hélice) que interseca los distintos círculos con el mismo ángulo (figura 3.12*b*).

Deformaciones cortantes. Los ejemplos dados en ésta y en las siguientes secciones se basarán en el supuesto de placas rígidas en los extremos. Sin embargo, las condiciones de carga pueden diferir de las correspondientes al modelo de la figura 3.12. Este modelo ayuda a definir un problema de torsión para el que puede obtenerse una solución exacta. Gracias al principio de Saint-Venant, los resultados obtenidos para el modelo idealizado pueden extenderse a la mayor parte de las aplicaciones de ingeniería.

Ahora se determinará la distribución de las *deformaciones cortantes* en un eje circular de longitud L y radio c que ha sido torcido en un ángulo ϕ (figura 3.13*a*). Al separar del eje un cilindro de radio ρ, considere el pequeño elemento cuadrangular, formado por dos círculos adyacentes y dos líneas rectas adyacentes trazadas en la superficie, antes de que se aplique carga alguna (figura 3.13*b*). Al someterse el eje a una carga de torsión, el elemento se deforma para convertirse en un rombo (figura 3.13*c*). Aquí, la deformación cortante γ en un elemento dado se mide por el cambio en los ángulos formados por los lados de dicho elemento (sección 2.7). Como los círculos que definen dos de los lados permanecen sin cambio, la deformación cortante γ debe ser igual al ángulo entre las líneas AB y $A'B$.

En la figura 3.13*c* se observa que, para valores pequeños de γ, la longitud del arco AA' se expresa como $AA' = L\gamma$. Pero, como $AA' = \rho\phi$, se deduce que $L\gamma = \rho\phi$, o

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

donde γ y ϕ están en radianes. Esta ecuación muestra que la deformación cortante γ en un punto dado del eje en torsión es proporcional al ángulo de torsión ϕ. También muestra que γ es proporcional a la distancia ρ desde el eje de la flecha hasta ese punto. Por lo tanto, *la deformación cortante en una flecha circular varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha*.

A partir de la ecuación (3.2), la deformación cortante es máxima en la superficie del eje, donde $\rho = c$.

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c\phi}{L} \tag{3.3}$$

Al eliminar ϕ de las ecuaciones (3.2) y (3.3), la deformación cortante γ a una distancia ρ del eje de la flecha es

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\text{máx}} \tag{3.4}$$

3.1C Esfuerzos en el rango elástico

Cuando el par de torsión **T** es tal que todos los esfuerzos cortantes en el eje se encuentran por debajo de la resistencia a la cedencia τ_Y, los esfuerzos en el eje permanecerán por debajo del límite de proporcionalidad y también por debajo del límite elástico. Por lo tanto, se aplicará la ley de Hooke y no habrá deformación permanente.

Al aplicar la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación cortantes de la sección 2.7, se escribe

$$\tau = G\gamma \tag{3.5}$$

donde G es el módulo de rigidez o módulo cortante del material. Al multiplicar ambos miembros de la ecuación (3.4) por G, se escribe

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\text{máx}}$$

o, utilizando la ecuación (3.5),

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\text{máx}} \tag{3.6}$$

Esta ecuación muestra que, mientras no se exceda la resistencia a la cedencia (o el límite de proporcionalidad) en ninguna parte de una flecha circular, *el esfuerzo cortante en la flecha varía linealmente con la distancia* ρ *desde el eje de la flecha*. La figura 3.14*a* muestra la distribución de esfuerzos en un eje circular sólido de radio c. Y la figura 3.14*b* la muestra en un eje circular hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2. De la ecuación (3.6),

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\text{máx}} \tag{3.7}$$

Recuerde de la sección 3.1A que la suma de los momentos de las fuerzas elementales ejercidas sobre cualquier sección transversal del eje debe ser igual a la magnitud T del par de torsión ejercido sobre el eje:

$$\int \rho(\tau dA) = T \tag{3.1}$$

Al sustituir τ de la ecuación (3.6) en la ecuación (3.1),

$$T = \int \rho\tau \, dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \int \rho^2 \, dA$$

La integral en la última parte representa el momento polar de inercia J de la sección transversal con respecto a su centro O. Por lo tanto,

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}} J}{c} \tag{3.8}$$

o, al despejar $\tau_{\text{máx}}$,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

Al sustituir $\tau_{\text{máx}}$ de la ecuación (3.9) en la ecuación (3.6), se expresa el esfuerzo cortante a cualquier distancia ρ del eje de la flecha como

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3.10}$$

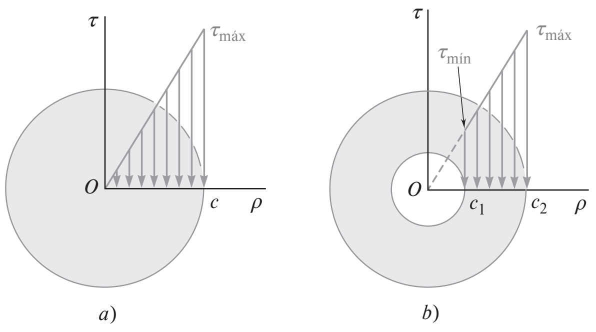


Figura 3.14 Distribución de esfuerzos cortantes en un eje con par de torsión: *a*) eje sólido, *b*) eje hueco.

Las ecuaciones (3.9) y (3.10) se conocen como las *fórmulas de torsión elástica*. De la estática se recuerda que el momento polar de inercia de un círculo de radio c es $J = \frac{1}{2}\pi c^4$. En el caso de un eje circular hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2, el momento polar de inercia es

$$J = \tfrac{1}{2}\pi c_2^4 - \tfrac{1}{2}\pi c_1^4 = \tfrac{1}{2}\pi (c_2^4 - c_1^4) \qquad \textbf{(3.11)}$$

Cuando se emplean unidades métricas del SI en la ecuación (3.9) o en la (3.10), T se expresará en N · m, c o ρ en metros y J en m^4. El esfuerzo cortante resultante se expresa en N/m^2, es decir, en pascales (Pa). Cuando se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, T deberá expresarse en lb · in, c o ρ en in, y J en in^4. El esfuerzo cortante resultante se expresa en psi.

Aplicación de conceptos 3.1

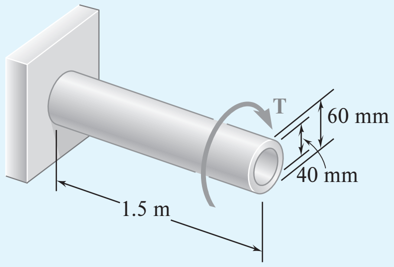


Figura 3.15 Eje hueco fijo en un extremo, con un par de torsión T aplicado en su extremo.

Un eje cilíndrico hueco de acero mide 1.5 m de longitud y tiene diámetros interior y exterior iguales a 40 y 60 mm, respectivamente (figura 3.15). *a*) ¿Cuál es el máximo par de torsión que puede aplicarse al eje si el esfuerzo cortante no debe exceder 120 MPa? *b*) ¿Cuál es el valor mínimo correspondiente del esfuerzo cortante en el eje?

El máximo par permisible **T** que puede aplicarse al eje es el par para el que $\tau_{\text{máx}} = 120$ MPa. Como este valor es menor que la resistencia a la cedencia de cualquier acero, se puede usar la ecuación (3.9). Al despejar T de esta ecuación,

$$T = \frac{J\tau_{\text{máx}}}{c} \qquad \textbf{(1)}$$

Recuerde que el momento polar de inercia J de la sección transversal está dado por la ecuación (3.11), donde $c_1 = \frac{1}{2}(40 \text{ mm}) = 0.02$ m y $c_2 = \frac{1}{2}(60 \text{ mm}) = 0.03$ m, se escribe

$$J = \tfrac{1}{2}\pi (c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi (0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Al sustituir J y $\tau_{\text{máx}}$ en la ecuación (1) y al hacer $c = c_2 = 0.03$ m,

$$T = \frac{J\tau_{\text{máx}}}{c} = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0.03 \text{ m}} = 4.08 \text{ kN·m}$$

El esfuerzo cortante mínimo ocurre en la superficie interior del eje. En la ecuación (3.7) se expresa que $\tau_{\text{mín}}$ y $\tau_{\text{máx}}$ son respectivamente proporcionales a c_1 y c_2:

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{\text{máx}} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.03 \text{ m}}(120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$

Las fórmulas de torsión de las ecuaciones (3.9) y (3.10) se dedujeron para un eje con sección transversal circular uniforme sometido a pares de torsión en sus extremos. Sin embargo, también pueden utilizarse para un eje con sección transversal variable o para un eje sujeto a pares de torsión en lugares distintos a sus extremos (3.16*a*). La distribución de los esfuerzos cortantes en una sección transversal S dada del eje se obtiene de la ecuación (3.9), donde J denota el momento polar de inercia de esa sección, y donde T representa el *par de torsión interno* en esa sección. T se obtiene dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción de eje localizada de un lado de la sección (figura 3.16*b*) y escribiendo que la suma de los pares aplicados (incluyendo el par de torsión interno **T**) es cero (vea el problema modelo 3.1).

Este análisis de esfuerzos en un eje se ha limitado a los esfuerzos cortantes, debido a que el elemento que se seleccionó estaba orientado de tal manera que sus caras eran paralelas, o bien perpendiculares, al eje de la flecha (figura 3.5). Considere ahora dos elementos *a* y *b* localizados en la superficie de un eje circular sometido a torsión (figura 3.17). Como las caras del elemento *a* son respectivamente paralelas y perpendiculares al eje de la flecha, los únicos esfuerzos en el elemento serán los esfuerzos cortantes

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

Por otro lado, las caras del elemento *b*, que forman ángulos arbitrarios con el eje de la flecha, estarán sujetas a una combinación de esfuerzos normales y cortantes. Considere los esfuerzos y fuerzas resultantes sobre las caras que se encuentran a 45° al eje de la flecha. Los diagramas de cuerpo libre de los dos elementos triangulares se muestran en la figura 3.18. En la figura 3.18*a*, los esfuerzos ejercidos en las caras *BC* y *BD* son los esfuerzos cortantes $\tau_{\text{máx}} = Tc/J$. La magnitud de las fuerzas cortantes correspondiente es $\tau_{\text{máx}} A_0$, donde A_0 denota el área de la cara. Al observar que las componentes de las dos fuerzas cortantes a lo largo de *DC* son iguales y opuestas, la fuerza **F** ejercida sobre *DC* debe ser perpendicular a esa cara y es una fuerza de tensión. Su magnitud es

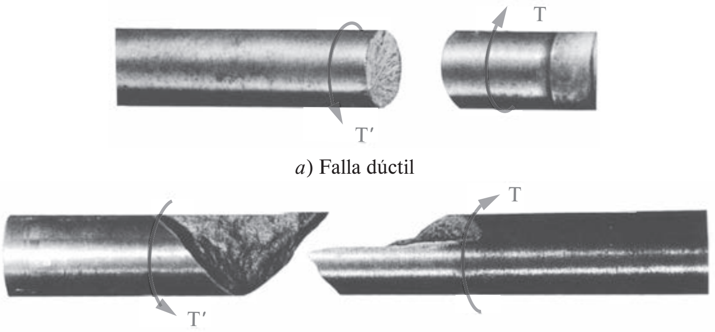
$$F = 2(\tau_{\text{máx}} A_0)\cos 45° = \tau_{\text{máx}} A_0 \sqrt{2} \tag{3.12}$$

El esfuerzo correspondiente se obtiene dividiendo la fuerza *F* entre el área *A* de la cara *DC*. Al observar que $A = A_0\sqrt{2}$,

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\text{máx}} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\text{máx}} \tag{3.13}$$

Un análisis similar del elemento de la figura 3.18*b* muestra que el esfuerzo sobre la cara *BE* es $\sigma = -\tau_{\text{máx}}$. Se concluye que los esfuerzos ejercidos sobre las caras de un elemento *c* a 45° del eje de la flecha (figura 3.19) son esfuerzos normales iguales a $\pm\tau_{\text{máx}}$. Así, mientras que el elemento *a* en la figura 3.19 está en cortante puro, el elemento *c* en la misma figura está sometido a esfuerzos de tensión en dos de sus caras, y a un esfuerzo de compresión en las otras dos. También se advierte que todos los esfuerzos involucrados tienen la misma magnitud, *Tc*/*J*.[†]

Debido a que los materiales dúctiles generalmente fallan a cortante, una probeta sujeta a torsión, hecha de un material dúctil se rompe a lo largo de un plano perpendicular a su eje longitudinal (fotografía 3.2*a*). Por otro lado, los materiales frágiles son más débiles a tensión que a corte. Por ello, cuando se somete a torsión, un material frágil tiende a fracturarse a lo largo de superficies perpendiculares a la dirección en la que la tensión es máxima, esto es, a lo largo de superficies que forman un ángulo de 45° con el eje longitudinal de la probeta (fotografía 3.2*b*).



Fotografía 3.2 Falla por corte de un eje sometido a un par de torsión.

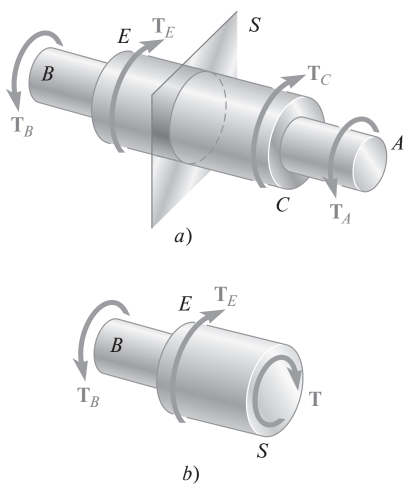


Figura 3.16 Eje con sección transversal variable. *a*) Con pares de torsión aplicados y sección *S*. *b*) Diagrama de cuerpo libre de un eje seccionado.

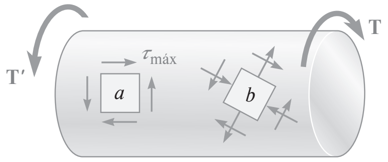


Figura 3.17 Eje circular con elementos de esfuerzo que tienen orientaciones diferentes.

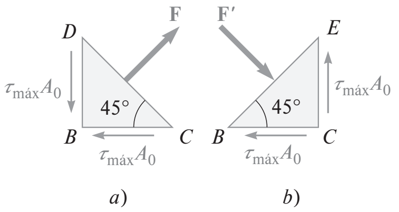


Figura 3.18 Fuerzas sobre las caras que están a 45° del eje de la flecha.

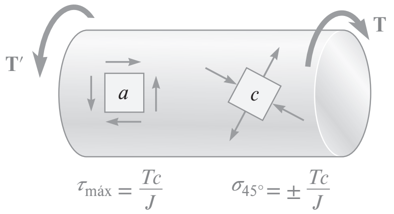
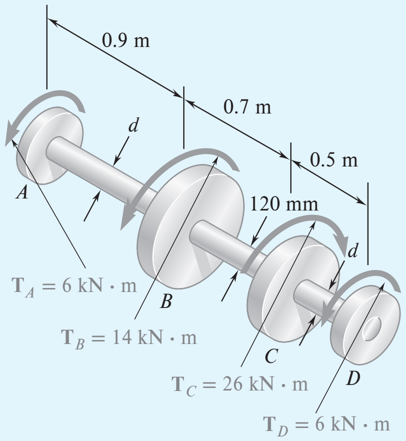


Figura 3.19 Elementos de un eje que solo tienen esfuerzos cortantes o esfuerzos normales.

[†] Los esfuerzos sobre elementos con orientación arbitraria, como en la figura 3.18*b*, se estudiarán en el capítulo 7.

Problema modelo 3.1

El eje *BC* es hueco y tiene diámetros interior y exterior de 90 mm y 120 mm, respectivamente. Los ejes *AB* y *CD* son sólidos y de diámetro *d*. Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) los esfuerzos cortantes máximo y mínimo en el eje *BC*, *b*) el diámetro *d* requerido en los ejes *AB* y *CD* si los esfuerzos cortantes permisibles en estos ejes son de 65 MPa.



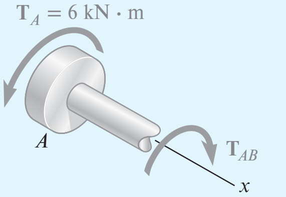


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre para la sección a la izquierda del corte entre *A* y *B*.

ESTRATEGIA: Utilice diagramas de cuerpo libre para determinar el par de torsión en cada eje. Después se pueden utilizar los pares de torsión para hallar los esfuerzos en el eje *BC* y los diámetros requeridos para los ejes *AB* y *CD*.

MODELAR: Al denotar con $\mathbf{T}_{AB}$ el par de torsión en el eje *AB* (figura 1), se pasa una sección a través del eje *AB* y, para el cuerpo libre mostrado, se escribe

$$\Sigma M_x = 0: \qquad (6\ \text{kN}\cdot\text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad T_{AB} = 6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

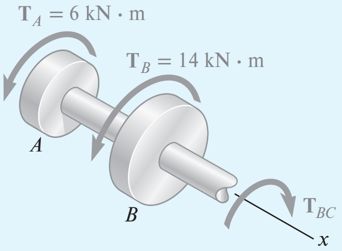


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre para la sección a la izquierda del corte entre *B* y *C*.

Ahora se pasa una sección a través del eje *BC* (figura 2) y, para el cuerpo libre mostrado en la figura, se tiene

$$\Sigma M_x = 0: \quad (6\ \text{kN}\cdot\text{m}) + (14\ \text{kN}\cdot\text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 20\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

ANALIZAR:

***a*) Eje *BC*.** Para este eje hueco se tiene

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4] = 13.92 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

Esfuerzo cortante máximo. En la superficie externa, se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{T_{BC}c_2}{J} = \frac{(20\ \text{kN}\cdot\text{m})(0.060\ \text{m})}{13.92 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} \qquad \tau_{\text{máx}} = 86.2\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

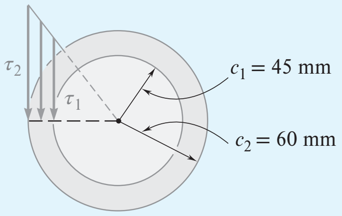


Figura 3 Distribución del esfuerzo cortante sobre una sección transversal.

Esfuerzo cortante mínimo. Como se muestra en la figura 3, los esfuerzos son proporcionales a la distancia desde el eje de la flecha.

$$\frac{\tau_{\text{mín}}}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \frac{\tau_{\text{mín}}}{86.2\ \text{MPa}} = \frac{45\ \text{mm}}{60\ \text{mm}} \qquad \tau_{\text{mín}} = 64.7\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

***b)* Ejes *AB* y *CD*.** Se advierte que en ambos ejes la magnitud del par de torsión es $T = 6$ kN · m (figura 4). Al denotar con c el radio de los ejes, y al saber que $\tau_{perm} = 65$ MPa, se escribe

$$\tau = \frac{Tc}{J} \qquad 65\text{ MPa} = \frac{(6\text{ kN}\cdot\text{m})\,c}{\frac{\pi}{2}c^4}$$

$$c^3 = 58.8 \times 10^{-6}\text{ m}^3 \qquad c = 38.9 \times 10^{-3}\text{ m}$$

$$d = 2c = 2(38.9\text{ mm}) \qquad d = 77.8\text{ mm} \blacktriangleleft$$

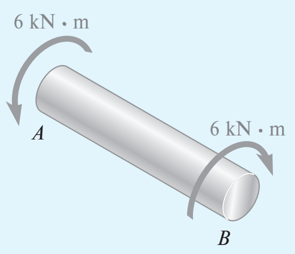
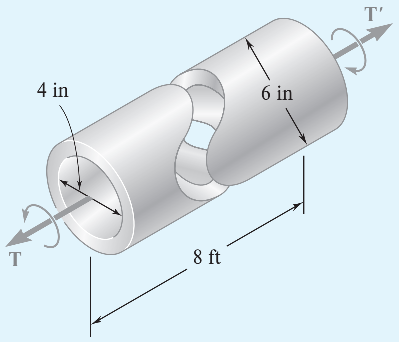


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre de la porción *AB* del eje.

Problema modelo 3.2

El diseño preliminar de un eje grande que conecta a un motor con un generador requiere el uso de un eje hueco con diámetros interior y exterior de 4 in y 6 in, respectivamente. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 12 ksi, determine el máximo par de torsión que puede ser transmitido *a*) por el eje como fue diseñado, *b*) por un eje sólido del mismo peso, *c*) por un eje hueco del mismo peso y de 8 in de diámetro exterior.



ESTRATEGIA: Utilice la ecuación (3.9) para determinar el par de torsión máximo usando el esfuerzo permisible.

MODELAR y ANALIZAR:

***a)* Eje sólido como se diseñó.** Utilizando la figura 1 y estableciendo $\tau_{perm} = 12$ ksi, se escribe

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(3\text{ in})^4 - (2\text{ in})^4] = 102.1\text{ in}^4$$

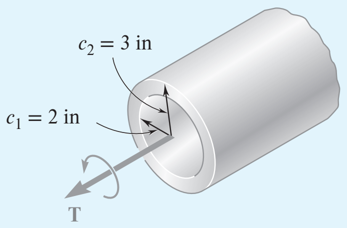


Figura 1 Eje como se diseñó.

Usando la ecuación (3.9), se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} \qquad 12 \text{ ksi} = \frac{T(3 \text{ in})}{102.1 \text{ in}^4} \qquad T = 408 \text{ kip} \cdot \text{in} \blacktriangleleft$$

***b*) Eje sólido de igual peso.** Para que el eje como se diseñó y este eje sólido tengan el mismo peso y longitud, las áreas de sus secciones transversales deben ser iguales, es decir, $A_{(a)} = A_{(b)}$.

$$\pi[(3 \text{ in})^2 - (2 \text{ in})^2] = \pi c_3^2 \qquad c_3 = 2.224 \text{ in}$$

Usando la figura 2 y estableciendo $\tau_{\text{perm}} = 12$ ksi, se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_3}{J} \qquad 12 \text{ ksi} = \frac{T(2.24 \text{ in})}{\frac{\pi}{2}(2.24 \text{ in})^4} \qquad T = 211 \text{ kip} \cdot \text{in} \blacktriangleleft$$

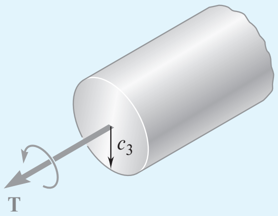


Figura 2 Eje sólido que tiene el mismo peso.

c) Eje hueco con 8 in de diámetro. Para un peso igual, nuevamente deben ser iguales las áreas de las secciones transversales, es decir, $A_{(a)} = A_{(c)}$ (figura (3). Se determina el diámetro interior del eje a partir de

$$\pi[(3 \text{ in})^2 - (2 \text{ in})^2] = \pi[(4 \text{ in})^2 - c_5^2] \qquad c_5 = 3.317 \text{ in}$$

Para $c_5 = 3.137$ in y $c_4 = 4$ in,

$$J = \frac{\pi}{2}[(4 \text{ in})^4 - (3.317 \text{ in})^4] = 212 \text{ in}^4$$

Con $\tau_{\text{perm}} = 12$ ksi y $c_4 = 4$ in,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_4}{J} \qquad 12 \text{ ksi} = \frac{T(4 \text{ in})}{212 \text{ in}^4} \qquad T = 636 \text{ kip} \cdot \text{in} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: En este ejemplo se ilustra la ventaja obtenida cuando el material del eje está más allá del eje centroidal.

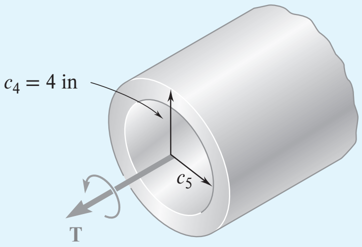


Figura 3 Eje hueco con un diámetro exterior de 8 in y que tiene el mismo peso.

Problemas

3.1 Determine el par de torsión **T** que causa un esfuerzo cortante máximo de 70 MPa en el eje cilíndrico hueco de acero que se muestra en la figura.

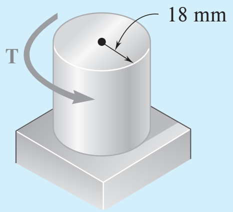


Figura P3.1 y P3.2

3.2 Para el eje cilíndrico hueco que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo causado por un par de torsión de magnitud $T = 800$ N · m.

3.3 *a*) Determine el par de torsión **T** que causa un esfuerzo cortante máximo de 45 MPa en el eje cilíndrico hueco de acero que se muestra en la figura. *b*) Determine el esfuerzo cortante máximo causado por el mismo par de torsión **T** en un eje cilíndrico sólido con la misma área en su sección transversal.

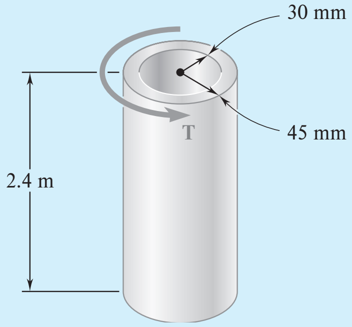


Figura P3.3

3.4 *a*) Determine el esfuerzo cortante máximo causado por un par de torsión **T** de 40 kip · in en el eje sólido de aluminio de 3 in de diámetro, que se muestra en la figura. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que el eje sólido se sustituye por un eje hueco del mismo diámetro exterior y un diámetro interior de 1 in.

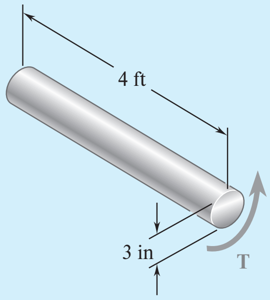


Figura P3.4

3.5 *a*) Para el cilindro sólido de 3 in de diámetro y la carga que se muestran en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo. *b*) Determine el diámetro interior del cilindro hueco de 4 in de diámetro exterior que se muestra en la figura, de modo que el esfuerzo máximo sea el mismo que en el inciso *a*).

3.6 Se aplica un par de torsión $T = 3$ kN · m al cilindro de bronce sólido mostrado en la figura. Determine *a*) el esfuerzo cortante máximo, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *D* que yace sobre un círculo de 15 mm de radio dibujado en el extremo del cilindro, *c*) el porcentaje del par de torsión soportado por la porción del cilindro dentro del radio de 15 mm.

3.7 El vástago sólido *AB* está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 12 ksi, mientras que la manga *CD* está hecha de latón y tiene un esfuerzo cortante permisible de 7 ksi. Determine *a*) el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse en *A* si no debe excederse el esfuerzo cortante permisible en la manga *CD*, *b*) el valor requerido correspondiente del diámetro d_s en el vástago *AB*.

3.8 El vástago sólido *AB* tiene un diámetro $d_s = 1.5$ in y está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 12 ksi, mientras que la manga *CD* está hecha de latón y tiene un esfuerzo cortante permisible de 7 ksi. Determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse en *A*.

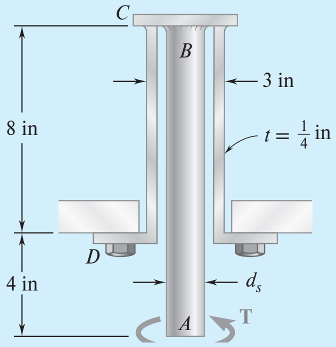


Figura P3.7 y *P3.8*

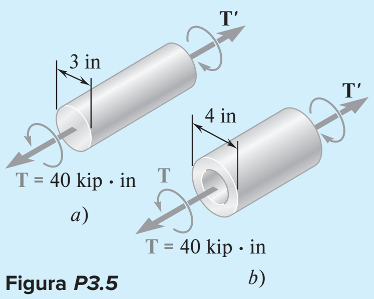


Figura *P3.5*

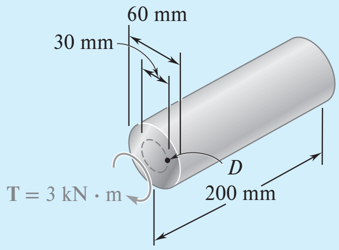


Figura P3.6

3.9 Los pares de torsión mostrados en la figura se ejercen sobre las poleas *A*, *B* y *C*. Si se sabe que ambos ejes son sólidos, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *BC*.

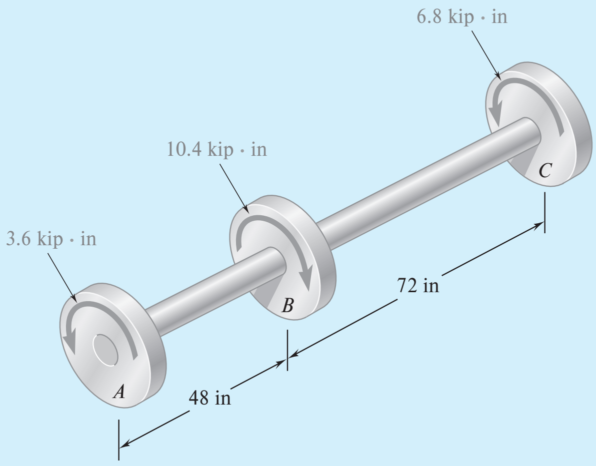


Figura P3.9 y P3.10

3.10 Los ejes del ensamble de poleas mostrado en la figura serán rediseñados. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en cada eje es de 8.5 ksi, determine el menor diámetro permisible para *a*) el eje *AB*, *b*) el eje *BC*.

3.11 Si se sabe que cada uno de los ejes *AB*, *BC* y *CD* consta de una varilla circular sólida, determine *a*) el eje en el que ocurre el máximo esfuerzo cortante, *b*) la magnitud de dicho esfuerzo.

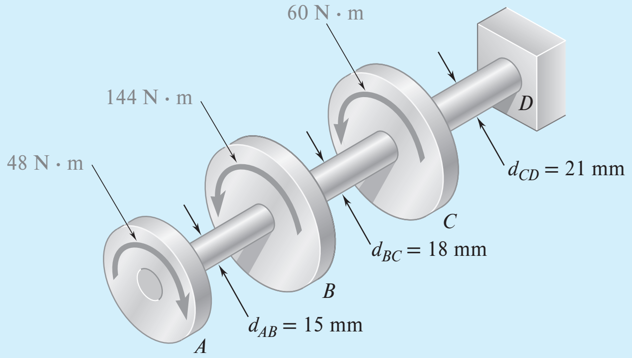


Figura P3.11 y *P3.12*

3.12 Si se sabe que se ha perforado un agujero de 8 mm de diámetro en los ejes *AB*, *BC* y *CD*, determine *a*) el eje en el que ocurre el máximo esfuerzo cortante, *b*) la magnitud de tal esfuerzo.

3.13 Bajo condiciones normales de operación, el motor eléctrico ejerce un par de torsión de 2.4 kN · m en el eje *AB*. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *BC*, *c*) en el eje *CD*.

3.14 Para reducir la masa total del ensamble del problema 3.13, se ha considerado un nuevo diseño en el que el diámetro del eje *BC* será menor. Determine el mínimo diámetro del eje *BC* tal que el máximo valor del esfuerzo cortante en el ensamble no aumentará.

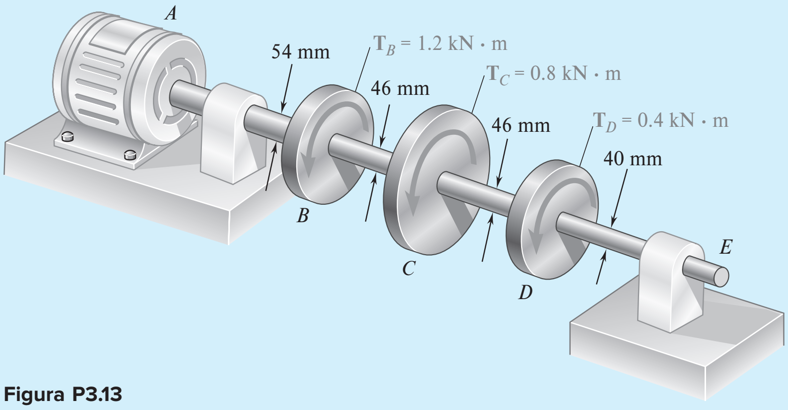


Figura P3.13

3.15 El esfuerzo cortante permisible es de 15 ksi en la varilla de acero *AB* de 1.5 in de diámetro y de 8 ksi en la varilla de latón *BC* de 1.8 in de diámetro. Si se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse en *A*.

3.16 El esfuerzo cortante permisible es de 15 ksi en la varilla de acero *AB* y de 8 ksi en la varilla de latón *BC*. Si se sabe que un par de torsión de magnitud $T = 10$ kip · in se aplica en *A*, determine el diámetro requerido de *a*) la varilla *AB*, *b*) la varilla *BC*.

3.17 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un latón para el cual el esfuerzo cortante permisible es de 55 MPa. Si se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine los diámetros mínimos d_{AB} y d_{BC} con los que no se excede el esfuerzo cortante permisible.

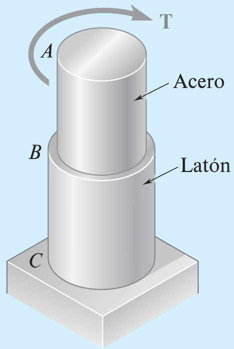


Figura P3.15 y P3.16

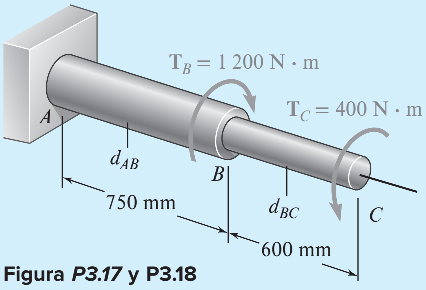


Figura *P3.17* y P3.18

3.18 Resuelva el problema 3.17, suponiendo que se invierte la dirección de $\mathbf{T}_{C'}$.

3.19 La varilla sólida *AB* tiene un diámetro $d_{AB} = 60$ mm y está hecha de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 85 MPa. El tubo *CD*, que tiene un diámetro exterior de 90 mm y un espesor de pared de 6 mm, está hecho de un aluminio para el que el esfuerzo cortante permisible es de 54 MPa. Determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse en *A*.

3.20 La varilla sólida *AB* tiene un diámetro $d_{AB} = 60$ mm. El tubo *CD* tiene un diámetro exterior de 90 mm y un espesor de pared de 6 mm. Si se sabe que tanto la varilla como el tubo están hechos de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 75 MPa, determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse en *A*.

3.21 Un par de torsión de magnitud $T = 1\,000$ N · m se aplica en *D* como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa en cada eje, determine el diámetro requerido *a*) del eje *AB*, *b*) del eje *CD*.

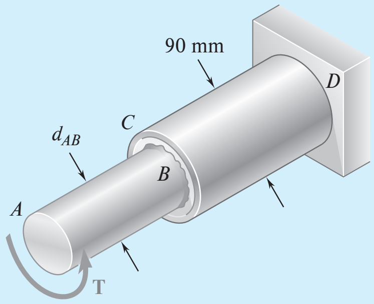


Figura *P3.19* y P3.20

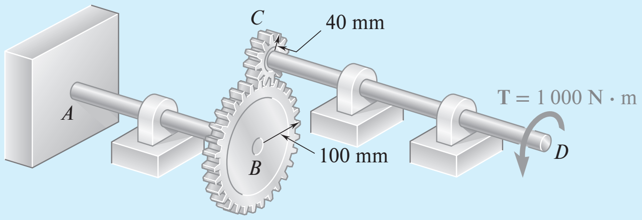


Figura P3.21 y P3.22

3.22 Un par de torsión de magnitud $T = 1\,000$ N · m se aplica en D, como se muestra en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje AB es de 56 mm y que el diámetro del eje CD es de 42 mm, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje AB, *b*) en el eje CD.

3.23 En condiciones normales de operación un motor ejerce un par de torsión de magnitud T_F en F. Los ejes son de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 12 ksi y tienen diámetros $d_{CDE} = 0.900$ in y $d_{FGH} = 0.800$ in. Si se sabe que $r_D = 6.5$ in y que $r_G = 4.5$ in, determine el valor máximo permisible de T_F.

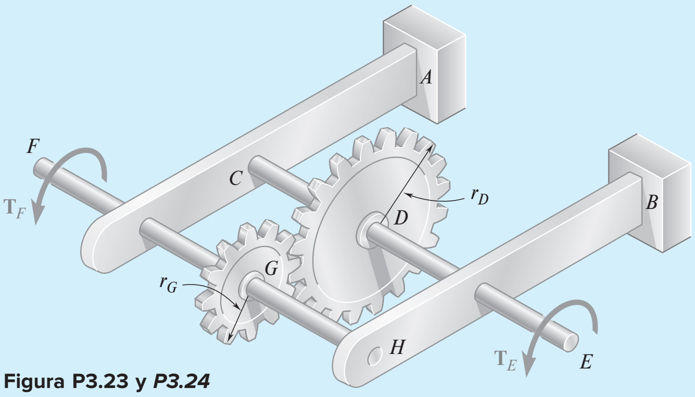


Figura P3.23 y *P3.24*

3.24 En condiciones normales de operación un motor ejerce un par de torsión de magnitud $T_F = 1\,200$ lb · in en F. Si se sabe que $r_D = 8$ in, $r_G = 3$ in y que el esfuerzo cortante permisible es de 10.5 ksi en cada eje, determine el diámetro requerido *a*) del eje CDE, *b*) del eje FGH.

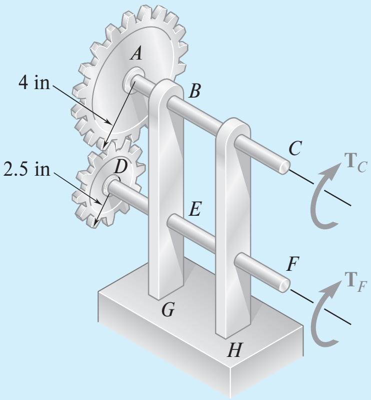


Figura P3.25 y *P3.26*

3.25 Los dos ejes sólidos están conectados por engranes como se muestra en la figura y están hechos de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 7 000 psi. Si se sabe que los diámetros de los dos ejes son, respectivamente, $d_{BC} = 1.6$ in y $d_{EF} = 1.25$ in, determine el máximo par de torsión $\mathbf{T}_C$ que puede aplicarse en C.

3.26 Los dos ejes sólidos están conectados por engranes, como se muestra en la figura, y están hechos de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 8 500 psi. Si se sabe que en C se aplica un par de torsión de magnitud $T_C = 5$ kip · in y que el ensamble está en equilibrio, calcule el diámetro requerido de *a*) el eje BC, *b*) el eje EF.

3.27 Para el tren de engranes mostrado, los diámetros de los tres ejes sólidos son:

$$d_{AB} = 20 \text{ mm} \qquad d_{CD} = 25 \text{ mm} \qquad d_{EF} = 40 \text{ mm}$$

Si se sabe que para cada eje el esfuerzo cortante máximo es de 60 MPa, determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse.

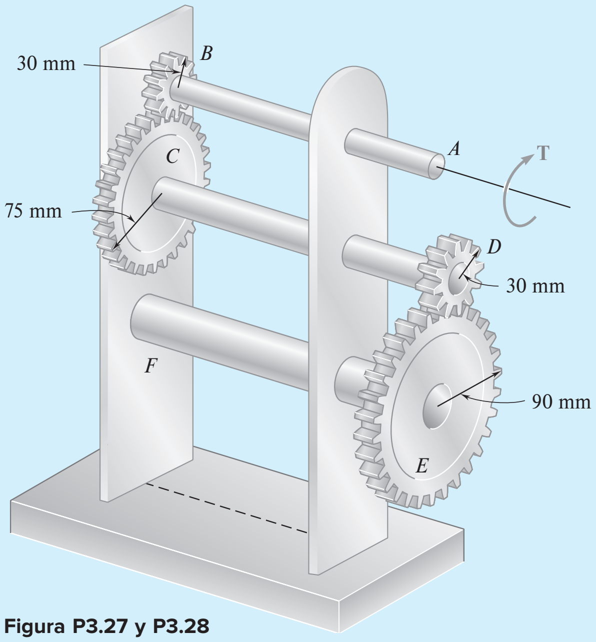


Figura P3.27 y P3.28

3.28 Un par de torsión $T = 900$ N · m se aplica al eje AB del tren de engranes mostrado. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 80 MPa, determine el diámetro requerido de *a*) el eje AB, *b*) el eje CD, *c*) el eje EF.

3.29 En tanto que la distribución exacta de los esfuerzos cortantes en un eje cilíndrico hueco es como se muestra en la figura P3.29*a*, un valor aproximado puede obtenerse para $\tau_{máx}$ suponiendo que los esfuerzos están distribuidos uniformemente en toda el área A de la sección transversal, como se muestra en la figura P3.29*b*, y además suponiendo que todas las fuerzas elementales de corte actúan a una distancia desde O igual al radio medio de la sección transversal $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Este valor aproximado es $\tau_0 = T/Ar_m$, donde T es el par de torsión aplicado. Determine la razón $\tau_{máx}/\tau_0$ del valor verdadero de máximo esfuerzo cortante y su valor aproximado τ_0 para valores de c_1/c_2, respectivamente, iguales a 1.00, 0.95, 0.75, 0.50 y 0.

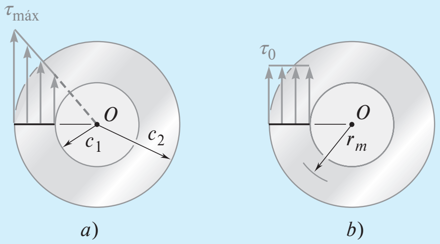


Figura P3.29

3.30 *a*) Para un esfuerzo cortante permisible dado, encuentre la razón T/w del máximo par de torsión permisible T y el peso por unidad de longitud w para el eje hueco mostrado en la figura *b*. Si se denota con $(T/w)_0$ el valor de esta razón calculada para un eje sólido con el mismo radio c_2, exprese la razón T/w para el eje hueco en términos de $(T/w)_0$ y de c_1/c_2.

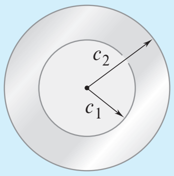


Figura *P3.30*

3.2 ÁNGULO DE TORSIÓN EN EL RANGO ELÁSTICO

En esta sección se deducirá una relación entre el ángulo de torsión ϕ de un eje circular y el par de torsión **T** ejercido sobre el eje. Se supondrá que la totalidad del eje permanece elástica. Si se considera primero el caso de un eje de longitud L y sección transversal uniforme de radio c sujeto a un par de torsión **T** en su extremo libre (figura 3.20), se sabe que el ángulo de torsión ϕ y la deformación máxima a cortante $\gamma_{\text{máx}}$ se relacionan como sigue:

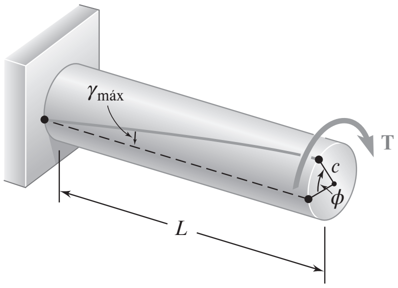


Figura 3.20 Par de torsión aplicado al eje con un extremo fijo, que resulta en el ángulo de torsión ϕ.

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c\phi}{L} \tag{3.3}$$

Pero, en el rango elástico, el esfuerzo de cedencia no se excede en ninguna parte del eje. Se aplica la ley de Hooke y $\gamma_{\text{máx}} = \tau_{\text{máx}}/G$. A partir de la ecuación (3.9),

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G} = \frac{Tc}{JG} \tag{3.14}$$

Al igualar los miembros de la derecha de las ecuaciones (3.3) y (3.14), y despejando ϕ, se escribe

$$\phi = \frac{TL}{JG} \tag{3.15}$$

donde ϕ se expresa en radianes. La relación obtenida muestra que, dentro del rango elástico, *el ángulo de torsión ϕ es proporcional al par de torsión T aplicado al eje*. Esto coincide con el análisis presentado al principio de la sección 3.1B.

La ecuación (3.15) proporciona un método conveniente para determinar el módulo de rigidez. Una varilla cilíndrica de un material se coloca en una *máquina de ensayos de torsión* (fotografía 3.3). Se aplican pares de torsión con magnitud T progresivamente mayor a la probeta, y se registran los valores correspondientes del ángulo de torsión ϕ en una longitud L de la probeta. Mientras no se exceda el esfuerzo de cedencia del material, los puntos obtenidos de graficar ϕ contra T caerán en una línea recta. La pendiente de esta línea representa la cantidad JG/L, de la que es posible calcular el módulo de rigidez G.

Fotografía 3.3 Máquina de ensayos de torsión.

Aplicación de conceptos 3.2

¿Qué par de torsión deberá aplicarse al extremo del eje de la Aplicación de conceptos 3.1 para producir un ángulo de torsión de 2°? Utilice el valor $G = 77$ GPa para el módulo de rigidez del acero.

Al despejar T de la ecuación (3.15), se escribe

$$T = \frac{JG}{L}\phi$$

Al sustituir los valores dados

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \qquad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2°\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

y al recordar que, para la sección transversal dada,

$$J = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

se tiene que

$$T = \frac{JG}{L}\phi = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}}(34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$T = 1.829 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 1.829 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

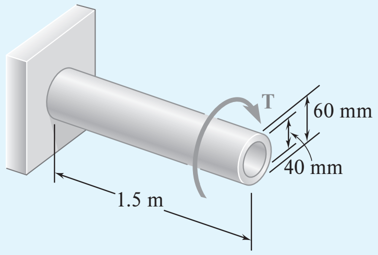


Figura 3.15 (repetida) Eje hueco, fijo en un extremo, cuyo par de torsión T se aplica en el extremo.

Aplicación de conceptos 3.3

¿Qué ángulo de torsión generará un esfuerzo cortante de 70 MPa en la superficie interior del eje hueco de acero de las Aplicaciones de conceptos 3.1 y 3.2?

Un método para resolver este problema es utilizar la ecuación (3.10) para encontrar el par de torsión T correspondiente al valor dado de τ y la ecuación (3.15) para determinar el ángulo de torsión ϕ correspondiente al valor de T recién encontrado.

Una solución más directa es utilizar la ley de Hooke para calcular la deformación por cortante en la superficie interna del eje:

$$\gamma_{\text{mín}} = \frac{\tau_{\text{mín}}}{G} = \frac{70 \times 10^6 \text{ Pa}}{77 \times 10^9 \text{ Pa}} = 909 \times 10^{-6}$$

Al usar la ecuación (3.2), que se obtuvo al expresar la longitud del arco AA' en la figura 3.13c en términos tanto de γ como de ϕ, se tiene

$$\phi = \frac{L\gamma_{\text{mín}}}{c_1} = \frac{1\,500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}}(909 \times 10^{-6}) = 68.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Para obtener el ángulo de torsión en grados, se escribe

$$\phi = (68.2 \times 10^{-3} \text{ rad})\left(\frac{360°}{2\pi \text{ rad}}\right) = 3.91$$

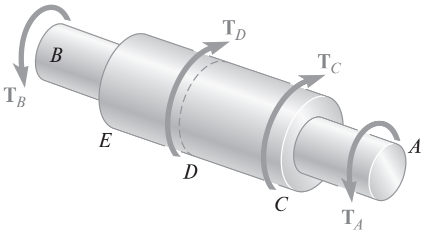


Figura 3.21 Eje con dimensiones de secciones transversales múltiples y cargas múltiples.

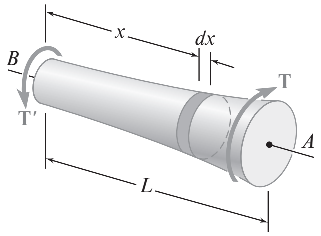


Figura 3.22 Eje con pares de torsión y sección transversal variable.

La ecuación (3.15) puede utilizarse para el ángulo de torsión únicamente si el eje es homogéneo (G constante), si tiene una sección transversal uniforme y si está cargado solo en sus extremos. Si el eje es sometido a par de torsión en lugares distintos de los extremos, o si consta de varias porciones con secciones transversales distintas y posiblemente distintos materiales, debe dividirse en partes componentes que satisfagan individualmente las condiciones requeridas para la ecuación (3.15). En el caso del eje AB de la figura 3.21, deben considerarse cuatro partes diferentes: AC, CD, DE y EB. El ángulo total de torsión del eje (esto es, el ángulo que se tuerce el extremo A con respecto al extremo B) se obtiene sumando *algebraicamente* los ángulos de torsión de cada parte componente. Al usar el par de torsión interno T_i, la longitud L_i, el momento polar de inercia de la sección transversal J_i y el módulo de rigidez G_i, correspondiente a la parte i, el ángulo total de torsión del eje es

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \tag{3.16}$$

El par de torsión interno T_i en cualquier parte dada del eje se obtiene haciendo un corte a través de esa parte y dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción del eje situada a un lado de la sección. Este procedimiento se aplica en el problema modelo 3.3.

En el caso de un eje con sección transversal circular variable, como se muestra en la figura 3.22, ecuación (3.15), puede aplicarse a un disco con espesor dx. El ángulo por el que una cara del disco gira con respecto a la otra es

$$d\phi = \frac{T\,dx}{JG}$$

donde J es una función de x. Al integrar en x de 0 a L, el ángulo total de torsión del eje es

$$\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{JG} \tag{3.17}$$

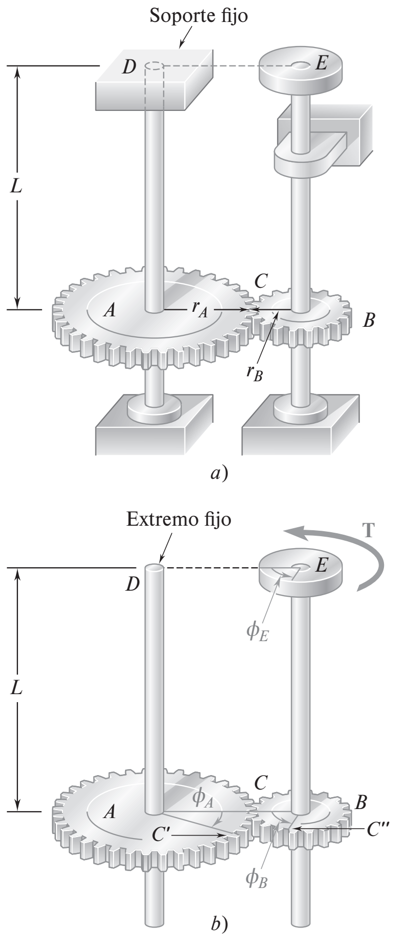


Figura 3.23 *a*) Ensamble de engranes para transmitir pares de torsión del punto *E* al punto *D*. *b*) Ángulos de torsión en el disco *E*, engrane *B* engrane *A*.

Los ejes mostrados en las figuras 3.15 y 3.20 tenían un extremo unido a un soporte fijo. En cada caso, el ángulo de torsión ϕ fue igual al ángulo de rotación de su extremo libre. Sin embargo, cuando ambos extremos de un eje rotan, el ángulo de torsión del eje es igual al ángulo a través del que un extremo del eje gira *con respecto al otro*. Por ejemplo, considere el ensamble de la figura 3.23*a*, compuesto por dos ejes elásticos AD y BE, cada uno de longitud L, radio c y módulo de rigidez G, unidos a engranes que se juntan en C. Si un par de torsión **T** se aplica en E (figura 3.23*b*), ambos ejes se torcerán. Puesto que el extremo D del eje AD es fijo, el ángulo de torsión AD se mide por el ángulo de rotación ϕ_A del extremo A. Por otra parte, ya que ambos extremos del eje BE se tuercen, el ángulo de torsión de BE es igual a la diferencia entre los ángulos de rotación ϕ_B y ϕ_E (es decir, el ángulo de torsión es igual al ángulo a través del cual el extremo E gira con respecto al extremo B). Este ángulo relativo de rotación $\phi_{E/B}$, es

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

Aplicación de conceptos 3.4

Para el ensamble de la figura 3.23, si se sabe que $r_A = 2r_B$, determine el ángulo de rotación del extremo E del eje BE cuando el par $\mathbf{T}$ se aplica a E.

Primero se determina el par de torsión $\mathbf{T}_{AD}$ ejercido sobre el eje AD. Al observar que se aplican fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ sobre los dos engranes en C (figura 3.24), y al recordar que $r_A = 2r_B$, el par de torsión ejercido sobre el eje AD es el doble del ejercido en el eje BE; por lo tanto, $T_{AD} = 2T$.

Como el extremo D del eje AD está fijo, el ángulo de rotación ϕ_A del engrane A es igual al ángulo de torsión del eje y es

$$\phi_A = \frac{T_{AD}L}{JG} = \frac{2TL}{JG}$$

Como los arcos CC' y CC'' de la figura 3.23*b* deben ser iguales, $r_A\phi_A = r_B\phi_B$. Por lo que

$$\phi_B = (r_A/r_B)\phi_A = 2\phi_A$$

Entonces,

$$\phi_B = 2\phi_A = \frac{4TL}{JG}$$

Ahora considere el eje BE. El ángulo de torsión del eje es igual al ángulo $\phi_{E/B}$ a través del cual el extremo E gira con respecto al extremo B. Por lo tanto,

$$\phi_{E/B} = \frac{T_{BE}L}{JG} = \frac{TL}{JG}$$

El ángulo de rotación del extremo E se obtiene de

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{E/B} = \frac{4TL}{JG} + \frac{TL}{JG} = \frac{5TL}{JG}$$

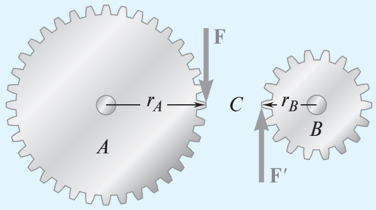


Figura 3.24 Fuerzas de los dientes en los engranes A y B.

3.3 EJES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

Hay situaciones donde los pares internos no pueden determinarse únicamente por medio de la estática. En tales casos, los pares externos (es decir, los pares ejercidos sobre el eje por los apoyos y conexiones) no pueden determinarse a partir del diagrama de cuerpo libre del eje completo. Las ecuaciones de equilibrio deben complementarse con relaciones que involucren las deformaciones del eje y que se obtengan considerando la geometría del problema. Debido a que la estática no es suficiente para determinar los pares internos y externos, se dice que los ejes son *estáticamente indeterminados.* La siguiente Aplicación de conceptos, así como el problema modelo 3.5, muestran cómo analizar ejes estáticamente indeterminados.

Aplicación de conceptos 3.5

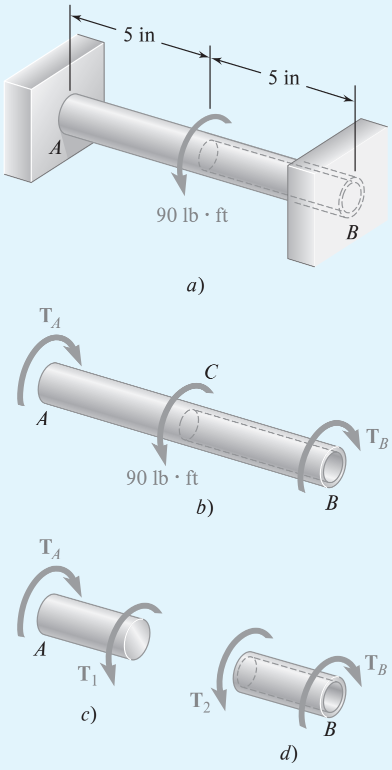


Figura 3.25 *a*) Eje con par de torsión central aplicado y extremos fijos. *b*) Diagrama de cuerpo libre del eje *AB*. *c*) Diagramas de cuerpo libre para los segmentos sólido y hueco.

Un eje circular *AB* consiste en un cilindro de acero de 10 in de largo y $\frac{7}{8}$ in de diámetro, en el que se ha perforado una cavidad de 5 in de largo y $\frac{5}{8}$ in de diámetro desde el extremo *B*. El eje está unido a soportes fijos en ambos extremos, y un par de 90 lb · ft se aplica a la mitad (figura 3.25*a*). Determine el par ejercido sobre el eje por cada uno de los soportes.

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre del eje y denotando con $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ los pares ejercidos por los soportes (figura 3.25*b*), la ecuación de equilibrio es

$$T_A + T_B = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Como esta ecuación no es suficiente para determinar los dos pares desconocidos $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$, el eje es estáticamente indeterminado.

Sin embargo, $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ pueden determinarse si se observa que el ángulo total de torsión del eje *AB* debe ser cero, ya que ambos extremos se encuentran empotrados. Denotando con ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente, los ángulos de torsión de las porciones *AC* y *CB*, se escribe

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre de una pequeña porción del eje que incluya al extremo *A* (figura 3.25*c*), se advierte que el par interno T_1 en *AC* es igual a T_A; y del diagrama de cuerpo libre de una pequeña porción del eje que incluye al extremo *B* (figura 3.25*d*) puede notarse que el par interno T_2 en *CB* es igual a T_B. Al aplicar la ecuación (3.15) y al observar que las porciones *AC* y *CB* del eje están torcidas en sentidos opuestos, se escribe

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0$$

Al despejar T_B,

$$T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

A sustituir los datos numéricos se obtiene

$$L_1 = L_2 = 5 \text{ in}$$

$$J_1 = \tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{7}{16} \text{ in})^4 = 57.6 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\pi[(\tfrac{7}{16} \text{ in})^4 - (\tfrac{5}{16} \text{ in})^4] = 42.6 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

Por lo tanto,

$$T_B = 0.740\ T_A$$

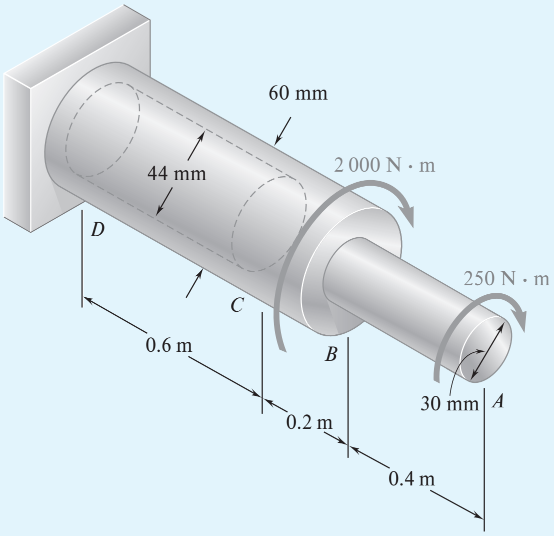
Al sustituir esta expresión en la ecuación de equilibrio original:

$$1.740\ T_A = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$T_A = 51.7 \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad T_B = 38.3 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Problema modelo 3.3

El eje horizontal AD está sujeto a una base fija en D y se le aplican los pares mostrados. Un agujero de 44 mm de diámetro se ha perforado en la porción CD del eje. Si se sabe que el eje completo está hecho de acero para el que $G = 77$ GPa, determine el ángulo de torsión en el extremo A.



ESTRATEGIA: Utilice diagramas de cuerpo libre para determinar los pares en cada segmento del eje AB, BC y CD. Después utilice la ecuación (3.16) para determinar el ángulo de torsión en el extremo A.

MODELAR:

Al efectuar un corte en el eje entre A y B (figura 1), se encuentra

$$\Sigma M_x = 0: \qquad (250\ \text{N}\cdot\text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad T_{AB} = 250\ \text{N}\cdot\text{m}$$

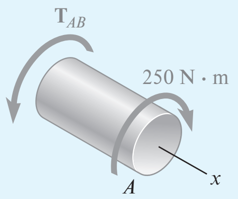


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre para encontrar el par interno en el segmento *AB*.

Al hacer un corte entre B y C (figura 2), se tiene

$$\Sigma M_x = 0: (250\ \text{N}\cdot\text{m}) + (2\,000\ \text{N}\cdot\text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 2\,250\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Como ningún par se aplica en C,

$$T_{CD} = T_{BC} = 2\,250\ \text{N}\cdot\text{m}$$

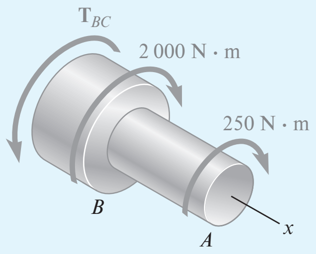


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre para encontrar el par interno en el segmento *BC*.

ANALIZAR:

Momentos polares de inercia

Al usar la figura 3,

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2}c^4 = \frac{\pi}{2}(0.015\ \text{m})^4 = 0.0795 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2}c^4 = \frac{\pi}{2}(0.030\ \text{m})^4 = 1.272 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.030\ \text{m})^4 - (0.022\ \text{m})^4] = 0.904 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

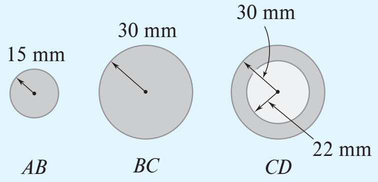


Figura 3 Dimensiones para tres secciones transversales del eje.

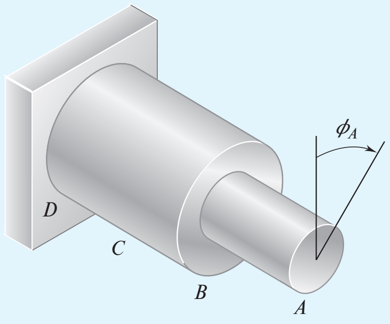


Figura 4 Representación del ángulo de torsión en el extremo *A*.

Ángulo de torsión. De la figura 4, al usar la ecuación (3.16) y recordar que $G =$ 77 GPa para todo el eje, se tiene que

$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G}\left(\frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}}\right)$$

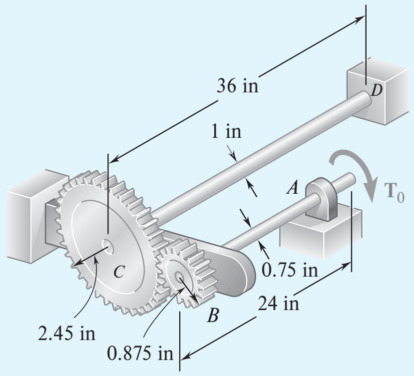
$$\phi_A = \left[\frac{1}{77\ \text{GPa}}\ \frac{(250\ \text{N}\cdot\text{m})(0.4\ \text{m})}{0.0795\times 10^{-6}\ \text{m}^4} + \frac{(2\,250)(0.2)}{1.272\times 10^{-6}} + \frac{(2\,250)(0.6)}{0.904\times 10^{-6}}\right]$$

$$= 0.01634 + 0.00459 + 0.01939 = 0.0403\ \text{rad}$$

$$\phi_A = (0.0403\ \text{rad})\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} \qquad \phi_A = 2.31° \blacktriangleleft$$

Problema modelo 3.4

Dos ejes sólidos de acero están conectados por los engranes mostrados en la figura. Si se sabe que para cada eje $G = 11.2 \times 10^6$ psi y que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi, determine *a*) el máximo par $\mathbf{T}_0$ que puede aplicarse al extremo *A* del eje *AB*, *b*) el ángulo correspondiente en que rota el extremo *A* del eje *AB*.



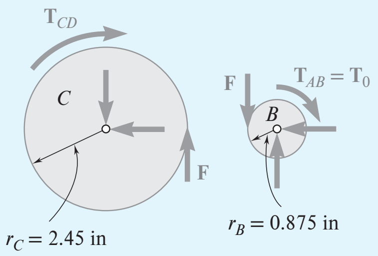


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre para los engranes *B* y *C*.

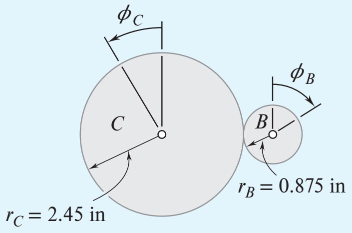


Figura 2 Ángulo de torsión para los engranes *B* y *C*.

ESTRATEGIA: Use los diagramas de cuerpo libre y la cinemática para determinar la relación entre los pares y la torsión en cada segmento de eje, *AB* y *CD*. A continuación use el esfuerzo permisible para determinar el par que puede aplicarse y la ecuación (3.15) para determinar el ángulo de torsión del extremo *A*.

MODELAR: Si se denotan con *F* la magnitud de la fuerza tangencial entre los dientes de los engranes (figura 1), se tiene

Engrane B. $\Sigma M_B = 0$: $\quad F(0.875\ \text{in}) - T_0 = 0 \qquad TCD = 2.8T0 \qquad$ (1)

Engrane C. $\Sigma M_C = 0$: $\quad F(2.45\ \text{in}) - T_{CD} = 0$

Al usar la cinemática con la figura 2, se observa que los movimientos perimetrales de los engranes son iguales y se escribe

$$r_B\phi_B = r_C\phi_C \qquad \phi_B = \phi_C\frac{r_C}{r_B} = \phi_C\frac{2.45\ \text{in}}{0.875\ \text{in}} = 2.8\phi_C \qquad (2)$$

ANALIZAR:

***a*) Par de torsión T_0.** Para el eje AB, $T_{AB} = T_0$ y $c = 0.375$ in (figura 3); considerando el esfuerzo cortante máximo permisible, se escribe

$$\tau = \frac{T_{AB}\,c}{J} \qquad 8\,000 \text{ psi} = \frac{T_0(0.375 \text{ in})}{\frac{1}{2}\pi(0.375 \text{ in})^4} \qquad T_0 = 663 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad \blacktriangleleft$$

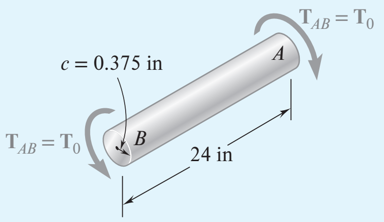


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre del eje *AB*.

Para el eje CD, usando la ecuación (1) se tiene que $T_{CD} = 2.8T_0$ (figura 4). Con $c = 0.5$ in y $\tau_{\text{perm}} = 8\,000$ psi, se escribe

$$\tau = \frac{T_{CD}\,c}{J} \qquad 8\,000 \text{ psi} = \frac{2.8T_0(0.5 \text{ in})}{\frac{1}{2}\pi(0.5 \text{ in})^4} \qquad T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad \blacktriangleleft$$

El par máximo permisible es el mínimo valor obtenido para T_0.

$$T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad \blacktriangleleft$$

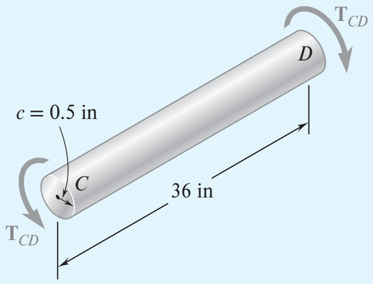


Figura 4. Diagrama de cuerpo libre del eje *CD*.

***b*) Ángulo de rotación en el extremo *A*.** Primero se calcula el ángulo de torsión para cada eje.

Eje AB. Para $T_{AB} = T_0 = 561$ lb · in, se tiene

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{JG} = \frac{(561 \text{ lb} \cdot \text{in})(24 \text{ in})}{\frac{1}{2}\pi(0.375 \text{ in})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.0387 \text{ rad} = 2.22°$$

Eje CD. $T_{CD} = 2.8T_0 = 2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in})$

$$\phi_{C_yD} = \frac{T_{CD}L}{JG} = \frac{2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in})(36 \text{ in})}{\frac{1}{2}\pi(0.5 \text{ in})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.0514 \text{ rad} = 2.95°$$

Como el extremo D del eje CD está fijo, se tiene $\phi_C = \phi_{C/D} = 2.95°$. A partir de la ecuación (2) con la figura 5, se encuentra que el ángulo de rotación del engrane B es

$$\phi_B = 2.8\phi_C = 2.8(2.95°) = 8.26°$$

Para el extremo A del eje AB, se tiene

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 8.26° + 2.22° \qquad \phi_A = 10.48° \quad \blacktriangleleft$$

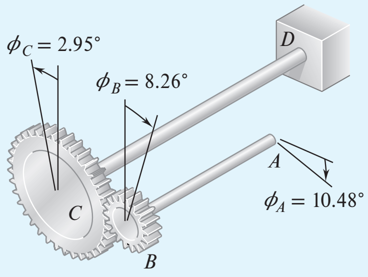
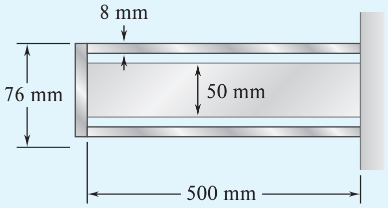


Figura 5 Resultados del ángulo de torsión.

Problema modelo 3.5

Un eje de acero y un tubo de aluminio están conectados a un soporte fijo y a un disco rígido en la sección transversal. Si se sabe que los esfuerzos iniciales son cero, determine el máximo par $\mathbf{T}_0$ que puede aplicarse al disco si los esfuerzos permisibles son 120 MPa en el eje de acero y 70 MPa en el tubo de aluminio. Use $G = 77$ GPa para el acero y $G = 27$ GPa para el aluminio.



ESTRATEGIA: Se sabe que la carga aplicada es resistida tanto por el eje como por el tubo, pero no se conoce la parte transportada por cada parte. Así que es necesario mirar las deformaciones. Se sabe que tanto el eje como el tubo están conectados al disco rígido y que el ángulo de torsión es por lo tanto el mismo para cada uno. Una vez que se conoce la porción del par de torsión llevada por cada parte, se puede utilizar el esfuerzo permisible de cada uno para determinar cuál gobierna y utilizar esto para determinar el par máximo.

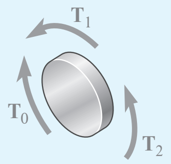


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la tapa final.

MODELAR: Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre del disco (figura 1) y se encuentra

$$T_0 = T_1 + T_2 \tag{1}$$

Si se sabe que el ángulo de torsión es el mismo para el eje y el tubo, se escribe

$$\phi_1 = \phi_2: \quad \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$

$$\frac{T_1(0.5 \text{ m})}{(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(27 \text{ GPa})} = \frac{T_2(0.5 \text{ m})}{(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \text{ GPa})}$$

$$T_2 = 0.874 T_1 \tag{2}$$

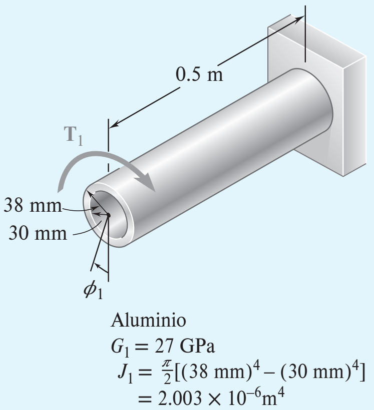


Figura 2 Par de torsión y ángulo de torsión para un eje hueco.

ANALIZAR: Es necesario determinar qué parte alcanza primero su esfuerzo permisible, por lo que se asume arbitrariamente que el requisito $\tau_{alum} \leq 70$ MPa es crítico. Para el tubo de aluminio de la figura 2, se tiene

$$T_1 = \frac{\tau_{alum} J_1}{c_1} = \frac{(70 \text{ MPa})(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.038 \text{ m}} = 3\,690 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Al usar la ecuación (2), calcule el valor correspondiente T_2 y luego encuentre el máximo esfuerzo cortante en el eje de acero de la figura 3.

$$T_2 = 0.874 T_1 = 0.874(3\,690) = 3\,225 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{acero} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(3\,225 \text{ N} \cdot \text{m})(0.025 \text{ m})}{0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 131.3 \text{ MPa}$$

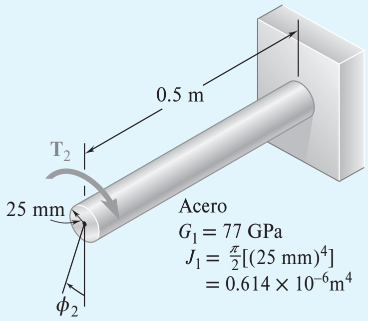


Figura 3 Par de torsión y ángulo de torsión para un eje sólido.

Se observa que el esfuerzo permisible de 120 MPa para el acero es excedido; la suposición hecha fue *errónea*. Por lo tanto, el par máximo $\mathbf{T}_0$ se obtendrá haciendo $\tau_{acero} = 120$ MPa. Primero se determina el par $\mathbf{T}_2$.

$$T_2 = \frac{\tau_{acero} J_2}{c_2} = \frac{(120 \text{ MPa})(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.025 \text{ m}} = 2\,950 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De la ecuación (2), se tiene

$$2\,950 \text{ N} \cdot \text{m} = 0.874 T_1 \qquad T_1 = 3\,375 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Al utilizar la ecuación (1) se obtiene el par máximo permisible:

$$T_0 = T_1 + T_2 = 3\,375 \text{ N} \cdot \text{m} + 2\,950 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = 6.325 \text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: En este ejemplo se ilustra que cada parte no debe exceder su esfuerzo máximo permisible. Dado que el eje de acero alcanza su nivel de tensión permisible primero, el esfuerzo máximo en el eje de aluminio está por debajo de su máximo.

Problemas

3.31 Determine el diámetro máximo permisible de una varilla de acero de 3 m de largo ($G = 77.2$ GPa) si la varilla debe torcerse 30° sin exceder un esfuerzo cortante de 80 MPa.

3.32 El barco en A ha comenzado a perforar un pozo petrolero en el suelo oceánico a una profundidad de 5 000 pies. Si se sabe que la parte superior de la tubería de acero para perforación de 8 in de diámetro ($G = 11.2 \times 10^6$ psi) gira dos revoluciones completas antes de que el barreno en B empiece a operar, determine el esfuerzo cortante máximo causado en la tubería por la torsión.

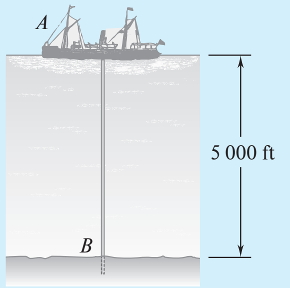


Figura P3.32

3.33 *a*) Para el eje sólido de acero que se muestra en la figura, determine el ángulo de torsión en A. Utilice $G = 11.2 \times 10^6$ psi. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que el eje de acero es hueco con un radio exterior de 1.5 in y un radio interior de 0.75 in.

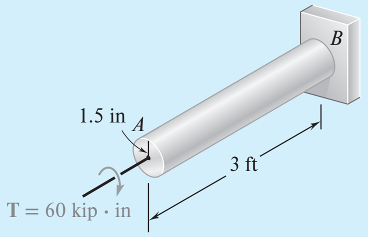


Figura P3.33

3.34 *a*) Para el tubo de aluminio mostrado ($G = 27$ GPa), determine el par de torsión $\mathbf{T}_0$ que causa un ángulo de torsión de 2°. *b*) Determine el ángulo de torsión, si se aplica el mismo par $\mathbf{T}_0$ en un eje cilíndrico sólido de la misma longitud y área de sección transversal.

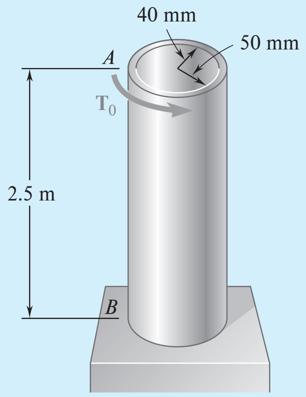


Figura P3.34

3.35 El motor eléctrico ejerce un par de torsión de 500 N · m sobre el eje de aluminio $ABCD$, mientras gira a una rapidez constante. Si se sabe que $G = 27$ GPa y que los pares de torsión ejercidos en las poleas B y C son como se muestran en la figura, determine el ángulo de torsión entre *a*) B y C, *b*) B y D.

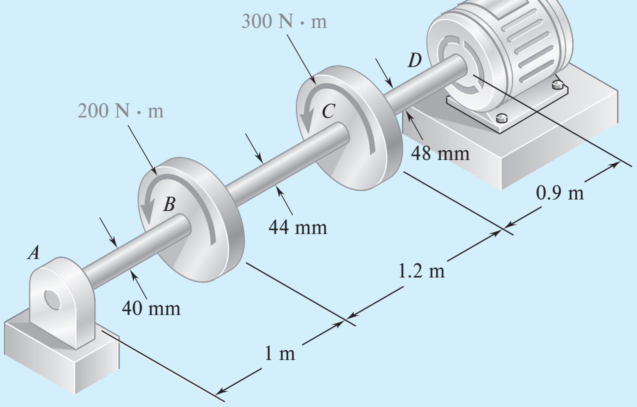


Figura P3.35

3.36 Los pares de torsión mostrados en la figura se ejercen sobre las poleas *A* y *B*. Si se sabe que los ejes son sólidos y están hechos de acero (G = 77.2 GPa), determine el ángulo de torsión entre *a*) *A* y *B*, *b*) *A* y *C*.

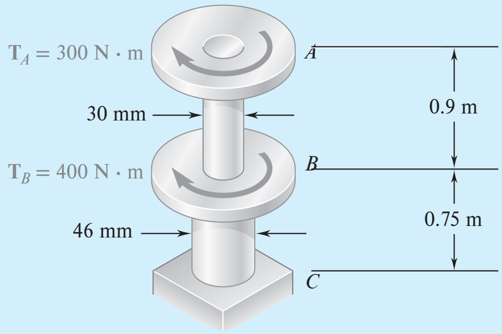


Figura *P3.36*

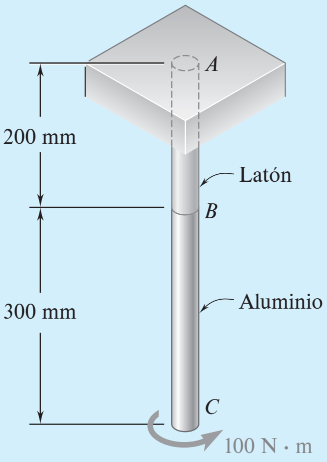


Figura P3.37

3.37 La varilla de aluminio *BC* (G = 26 GPa) está unida a la varilla de latón *AB* (G = 39 GPa). Si se sabe que cada varilla es sólida y tiene un diámetro de 12 mm, determine el ángulo de torsión *a*) en *B*, *b*) en *C*.

3.38 La varilla de aluminio *AB* (G = 27 GPa) está unida a la varilla de latón *BD* (G = 39 GPa). Si se sabe que la porción *CD* de la varilla de latón es hueca y tiene un diámetro interior de 40 mm, determine el ángulo de torsión en *A*.

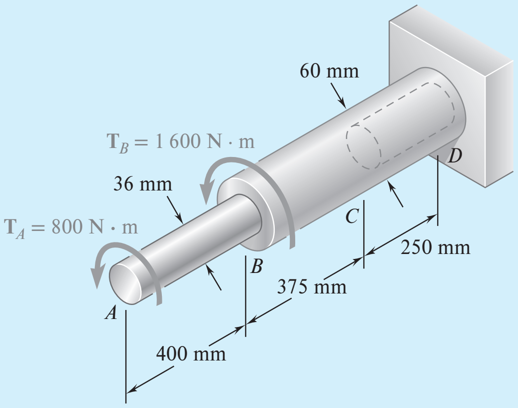


Figura P3.38

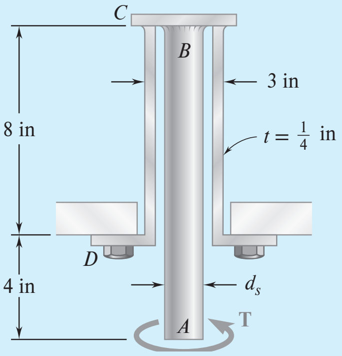


Figura *P3.39* y P3.40

3.39 El vástago sólido *AB* tiene un diámetro d_s = 1.75 in y está hecho de un acero con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y τ_{perm} = 12 ksi, mientras que la manga *CD* está hecha de un latón con $G = 5.6 \times 10^6$ psi y τ_{perm} = 7 ksi. Determine *a*) el par de torsión **T** máximo que puede aplicarse en *A* si no deben excederse los esfuerzos permisibles dados y si el ángulo de torsión de la manga *CD* no debe superar 0.375°, *b*) el ángulo correspondiente a través del cual gira el extremo *A*.

3.40 El vástago sólido *AB* tiene un diámetro d_s = 1.5 in y está hecho de un acero con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y τ_{perm} = 12 ksi, mientras que la manga *CD* está hecha de un latón con $G = 5.6 \times 10^6$ psi y τ_{perm} = 7 ksi. Determine el ángulo máximo a través del cual puede girar el extremo *A*.

3.41 Dos ejes, cada uno de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro, se conectan mediante los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi y que el eje

en F está fijo, determine el ángulo a través del cual gira el extremo A cuando se aplica un par de 1.2 kip · in sobre A.

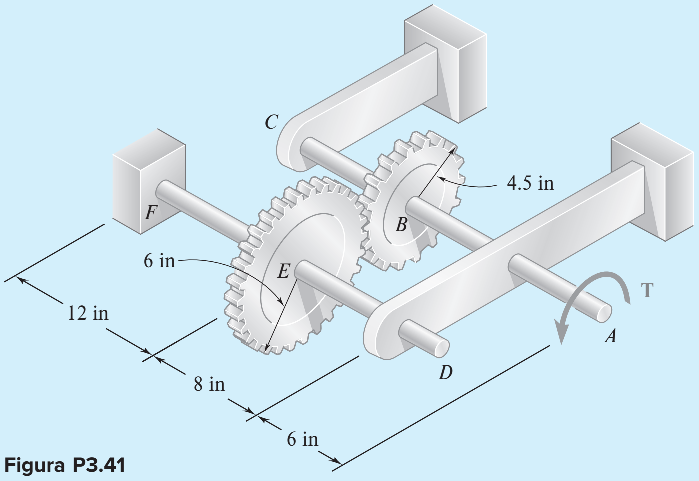


Figura P3.41

3.42 Dos ejes sólidos de acero, cada uno de 30 mm de diámetro, se conectan mediante los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa, determine el ángulo a través del cual gira el extremo A cuando se aplica un par de magnitud $T = 200$ N · m sobre A.

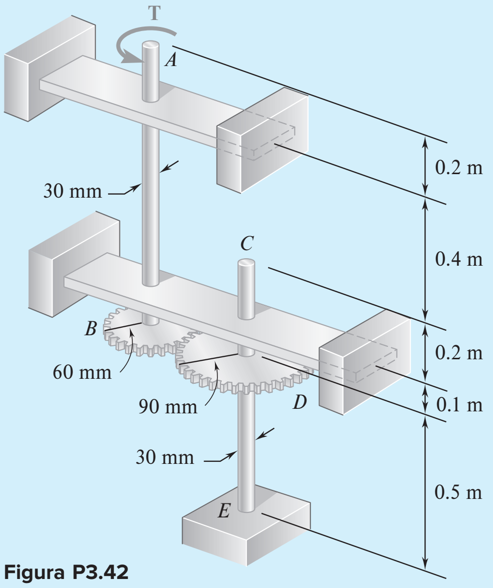


Figura P3.42

3.43 Un codificador F, utilizado para el registro en forma digital de la rotación del eje A, está conectado al eje por medio del tren de engranes que se muestra en la figura, el cual consta de cuatro engranes y de tres ejes sólidos de acero, cada uno con diámetro d. Dos de los engranes tienen un radio r y los otros dos un radio nr. Si se evita la rotación del codificador F, determine en términos de T, l, G, J y n el ángulo que dé rotación del extremo A.

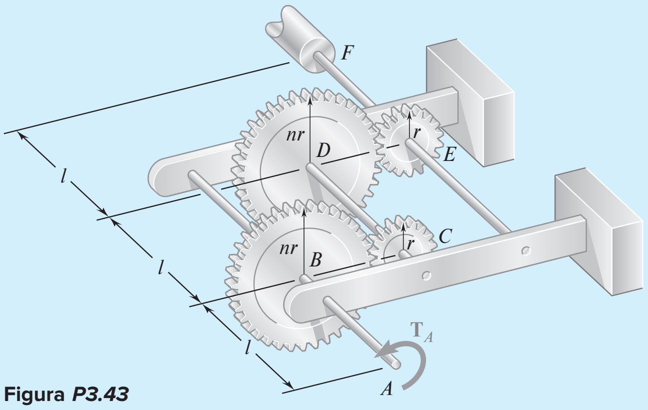


Figura *P3.43*

3.44 Para el tren de engranes descrito en el problema 3.43, determine el ángulo que gira el extremo A cuando $T = 5$ lb · in, $l = 2.4$ in, $d = \frac{1}{16}$ in, $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $n = 2$.

3.45 Las especificaciones de diseño para el eje de transmisión circular sólido de 1.2 m de longitud requieren que el ángulo de torsión del eje no exceda 4° cuando se aplique un par de 750 N · m. Determine el diámetro requerido para el eje, si se sabe que está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 90 MPa y un módulo de rigidez de 77.2 GPa.

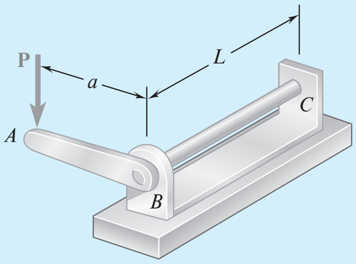


Figura P3.46 y P3.47

3.46 y 3.47 La varilla cilíndrica sólida *BC* de longitud $L = 24$ in está unida a la palanca rígida *AB* de longitud $a = 15$ in. y al soporte fijo en *C*. Las especificaciones de diseño indican que el desplazamiento de *A* no debe exceder 1 in cuando se aplica una fuerza **P** de 100 lb en *A*. Para el material indicado, determine el diámetro requerido de la varilla.

3.46 *Acero:* $\tau_{perm} = 15$ ksi, $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

3.47 *Aluminio:* $\tau_{perm} = 10$ ksi, $G = 3.9 \times 10^6$ psi.

3.48 El diseño del sistema de engranes y ejes que se muestra en la figura requiere que se empleen ejes de acero del mismo diámetro tanto para *AB* como para *CD*. Se requiere además que $\tau_{máx} \leq 60$ MPa y que el ángulo ϕ_D en el cual gira el extremo *D* del eje *CD* no exceda 1.5°. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa, determine el diámetro requerido de los ejes.

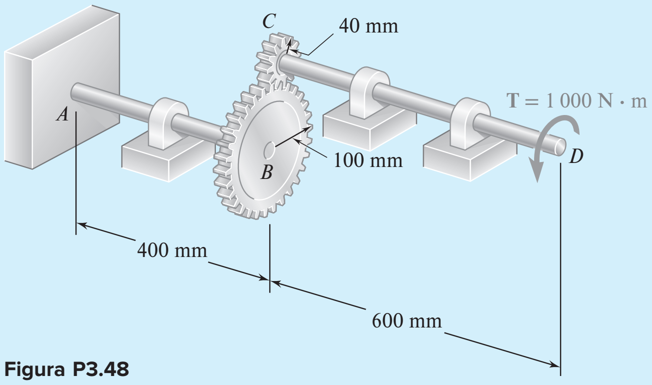


Figura P3.48

3.49 El motor eléctrico ejerce un par de torsión de 800 N · m sobre el eje de acero *ABCD* cuando gira a una rapidez constante. Las especificaciones de diseño requieren que el diámetro del eje sea uniforme desde *A* hasta *D* y que el ángulo de torsión entre *A* y *D* no exceda 1.5°. Si se sabe que $\tau_{máx} \leq 60$ MPa y que $G = 77.2$ GPa, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para el eje.

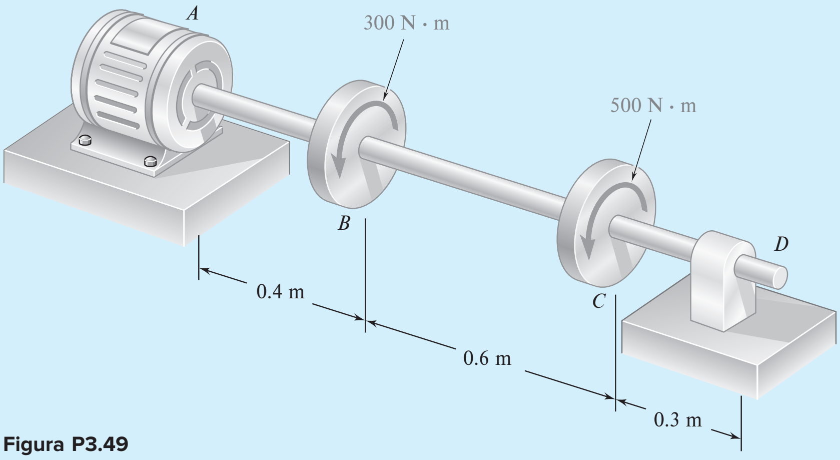


Figura P3.49

3.50 Un agujero se perfora en *A* sobre una hoja de plástico aplicando una fuerza **P** de 600 N al extremo *D* de la palanca *CD*, la cual está rígidamente adherida al eje cilíndrico sólido *BC*. Las especificaciones de diseño requieren que el desplazamiento de *D* no debe exceder 15 mm desde el momento en que la perforadora toca inicialmente la hoja de plástico hasta el momento en que

realmente la penetra. Determine el diámetro requerido del eje BC si éste es de un acero con $G = 77.2$ GPa y $\tau_{perm} = 80$ MPa.

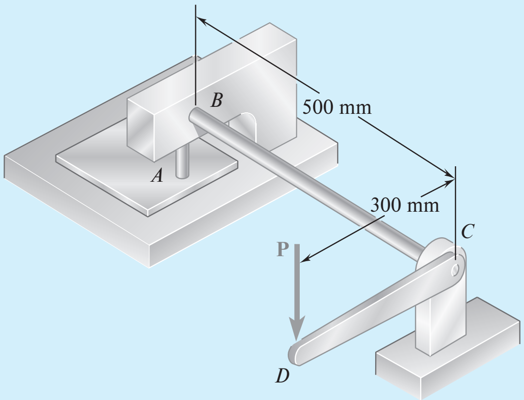


Figura P3.50

3.51 Los cilindros sólidos AB y BC están unidos en B y se encuentran adheridos a soportes fijos en A y C. Si se sabe que el módulo de rigidez es 3.7×10^6 psi para el aluminio y 5.6×10^6 psi para el latón, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el cilindro AB, *b*) en el cilindro BC.

3.52 Resuelva el problema 3.51 suponiendo que el cilindro AB está hecho de acero, para el cual $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

3.53 El eje compuesto que muestra la figura consiste en una camisa de latón con 0.2 in de grosor ($G_{latón} = 5.6 \times 10^6$ psi) unida a un núcleo de acero con 1.2 in de diámetro ($G_{acero} = 11.2 \times 10^6$ psi). Si se sabe que el eje está sometido a un par de torsión de 5 kip · in, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en la camisa de latón, *b*) el máximo esfuerzo cortante en el núcleo de acero, *c*) el ángulo de torsión del extremo B con respecto al extremo A.

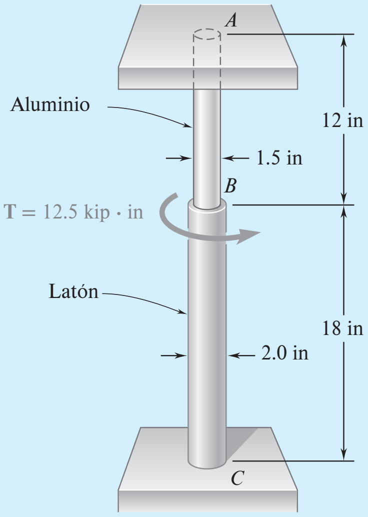


Figura *P3.51*

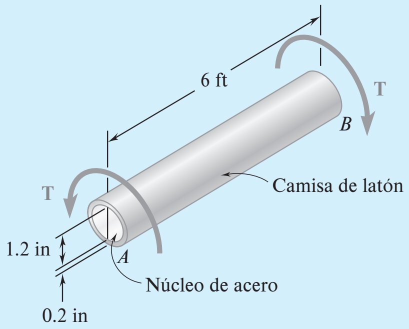


Figura P3.53 y P3.54

3.54 El eje compuesto que muestra la figura consiste en una camisa de latón con 0.2 in de grosor ($G_{latón} = 5.6 \times 10^6$ psi) unida a un núcleo de acero con 1.2 in de diámetro ($G_{acero} = 11.2 \times 10^6$ psi). Si se sabe que el eje se somete a los pares de torsión mostrados, determine el mayor ángulo a través del cual puede torcerse si no se deben exceder los siguientes esfuerzos permisibles: $\tau_{acero} = 15$ ksi y $\tau_{latón} = 8$ ksi.

3.55 Dos ejes sólidos de acero ($G = 77.2$ GPa) están conectados a un disco de acoplamiento B y a soportes fijos en A y C. Para las cargas que se muestran,

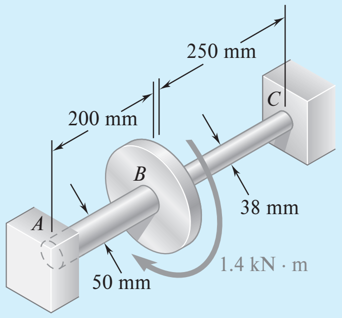


Figura *P3.55*

determine *a*) la reacción en cada soporte, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el eje *AB*, *c*) el esfuerzo cortante máximo en el eje *BC*.

3.56 Resuelva el problema 3.55, suponiendo que el eje *AB* es reemplazado por un eje hueco del mismo diámetro exterior y de un diámetro interior de 25 mm.

3.57 y *3.58* Dos ejes sólidos de acero están provistos de bridas que se conectan por pernos como se observa en la figura. Los pernos están ligeramente holgados y permiten una rotación de 1.5° de una brida con respecto a la otra antes de que empiecen a girar como una sola unidad. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa, determine el esfuerzo cortante máximo en cada eje cuando un par **T** con magnitud 500 N · m se aplica a la brida que se indica.

3.57 El par de torsión **T** se aplica a la brida *B*.

3.58 El par de torsión **T** se aplica a la brida *C*.

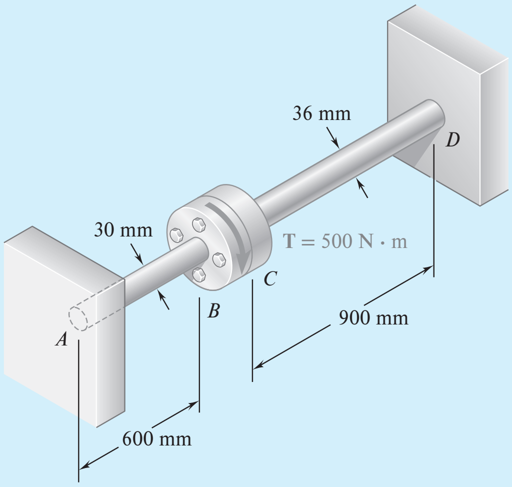


Figura P3.57 y *P3.58*

3.59 La camisa de acero *CD* ha sido unida al eje de acero de 40 mm de diámetro *AE* por medio de bridas *rígidas* soldadas a la camisa y al eje. El diámetro exterior de la camisa es de 80 mm y su espesor de pared es de 4 mm. Si se aplican pares de torsión de 500 N · m, como se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo en la camisa.

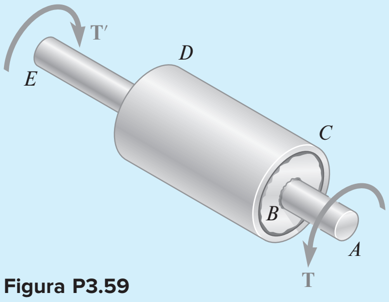


Figura P3.59

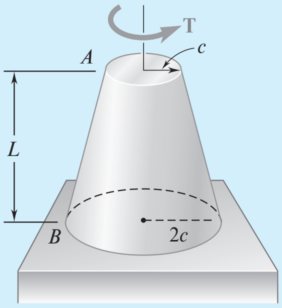


Figura P3.60

3.60 Un par de torsión **T** se aplica como se muestra en la figura a un eje sólido ahusado *AB*. Muestre, por integración, que el ángulo de torsión de *A* es

$$\phi = \frac{7TL}{12\pi Gc^4}$$

3.61 El momento de inercia de masa de un engrane se determinará experimentalmente utilizando un péndulo de torsión que consiste en un alambre de acero de 6 pies. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine el diámetro del alambre para el que la constante torsional de resorte será de 4.27 lb · ft/rad.

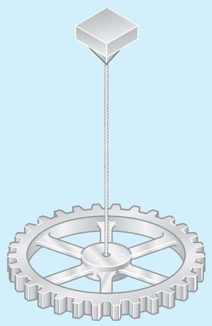


Figura P3.61

3.62 Un eje sólido y un eje hueco son del mismo material y tienen el mismo peso y longitud. Al denotar con n la razón c_1/c_2, demuestre que la razón T_s/T_h del par de torsión T_s en el eje sólido al par T_h en el eje hueco es *a*) $\sqrt{(1-n^2)}/(1+n^2)$ si el esfuerzo cortante máximo es el mismo en cada eje, *b*) $(1-n^2)/(1+n^2)$ si el ángulo de torsión es el mismo para cada eje.

3.63 Una placa anular de espesor t y módulo G se usa para conectar el eje AB de radio r_1 al tubo CD con radio r_2. Si se sabe que un par de torsión $\mathbf{T}$ se aplica al extremo A del eje AB y que el extremo D del tubo CD se encuentra fijo, *a*) determine la magnitud y localización del esfuerzo cortante máximo en la placa anular, *b*) muestre que el ángulo que gira el extremo B del eje con respecto al extremo C del tubo es

$$\phi_{BC} = \frac{T}{4\pi G t}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

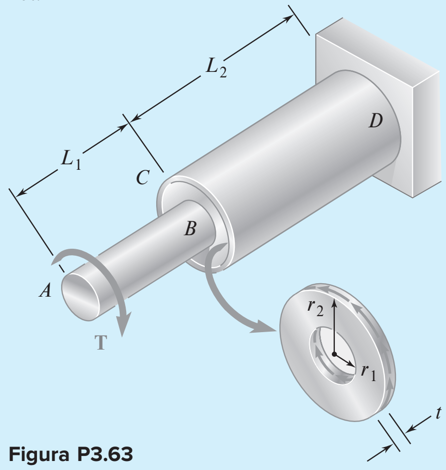


Figura P3.63

3.4 DISEÑO DE EJES DE TRANSMISIÓN

Las especificaciones principales que deben cumplirse en el diseño de un eje de transmisión son la *potencia* que debe transmitirse y la *rapidez de rotación* del eje. La función del diseñador es seleccionar el material y las dimensiones de la sección transversal del eje, para que el esfuerzo cortante máximo permisible del material no sea excedido cuando el eje transmite la potencia requerida a la rapidez especificada.

Para determinar el par de torsión ejercido sobre el eje, la potencia P asociada con la rotación de un cuerpo rígido sujeto a un par $\mathbf{T}$ es

$$P = T\omega \tag{3.18}$$

donde ω es la velocidad angular del cuerpo expresada en radianes por segundo (rad/s). Pero $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de rotación (es decir, el número de revoluciones por segundo). La unidad de frecuencia es 1 s^{-1} y se llama *hertz* (Hz). Al sustituir ω en la ecuación (3.18),

$$P = 2\pi f T \tag{3.19}$$

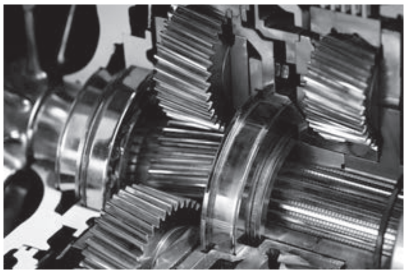
Si se emplean unidades SI con f expresada en Hz y T en N · m, la potencia se expresará en N · m/s, esto es, en *watts* (W). Al despejar T de la ecuación (3.19), el par ejercido sobre un eje que transmite una potencia P a una frecuencia de rotación f es

$$T = \frac{P}{2\pi f} \qquad (3.20)$$

Después de haber determinado el par **T** que se aplicará al eje y habiendo seleccionado el material que será utilizado, el diseñador lleva los valores de T y el esfuerzo máximo permisible a la ecuación (3.9).

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} \qquad (3.21)$$

Esto también proporciona el valor mínimo permisible para el parámetro J/c. Si se emplean unidades SI, T estará expresado en N · m, $\tau_{\text{máx}}$ en Pa (o N/m^2) y J/c en m^3. En el caso de un eje circular sólido, $J = \frac{1}{2}\pi c^4$ y $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$; al sustituir este valor para J/c en la ecuación (3.21) y al despejar c, esto da como resultado el mínimo valor permisible para el radio del eje. Para un eje circular hueco, el parámetro crítico es J/c_2, donde c_2 es el radio exterior del eje; el valor de este parámetro puede calcularse de la ecuación (3.11) para determinar si una sección transversal dada será aceptable.



Fotografía 3.4 En un complejo tren de engranes, no se debe exceder el máximo esfuerzo cortante permisible del elemento más débil.

Cuando se emplean las unidades usuales en Estados Unidos, la frecuencia, por lo general, se expresa en rpm y la potencia en caballos de potencia (hp). Es entonces necesario, antes de aplicar la ecuación (3.20), convertir la frecuencia a revoluciones por segundo (es decir, hertz) y la potencia a ft · lb/s o in · lb/s usando:

$$1 \text{ rpm} = \frac{1}{60}\text{s}^{-1} = \frac{1}{60}\text{Hz}$$
$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 6\,600 \text{ in} \cdot \text{lb/s}$$

Cuando la potencia se expresa en in·lb/s, la ecuación (3.20) dará el valor del par T en lb·in. Al llevar este valor de T a la ecuación (3.21), y al expresar $\tau_{\text{máx}}$ en psi, se obtiene el valor del parámetro J/c en in^3.

Aplicación de conceptos 3.6

¿Qué tamaño de eje debe usarse para el rotor de un motor de 5 hp que opera a 3 600 rpm si el esfuerzo cortante no debe exceder 8 500 psi en el eje?

La potencia del motor en in·lb/s y su frecuencia en ciclos por segundo (o hertz).

$$P = (5 \text{ hp})\frac{6\,600 \text{ in} \cdot \text{lb/s}}{1 \text{ hp}} = 33\,000 \text{ in} \cdot \text{lb/s}$$
$$f = (3\,600 \text{ rpm})\frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 60 \text{ Hz} = 60 \text{ s}^{-1}$$

El par ejercido sobre el eje está dado por la ecuación (3.20):

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{33\,000 \text{ in} \cdot \text{lb/s}}{2\pi\,(60 \text{ s}^{-1})} = 87.54 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

Al sustituir T y $\tau_{\text{máx}}$ en la ecuación (3.21),

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{87.54 \text{ lb} \cdot \text{in}}{8\,500 \text{ psi}} = 10.30 \times 10^{-3} \text{ in}^3$$

Pero $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$ para un eje sólido. Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\pi c^3 = 10.30 \times 10^{-3} \text{ in}^3$$
$$c = 0.1872 \text{ in}$$
$$d = 2c = 0.374 \text{ in}$$

Debe usarse un eje de $\frac{3}{8}$ in.

Aplicación de conceptos 3.7

Un eje que consta de un tubo de acero de 50 mm de diámetro exterior debe transmitir 100 kW de potencia mientras gira a una frecuencia de 20 Hz. Determine el espesor del tubo que deberá utilizarse si el esfuerzo cortante no debe exceder 60 MPa.

El par de torsión ejercido en el eje está dado por la ecuación (3.20):

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{100 \times 10^3 \text{ W}}{2\pi \text{ (20 Hz)}} = 795.8 \text{ N}\cdot\text{m}$$

De la ecuación (3.21) se concluye que el parámetro J/c_2 debe ser por lo menos igual a

$$\frac{J}{c_2} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{795.8 \text{ N}\cdot\text{m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 13.26 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \qquad \textbf{(1)}$$

Pero, de la ecuación (3.10),

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{0.050}[(0.025)^4 - c_1^4] \qquad \textbf{(2)}$$

Al igualar los miembros de la derecha de las ecuaciones (1) y (2),

$$(0.025)^4 - c_1^4 = \frac{0.050}{\pi}(13.26 \times 10^{-6})$$
$$c_1^4 = 390.6 \times 10^{-9} - 211.0 \times 10^{-9} = 179.6 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$
$$c_1 = 20.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 20.6 \text{ mm}$$

El espesor correspondiente del tubo es

$$c_2 - c_1 = 25 \text{ mm} - 20.6 \text{ mm} = 4.4 \text{ mm}$$

Debe utilizarse un tubo con espesor de 5 mm.

3.5 CONCENTRACIONES DE ESFUERZO EN EJES CIRCULARES

La fórmula de torsión $t_{\text{máx}} = Tc/J$ se dedujo en la sección 3.1C para un eje circular con sección transversal uniforme. Además, en la sección 3.1B, el eje estaba cargado en sus

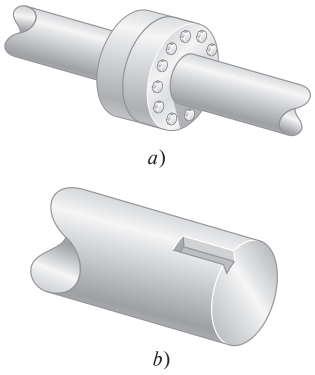


Figura 3.26 Acoplamiento de ejes usando *a*) brida atornillada, *b*) ranura para cuñero.

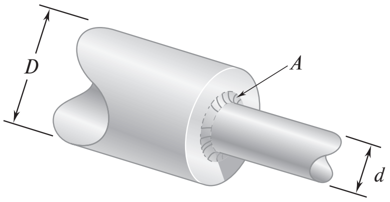


Figura 3.27 Ejes con dos diámetros diferentes y un filete en la unión.

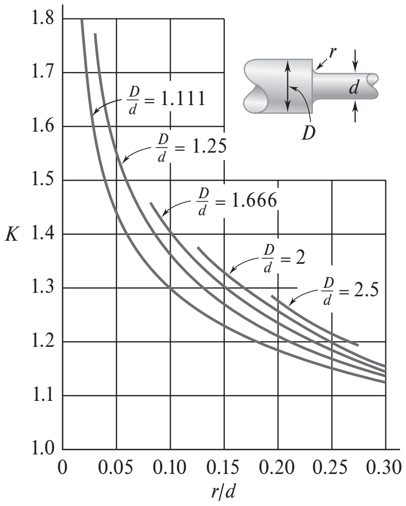


Figura 3.28 Factores de concentración de esfuerzos para filetes en ejes circulares. (Fuente: W. D. Pilkey y D. F. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 3a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 2008).

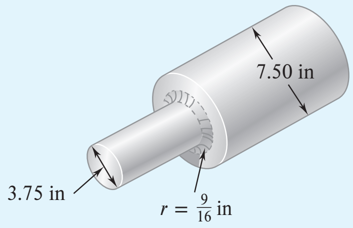
extremos a través de placas rígidas sólidamente unidas a él. Sin embargo, los pares de torsión comúnmente se aplican al eje mediante acoplamientos de brida (figura 3.26*a*) o por medio de engranes conectados al eje por cuñas que caben dentro de cuñeros (figura 3.26*b*). En ambos casos, la distribución de esfuerzos, en la sección donde se aplican los pares, o cerca de ella debe ser diferente de la que se da por la fórmula de torsión. Ocurrirán, por ejemplo, altas concentraciones de esfuerzos en la cercanía del cuñero mostrado en la figura 3.26*b*. La determinación de estos esfuerzos localizados puede llevarse a cabo por métodos de análisis experimental de esfuerzos o mediante el uso de la teoría matemática de la elasticidad.

La fórmula de torsión también puede utilizarse para un eje de sección transversal circular variable. Para un eje con un cambio abrupto en el diámetro de su sección transversal, las concentraciones de esfuerzo ocurrirán cerca de la discontinuidad, y los esfuerzos más altos ocurrirán en A (figura 3.27). Estos esfuerzos pueden reducirse utilizando un filete, y el valor del esfuerzo cortante máximo en el filete puede expresarse como

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.22}$$

donde el esfuerzo Tc/J es el esfuerzo calculado para el eje de menor diámetro, y K es un factor de concentración de esfuerzos. Como el factor K depende solo de la razón de los dos diámetros y de la razón del radio del filete al diámetro del eje más pequeño, puede calcularse y registrarse en forma de tabla o de gráfica, como se muestra en la figura 3.28. Sin embargo, este procedimiento para determinar esfuerzos cortantes localizados es válido solo si el valor de $\tau_{\text{máx}}$ dado por la ecuación (3.22) no excede el límite de proporcionalidad del material, ya que los valores de K graficados en la figura 3.28 se obtuvieron bajo la suposición de una relación lineal entre los esfuerzos cortantes y la deformación a cortante. Si ocurren deformaciones plásticas, resultarán en valores del esfuerzo máximo más bajas que las indicadas por la ecuación (3.22).

Problema modelo 3.6



El eje escalonado que se ilustra en la figura debe girar a 900 rpm para transmitir potencia de una turbina a un generador. El grado de acero especificado en el diseño tiene un esfuerzo cortante permisible de 8 ksi. *a*) Para el diseño preliminar mostrado, determine la potencia máxima que puede transmitirse. *b*) Si en el diseño final se aumenta el radio del filete de tal manera que $r = \frac{15}{16}$ in, ¿cuál será el cambio porcentual, en relación con el diseño preliminar, en la potencia que puede transmitirse?

ESTRATEGIA: Use la figura 3.28 para explicar la influencia de las concentraciones de esfuerzo sobre el par de torsión y la ecuación (3.20) para determinar la potencia máxima que se puede transmitir.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Diseño preliminar.** Al usar la notación de la figura 3.28, se tiene: $D = 7.50$ in, $d = 3.75$ in, $r = \frac{9}{16}$ in = 0.5625 in.

$$\frac{D}{d} = \frac{7.50 \text{ in}}{3.75 \text{ in}} = 2 \qquad \frac{r}{d} = \frac{0.5625 \text{ in}}{3.75 \text{ in}} = 0.15$$

Un factor de concentración de esfuerzos $K = 1.33$ se encuentra en la figura 3.28.

Par de torsión. De la ecuación (3.22), se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \qquad T = \frac{J}{c}\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} \qquad (1)$$

donde J/c se refiere al eje de menor diámetro:

$$J/c = \tfrac{1}{2}\pi c^3 = \tfrac{1}{2}\pi(1.875 \text{ in})^3 = 10.35 \text{ in}^3$$

y donde

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{8 \text{ ksi}}{1.33} = 6.02 \text{ ksi}$$

Al sustituir en la ecuación (1), se encuentra (figura 1) que $T = (10.35 \text{ in}^3) = (6.02 \text{ ksi}) = 62.3$ kip · in.

Potencia. Puesto que $f = (900 \text{ rpm})\dfrac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 15 \text{ Hz} = 15 \text{ s}^{-1}$, se escribe

$$P_a = 2\pi f T = 2\pi(15 \text{ s}^{-1})(62.3 \text{ kip}\cdot\text{in}) = 5.87\times 10^6 \text{ in}\cdot\text{lb/s}$$
$$P_a = (5.87\times 10^6 \text{ in}\cdot\text{lb/s})(1 \text{ hp}/6\,600 \text{ in}\cdot\text{lb/s}) \quad P_a = 890 \text{ hp}$$ ◀

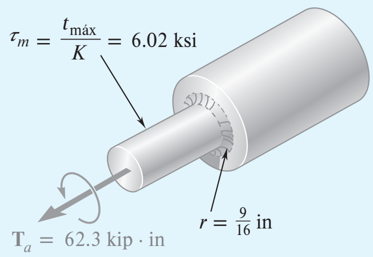


Figura 1 Par de torsión permisible para un diseño con $r = \frac{9}{16}$ in.

***b*) Diseño final.** Para $r = \frac{16}{15}$ in = 0.9375 in,

$$\frac{D}{d} = 2 \qquad \frac{r}{d} = \frac{0.9375 \text{ in}}{3.75 \text{ in}} = 0.250 \qquad K = 1.20$$

Al seguir el procedimiento utilizado antes, se escribe (figura 2)

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{8 \text{ ksi}}{1.20} = 6.67 \text{ ksi}$$

$$T = \frac{J}{c}\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = (10.35 \text{ in}^3)(6.67 \text{ ksi}) = 69.0 \text{ kip}\cdot\text{in}$$

$$P_b = 2\pi f T = 2\pi(15 \text{ s}^{-1})(69.0 \text{ kip}\cdot\text{in}) = 6.50 \times 10^6 \text{ in}\cdot\text{lb/s}$$

$$P_b = (6.50 \times 10^6 \text{ in}\cdot\text{lb/s})(1 \text{ hp}/6\,600 \text{ in}\cdot\text{lb/s}) = 985 \text{ hp}$$

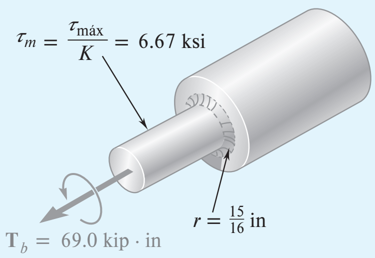


Figura 2 Par de torsión permisible para un diseño con $r = \frac{15}{16}$ in.

Cambio porcentual en potencia

$$\text{Cambio porcentual} = 100\frac{P_b - P_a}{P_a} = 100\frac{985 - 890}{890} = +11\%$$ ◀

REVISAR y PENSAR: Como se ha demostrado, un pequeño aumento del radio del filete en la transición del eje produce un cambio significativo en la potencia máxima transmitida.

Problemas

3.64 Determine el esfuerzo cortante máximo en un eje sólido con 1.5 in de diámetro cuando transmite 75 hp con una rapidez de *a*) 750 rpm, *b*) 1 500 rpm.

3.65 Determine el esfuerzo cortante máximo en un eje sólido con 12 mm de diámetro cuando transmite 2.5 kW con una frecuencia de *a*) 25 Hz, *b*) 50 Hz.

3.66 Usando un esfuerzo cortante permisible de 4.5 ksi, diseñe un eje sólido de acero para transmitir 12 hp con una rapidez de *a*) 1 200 rpm, *b*) 2 400 rpm.

3.67 Usando un esfuerzo cortante permisible de 50 MPa, diseñe un eje sólido de acero para transmitir 15 kW a una frecuencia de *a*) 30 Hz, *b*) 60 Hz.

3.68 Mientras un eje de acero con la sección transversal mostrada en la figura gira a 120 rpm, una medición estroboscópica indica que el ángulo de torsión es de 2° en una longitud de 4 m. Utilizando $G = 77.2$ GPa, determine la potencia que está siendo transmitida.

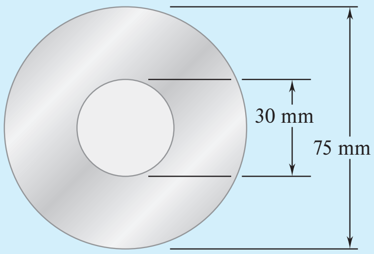


Figura P3.68

3.69 Determine el espesor requerido del eje tubular de 50 mm mostrado en la aplicación de conceptos 3.7, si debe transmitir la misma potencia mientras rota a una frecuencia de 30 Hz.

3.70 Un eje de transmisión hecho de acero tiene 6 ft de longitud y sus diámetros interior y exterior son de 2.25 y 1.75 in, respectivamente. Si se sabe que el eje transmite 240 hp mientras rota a 1 800 rpm, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo, *b*) el ángulo de torsión del eje ($G = 11.2 \times 10^6$ psi).

3.71 El eje hueco de acero que se muestra en la figura ($G = 77.2$ GPa, $\tau_{perm} = 50$ MPa) rota a 240 rpm. Determine *a*) la potencia máxima que puede transmitirse, *b*) el ángulo de torsión correspondiente para el eje.

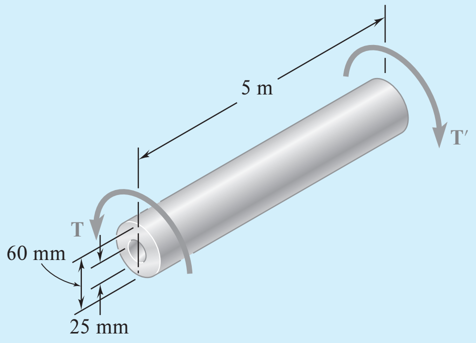


Figura P3.71

3.72 Un tubo de acero de 3.5 in de diámetro exterior será empleado para transmitir un par de torsión de 3 000 lb · ft sin exceder un esfuerzo permisible máximo de 8 ksi. Una serie de tubos de 3.5 in de diámetro exterior se encuentra disponible para su uso. Si se sabe que el espesor de pared de los tubos varía desde 0.25 in hasta 0.50 in en incrementos de 0.0625 in, elija el tubo más ligero que puede usarse.

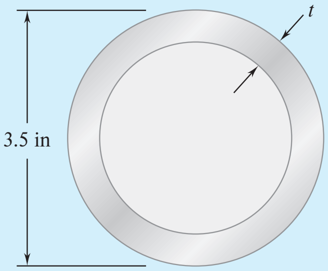


Figura *P3.72*

3.73 El diseño de un elemento de máquina requiere que un eje de 40 mm de diámetro exterior transmita 45 kW. *a*) Si la rapidez de rotación es de 720 rpm, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje *a*. *b*) Si la rapidez de rotación puede incrementarse en 50% a 1 080 rpm, determine el máximo diámetro interior del eje *b* para el que el esfuerzo cortante máximo será el mismo en cada eje.

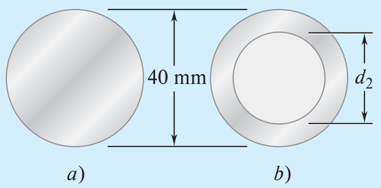


Figura P3.73

3.74 Tres ejes y cuatro engranes se usan para formar un tren de engranes que transmitirá potencia desde el motor en *A* hasta una máquina herramienta en *F*. (Los cojinetes para los ejes se omiten en el dibujo). El diámetro de cada eje es: d_{AB} = 16 mm, d_{CD} = 20 mm, d_{EF} = 28 mm. Si se sabe que la frecuencia del motor es de 24 Hz y que el esfuerzo cortante permisible para cada eje es de 75 MPa, determine la potencia máxima que puede transmitirse.

3.75 Tres ejes y cuatro engranes se usan para formar un tren de engranes que transmitirá 7.5 kW desde el motor en *A* hasta una máquina herramienta en *F*. (Los cojinetes para los ejes se omiten en el dibujo). Si se sabe que la frecuencia del motor es de 30 Hz y que el esfuerzo permisible para cada eje es de 60 MPa, determine el diámetro requerido de cada eje.

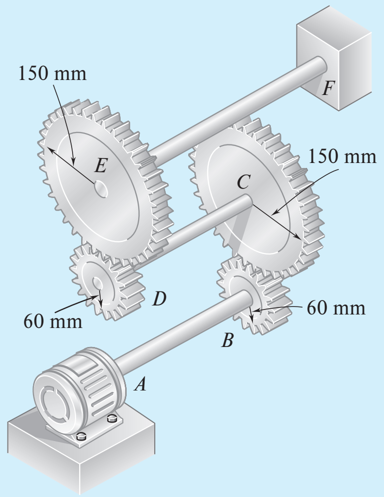


Figura *P3.74* y *P3.75*

3.76 Los dos ejes sólidos y los engranes que se muestran en la figura se emplean para transmitir 16 hp desde el motor *A* hasta la máquina herramienta en *D*, a una rapidez de 1 260 rpm. Si se sabe que cada eje tiene un diámetro de 1 in., determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *CD*.

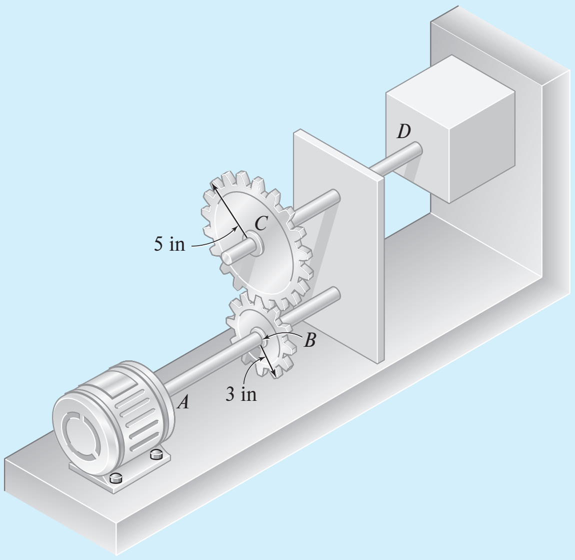


Figura P3.76 y P3.77

3.77 Los dos ejes sólidos y los engranes que se muestran en la figura se emplean para transmitir 16 hp desde el motor *A* hasta la máquina herramienta en *D*, a una velocidad de 1 260 rpm. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi, determine el diámetro requerido *a*) del eje *AB*, *b*) del eje *CD*.

3.78 El arreglo de eje, disco y banda, que se muestra en la figura, se emplea para transmitir 3 hp desde el punto *A* hasta el punto *D*. *a*) Utilizando un esfuerzo cortante permisible de 9 500 psi, determine la rapidez requerida del eje *AB*. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que los diámetros de los ejes *AB* y *CD* son, respectivamente, 0.75 in y 0.625 in.

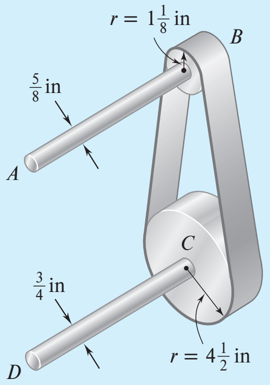


Figura P3.78

3.79 Un eje sólido de acero con 5 ft de longitud y 0.875 in de diámetro debe transmitir 18 hp entre un motor y una máquina herramienta. Determine la velocidad mínima a la que puede girar el eje, si sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, que el esfuerzo cortante máximo no debe exceder 4.5 ksi y que el ángulo de torsión no debe exceder 3.5°.

3.80 Un eje de acero de 2.5 m de longitud y 30 mm de diámetro rota a una frecuencia de 30 Hz. Determine la potencia máxima que puede transmitir el eje, si sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa y que el ángulo de torsión no debe exceder 7.5°.

3.81 Las especificaciones de diseño para un eje de transmisión sólido de 1.2 m de longitud requieren que el ángulo de torsión del eje no exceda 4° cuando se aplique un par de 750 N · m. Determine el diámetro requerido para el eje, si se sabe que el eje está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 90 MPa y un módulo de rigidez de 77.2 GPa.

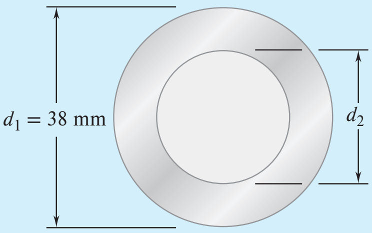


Figura *P3.82* y *P3.83*

3.82 Un eje tubular de acero con 1.5 m de longitud ($G = 77.2$ GPa), 38 mm de diámetro exterior d_1 y 30 mm de diámetro interior d_2 debe transmitir 100 kW entre una turbina y un generador. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa y que el ángulo de torsión no debe exceder 3°, determine la frecuencia mínima a la que puede girar el eje.

3.83 Un eje tubular de acero de 1.5 m de longitud y 38 mm de diámetro exterior d_1 será hecho con un acero para el que $\tau_{perm} = 65$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Si se sabe que el ángulo de torsión no debe exceder 4° cuando el eje es sometido a un par de 600 N·m, determine el máximo diámetro interior d_2 que puede especificarse en el diseño.

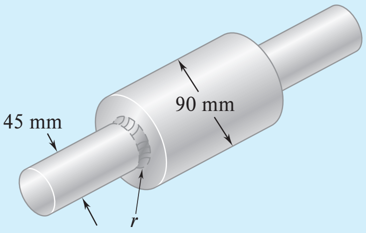


Figura P3.84

3.84 El eje escalonado que se muestra en la figura debe transmitir 40 kW a una rapidez de 720 rpm. Determine el radio r mínimo del filete si no debe excederse un esfuerzo permisible de 36 MPa.

3.85 El eje escalonado que se muestra en la figura debe transmitir 450 rpm. Si se sabe que $r = 0.5$ in, determine la potencia máxima que puede transmitirse sin exceder el esfuerzo cortante permisible de 7 500 psi.

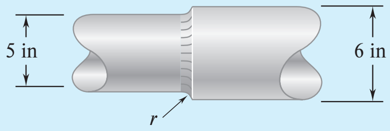


Figura *P3.85*

3.86 Si se sabe que el eje escalonado que se muestra en la figura transmite un par de torsión de magnitud $T = 2.50$ kip · in, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje cuando el radio del filete es *a*) $r = \frac{1}{8}$ in, *b*) $r = \frac{3}{16}$ in.

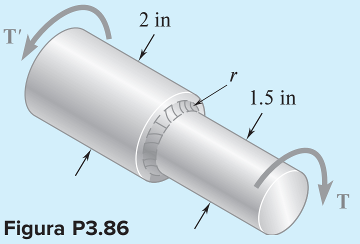


Figura P3.86

3.87 El eje escalonado que se muestra en la figura debe rotar a 50 Hz. Si se sabe que el radio del filete es $r = 8$ mm y que el esfuerzo cortante permisible es de 45 MPa, determine la máxima potencia que puede transmitirse.

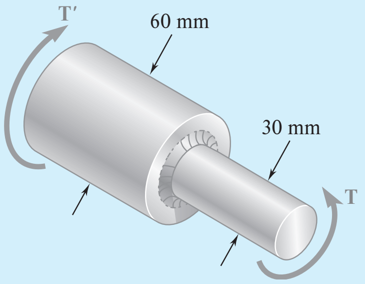


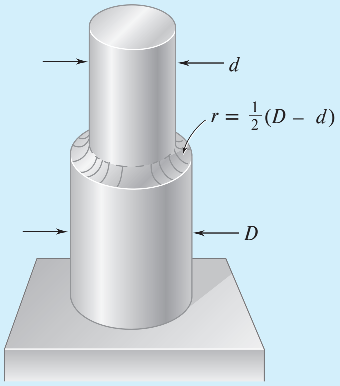
Figura P3.87 y P3.88

3.88 El eje escalonado que se muestra en la figura debe transmitir 45 kW. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en el eje es de 40 MPa y que el radio del filete es $r = 6$ mm, determine la rapidez mínima permisible del eje.

3.89 Un par de torsión con magnitud $T = 200$ lb · in se aplica al eje escalonado que tiene un filete completo de cuarto de caña. Si se sabe que $D = 1$ in, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje cuando *a*) $d = 0.8$ in, *b*) $d = 0.9$ in.

3 .90 En el eje escalonado que se muestra en la figura, el cual tiene un filete completo de cuarto de caña, el esfuerzo cortante permisible es de 80 MPa. Si se sabe que $D = 30$ mm, determine el par de torsión máximo permisible que puede aplicarse al eje si *a*) $d = 26$ mm, *b*) $d = 24$ mm.

3.91 En el eje escalonado que se muestra en la figura, el cual tiene un filete completo de cuarto de caña, $D = 1.25$ in y $d = 1$ in. Si se sabe que la rapidez del eje es de 2 400 rpm y que el esfuerzo cortante permisible es de 7 500 psi, determine la máxima potencia que puede transmitirse mediante este eje.



El filete completo de cuarto de caña se extiende hasta el borde del eje más grande.

Figura P3.89, P3.90 y *P3.91*

*3.6 DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN EJES CIRCULARES

En las ecuaciones (3.10) y (3.15) se asume, para la distribución de esfuerzos y el ángulo de torsión de un eje circular sometido a un par de torsión **T**, que la ley de Hooke se aplica en todo el eje. Si la resistencia a la cedencia se excede en alguna porción del eje, o si el material involucrado es frágil con un diagrama no lineal de esfuerzo-deformación a cortante, estas relaciones dejan de ser válidas. En esta sección se desarrollará un método más general, utilizado cuando la ley de Hooke no puede aplicarse, con el fin de determinar la distribución de esfuerzos en un eje circular sólido y calcular el par de torsión requerido para producir un ángulo de torsión dado.

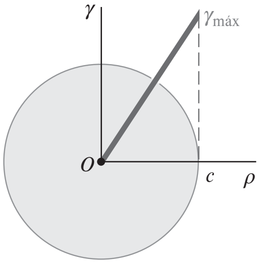


Figura 3.29 Distribución de la deformación cortante para la torsión de un eje circular.

No se supuso ninguna relación específica de esfuerzo-deformación en la sección 3.1B, cuando la deformación a corte γ varía linealmente con la distancia ρ desde el eje de la flecha (figura 3.29). Así,

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{máx} \tag{3.4}$$

donde c es el radio del eje.

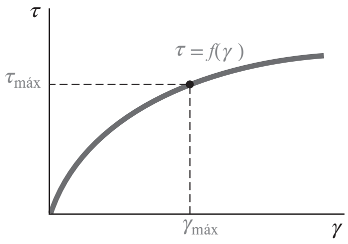


Figura 3.30 Diagrama no lineal de esfuerzo-deformación cortante.

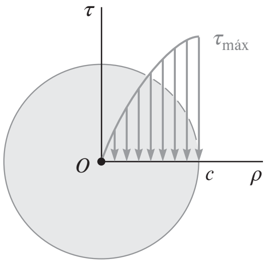


Figura 3.31 Distribución de la deformación cortante para un eje con respuesta esfuerzo-deformación no lineal.

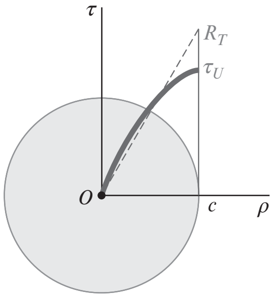


Figura 3.32 Distribución del esfuerzo en un eje circular en falla.

Suponiendo que el valor máximo $\tau_{máx}$ del esfuerzo cortante τ se ha especificado, la gráfica de τ contra ρ puede obtenerse como sigue. Primero se determina el valor de $\gamma_{máx}$ del diagrama esfuerzo-deformación a corte, que corresponde a $\tau_{máx}$ (figura 3.30), y se introduce en la ecuación (3.4). Entonces, para cada valor de ρ, se determina el valor correspondiente de γ de la ecuación (3.4) o de la figura 3.29 y se obtiene el esfuerzo cortante τ que corresponde a este valor de γ para el diagrama esfuerzo-deformación de la figura 3.30. Al graficar τ contra ρ se encuentra la distribución deseada de esfuerzo (figura 3.31).

Recuerde ahora que, cuando se dedujo la ecuación (3.1) en la sección 3.1A, no se supuso ninguna relación particular entre el esfuerzo y la deformación a corte. Puede, por lo tanto, utilizarse la ecuación (3.1) para determinar el par **T** que corresponde a la distribución de esfuerzos cortantes obtenida en la figura 3.31. Considerando un elemento anular con radio ρ y espesor $d\rho$, se expresa el elemento de área en la ecuación (3.1) como $dA = 2\pi\rho\ d\rho$ y se escribe

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\ d\rho)$$

o

$$T = 2\pi\int_0^c \rho^2\tau d\rho \tag{3.23}$$

donde τ es la función de ρ graficada en la figura 3.31.

Si τ es una función analítica conocida de γ, la ecuación (3.4) puede utilizarse para expresar τ como función de ρ, y la integral de la ecuación (3.23) puede obtenerse analíticamente. De otra manera, el par **T** puede obtenerse mediante integración numérica. Este cálculo se vuelve más significativo si se advierte que la integral en la ecuación (3.23) representa el segundo momento, o momento de inercia, con respecto al eje vertical del área de la figura 3.31 localizada por encima del eje horizontal y limitada por la curva de distribución de esfuerzos.

El par último T_U, asociado con la falla del eje, puede determinarse a partir del esfuerzo cortante último τ_U eligiendo $\tau_{máx} = \tau_U$ y realizando los cálculos indicados antes. Sin embargo, con frecuencia es más conveniente determinar T_U experimentalmente torciendo una probeta hasta romperla. Suponiendo una distribución de esfuerzos lineal ficticia, la ecuación (3.9) se emplea entonces para determinar el esfuerzo cortante máximo correspondiente R_T:

$$R_T = \frac{T_U c}{J} \tag{3.24}$$

El esfuerzo ficticio R_T se denomina *módulo de ruptura a torsión.* Puede utilizarse para determinar el par último T_U de un eje hecho del mismo material pero de diferentes dimensiones, al despejar T_U de la ecuación (3.24). Ya que las distribuciones de esfuerzos real y lineal ficticias mostradas en la figura 3.32 deben dar el mismo valor de T_U para el par último, las áreas también deben tener el mismo momento de inercia con respecto al eje vertical. Por lo tanto, el módulo de ruptura R_T siempre será mayor que el valor real del esfuerzo cortante último τ_U.

En algunos casos, puede desearse determinar la distribución de esfuerzos y el par **T** correspondientes a un ángulo de torsión dado ϕ. Esto puede hacerse recordando la expresión obtenida en la sección 3.1B para la deformación cortante γ en términos de ϕ, ρ y la longitud L del eje:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

Con ϕ y L dados, a partir de la ecuación (3.2) puede determinarse el valor de γ correspondiente a cualquier valor dado de ρ. Utilizando el diagrama esfuerzo-deformación del material, es posible entonces obtener el valor correspondiente del esfuerzo cortante τ y graficar τ contra ρ. Una vez obtenida la distribución del esfuerzo cortante, el par **T** puede determinarse analítica o numéricamente.

*3.7 EJES CIRCULARES HECHOS DE UN MATERIAL ELASTOPLÁSTICO

Considere el caso idealizado de un *eje circular sólido hecho de un material elastoplástico* que tiene el diagrama esfuerzo-deformación a cortante que se muestra en la figura 3.33. Utilizando este diagrama, puede procederse como se indicó anteriormente y encontrar la distribución de esfuerzos en una sección del eje para cualquier valor del par **T**.

Mientras el esfuerzo cortante τ no exceda la resistencia a la cedencia τ_Y, se aplica la ley de Hooke, y la distribución de esfuerzos a través de la sección es lineal (figura 3.34*a*), y $\tau_{\text{máx}}$ está dado por

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

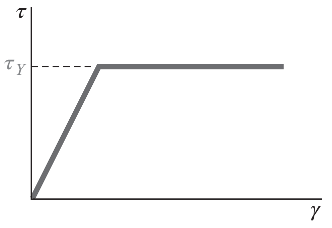


Figura 3.33 Diagrama de esfuerzo-deformación elastoplástico.

Al aumentar el par, $\tau_{\text{máx}}$ finalmente alcanza el valor τ_Y (figura 3.34*b*). Al sustituir este valor en la ecuación (3.9) y despejando el valor correspondiente del par T_Y al inicio de la cedencia:

$$T_Y = \frac{J}{c}\tau_Y \tag{3.25}$$

Este valor es el *par de torsión máximo elástico*, ya que es el máximo par para el que la deformación permanece completamente elástica. Para un eje circular sólido $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$, se tiene que

$$T_Y = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_Y \tag{3.26}$$

Al incrementarse el par aún más, se desarrolla una región plástica en el eje, alrededor de un núcleo elástico de radio ρ_Y (figura 3.34*c*). En la región plástica el esfuerzo es uniformemente igual a τ_Y, mientras que en el núcleo elástico el esfuerzo varía linealmente con ρ y puede expresarse como

$$\tau = \frac{\tau_Y}{\rho_Y}\rho \tag{3.27}$$

Al aumentar T, la región plástica se expande hasta que, en el límite, la deformación es completamente plástica (figura 3.34*d*).

La ecuación (3.23) se utiliza para determinar el par T correspondiente a un radio dado ρ_Y del núcleo elástico. Al recordar que τ está dado por la ecuación (3.27) para $0 \leq \rho \leq \rho_Y$, y es igual a τ_Y para $\rho_Y \leq \rho \leq c$,

$$T = 2\pi\int_0^{\rho_Y} \rho^2\left(\frac{\tau_Y}{\rho_Y}\rho\right)d\rho + 2\pi\int_{\rho_Y}^{c} \rho^2 \tau_Y \, d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho_Y^3\tau_Y + \frac{2}{3}\pi c^3\tau_Y - \frac{2}{3}\pi\rho_Y^3\tau_Y$$

$$T = \frac{2}{3}\pi c^3 \tau_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \tag{3.28}$$

o, según la ecuación (3.26),

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \tag{3.29}$$

donde T_Y es el par de torsión máximo elástico. Como ρ_Y se acerca a cero, el par se aproxima al valor limitante

$$T_p = \frac{4}{3}T_Y \tag{3.30}$$

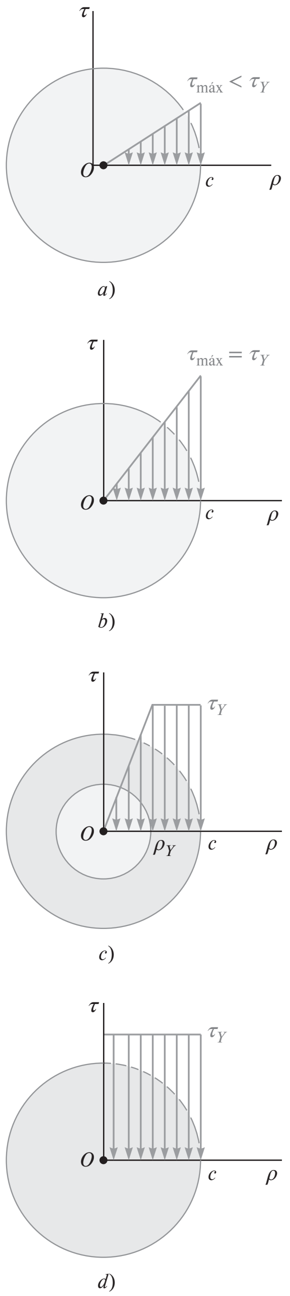


Figura 3.34 Distribuciones de esfuerzo para un eje elastoplástico en diferentes estados de carga: *a*) elástico, *b*) cedencia inminente, *c*) cedencia parcial, *d*) cedencia total.

Este valor del par, que corresponde a la deformación completamente plástica (figura 3.34*d*), es el *par de torsión plástico* del eje. Note que la ecuación (3.30) es válida solo para un *eje circular sólido hecho de un material elastoplástico.*

Como la distribución de la *deformación* a través de la sección permanece lineal después del inicio de la cedencia, la ecuación (3.2) sigue siendo válida y puede utilizarse para expresar el radio ρ_Y del núcleo elástico en términos del ángulo de torsión ϕ. Si ϕ es suficientemente grande para causar una deformación plástica, el radio ρ_Y del núcleo elástico se obtiene igualando γ a la deformación de cedencia γ_Y en la ecuación (3.2) y despejando para el valor correspondiente ρ_Y de la distancia ρ.

$$\rho_Y = \frac{L\gamma_Y}{\phi} \tag{3.31}$$

Al usar el ángulo de torsión al inicio de la cedencia ϕ_Y (es decir, cuando $\rho_Y = c$) y haciendo a $\phi = \phi_Y$ y a $\rho_Y = c$ en la ecuación (3.31), se tiene que

$$c = \frac{L\gamma_Y}{\phi_Y} \tag{3.32}$$

Al dividir la ecuación (3.31) entre la (3.32) —miembro a miembro— se obtiene la siguiente relación:†

$$\frac{\rho_Y}{c} = \frac{\phi_Y}{\phi} \tag{3.33}$$

Si se introduce la expresión obtenida para ρ_Y/c en la ecuación (3.29), el par T como función del ángulo de torsión ϕ es,

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\phi_Y^3}{\phi^3}\right) \tag{3.34}$$

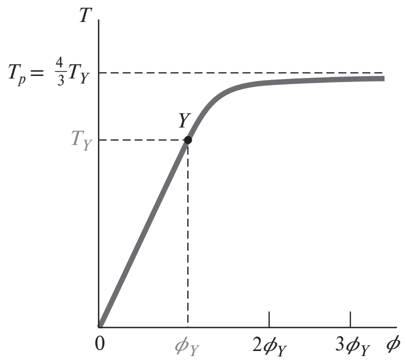


Figura 3.35 Relación de carga-desplazamiento para un material elastoplástico.

donde T_Y y ϕ_Y son el par y el ángulo de torsión al inicio de la cedencia, respectivamente. Observe que la ecuación (3.34) solo puede emplearse para valores de ϕ mayores que ϕ_Y. Para $\phi < \phi_Y$, la relación entre T y ϕ es lineal y está dada por la ecuación (3.15). Al combinar ambas ecuaciones, se obtiene la gráfica de T contra ϕ representada en la figura 3.35. Al aumentar ϕ indefinidamente, T se aproxima al valor límite $T_p = \frac{4}{3}T_Y$ correspondiente al caso de una zona plástica completamente desarrollada (figura 3.34*d*). A pesar de que el valor T_p no puede alcanzarse en realidad, la ecuación (3.34) indica que se aproxima rápidamente cuando aumenta ϕ. Para $\phi = 2\phi_Y$, T está cerca de 3% de T_p, y para $\phi = 3\phi_Y$, alrededor de 1%.

Puesto que la gráfica de T contra ϕ obtenida para un material elastoplástico idealizado (figura 3.35) difiere en gran medida del diagrama esfuerzo-deformación a cortante (figura 3.33), está claro que el diagrama esfuerzo-deformación a cortante de un material real no puede obtenerse directamente de un ensayo de torsión llevado a cabo en una barra sólida circular hecha de dicho material. Sin embargo, un diagrama bastante exacto puede obtenerse de un ensayo de torsión si una porción de la probeta utilizada incorpora un tubo circular delgado.‡ De hecho, el esfuerzo cortante tendrá un valor constante τ en esa porción. Por lo tanto, la ecuación (3.1) se reduce a

$$T = \rho A \tau$$

donde ρ es el radio promedio del tubo y A el área de su sección transversal. El esfuerzo cortante es proporcional al par de torsión, y τ puede calcularse con facilidad de los valores correspondientes de T. La deformación cortante γ correspondiente puede obtenerse de la ecuación (3.2) y de los valores de ϕ y L medidos en la porción tubular de la probeta.

† La ecuación (3.33) se aplica a cualquier material dúctil con un punto de cedencia bien definido, ya que su deducción es independiente de la forma del diagrama de esfuerzo-deformación más allá del punto de cedencia.

‡ Para minimizar la posibilidad de falla por pandeo, la probeta deberá ser hecha de tal manera que la longitud de la porción tubular no sea más larga que su diámetro.

Aplicación de conceptos 3.8

Un eje circular sólido de 1.2 m de longitud y 50 mm de diámetro, se somete a un par de torsión de 4.60 kN · m en cada extremo (figura 3.36). Suponiendo que el eje es de un material elastoplástico con una resistencia de cedencia al corte de 150 MPa y un módulo de rigidez de 77 GPa, determine *a*) el radio del núcleo elástico, *b*) el ángulo de torsión del eje.

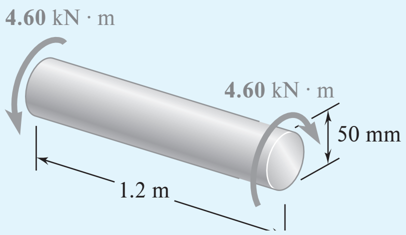


Figura 3.36 Eje circular cargado.

a) Radio del núcleo elástico. Se determina el par T_Y al inicio de la cedencia. Al utilizar la ecuación (3.25) con $\tau_Y = 150$ MPa, $c = 25$ mm y

$$J = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(25 \times 10^{-3}\ \text{m})^4 = 614 \times 10^{-9}\ \text{m}^4$$

se escribe

$$T_Y = \frac{J\tau_Y}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9}\ \text{m}^4)(150 \times 10^6\ \text{Pa})}{25 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 3.68\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Al despejar $(\rho_Y/c)^3$ de la ecuación (3.29) y sustituir los valores de T y de T_Y, se tiene

$$\left(\frac{\rho_Y}{c}\right)^3 = 4 - \frac{3T}{T_Y} - 4 - \frac{3(4.60\ \text{kN}\cdot\text{m})}{3.68\ \text{kN}\cdot\text{m}} = 0.250$$

$$\frac{\rho_Y}{c} = 0.630 \qquad \rho_Y = 0.630(25\ \text{mm}) = 15.8\ \text{mm}$$

b) Ángulo de torsión. El ángulo de torsión ϕ_Y se determina al inicio de la cedencia de la ecuación (3.15) como

$$\phi_Y = \frac{T_Y L}{JG} = \frac{(3.68 \times 10^3\ \text{N}\cdot\text{m})(1.2\ \text{m})}{(614 \times 10^{-9}\ \text{m}^4)(77 \times 10^9\ \text{Pa})} = 93.4 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

Al despejar ϕ de la ecuación (3.33) y al sustituir los valores obtenidos para ϕ_Y y ρ_Y/c, se escribe

$$\phi = \frac{\phi_Y}{\rho_Y/c} = \frac{93.4 \times 10^{-3}\ \text{rad}}{0.630} = 148.3 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

o

$$\phi = (148.3 \times 10^{-3}\ \text{rad})\left(\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}}\right) = 8.50°$$

*3.8 ESFUERZOS RESIDUALES EN EJES CIRCULARES

En las dos secciones precedentes se estudió que una región plástica se desarrollará en un eje sometido a un par de torsión suficientemente grande, y que el esfuerzo cortante τ en cualquier punto dado de la región plástica puede obtenerse del diagrama de esfuerzo-deformación a cortante de la figura 3.30. Si se retira el par, la reducción de esfuerzo resultante y de deformación unitaria en el punto considerado tendrá lugar a lo largo de una línea recta (figura 3.37). Como se verá posteriormente en esta sección, el valor final del esfuerzo no será, en general, cero. Habrá un esfuerzo residual en la mayoría

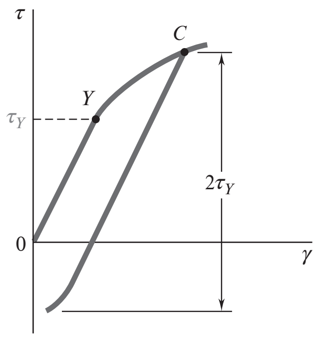


Figura 3.37 Diagrama de esfuerzo-deformación a cortante para una carga que pasa la cedencia, seguida de una descarga hasta que ocurre la cedencia por compresión.

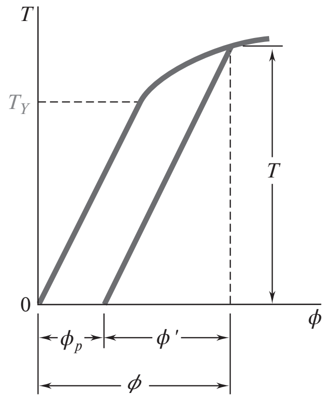


Figura 3.38 Respuesta par de torsión-ángulo de torsión para una carga que pasa la cedencia, seguida de una descarga.

de los puntos, que podrá ser positivo o negativo. Se observa que, como en el caso del esfuerzo normal, el esfuerzo cortante continuará decreciendo hasta que haya alcanzado un valor igual a su valor máximo en C menos el doble de la resistencia de cedencia del material.

Considere de nuevo el material elastoplástico idealizado que se muestra en el diagrama esfuerzo-deformación a cortante de la figura 3.33. Suponiendo que la relación entre τ y γ en cualquier punto del eje permanece lineal mientras el esfuerzo no decrezca por más de $2\tau_Y$, puede utilizarse la ecuación (3.15) para obtener el ángulo en el cual el eje regresa a su forma original al disminuir el par a cero. Como resultado, la descarga del eje será representada por una línea recta en el diagrama T-ϕ (figura 3.38). Observe que el ángulo de torsión no regresa a cero después de que se ha retirado el par. De hecho, la carga y descarga del eje resultan en una deformación permanente caracterizada por

$$\phi_p = \phi - \phi' \tag{3.35}$$

donde ϕ corresponde a la fase de carga y puede obtenerse de T al despejar la ecuación (3.34), y donde ϕ' corresponde a la fase de descarga y puede obtenerse de la ecuación (3.15).

Los esfuerzos residuales en un material elastoplástico se obtienen al aplicar el principio de superposición (sección 2.13). Considere, por una parte, los esfuerzos debidos a la aplicación del par dado **T** y, por otra, los esfuerzos debidos al par igual y opuesto que se aplica para descargar el eje. El primer grupo de esfuerzos refleja el comportamiento elastoplástico del material durante la fase de carga (figura 3.39*a*). El

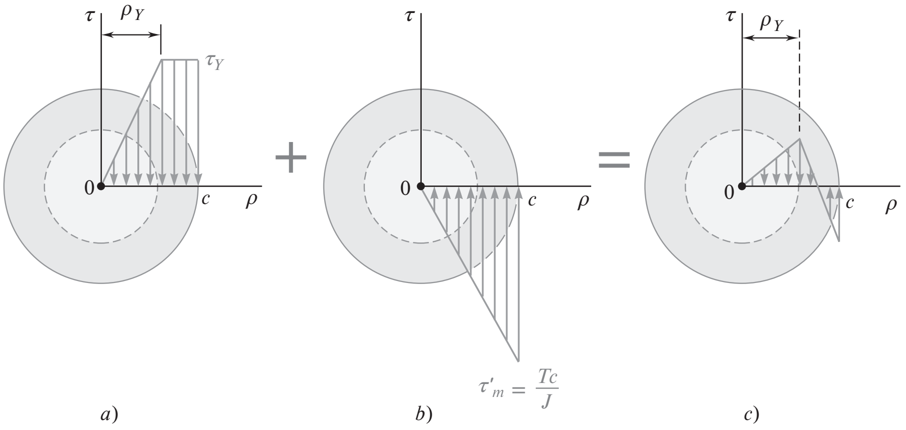


Figura 3.39 Distribuciones de esfuerzo para la descarga de ejes con material elastoplástico.

segundo grupo tiene el comportamiento lineal del mismo material durante la fase de descarga (figura 3.39*b*). Sumando los dos grupos de esfuerzos, se obtiene la distribución de esfuerzos residuales en el eje (figura 3.39*c*).

En la figura 3.39*c* se observa que algunos de los esfuerzos residuales tienen el mismo sentido que los esfuerzos originales, mientras que otros tienen el sentido opuesto. Esto era de esperarse ya que, de acuerdo con la ecuación (3.1), la relación

$$\int \rho(\tau\, dA) = 0 \qquad (3.36)$$

debe verificarse después de que se retira el par.

Aplicación de conceptos 3.9

Para el eje de la Aplicación de conceptos 3.8, mostrado en la figura 3.36, determine *a*) el ángulo de torsión permanente, *b*) la distribución de los esfuerzos residuales después de que se ha retirado un par de 4.60 kN · m.

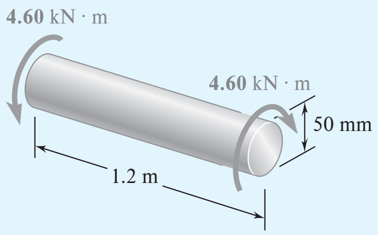


Figura 3.36 (repetida) Eje circular cargado.

***a*) Torsión permanente.** De la Aplicación de conceptos 3.8, recuerde que el ángulo de torsión correspondiente al par dado es $\phi = 8.50°$. El ángulo ϕ' a través del que el eje recupera su forma original al retirarse el par se obtiene de la ecuación (3.15). Al sustituir los datos dados,

$$T = 4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$L = 1.2 \text{ m}$$
$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa}$$

y $J = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, se tiene

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}$$
$$= 116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

o

$$\phi' = (116.8 \times 10^{-3} \text{ rad})\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 6.69°$$

El ángulo de torsión permanente es

$$\phi_p = \phi - \phi' = 8.50° - 6.69° = 1.81°$$

***b*) Esfuerzos residuales.** Recuerde, de la Aplicación de conceptos 3.8, que la resistencia a la cedencia es $\tau_Y = 150$ MPa y que el radio del núcleo elástico que corresponde al par de torsión es $\rho_Y = 15.8$ mm. La distribución de esfuerzos en el eje cargado es, por lo tanto, mostrada en la figura 3.40*a*.

La distribución de esfuerzos debida al par opuesto de 4.60 kN · m requerido para descargar el eje es lineal, como se observa en la figura 3.40*b*. El máximo esfuerzo en la distribución de los esfuerzos inversos se determina de la ecuación (3.9):

$$\tau'_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$
$$= 187.3 \text{ MPa}$$

Al superponer las dos distribuciones de esfuerzos, se obtienen los esfuerzos residuales ilustrados en la figura 3.40*c*. Aun cuando los esfuerzos inversos excedan la resistencia a la cedencia τ_Y, la suposición de una distribución lineal para estos esfuerzos es válida, ya que no exceden $2\tau_Y$.

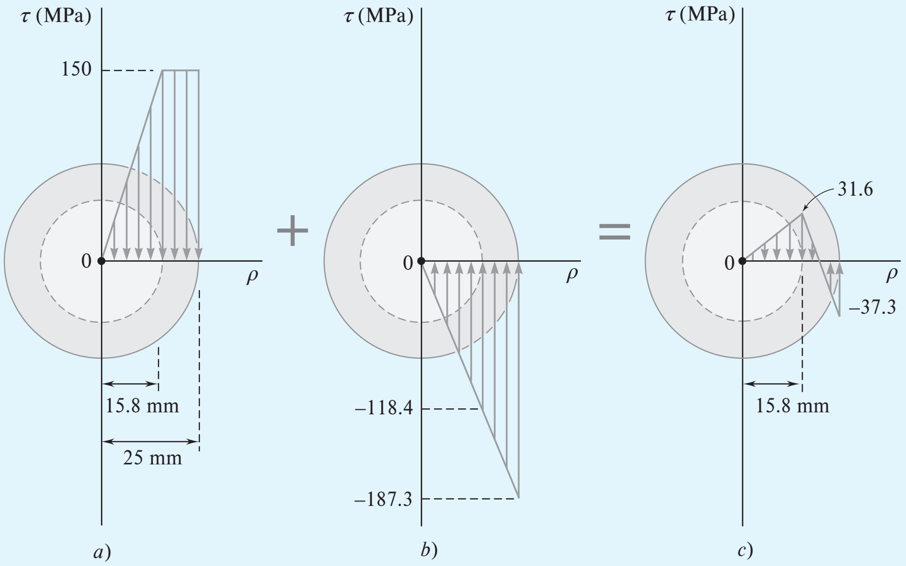


Figura 3.40 Superposición de las distribuciones de esfuerzo para obtener esfuerzos residuales.

Problema modelo 3.7

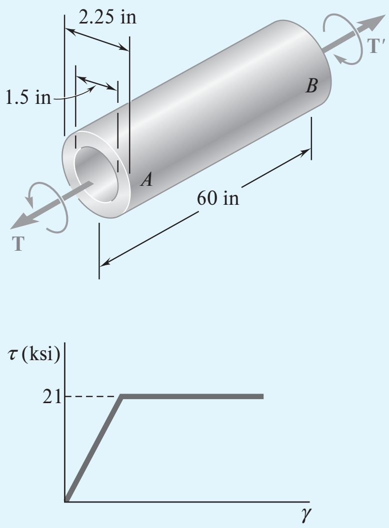


Figura 1 Diagrama de esfuerzo-deformación elastoplástico.

El eje *AB* es de un acero dulce que se supone elastoplástico con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $\tau_Y = 21$ ksi. Un par **T** se aplica y su magnitud se incrementa gradualmente. Determine la magnitud de **T** y el ángulo de torsión correspondiente *a*) cuando ocurre primero la cedencia, *b*) cuando la deformación es completamente plástica.

ESTRATEGIA: Las propiedades geométricas de la sección transversal y la distribución del esfuerzo resultante se utilizan para determinar el par. En seguida se determina el ángulo de torsión utilizando la ecuación (3.2), aplicada a la porción de la sección transversal que aún es elástica.

MODELAR y ANALIZAR:

La propiedades geométricas de la sección transversal son

$$c_1 = \tfrac{1}{2}(1.5 \text{ in}) = 0.75 \text{ in} \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}(2.25 \text{ in}) = 1.125 \text{ in}$$

$$J = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi[(1.125 \text{ in})^4 - (0.75 \text{ in})^4] = 2.02 \text{ in}^4$$

***a*) Inicio de la cedencia.** Para $\tau_{\text{máx}} = \tau_Y = 21$ ksi (figuras 1 y 2), se encuentra

$$T_Y = \frac{\tau_Y J}{c_2} = \frac{(21 \text{ ksi})(2.02 \text{ in}^4)}{1.125 \text{ in}}$$

$$T_Y = 37.7 \text{ kip} \cdot \text{in} \quad \blacktriangleleft$$

Al hacer $\rho = c_2$ y $\gamma = \gamma_Y$ en la ecuación (3.2) y despejando ϕ, se obtiene el valor de ϕ_Y:

$$\phi_Y = \frac{\gamma_Y L}{c_2} = \frac{\tau_Y L}{c_2 G} = \frac{(21 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in})}{(1.125 \text{ in})(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.100 \text{ rad}$$

$$\phi_Y = 5.73° \quad ◀$$

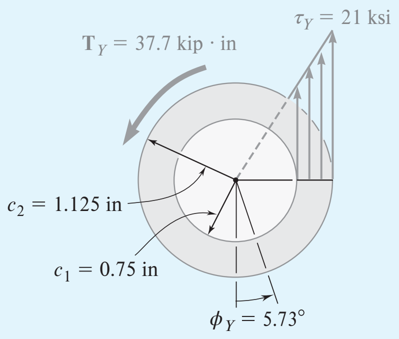


Figura 2 Distribución del esfuerzo cortante en la cedencia inminente.

***b*) Deformación completamente plástica.** Cuando la zona plástica alcanza la superficie interna (figura 3), los esfuerzos están distribuidos uniformemente. Al usar la ecuación (3.23), se escribe

$$T_p = 2\pi\tau_Y \int_{c_1}^{c_2} \rho^2 \, d\rho = \tfrac{2}{3}\pi\tau_Y(c_2^3 - c_1^3)$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi(21 \text{ ksi})[(1.125 \text{ in})^3 - (0.75 \text{ in})^3]$$

$$T_p = 44.1 \text{ kip} \cdot \text{in} \quad ◀$$

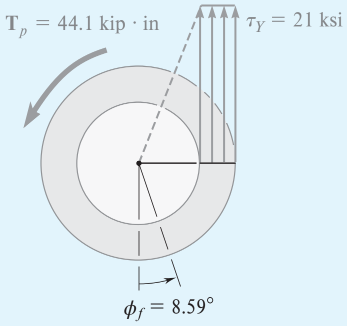


Figura 3 Distribución del esfuerzo cortante en un estado completamente plástico.

Cuando ocurre la cedencia por primera vez en la superficie interna, la deformación es completamente plástica; de la ecuación (3.2), se tiene

$$\phi_f = \frac{\gamma_Y L}{c_1} = \frac{\tau_Y L}{c_1 G} = \frac{(21 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in})}{(0.75 \text{ in})(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.150 \text{ rad}$$

$$\phi_f = 8.59° \quad ◀$$

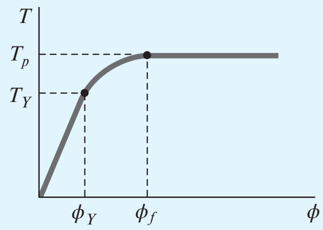


Figura 4 Diagrama de par de torsión-ángulo de torsión para un eje hueco.

REVISAR y PENSAR: Para ángulos mayores de torsión el par de torsión permanece constante; el diagrama $T\phi$ del eje es como se muestra en la (figura 4).

Problema modelo 3.8

Para el eje del problema modelo 3.7, determine los esfuerzos residuales y el ángulo de torsión permanente después de que el par $T_P = 44.1$ kip · in ha sido retirado.

ESTRATEGIA: En el problema modelo 3.7, se inició con el tubo cargado por el par de torsión totalmente plástico. Se le aplica un par igual y opuesto, sabiendo que los esfuerzos inducidos por esta descarga son elásticos. Al combinar los esfuerzos, se

obtienen los esfuerzos residuales y el cambio en el ángulo de torsión es completamente elástico.

MODELAR y ANALIZAR:

Recuerde que cuando la zona plástica alcanzó primero la superficie interna, el par aplicado fue $T_p = 44.1$ kip · in y el ángulo de torsión correspondiente fue $\phi_f = 8.59°$. Estos valores se muestran en la figura 1*a*.

Descarga elástica. El eje se descarga aplicando un par de 44.1 kip · in en el sentido mostrado en la figura 1*b*. Durante esta descarga, el comportamiento del material es lineal. Del problema modelo 3.7 los valores encontrados para c_1, c_2 y J, se obtienen los siguientes esfuerzos y ángulo de torsión:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} = \frac{(44.1 \text{ kip}\cdot\text{in})(1.125 \text{ in})}{2.02 \text{ in}^4} = 24.56 \text{ ksi}$$

$$\tau_{\text{mín}} = \tau_{\text{máx}}\frac{c_1}{c_2} = (24.56 \text{ ksi})\frac{0.75 \text{ in}}{1.125 \text{ in}} = 16.37 \text{ ksi}$$

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(44.1 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in})}{(2.02 \text{ in}^4)(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.1170 \text{ rad} = 6.70°$$

Esfuerzos residuales y torsión permanente. Los resultados de la carga (figura 1*a*) y de la descarga (figura 1*b*) se superponen (figura 1*c*) para obtener los esfuerzos residuales y el ángulo de torsión permanente ϕ_p.

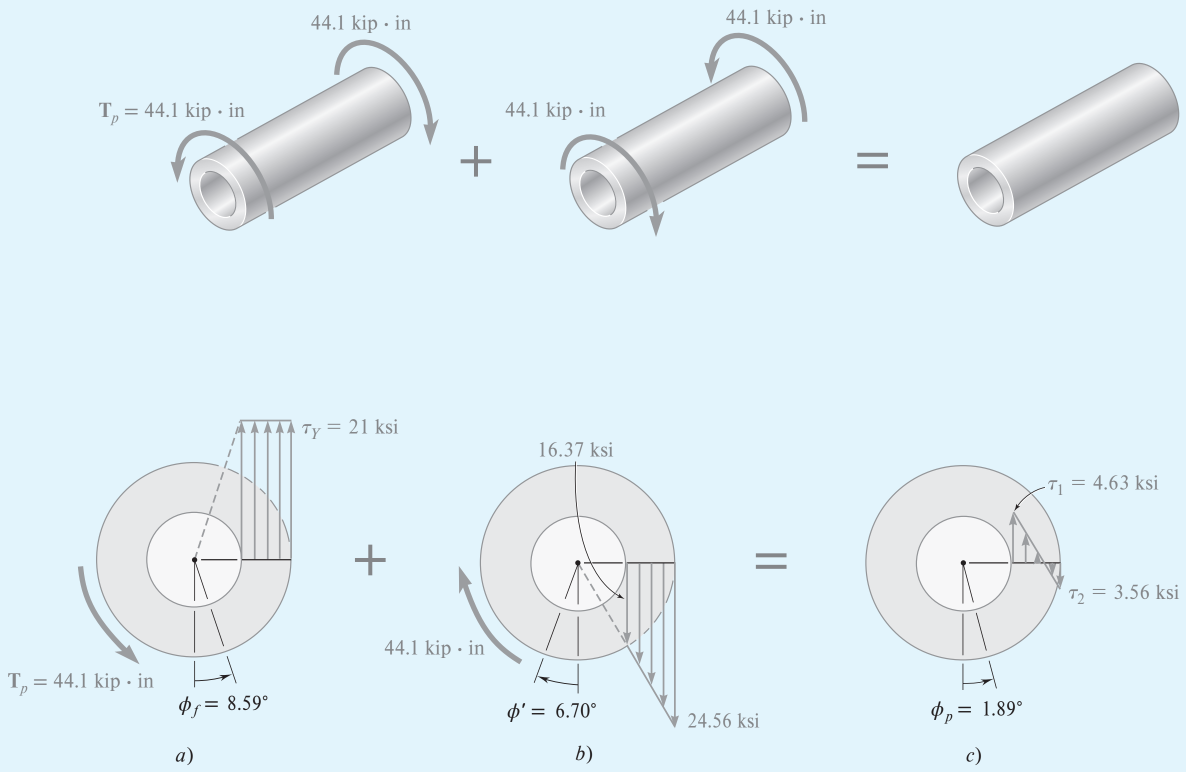


Figura 1 Superposición de distribuciones de esfuerzo para obtener esfuerzos residuales.

Problemas

3.92 El eje circular sólido que se muestra en la figura es de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_Y = 145$ MPa. Determine la magnitud T de los pares de torsión aplicados cuando la zona plástica tiene una profundidad de *a*) 16 mm, *b*) 24 mm.

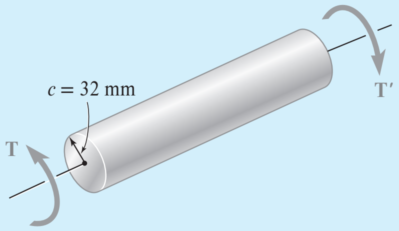


Figura P3.92

3.93 Una varilla sólida de 1.25 in de diámetro es de un material elastoplástico con $\tau_Y = 5$ ksi. Si se sabe que el núcleo elástico de la varilla tiene un diámetro de 1 in, determine la magnitud del par de torsión **T** aplicado.

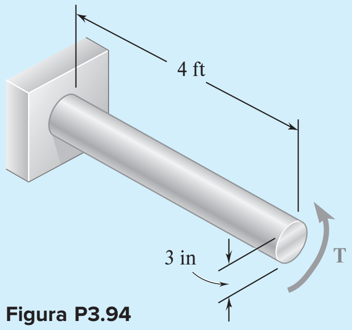


Figura P3.94

3.94 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $\tau_Y = 21$ ksi. Determine el esfuerzo cortante máximo y el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T = 100$ kip · in, *b*) $T = 140$ kip · in.

3.95 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $G = 77.2$ GPa y $\tau_Y = 145$ MPa. Determine el esfuerzo cortante máximo y el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T = 600$ N · m, *b*) $T = 1\,000$ N · m.

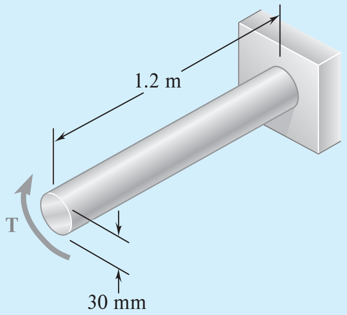


Figura P3.95 y *P3.96*

3.96 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $\tau_Y = 145$ MPa. Determine el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión igual a 1.1 T_Y, donde T_Y es la magnitud del par de torsión al inicio de la cedencia.

3.97 Se observa que un prensapapeles (clip) enderezado puede torcerse varias revoluciones con un par de aproximadamente 60 N · m. Si se sabe que el diámetro del alambre del prensapapeles es de 0.9 mm, determine el valor aproximado del esfuerzo a la cedencia del acero.

3.98 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $G = 77.2$ GPa y $\tau_Y = 145$ MPa. Determine el ángulo de torsión causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T = 600$ N · m, *b*) $T = 1\,000$ N · m.

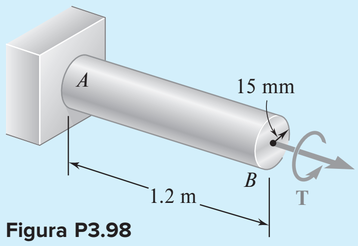


Figura P3.98

3.99 Para el eje circular sólido del problema 3.94, determine el ángulo de torsión causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud de *a*) $T = 80$ kip · in, *b*) $T = 130$ kip · in.

3.100 Para el eje sólido del problema 3.98, determine *a*) la magnitud del par de torsión **T** requerido para torcer el eje a través de un ángulo de 15°, *b*) el radio del núcleo elástico correspondiente.

3.101 Un eje sólido de 3 pies de largo tiene un diámetro de 2.5 in y está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $\tau_Y = 21$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Determine el par de torsión requerido para torcer el eje a través de un ángulo de *a*) 2.5°, *b*) 5°.

3.102 Un eje circular sólido de 18 mm de diámetro está hecho de un material que se supone elastoplástico con $\tau_Y = 145$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Para un tramo del eje de 1.2 m de longitud, encuentre el máximo esfuerzo cortante y el ángulo de torsión causado por un par de torsión de 200 N · m.

3.103 Un eje circular sólido de 0.75 in de diámetro está hecho de un material que se supone elastoplástico con $\tau_Y = 20$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Para un tramo del eje de 4 ft de longitud, determine el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión causados por un par de torsión de 1 800 lb · in.

3.104 El eje *AB* está hecho de un material que es elastoplástico con $\tau_Y = 90$ MPa y $G = 30$ GPa. Para la carga mostrada, determine *a*) el radio del núcleo elástico del eje, *b*) el ángulo de torsión en el extremo *B*.

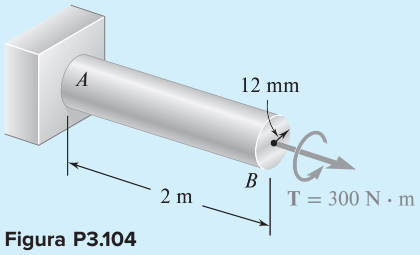


Figura P3.104

3.105 Una varilla circular sólida está hecha de un material que se supone elastoplástico. Si T_Y y ϕ_Y son, respectivamente, el par de torsión y el ángulo de torsión al inicio de la cedencia, determine el ángulo de torsión si el par se incrementa a *a*) $T = 1.1\ T_Y$, *b*) $T = 1.25\ T_Y$, *c*) $T = 1.3\ T_Y$.

3.106 Un eje hueco de acero tiene 0.9 m de longitud y la sección transversal que muestra la figura. Se supone que el acero es elastoplástico con $\tau_Y = 180$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Determine *a*) el ángulo de torsión para el que la sección se vuelve completamente plástica, *b*) la magnitud correspondiente del par aplicado.

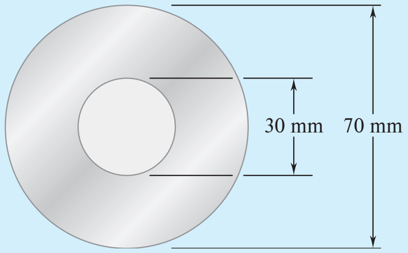


Figura P3.106 y P3.107

3.107 Un eje hueco de acero tiene 0.9 m de longitud y tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Se supone que el acero es elastoplástico con $\tau_Y = 180$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Determine el par de torsión aplicado y el co-

rrespondiente ángulo de torsión *a*) al inicio de la cedencia, *b*) cuando la zona plástica tiene 10 mm de profundidad.

3.108 Una varilla de acero se maquina en la forma que se muestra en la figura para formar un eje sólido ahusado, al cual se le aplican pares de torsión con magnitud $T = 75$ kip · in. Se supone que el acero es elastoplástico con $\tau_Y = 21$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el radio del núcleo plástico en la porción *AB* del eje, *b*) la longitud de la porción *CD* que permanece completamente elástica.

3.109 Si el par de torsión aplicado al eje ahusado del problema 3.108 se incrementa lentamente, determine *a*) la magnitud *T* de los pares máximos que pueden aplicarse al eje, *b*) la longitud de la porción *CD* que permanece completamente elástica.

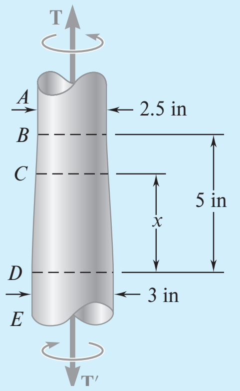


Figura *P3.108* y *P3.109*

3.110 Una varilla sólida de latón con 1.2 in de diámetro se somete a un par de torsión que produce en la varilla un esfuerzo cortante máximo de 13.5 ksi. Utilizando el diagrama τ-γ que se muestra en la figura para la varilla de latón empleada, determine *a*) la magnitud del par de torsión, *b*) el ángulo de torsión en un tramo de la varilla de 24 in de longitud.

3.111 Una varilla sólida de latón con 0.8 in de diámetro y 30 in de longitud se tuerce a un ángulo de 10°. Usando el diagrama τ-γ que se muestra en la figura para la varilla de latón usada, determine *a*) la magnitud del par de torsión aplicado a la varilla, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la varilla.

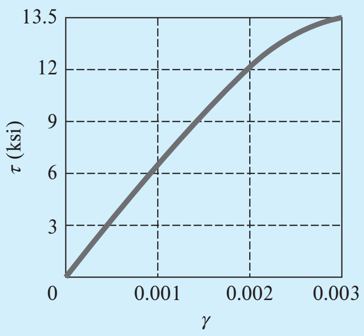
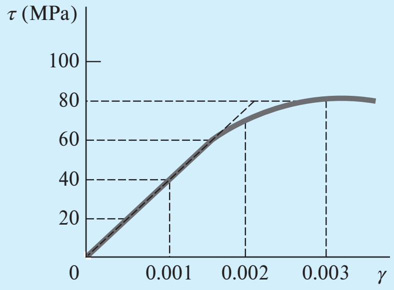


Figura P3.110 y P3.111

3.112 Un cilindro con 50 mm de diámetro está hecho de un latón que tiene el diagrama de esfuerzo-deformación mostrado en la figura. Si se sabe que el ángulo de torsión es de 5° en una longitud de 725 mm, determine por medios aproximados la magnitud *T* del par de torsión aplicado al eje.



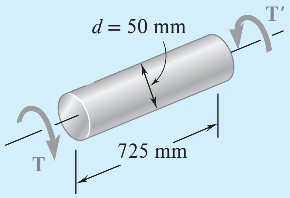


Figura P3.112

3.113 Tres de los puntos sobre el diagrama no lineal de esfuerzo-deformación usado en el problema 3.112 son (0, 0), (0.0015, 55 MPa) y (0.003, 80 MPa). Al ajustar el polinomio $T = A + B\gamma + C\gamma^2$ a través de estos puntos, se obtiene la siguiente relación aproximada.

$$T = 46.7 \times 10^9\gamma - 6.67 \times 10^{12}\gamma^2$$

Resuelva el problema 3.112 usando esta relación y las ecuaciones (3.2) y (3.23).

3.114 La varilla perforadora circular *AB* está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_Y = 22$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Si se sabe que a la varilla se le aplica un par de torsión con $T = 75$ kip · in y después se retira, determine el esfuerzo cortante residual máximo en la varilla.

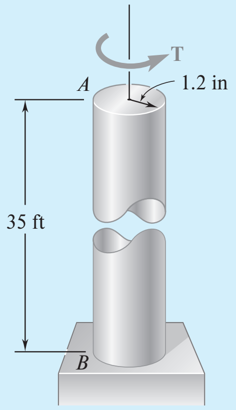


Figura P3.114

3.115 En el problema 3.114, determine el ángulo de torsión permanente de la varilla.

3.116 El eje sólido que se muestra en la figura es de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_Y = 145$ MPa y $G = 77.2$ GPa. El par de torsión se incrementa en magnitud hasta que el eje ha sido torcido a 6°; después se retira el par de torsión. Determine *a*) la magnitud y localización del esfuerzo cortante residual máximo, *b*) el ángulo de torsión permanente.

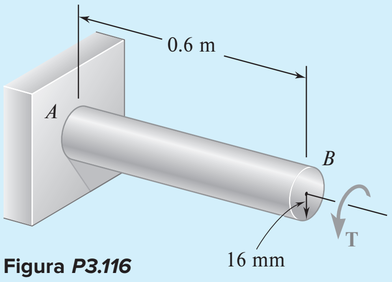


Figura *P3.116*

3.117 Después de que el eje sólido del problema 3.116 se ha cargado y descargado como se describe en dicho problema, se aplica un par de torsión $\mathbf{T}_1$ con sentido opuesto al par de torsión original **T** que se aplicó al eje. Suponiendo que no hay cambio en el valor de ϕ_Y, determine el ángulo de torsión ϕ_1 para el que se inicia la cedencia en esta segunda carga y compárela con el ángulo ϕ_Y para el que el eje comenzó a ceder en la carga original.

3.118 El eje hueco que se muestra en la figura está hecho de un material que se supone elastoplástico con $\tau_Y = 145$ MPa y $G = 77.2$ GPa. La magnitud T de los pares de torsión se incrementa lentamente hasta el momento en que la zona plástica alcanza la superficie interna del eje, entonces los pares de torsión se retiran. Determine la magnitud y ubicación del esfuerzo cortante residual máximo en la varilla.

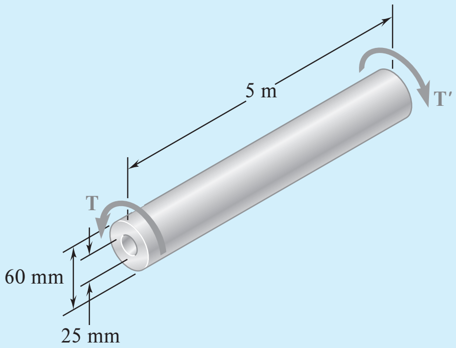


Figura P3.118

3.119 En el problema 3.118, determine el ángulo de torsión permanente de la varilla.

3.120 Un par de torsión **T** aplicado a una varilla sólida hecha de un material elastoplástico se incrementa hasta que la varilla se vuelve completamente plástica, y entonces se retira. *a*) Muestre que la distribución de esfuerzos residuales es como se representa en la figura. *b*) Determine la magnitud del par generado por los esfuerzos que actúan en la porción de la varilla localizada dentro de un círculo de radio c_0.

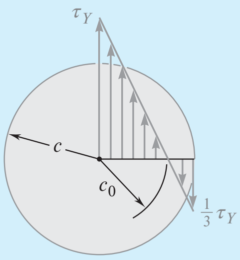


Figura P3.120

*3.9 TORSIÓN DE ELEMENTOS NO CIRCULARES

Las fórmulas obtenidas en la sección 3.1 para las distribuciones de deformación y de esfuerzo bajo una carga torsional se aplican solo a elementos con sección transversal circular. Su deducción se basó en la suposición de que la sección transversal del elemento permanecía plana y sin distorsionar. Este supuesto depende de la *simetría axial* del elemento (es decir, del hecho de que su apariencia permanece constante cuando se ve desde una posición fija y se rota alrededor de su eje un ángulo arbitrario).

Una barra cuadrada, por el contrario, mantiene su misma apariencia solo si se rota 90° o 180°. Siguiendo una línea de razonamiento similar al utilizado en la sección 3.1B, podría mostrarse que las diagonales de la sección transversal cuadrada de la barra y las líneas que unen los puntos medios de los lados de dicha sección permanecen rectas (figura 3.41). Sin embargo, debido a la falta de simetría axial de la barra, cualquier otra línea dibujada en su sección transversal se deformará cuando la barra se tuerza, y la sección transversal misma se torcerá fuera de su plano original.

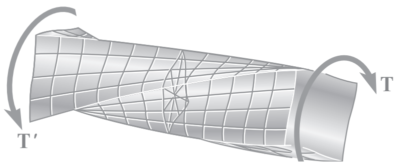


Figura 3.41 Torcimiento de un eje con sección transversal cuadrada.

Las ecuaciones (3.4) y (3.6) definen respectivamente las distribuciones de deformación y de esfuerzo en un eje circular elástico, pero no pueden utilizarse para elementos no circulares. Por ejemplo, sería erróneo suponer que el esfuerzo cortante en la sección transversal de una barra cuadrada varía linealmente con la distancia desde el eje de la barra y que es, por lo tanto, mayor en las esquinas de la sección transversal. El esfuerzo cortante en realidad es cero en estos puntos.

Considere un pequeño elemento cúbico ubicado en una esquina de la sección transversal de una barra cuadrada en torsión y seleccione los ejes coordenados paralelos a los bordes del elemento (figura 3.42*a*). Como la cara del elemento perpendicular al eje *y* es parte de la superficie libre de la barra, todos los esfuerzos en esta cara deben ser cero. Con referencia a la figura 3.42*b*, se escribe

$$\tau_{yx} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0 \tag{3.37}$$

Por la misma razón, todos los esfuerzos en la cara del elemento perpendicular al eje *z* deben ser cero, y

$$\tau_{zx} = 0 \qquad \tau_{zy} = 0 \tag{3.38}$$

De la primera de las ecuaciones (3.37) y de la primera de las ecuaciones (3.38), se sigue que

$$\tau_{xy} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \tag{3.39}$$

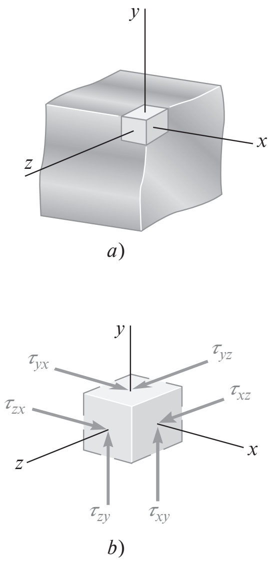


Figura 3.42 Elemento en la esquina de una barra cuadrada en torsión: *a*) ubicación del elemento en el eje y *b*) componentes potenciales del esfuerzo cortante sobre el elemento.

Por lo tanto, ambas componentes del esfuerzo cortante en la cara del elemento perpendicular al eje de la barra son cero. Se concluye que no hay esfuerzo cortante en las esquinas de la sección transversal de la barra.

Al torcer un modelo de caucho de una barra cuadrada, se verifica fácilmente que no ocurren deformaciones, ni esfuerzos, a lo largo de los bordes de la barra, mientras que las deformaciones máximas, y los esfuerzos máximos, ocurren a lo largo de la línea central de cada una de las caras de la barra (figura 3.43).

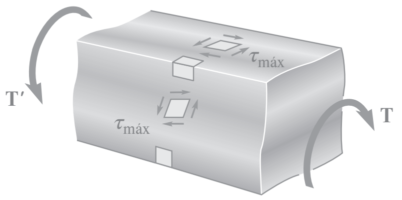


Figura 3.43 Elementos de esfuerzo en una barra cuadrada deformada y cargada en torsión.

La determinación de los esfuerzos en elementos no circulares sujetos a carga torsional está más allá del alcance de este libro. No obstante, los resultados obtenidos de la teoría matemática de la elasticidad para barras rectas con *sección transversal rectangular uniforme* se indicarán aquí por conveniencia.† Al denotar con L la longitud de la barra, con a y b, respectivamente, el lado más ancho y el más angosto de su sección transversal y con T la magnitud del par de torsión aplicado a la barra (figura 3.44), se encuentra que el máximo esfuerzo cortante ocurre a lo largo de la línea central de la cara *más ancha* de la barra y es igual a

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{c_1 a b^2} \tag{3.40}$$

† Vea S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1969, sección 109.

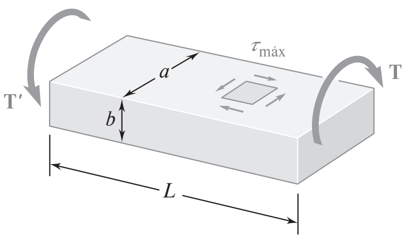


Figura 3.44 Eje con sección transversal rectangular que muestra la ubicación del esfuerzo cortante máximo.

Tabla 3.1 Coeficientes para barras rectangulares en torsión

a/b	c_1	c_2
1.0	0.208	0.1 406
1.2	0.219	0.1 661
1.5	0.231	0.1 958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

El ángulo de torsión puede expresarse como

$$\phi = \frac{TL}{c_2ab^3G} \tag{3.41}$$

Los coeficientes c_1 y c_2 dependen solo de la razón a/b y se dan en la tabla 3.1 para una cantidad de valores de dicha razón. Note que las ecuaciones (3.40) y (3.41) son válidas solo dentro del rango elástico.

La tabla 3.1 muestra que para $a/b \geq 5$, los coeficientes c_1 y c_2 son iguales. Puede demostrarse que para tales valores de a/b se tiene que

$$c_1 = c_2 = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630b/a) \qquad (para\ a/b \geq 5\ solamente) \tag{3.42}$$

La distribución de esfuerzos cortantes en un elemento no circular puede visualizarse con mayor facilidad utilizando la *analogía de la membrana.* Una membrana elástica homogénea unida a un marco fijo y sometida a una presión uniforme en uno de sus lados constituye un *análogo* de una barra en torsión (es decir, la determinación de la deformación de la membrana depende de la solución de la misma ecuación diferencial parcial que la determinación de los esfuerzos cortantes en la barra).† Más específicamente, si Q es un punto de la sección transversal de la barra y Q' el punto correspondiente de la membrana (figura 3.45), el esfuerzo cortante τ en Q tendrá la misma dirección que la tangente horizontal a la membrana en Q' y su magnitud será proporcional al máximo de pendiente de la membrana Q'.‡ Además, el par de torsión aplicado será proporcional al volumen entre la membrana y el plano del marco fijo. Para la membrana de la figura 3.45, que está unida a un marco rectangular, la pendiente más pronunciada ocurre en el punto medio N' del lado mayor del marco. Por lo tanto, se verifica que el máximo esfuerzo cortante en una barra de sección transversal rectangular ocurrirá en el punto medio N del lado mayor de esa sección.

La analogía de la membrana también puede usarse con eficacia para visualizar los esfuerzos cortantes en cualquier barra de sección transversal uniforme no circular. En particular, considere varios elementos de pared delgada con las secciones transversales que se muestran en la figura 3.46, que están sujetos al mismo par de torsión. Utilizando la analogía de la membrana como ayuda para visualizar los esfuerzos cortantes, se ad-

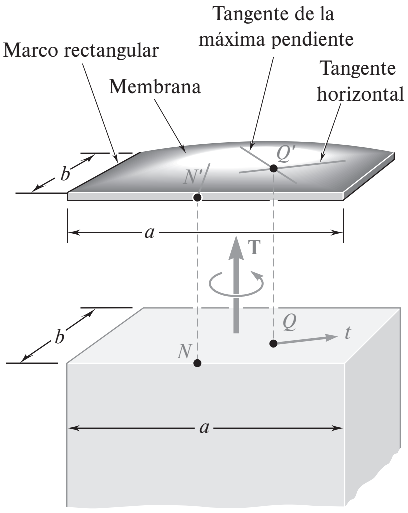


Figura 3.45 Aplicación de la analogía de la membrana a un eje con sección transversal rectangular.

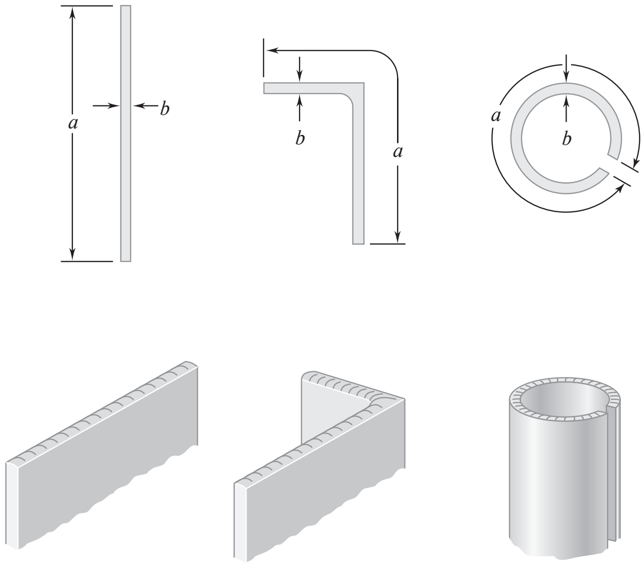


Figura 3.46 Analogía de la membrana para diversos elementos de pared delgada.

† *Ibid.* Vea la sección 107.

‡ Ésta es la pendiente medida en una dirección perpendicular a la tangente horizontal en Q'.

vierte que, ya que el mismo par se aplica a cada elemento, el mismo volumen estará localizado bajo cada membrana, y la máxima pendiente será casi la misma en cada caso. Así, para un elemento de pared delgada de espesor uniforme y forma arbitraria, el máximo esfuerzo cortante es el mismo que para una barra rectangular con un valor muy grande de a/b y puede ser determinado de la ecuación (3.40) con $c_1 = 0.333$.†

*3.10 EJES HUECOS DE PARED DELGADA

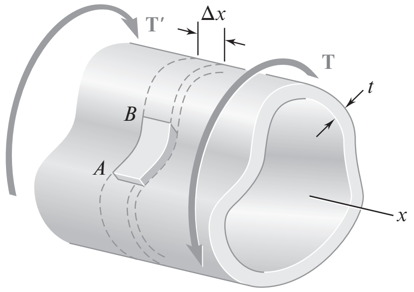


Figura 3.47 Eje hueco de pared delgada sometido a carga de torsión.

En la sección anterior se vio que la determinación de esfuerzos en elementos no circulares generalmente requiere del uso de métodos matemáticos avanzados. En el caso de ejes huecos no circulares de pared delgada, puede obtenerse una buena aproximación de la distribución de esfuerzos en el eje por medio de un cálculo sencillo. Considere un elemento cilíndrico hueco con sección *no circular* sujeto a una carga torsional (figura 3.47).‡ A pesar de que el espesor τ de la pared puede variar dentro de una sección transversal, se supondrá que permanece pequeño en comparación con las demás dimensiones del elemento. Ahora se desprende del elemento la porción coloreada de pared AB limitada por los dos planos a una distancia mutua Δx, y por dos planos longitudinales perpendiculares a la pared. Como la porción AB está en equilibrio, la suma de las fuerzas ejercidas sobre ella en la dirección longitudinal x debe ser cero (figura 3.48). Pero las únicas fuerzas involucradas son las fuerzas cortantes $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ ejercidas sobre los extremos de la porción AB. Por lo tanto,

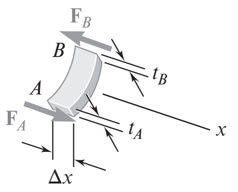


Figura 3.48 Segmento de un eje hueco de pared delgada.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_A - F_B = 0 \qquad (3.43)$$

Ahora se expresa F_A como el producto de esfuerzo cortante longitudinal τ_A sobre la cara pequeña en A y del área $t_A\,\Delta x$ de dicha cara:

$$F_A = \tau_A(t_A\,\Delta x)$$

A pesar de que el esfuerzo cortante es independiente de la coordenada x del punto considerado, puede variar a través de la pared; por lo tanto, τ_A representa el valor promedio del esfuerzo calculado a través de la pared. Al expresar F_B de manera similar y sustituir F_A y F_B en la ecuación (3.43), se escribe

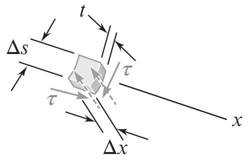


Figura 3.49 Pequeño elemento de esfuerzo del segmento.

$$\tau_A(t_A\,\Delta x) - \tau_B(t_B\,\Delta x) = 0$$

o

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B \qquad (3.44)$$

Ya que A y B se escogieron en forma arbitraria, la ecuación (3.44) expresa que el producto τt del esfuerzo cortante longitudinal τ y del espesor de la pared es una constante t a través del elemento. Al denotar este producto con q, se tiene

$$q = \tau t = \text{constante} \qquad (3.45)$$

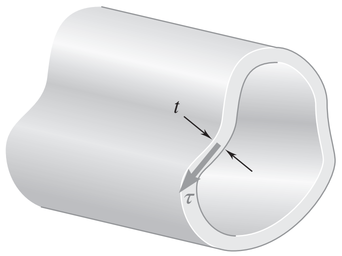


Figura 3.50 Dirección del esfuerzo cortante en la sección transversal.

Ahora se desprende un pequeño elemento de la porción AB de la pared (figura 3.49). Como las caras interior y exterior son parte de la superficie libre del miembro hueco, los esfuerzos en estas caras son iguales a cero. De las ecuaciones (1.21) y (1.22) de la sección 1.4, se tiene que las componentes de esfuerzo indicadas en las otras caras por flechas discontinuas son también cero, en tanto que las representadas por flechas sólidas son iguales. Así, el esfuerzo cortante en cualquier punto de un corte transversal del miembro hueco es paralelo a la superficie de la pared (figura 3.50) y su valor promedio calculado a través de la pared satisface la ecuación (3.45).

† También pudo haberse mostrado que el ángulo de torsión puede determinarse a partir de la ecuación (3.41) con $c_2 = 0.333$.

‡ La pared del elemento debe encerrar una sola cavidad y no debe estar ranurada. En otras palabras, el elemento deberá ser topológicamente equivalente a un eje circular hueco.

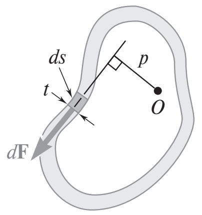


Figura 3.51 Fuerza cortante en la pared.

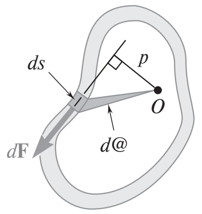


Figura 3.52 Área infinitesimal usada para encontrar el par de torsión resultante.

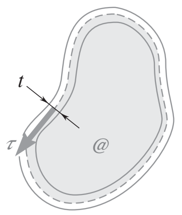


Figura 3.53 Área para el flujo cortante por torsión.

En este punto puede hacerse una analogía entre la distribución de los esfuerzos cortantes τ en la sección transversal de un eje hueco de pared delgada y la distribución de las velocidades v en agua que fluye en un canal cerrado de profundidad unitaria y de ancho variable. A pesar de que la velocidad v del agua varía de un punto a otro dependiendo de la variación del ancho t del canal, la tasa de flujo, $q = vt$, permanece constante en el canal, del mismo modo que τt en la ecuación (3.45). Debido a esto, el producto $q = \tau t$ se conoce como el *flujo cortante por torsión* en la pared del eje hueco.

Ahora se deducirá una relación entre el par de torsión T aplicado a un miembro hueco y el flujo cortante por torsión q en su pared. Considere un pequeño elemento de la sección de la pared, de longitud ds (figura 3.51). El área del elemento es $dA = t\ ds$ y la magnitud de la fuerza cortante $d\mathbf{F}$ ejercida sobre el elemento es

$$dF = \tau\ dA = \tau(t\ ds) = (\tau t)\ ds = q\ ds \tag{3.46}$$

El momento dM_O de esta fuerza alrededor de un punto arbitrario O dentro de la cavidad del miembro puede obtenerse al multiplicar dF por la distancia perpendicular p desde O hasta la línea de acción de $d\mathbf{F}$.

$$dM_O = p\ dF = p(q\ ds = q(p\ ds) \tag{3.47}$$

Pero el producto $p\ ds$ es igual al doble del área $d@$ del triángulo sombreado de la figura 3.52. Entonces,

$$dM_O = q(2d@) \tag{3.48}$$

Como la integral alrededor de la sección de la pared del miembro izquierdo de la ecuación (3.48) representa la suma de los momentos de todas las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la sección de pared, y ya que esta suma es igual al par T aplicado al miembro hueco,

$$T = \oint d\mathrm{M}_O = \oint q(2d@)$$

Puesto que el flujo cortante por torsión q es una constante, se escribe

$$T = 2q@ \tag{3.49}$$

donde @ es el área bordeada por la línea central de la sección transversal de la pared (figura 3.53).

El esfuerzo cortante τ en cualquier punto dado de la pared puede expresarse en términos del par T si se sustituye q de la ecuación (3.45) en la ecuación (3.49). Al despejar τ:

$$\tau = \frac{T}{2t@} \tag{3.50}$$

donde t es el espesor de pared en el punto considerado y @ es el área bordeada por la línea central. Recuerde que τ representa el valor promedio del esfuerzo cortante a través de la pared. Sin embargo, para deformaciones elásticas, la distribución de esfuerzos a través de la pared puede considerarse uniforme y la ecuación (3.50) dará el valor real del esfuerzo cortante en un punto dado de la pared.

El ángulo de torsión de un eje hueco de pared delgada puede obtenerse utilizando el método de energía (capítulo 11). Suponiendo una deformación elástica, puede mostrarse[†] que el ángulo de torsión de un eje de pared delgada de longitud L y módulo de rigidez G es

$$\phi = \frac{TL}{4@^2G}\oint\frac{ds}{t} \tag{3.51}$$

donde la integral se calcula a lo largo de la línea central de la sección de la pared.

[†] Vea el problema 11.70.

Aplicación de conceptos 3.10

Se fabricó por extrusión un tubo cuadrado de aluminio estructural con una sección transversal de 2.5 × 4 in. Determine el esfuerzo cortante en cada una de las cuatro paredes de una porción de dicho tubo cuando se somete a un par de torsión de 24 kip · in, suponiendo *a*) un espesor uniforme de la pared de 0.160 in (figura 3.54*a*) y *b*) que, como resultado de una fabricación defectuosa, las paredes *AB* y *AC* son de 0.120 in de espesor y las paredes *BD* y *CD* son de 0.200 in de espesor (figura 3.54*b*).

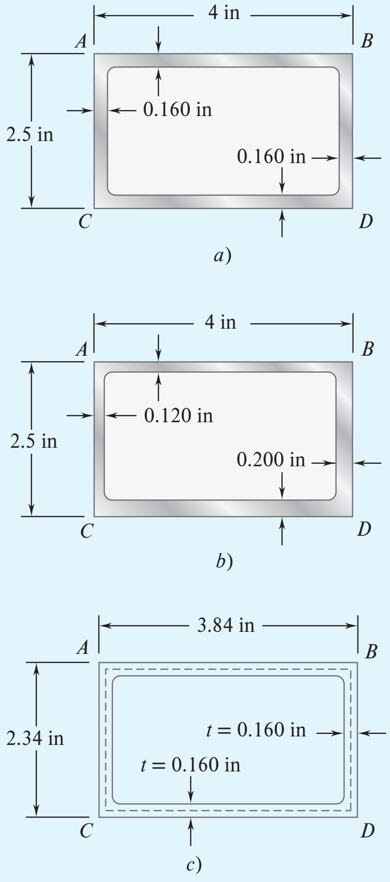


Figura 3.54 Tubo de aluminio de pared delgada: *a*) con espesor uniforme, *b*) con espesor no uniforme, *c*) área bordeada por la línea central del espesor de la pared.

***a*) Tubo con espesor de pared uniforme.** El área bordeada por la línea central (figura 3.54*c*) es

$$\text{@} = (3.84 \text{ in})(2.34 \text{ in}) = 8.986 \text{ in}^2$$

Ya que el espesor de cada una de las cuatro paredes es $t = 0.160$ in, se encuentra de la ecuación (3.50) que el esfuerzo cortante en cada pared es

$$\tau = \frac{T}{2t\text{@}} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in}}{2(0.160 \text{ in})(8.986 \text{ in}^2)} = 8.35 \text{ ksi}$$

***b*) Tubo con espesor variable de pared.** Al observar que el área @ bordeada por la línea central es la misma que en el inciso *a*, y al sustituir sucesivamente $t =$ 0.120 in y $t = 0.200$ in en la ecuación (3.50), se tiene

$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in}}{2(0.120 \text{ in})(8.986 \text{ in}^2)} = 11.13 \text{ ksi}$$

y

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in}}{2(0.200 \text{ in})(8.986 \text{ in}^2)} = 6.68 \text{ ksi}$$

Se advierte que el esfuerzo en una pared dada depende solo de su espesor.

Problema modelo 3.9

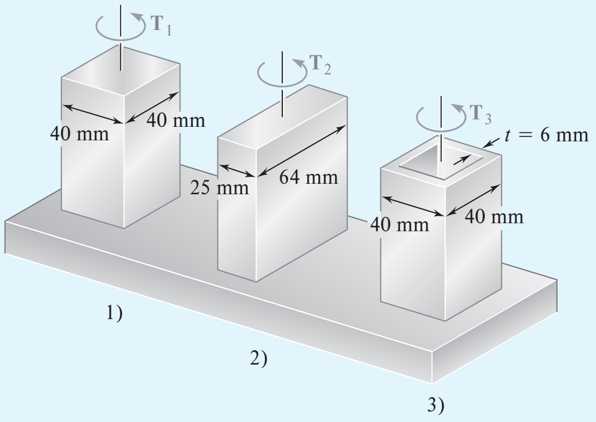
Utilizando $t_{\text{perm}} = 40$ MPa, determine el par de torsión máximo que puede aplicarse a cada una de las barras de latón y al tubo de latón que se muestran en la figura. Note que las dos barras sólidas tienen la misma área de sección transversal, y que la barra cuadrada y el tubo cuadrado tienen las mismas dimensiones externas.

ESTRATEGIA: Se obtiene el par de torsión usando la ecuación (3.40) para las secciones transversales sólidas y la ecuación (3.50) para la sección transversal hueca.

MODELAR y ANALIZAR:

1. Barra con sección transversal cuadrada. Para una barra sólida de sección transversal rectangular (figura 1), el esfuerzo cortante máximo está dado por la ecuación (3.40)

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{c_1 ab^2}$$



donde el coeficiente c_1 se obtiene de la tabla 3.1.

$$a = b = 0.040 \text{ m} \qquad \frac{a}{b} = 1.00 \qquad c_1 = 0.208$$

Para $\tau_{\text{máx}} = \tau_{\text{perm}} = 40$ MPa, se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_1}{c_1 ab^2} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_1}{0.208(0.040 \text{ m})^3} \qquad T_1 = 532 \text{ N}\cdot\text{m} \quad ◀$$

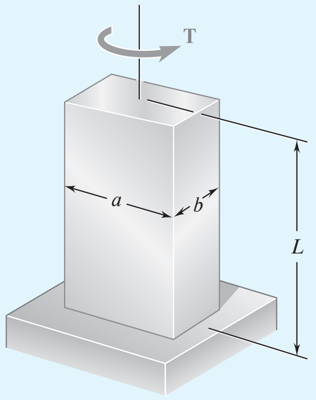


Figura 1 Dimensiones generales de la barra rectangular sólida en torsión.

2. Barra con sección transversal rectangular. Ahora se tiene

$$a = 0.064 \text{ m} \qquad b = 0.025 \text{ m} \qquad \frac{a}{b} = 2.56$$

Al interpolar en la tabla 3.1: $c_1 = 0.259$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_2}{c_1 ab^2} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_2}{0.259(0.064 \text{ m})(0.025 \text{ m})^2} \qquad T_2 = 414 \text{ N}\cdot\text{m} \quad ◀$$

3. Tubo cuadrado. Para un tubo de espesor t (figura 2), el esfuerzo cortante está dado por la ecuación (3.50)

$$\tau = \frac{T}{2t@}$$

donde @ es el área bordeada por la línea central de la sección transversal. Se tiene

$$@ = (0.034 \text{ m})(0.034 \text{ m}) = 1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Se sustituye $\tau = \tau_{\text{perm}} = 40$ MPa y $t = 0.006$ m, para después despejar el par de torsión permisible:

$$\tau = \frac{T}{2t@} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_3}{2(0.006 \text{ m})(1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} \qquad T_3 = 555 \text{ N}\cdot\text{m} \quad ◀$$

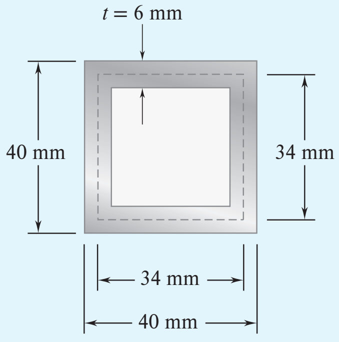


Figura 2 Dimensiones de la sección cuadrada y hueca de la barra de latón.

REVISAR y PENSAR: Si se compara la capacidad de la barra de sección transversal cuadrada sólida con la del tubo de las mismas dimensiones externas se demuestra la capacidad del tubo para soportar un par de torsión más grande.

Problemas

3.121 Determine la menor sección transversal cuadrada permisible para un eje de acero con 20 pies de longitud si el esfuerzo cortante máximo no debe exceder de 10 ksi cuando el eje se tuerce una revolución completa. Use $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

3.122 Determine la menor longitud permisible para un eje de acero inoxidable con sección transversal de $\frac{3}{8} \times \frac{3}{4}$ in si el esfuerzo cortante máximo no debe exceder de 15 ksi cuando el eje se tuerce en un ángulo de 15°. Use $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

3.123 Si se sabe que $\tau_{perm} = 70$ MPa y $G = 27$ GPa, determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse a cada una de las barras de aluminio mostradas en la figura y el ángulo de torsión en el extremo *B*.

3.124 Si se sabe que la magnitud del par de torsión **T** es de 200 N · m y que $G = 27$ GPa, determine para cada una de las barras de aluminio mostradas en la figura el máximo esfuerzo cortante y el ángulo de torsión en el extremo *B*.

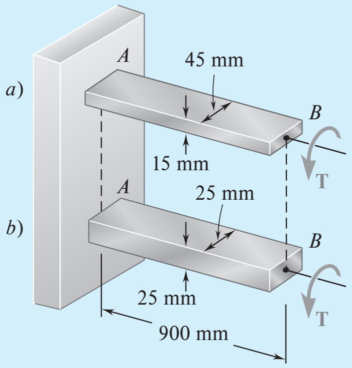


Figura P3.123 y P3.124

3.125 Determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse a cada una de las dos barras de latón mostradas en la figura y el ángulo de torsión correspondiente en *B*, si se sabe que $\tau_{perm} = 12$ ksi y $G = 5.6 \times 10^6$ psi.

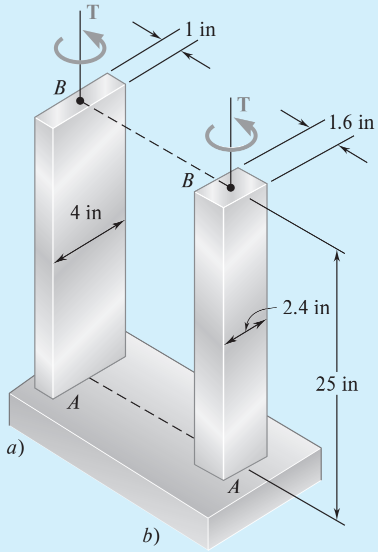


Figura *P3.125* y *P3.126*

3.126 Cada una de las dos barras de latón mostradas en la figura se somete a un par de torsión con magnitud $T = 12.5$ kip · in. Si se sabe que $G = 5.6 \times 10^6$ psi, determine para cada barra el máximo esfuerzo cortante y el ángulo de torsión en *B*.

3.127 El par de torsión **T** causa una rotación de 0.6° en el extremo *B* de la barra de acero inoxidable que se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 15$ mm y $G = 26$ GPa, determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.

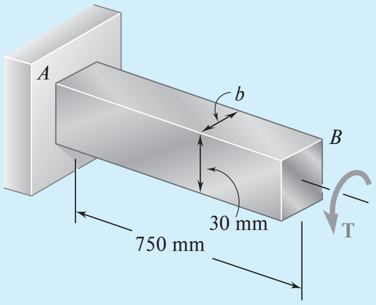


Figura P3.127 y P3.128

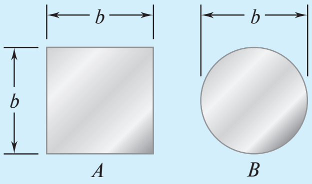


Figura P3.129

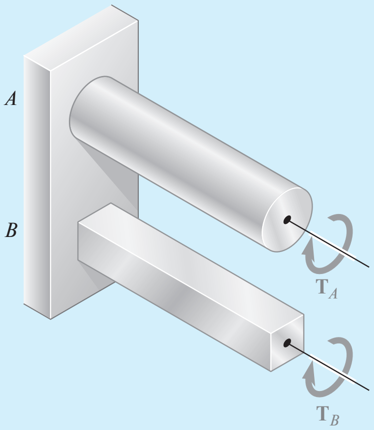


Figura *P3.130*, P3.131 y P3.132

3.128 El par de torsión **T** causa una rotación de 2° en el extremo B de la barra de acero inoxidable que se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 20$ mm y $G = 75$ GPa, determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.

3.129 Dos ejes son del mismo material. La sección transversal del eje A es cuadrada con un lado b y la del eje B es un círculo con diámetro b. Si se sabe que los ejes están sometidos al mismo par de torsión, determine la relación τ_A/τ_B de los esfuerzos cortantes máximos que ocurren en los ejes.

3.130 Los ejes A y B están hechos del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero A tiene una sección transversal circular y B tiene una sección transversal cuadrada. Determine la relación de los esfuerzos cortantes máximos T_A y T_B cuando los dos ejes se someten al mismo esfuerzo cortante ($\tau_A = \tau_B$). Suponga que ambas deformaciones son elásticas.

3.131 Los ejes A y B son del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero A tiene una sección transversal circular y B una sección transversal cuadrada. Determine la relación de los máximos valores de los ángulos ϕ_A y ϕ_B cuando los dos ejes se someten al mismo esfuerzo cortante máximo ($\tau_A = \tau_B$). Suponga que ambas deformaciones son elásticas.

3.132 Los ejes A y B están hechos del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero A tiene una sección transversal circular y B tiene una sección transversal cuadrada. Determine la relación de los máximos valores de los ángulos ϕ_A y ϕ_B a través de los cuales se giran los ejes A y B, respectivamente, cuando los dos ejes se someten al mismo par de torsión ($T_A = T_B$). Suponga que ambas deformaciones son elásticas.

3.133 Cada una de las barras de acero que se muestran en la figura se somete a un par de torsión con magnitud $T = 2$ kip · in. Si se sabe que $\tau_{perm} = 6$ ksi, determine la dimensión b requerida para cada barra.

3.134 Cada una de las barras de aluminio que se muestran en la figura se somete a un par de torsión con magnitud $T = 300$ N · m. Si se sabe que $\tau_{perm} = 60$ MPa, determine la dimensión b requerida para cada barra.

3.135 Un ángulo de acero de 1.25 m de longitud tiene una sección transversal de L127 × 76 × 6.4. En el apéndice C se encuentra que el espesor de la sección es de 6.4 mm con un área de 1 250 mm^2. Si se sabe que $\tau_{perm} = 60$ MPa y que $G = 77.2$ GPa, e ignorando el efecto de las concentraciones de esfuerzos, determine *a*) el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse, *b*) el ángulo de torsión correspondiente.

3.136 Un par de torsión de 36 kip · in se aplica a un ángulo de acero de 10 pies de longitud con una sección transversal de L8 × 8 × 1. En el apéndice C puede

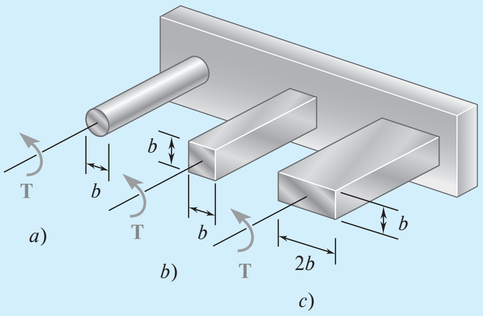


Figura P3.133 y *P3.134*

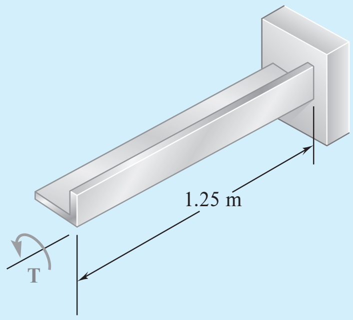


Figura P3.135

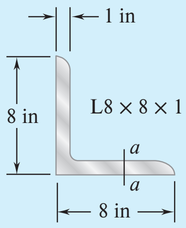


Figura P3.136

encontrar que el espesor de la sección es de 1 in y que su área es de 15 in^2. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *a-a*, *b*) el ángulo de torsión.

3.137 Un elemento de acero de 4 m de largo tiene una sección transversal W310 × 60. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa y que el esfuerzo cortante permisible es de 40 MPa, determine *a*) el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse, *b*) el ángulo de torsión correspondiente. Consulte el apéndice C para obtener las dimensiones de la sección transversal y desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos. (*Sugerencia:* Considere el alma y las aletas del perfil por separado y obtenga una relación entre los pares de torsión ejercidos sobre el alma y sobre una aleta, respectivamente, expresando que los ángulos de torsión resultantes son iguales).

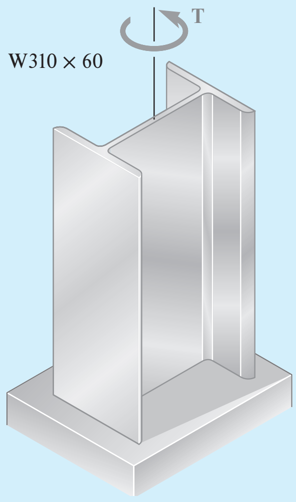


Figura P3.137

3.138 Un elemento de acero de 8 pies de largo con una sección transversal W8 × 31 es sometido a un par de torsión de 5 kip · in. En el apéndice C se encuentran las propiedades del acero laminado. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *a-a*, *b*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *b-b*, *c*) el ángulo de torsión. (Vea la sugerencia del problema 3.137).

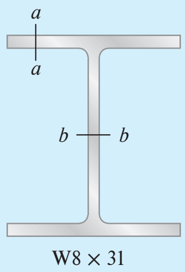


Figura P3.138

3.139 Un par de torsión de 5 kip · ft se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y determine el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b*.

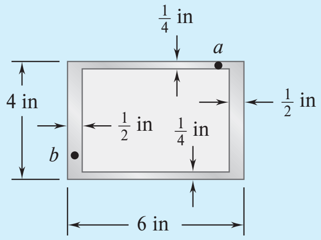


Figura P3.139

3.140 Un par de torsión $T = 750$ kN · m se aplica al eje hueco mostrado que tiene un espesor de pared uniforme de 8 mm. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y determine el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b*.

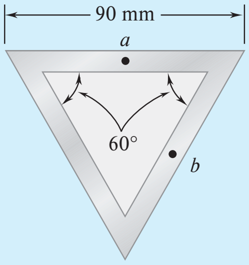


Figura *P3.140*

3.141 Un par de torsión de 750 N · m se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada en la figura y un espesor de pared uniforme de 6 mm. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y encuentre el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b*.

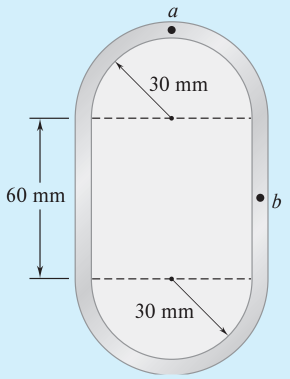


Figura *P3.141*

3.142 y 3.143 Un elemento hueco con la sección transversal mostrada en la figura está elaborado con lámina metálica de 2 mm de espesor. Si se sabe que el esfuerzo cortante no debe exceder 3 MPa, determine el máximo par de torsión que puede aplicarse al elemento.

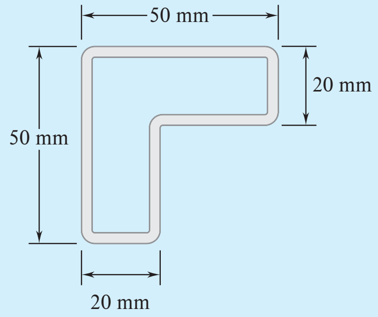


Figura P3.142

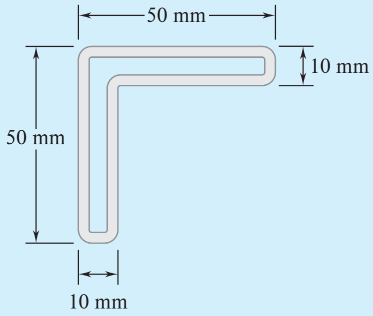


Figura P3.143

3.144 Un par de torsión de 90 N · m se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y determine el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b*.

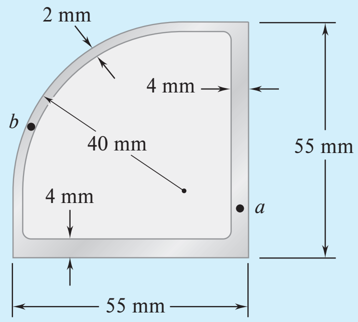


Figura P3.144

***3.145* y 3.146** Un elemento hueco con la sección transversal mostrada en la figura está elaborado con lámina metálica de 0.06 in de espesor. Si se sabe que un par de torsión de 1 250 lb·in. se aplicará al elemento, determine la mínima dimensión *d* que puede utilizarse si el esfuerzo cortante no debe exceder 750 psi.

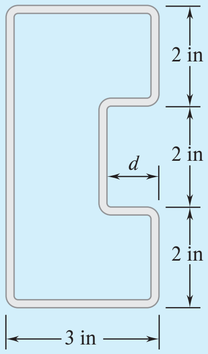


Figura *P3.145*

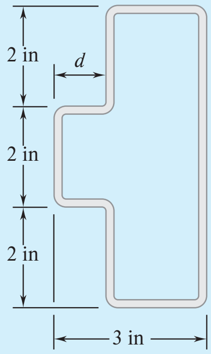


Figura P3.146

3.147 Un tubo de enfriamiento que tiene la sección transversal mostrada en la figura, es de una lámina de acero inoxidable de 3 mm de espesor. Los radios $c_1 = 150$ mm y $c_2 = 100$ mm se miden desde la línea central de la hoja de metal. Si se sabe que se aplica un par de torsión de magnitud $T = 3$ kN · m al tubo, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el tubo, *b*) la magnitud del par de torsión que soporta la coraza circular externa. Desprecie la dimensión de la pequeña apertura donde se conectan las corazas exterior e interior.

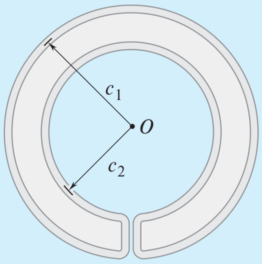


Figura P3.147

3.148 Un eje cilíndrico hueco se diseñó para tener un espesor de pared uniforme de 0.1 in. Sin embargo, un defecto de fabricación produjo un eje con la sección transversal mostrada en la figura. Si se sabe que en el eje debe aplicarse un par de torsión de 15 kip · in, determine los esfuerzos cortantes en los puntos *a* y *b*.

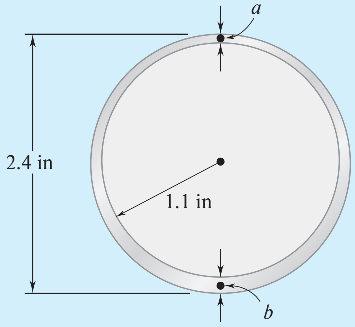


Figura *P3.148*

3.149 Se aplican pares de torsión iguales a tubos de pared delgada que tienen igual longitud L, mismo espesor t y radio c. Se ha ranurado longitudinalmente uno de los tubos, como se indica en la figura. Determine *a*) la relación τ_b/τ_a de los esfuerzos cortantes máximos en los tubos, *b*) la relación ϕ_b/ϕ_a de los ángulos de torsión de los tubos.

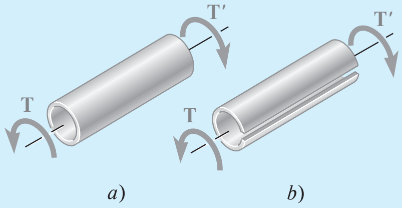


Figura P3.149

3.150 Un eje cilíndrico hueco de longitud L, radio medio c_m y espesor uniforme t se somete a pares de torsión de magnitud T. Considere, por una parte, los valores del esfuerzo cortante promedio τ_{prom} y del ángulo de torsión ϕ obtenidos de las fórmulas de torsión elástica desarrolladas en las secciones 3.1C y 3.2 y, por otra, los valores correspondientes obtenidos de las fórmulas desarrolladas en la sección 3.10 para ejes huecos de pared delgada. *a*) Muestre que el error relativo introducido al utilizar las fórmulas para ejes de pared delgada en lugar de las fórmulas de torsión elástica es el mismo para τ_{prom} y para ϕ y que el error relativo es positivo y proporcional al cuadrado de la relación t/c_m. *b*) Compare el error porcentual que corresponde a valores de la relación t/c_m de 0.1, 0.2 y 0.4.

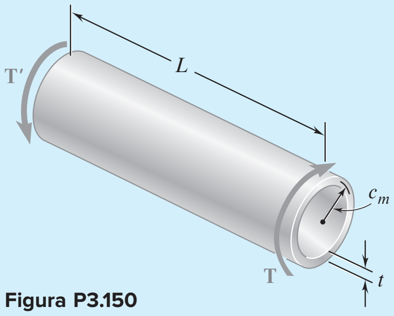


Figura P3.150

Repaso y resumen

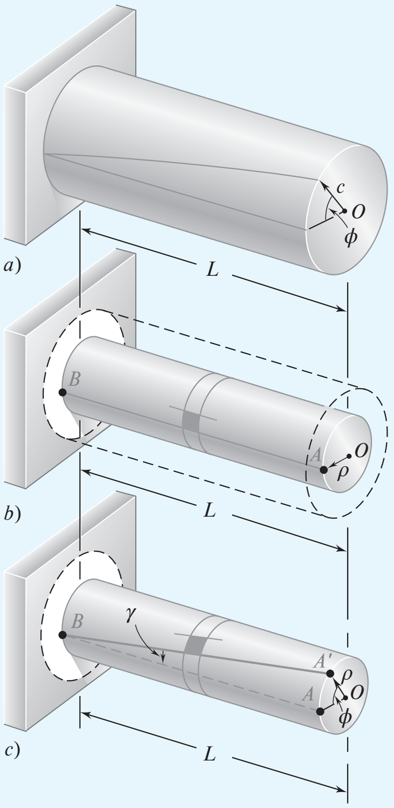


Figura 3.55 Deformaciones por torsión. *a*) El ángulo de torsión ϕ. *b*) Porción no deformada del eje de radio ρ. *c*) Porción deformada del eje; el ángulo de torsión ϕ y la deformación cortante γ comparten la misma longitud de arco *AA*′.

Este capítulo se dedicó al análisis y diseño de *ejes* sometidos a pares torsionales, o *pares de torsión*. Excepto por las últimas dos secciones del capítulo el estudio se limitó a *ejes circulares.*

Deformaciones en ejes circulares

La distribución de esfuerzos en la sección transversal de un eje circular es *estáticamente indeterminada*. La determinación de estos esfuerzos requiere un análisis previo de las *deformaciones* que ocurren en el eje [sección 3.1B]. En un eje circular sometido a torsión, *toda sección transversal permanece plana y sin distorsión*. La *deformación cortante* en un elemento pequeño con lados paralelos y perpendiculares al eje de la flecha y a una distancia ρ de ese eje es

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

donde ϕ es el ángulo de torsión para una longitud L del eje (figura 3.55). La ecuación (3.2) muestra que la *deformación a cortante en una flecha circular varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha*. Se deduce que la deformación es máxima en la superficie del eje, donde ρ es igual al radio c del eje:

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c\phi}{L} \qquad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\text{máx}} \tag{3.3, 3.4}$$

Esfuerzos cortantes en el rango elástico

La relación entre los *esfuerzos cortantes* en un eje circular dentro del rango elástico [sección 3.1C] y la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación cortantes, $\tau = G\gamma$, es

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{\text{máx}} \tag{3.6}$$

la cual muestra que dentro del rango elástico, el *esfuerzo cortante* τ *en una flecha circular también varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha*. Si se iguala la suma de momentos de las fuerzas elementales ejercidas en cualquier sección del eje con la magnitud T del par de torsión aplicado al eje, las *fórmulas para la torsión elástica* son

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \qquad \tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3.9, 3.10}$$

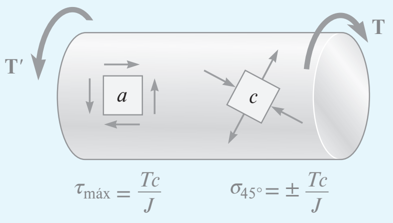


Figura 3.56 Elementos del eje sometidos solo a esfuerzos cortantes o a esfuerzos normales.

donde c es el radio de la sección transversal y J su momento centroidal polar de inercia. $J = \frac{1}{2}\pi c^4$ para un eje sólido y $J = \frac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4)$ para un eje hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2.

Se observó que mientras el elemento a de la figura 3.56 está en cortante puro, el elemento c en la misma figura está sujeto a esfuerzos normales de la misma magnitud, Tc/J, con dos de los esfuerzos normales a tensión y dos a compresión. Esto explica por qué en un ensayo de torsión los materiales dúctiles, que generalmente fallan por corte, se romperán a lo largo de un plano perpendicular al eje del espécimen, mien-

tras que los materiales frágiles, que son más débiles a tensión que a cortante, se rompen a lo largo de superficies que forman un ángulo de 45° con ese eje.

Ángulo de torsión

Dentro del rango elástico, el ángulo de torsión ϕ de un eje circular es proporcional al par de torsión T aplicado a él (figura 3.57).

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad \text{(unidades de radianes)} \qquad \textbf{(3.15)}$$

donde L = longitud del eje
J = momento polar de inercia de la sección transversal
G = módulo de rigidez del material
ϕ se da en *radianes*

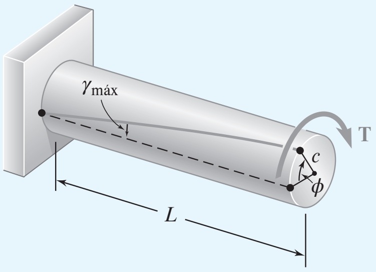


Figura 3.57 Par de torsión aplicado al eje con un extremo fijo, que resulta en un ángulo de torsión ϕ.

Si el eje se somete a pares de torsión en lugares distintos a sus extremos o consta de varias partes de distintas secciones transversales y posiblemente de diferentes materiales, el ángulo de torsión del eje debe expresarse como la *suma algebraica* de los ángulos de torsión de sus partes componentes:

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Cuando ambos extremos de un eje BE giran (figura 3.58), el ángulo de torsión del eje es igual a la *diferencia* entre los ángulos de rotación ϕ_B y ϕ_E de sus extremos. Cuando dos ejes, AD y BE, se conectan por engranes A y B, los pares aplicados por el engrane A sobre el eje AD y por el engrane B sobre el eje BE son *directamente proporcionales* a los radios r_A y r_B de los dos engranes, ya que las fuerzas aplicadas sobre ellos por los dientes en C son iguales y opuestas. Por otro lado, los ángulos ϕ_A y ϕ_B son *inversamente proporcionales* a r_A y r_B, ya que los arcos CC' y CC'' descritos por los dientes de los engranes son iguales.

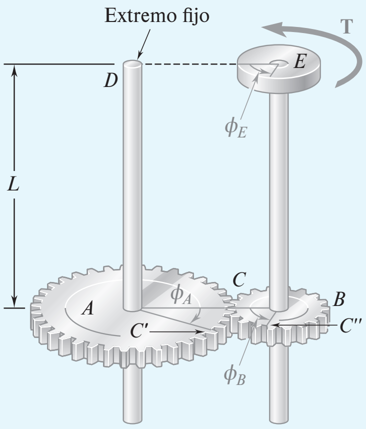


Figura 3.58 Ángulos de torsión en E, el engrane B y el engrane A para un sistema de engranes acoplados.

Ejes estáticamente indeterminados

Si las reacciones en los soportes de un eje o los pares internos no pueden determinarse usando solo la estática, se dice que el eje es *estáticamente indeterminado*. Las ecuaciones de equilibrio obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre deben complementarse con las relaciones que incluyan las deformaciones del eje que se obtuvieron, a su vez, de la geometría del problema.

Ejes de transmisión

Para el *diseño de ejes de trasmisión*, la potencia P transmitida es

$$P = 2\pi f T \qquad \textbf{(3.19)}$$

donde T es el par de torsión ejercido en cada extremo del eje y f es la *frecuencia* o rapidez de rotación del eje. La unidad de frecuencia es la revolución por segundo (s^{-1}) o hertz (Hz). Si se emplean unidades SI, T se expresa en newtons · metro (N · m) y P en *watts* (W). Si se emplean unidades de uso común en Estados Unidos, T se expresa en lb · ft o lb · in, y P en ft · lb/s o in · lb/s; la potencia puede convertirse entonces a *caballos de fuerza* (hp) a través de

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 6\,600 \text{ in} \cdot \text{lb/s}$$

Para diseñar un eje que ha de transmitir una potencia dada P a una frecuencia f, se obtiene T de la ecuación (3.19). Este valor y el valor máximo permisible de τ para

el material utilizado pueden usarse en la ecuación (3.9) para determinar el diámetro requerido del eje.

Concentraciones de esfuerzos

Las *concentraciones de esfuerzos* en ejes circulares resultan de un cambio abrupto en el diámetro de un eje y pueden reducirse mediante el uso de un *filete* (figura 3.59). El valor máximo del esfuerzo cortante en el filete es

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.22}$$

donde el esfuerzo Tc/J se calcula para el eje de menor diámetro, y K es un factor de concentración del esfuerzo.

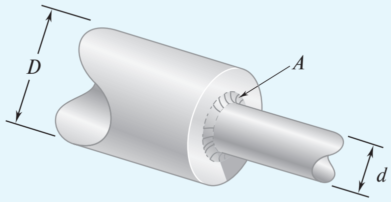


Figura 3.59 Ejes con dos diámetros diferentes y un filete en la unión.

Deformaciones plásticas

Aun cuando no se aplique la ley de Hooke, la distribución de *deformaciones* en un eje circular es siempre lineal. Si se conoce el diagrama esfuerzo-deformación a cortante para el material, es posible graficar el esfuerzo cortante τ contra la distancia ρ desde el eje de la flecha para cualquier valor dado de $\tau_{\text{máx}}$ (figura 3.60). Al sumar el par de torsión de los elementos anulares de radio ρ y espesor $d\rho$, el par T se expresa como

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi\int_0^c \rho^2\tau\, d\rho \tag{3.23}$$

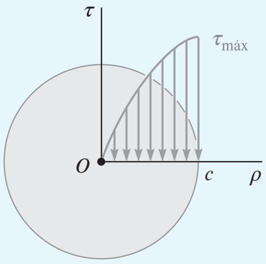


Figura 3.60 Distribución del esfuerzo cortante para un eje con respuesta esfuerzo-deformación no lineal.

donde τ es la función de ρ graficada en la figura 3.60.

Módulo de ruptura

Un valor importante del par de torsión es el par último T_U que causa la falla del eje. Este valor puede determinarse de manera experimental o mediante la ecuación (3.22), igualando $\tau_{\text{máx}}$ al esfuerzo cortante último del material τ_U. A partir de T_U y suponiendo una distribución lineal de esfuerzos (figura 3.61) se determina el esfuerzo ficticio correspondiente $R_T = T_U c/J$, conocido como el *módulo de ruptura a torsión*.

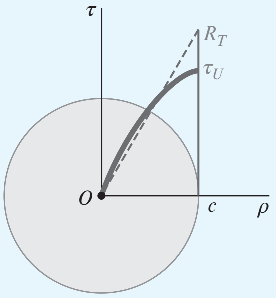


Figura 3.61 Distribución de esfuerzos en un eje circular en falla.

Eje sólido de material elastoplástico

En un *eje sólido circular* hecho de un *material elastoplástico*, mientras $\tau_{\text{máx}}$ no exceda la resistencia a la cedencia τ_Y del material, la distribución de esfuerzos a través de una sección del eje es lineal (figura 3.62*a*). El par de torsión T_Y correspondiente a $\tau_{\text{máx}} = \tau_Y$ (figura 3.62*b*) es el *par de torsión elástico máximo*. Para un eje circular sólido con radio c,

$$T_Y = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_Y \tag{3.26}$$

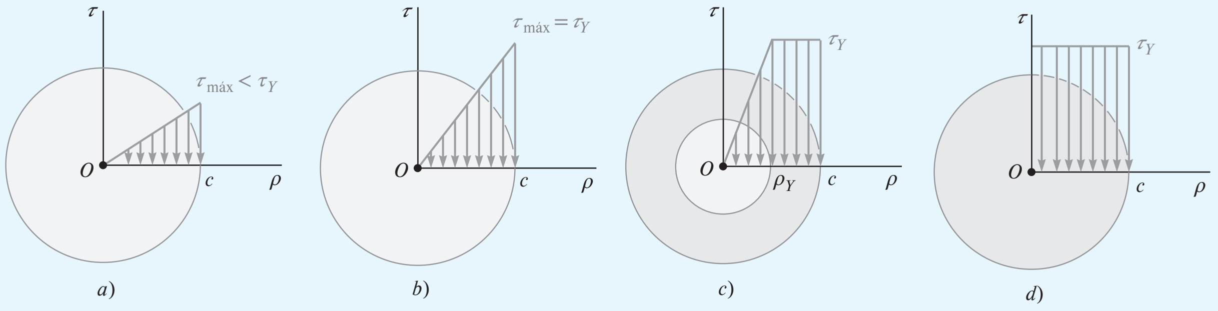


Figura 3.62 Distribuciones de esfuerzo para un eje elastoplástico en diferentes estados de carga: *a*) elástico, *b*) cedencia inminente, *c*) cedencia parcial, *d*) cedencia total.

Al aumentar el par, se desarrolla una región plástica en el eje alrededor de un núcleo elástico de radio ρ_Y. El par T que corresponde a un valor dado de ρ_Y es

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \tag{3.29}$$

Cuando ρ_Y se aproxima a cero, el par se aproxima a un valor limitante T_p, llamado *par de torsión plástico*:

$$T_p = \frac{4}{3}T_Y \tag{3.30}$$

Al graficar el par T contra el ángulo de torsión ϕ de un eje circular sólido (figura 3.63), el segmento de recta $0Y$ definido por la ecuación (3.15), seguido por una curva que se aproxima a la línea recta $T = T_p$, es

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\phi_Y^3}{\phi^3}\right) \tag{3.34}$$

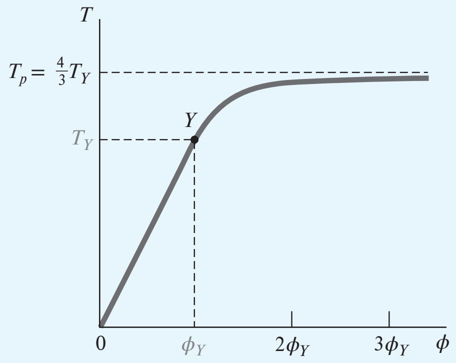


Figura 3.63 Relación carga-desplazamiento para un material elastoplástico.

Deformación permanente y esfuerzos residuales

Cargar un eje circular más allá del inicio de la cedencia y descargarlo resulta en una *deformación permanente* caracterizada por el ángulo de torsión $\phi_p = \phi - \phi'$, donde ϕ corresponde a la fase de carga descrita en el párrafo previo, y ϕ' a la fase de descarga representada por una línea recta en la figura 3.64. Los *esfuerzos residuales* en el eje pueden determinarse sumando los esfuerzos máximos alcanzados durante la fase de carga y los esfuerzos inversos correspondientes a la fase de descarga.

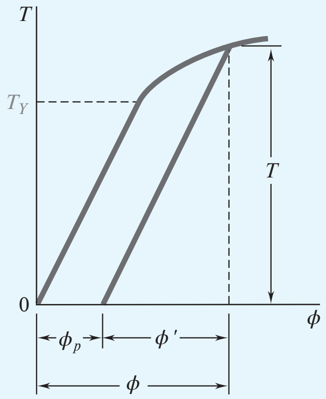


Figura 3.64 Respuesta par de torsión-ángulo de torsión para una carga que pasa la cedencia, seguida de una descarga.

Torsión en elementos no circulares

Las ecuaciones para la distribución de la deformación y el esfuerzo en ejes circulares se basan en el hecho que, debido a la simetría axial de estos elementos, las secciones transversales permanecen planas y sin distorsión. Esta propiedad no se mantiene para elementos no circulares, como la barra cuadrada de la figura 3.65.

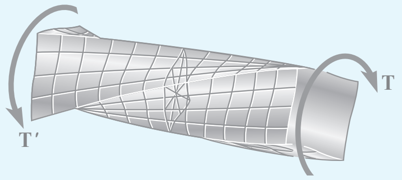


Figura 3.65 Torsión de un eje con sección transversal cuadrada.

Barras con sección transversal rectangular

Para las barras rectas con *sección transversal rectangular uniforme* (figura 3.66), el esfuerzo cortante máximo ocurre a lo largo de la línea central de la cara *más ancha* de la barra. La *analogía de la membrana* se puede usar para visualizar la distribución de esfuerzos en un elemento no circular.

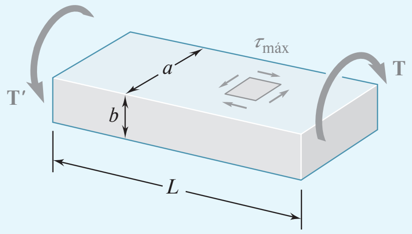


Figura 3.66 Eje con sección transversal rectangular, que muestra la ubicación del esfuerzo cortante máximo.

Ejes huecos de pared delgada

El esfuerzo cortante en *ejes huecos no circulares de pared delgada* es paralelo a la superficie de la pared y varía tanto a través de la pared como a lo largo de la sección transversal de la pared. Al denotar con τ el valor promedio del esfuerzo cortante, calculado a través de la pared en un punto dado de la sección transversal, y con t el espesor de la pared en ese punto (figura 3.67), se mostró que el producto $q = \tau t$, llamado *flujo cortante*, es constante a lo largo de la sección transversal.

El esfuerzo cortante promedio τ en cualquier punto dado de la sección transversal es

$$\tau = \frac{T}{2t@} \qquad (3.50)$$

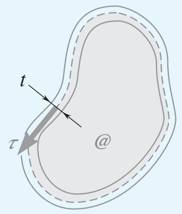


Figura 3.67 Área para el flujo cortante.

Problemas de repaso

3.151 Un tubo de acero de 12 in de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa de $\frac{1}{4}$ in de espesor, la cual se suelda a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 45° con el plano perpendicular al eje del tubo. Si se sabe que el esfuerzo de tensión máximo permisible en la soldadura es de 12 ksi, determine el mayor par de torsión que puede aplicarse al tubo.

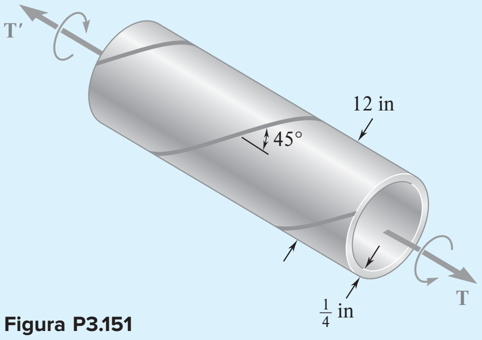


Figura P3.151

3.152 Un par de torsión con magnitud $T = 120$ N · m se aplica al eje AB del tren de engranes mostrado. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en cada uno de los tres ejes sólidos es de 75 MPa, determine el diámetro requerido de a) el eje AB, b) el eje CD, c) el eje EF.

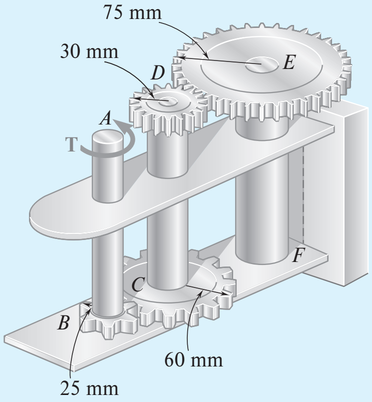


Figura *P3.152*

3.153 Los dos ejes sólidos están conectados por engranes, como se muestra en la figura. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa para cada eje, determine el ángulo a través del cual rota el extremo A cuando $T_A = 1\,200$ N · m.

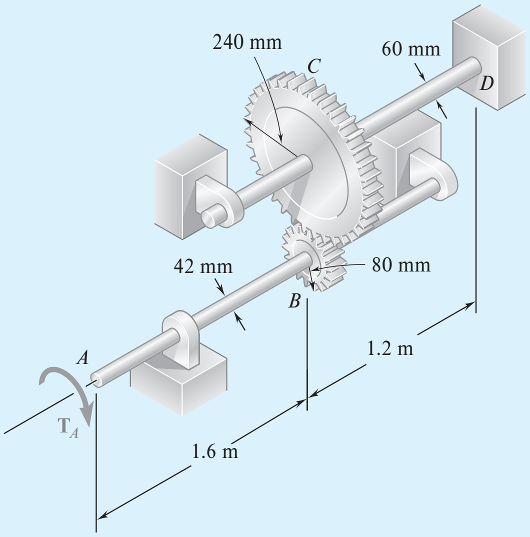


Figura P3.153

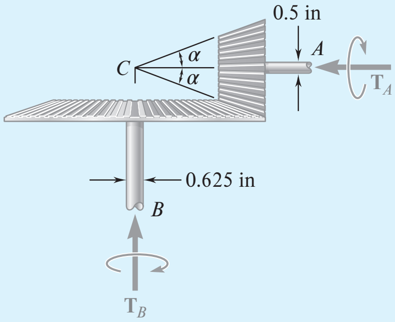


Figura ***P3.154***

3.154 En el sistema de engranes cónicos mostrado en la figura, $\alpha = 18.43°$. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi en cada eje y que el sistema está en equilibrio, determine el máximo par de torsión $\mathbf{T}_A$ que puede aplicarse en *A*.

3.155 Las especificaciones de diseño para el sistema de engranes y ejes que se muestra en la figura requieren que se use el mismo diámetro para ambos ejes y que el ángulo a través del cual gire la polea *A* no exceda 7.5° cuando está sujeta a un par de torsión $\mathbf{T}_A$ de 2 kip · in, mientras la polea *D* se mantiene fija. Determine el diámetro requerido de los ejes si ambos están hechos de un acero con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $\tau_{perm} = 12$ ksi.

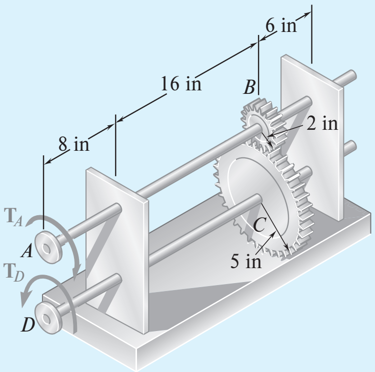


Figura P3.155

3.156 Un par de torsión con magnitud $T = 4$ kN · m se aplica en el extremo *A* del eje compuesto que se muestra en la figura. Si el módulo de rigidez es de 77.2 GPa para el acero y de 27 GPa para el aluminio, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en el núcleo de acero, *b*) el máximo esfuerzo cortante en la camisa de aluminio, *c*) el ángulo de torsión en *A*.

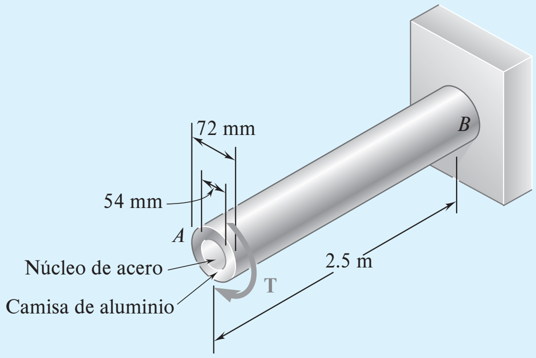


Figura P3.156

3.157 Los extremos *A* y *D* de los dos ejes sólido *AB* y *CD* están fijos, mientras que los extremos *B* y *C* están conectados a engranes, como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante máximo es de 50 MPa en cada eje, determine el par de torsión **T** máximo que puede aplicarse al engrane *B*.

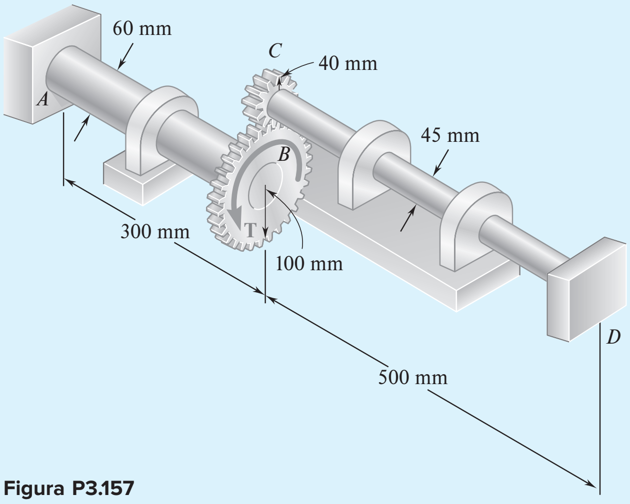


Figura P3.157

3.158 Cuando el eje hueco de acero que se muestra en la figura gira a 180 rpm, una medición estroboscópica indica que el ángulo de torsión del eje es 3°. Si

se sabe que $G = 77.2$ GPa, determine *a*) la potencia transmitida, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el eje.

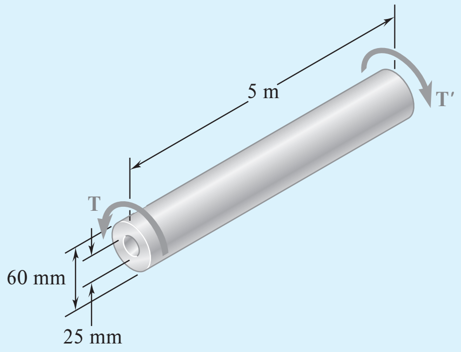


Figura P3.158

3.159 Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible para el eje escalonado que se muestra en la figura es de 8 ksi, determine la magnitud T del par de torsión máximo que puede transmitir el eje cuando el radio del filete es *a*) $r = \frac{3}{16}$ in, *b*) $r = \frac{1}{4}$ in.

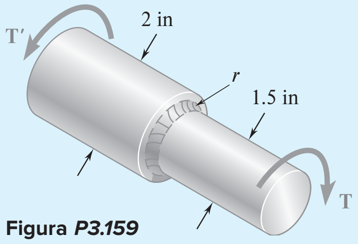


Figura *P3.159*

3.160 Un eje hueco de latón tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante no debe exceder 12 ksi y se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine el par máximo de torsión que puede aplicarse al eje.

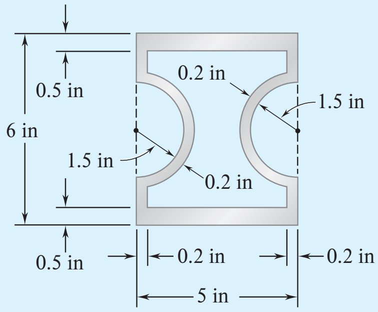


Figura P3.160

3.161 Dos varillas sólidas de latón *AB* y *CD* se sueldan a una manga de latón *EF*. Determine la relación d_2/d_1 para la cual ocurre el mismo esfuerzo cortante máximo en las varillas y en la manga.

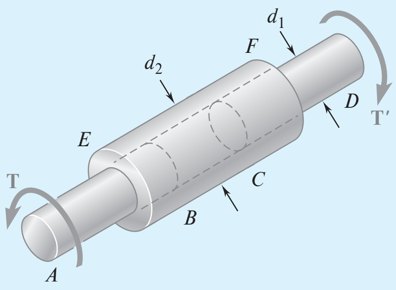


Figura *P3.161*

3.162 El eje *AB* está hecho de un material que es elastoplástico con $\tau_Y = 12$ ksi y $G = 4 \times 10^6$ psi. Para la carga mostrada, determine *a*) el radio del núcleo elástico del eje, *b*) el ángulo de torsión del eje.

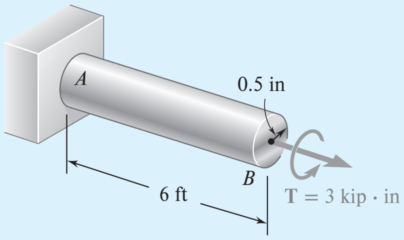


Figura P3.162

Problemas de computadora

Los siguientes problemas se diseñaron para ser resueltos con una computadora. Escriba cada programa para que pueda utilizarse con unidades del SI o con unidades de uso común en Estados Unidos.

3.C1 El eje AB consta de n elementos cilíndricos homogéneos, los cuales pueden ser sólidos o huecos. Su extremo A está fijo, mientras que su extremo B es libre y está sometido a la carga que se muestra en la figura. La longitud del elemento i se denota por L_i, su diámetro exterior mediante OD_i, su diámetro interior con ID_i, su módulo de rigidez por G_i y el par de torsión aplicado a su extremo derecho por $\mathbf{T}_i$; su magnitud T_i es supuesta positiva si $\mathbf{T}_i$ se observa antihorario desde el extremo B y negativo si es de otro modo. (Note que $ID_i = 0$ si el elemento es sólido). *a*) Escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para determinar el esfuerzo cortante máximo en cada elemento, el ángulo de torsión en cada elemento y el ángulo de torsión del eje completo. *b*) Use este programa para resolver los problemas 3.35, 3.36 y 3.38.

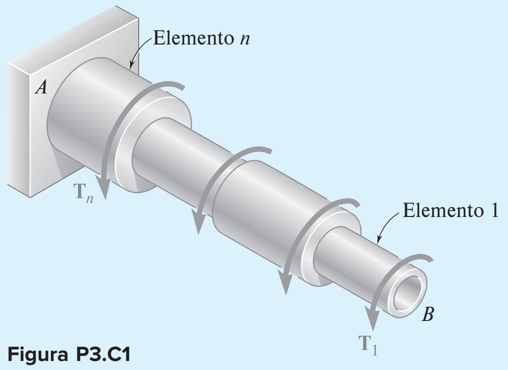


Figura P3.C1

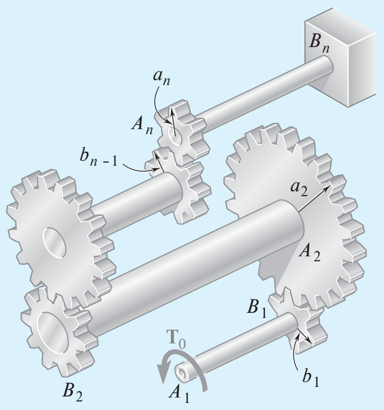


Figura P3.C2

3.C2 El ensamble mostrado en la figura consta de n ejes cilíndricos, sólidos o huecos, conectados por engranes y apoyados en ménsulas (que no se muestran). El extremo A_1 del primer eje es libre y está sometido a un par de torsión $\mathbf{T}_0$, mientras que el extremo B_n del último eje es fijo. La longitud del eje A_iB_i es L_i, su diámetro exterior es OD_i, su diámetro interior ID_i y su módulo de rigidez G_i. (Note que $ID_i = 0$ si el elemento es sólido). El radio del engrane A_i es a_i y el radio del engrane B_i es b_i. *a*) Escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para determinar el esfuerzo cortante máximo en cada eje, el ángulo de torsión de cada eje, y el ángulo en que gira el extremo A_i. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 3.41 y 3.44.

3.C3 El eje AB consta de n elementos cilíndricos homogéneos, los cuales pueden ser sólidos o huecos. Sus dos extremos están fijos y se sujeta a la carga que se muestra en la figura. La longitud del elemento i se denota con L_i, su diámetro exterior con OD_i, su diámetro interior por ID_i, su módulo de rigidez mediante G_i y el par de torsión aplicado a su extremo derecho por T_i, cuya magnitud T_i se supone positiva si se observa que $\mathbf{T}_i$ es antihorario desde el

extremo B y negativo en el caso contrario. Note que $ID_i = 0$ si el elemento es sólido y también que $T_1 = 0$. Escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para determinar las reacciones en A y en B, el esfuerzo cortante máximo en cada elemento y el ángulo de torsión de cada elemento. Utilice este programa *a*) para resolver el problema 3.55, *b*) para determinar el esfuerzo cortante máximo en el eje del problema modelo 3.7.

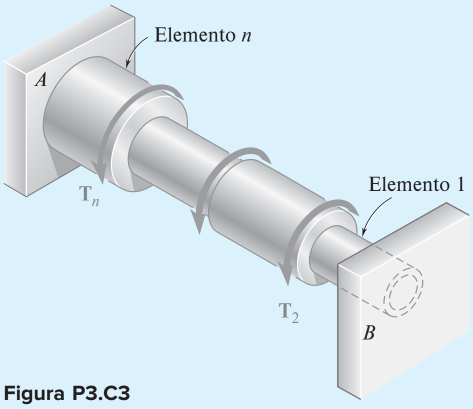


Figura P3.C3

3.C4 El eje cilíndrico sólido y homogéneo AB tiene longitud L, diámetro d, módulo de rigidez G y resistencia a la cedencia τ_Y. Este eje se somete a un par de torsión **T** que se incrementa gradualmente desde cero hasta que el ángulo de torsión del eje alcanza un valor máximo ϕ_m y entonces se reduce a cero. *a*) Escriba un programa de computadora que, para cada uno de los 16 valores de ϕ_m espaciados uniformemente en un rango que vaya desde 0 hasta un valor tres veces mayor que el ángulo de torsión al inicio de la cedencia, pueda utilizarse para determinar el máximo valor T_m del par de torsión, el radio del núcleo elástico, el esfuerzo cortante máximo, la torsión permanente y el esfuerzo cortante residual tanto en la superficie del eje como en la interfaz del núcleo elástico y la región plástica. *b*) Utilice el programa para obtener respuestas aproximadas a los problemas 3.114, 3.115 y 3.116.

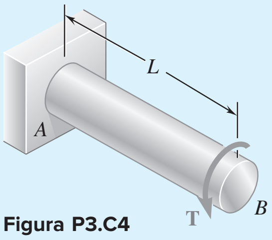


Figura P3.C4

3.C5 La expresión exacta para el ángulo de torsión de un eje sólido ahusado AB cuando se le aplica un par de torsión **T**, como se muestra en la figura, está dada en el problema 3.64. Deduzca una expresión aproximada para el ángulo de torsión reemplazando el eje ahusado por n ejes cilíndricos de igual longitud y radio $r_i = (n + i - \frac{1}{2})(c/n)$, donde $i = 1, 2,..., n$. Utilizando para T, L, G y c valores de su elección, determine el porcentaje de error en la expresión aproximada cuando *a*) $n = 4$, *b*) $n = 8$, *c*) $n = 20$ y *d*) $n = 100$.

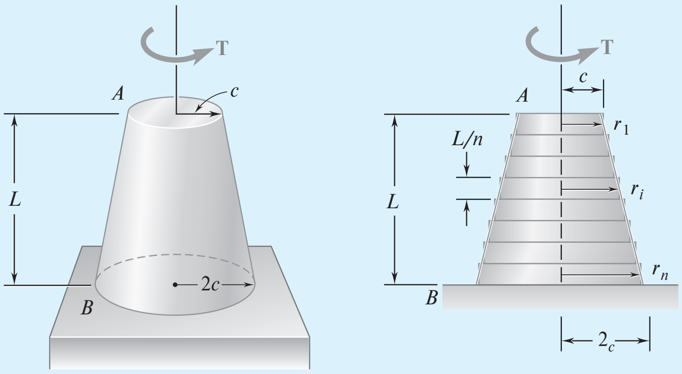


Figura P3.C5

3.C6 Un par de torsión **T** se aplica, como se indica en la figura, al eje largo, hueco y ahusado AB con espesor uniforme t. Deduzca una expresión aproximada para el ángulo de torsión reemplazando el eje ahusado por n anillos cilíndricos de igual longitud y radio $r_i = (n + i - \frac{1}{2})(c/n)$, donde $i = 1, 2,..., n$. Utilizando para T, L, G, c y t valores de su elección, determine el porcentaje de error en la expresión aproximada cuando *a*) $n = 4$, *b*) $n = 8$, *c*) $n = 20$ y *d*) $n = 100$.

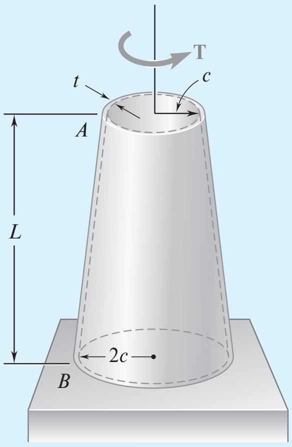
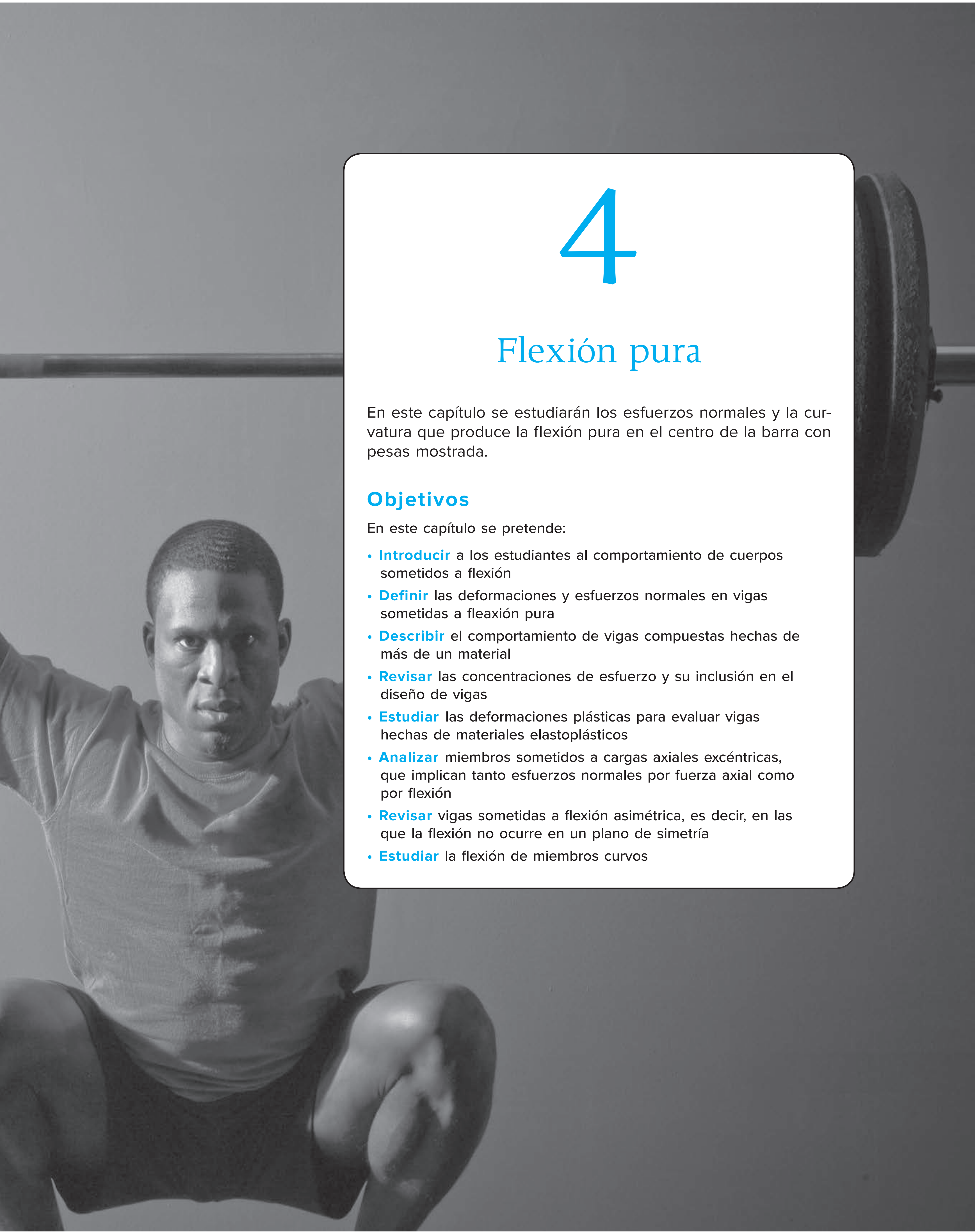


Figura P3.C6



4

Flexión pura

En este capítulo se estudiarán los esfuerzos normales y la curvatura que produce la flexión pura en el centro de la barra con pesas mostrada.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Introducir** a los estudiantes al comportamiento de cuerpos sometidos a flexión
- **Definir** las deformaciones y esfuerzos normales en vigas sometidas a fleaxión pura
- **Describir** el comportamiento de vigas compuestas hechas de más de un material
- **Revisar** las concentraciones de esfuerzo y su inclusión en el diseño de vigas
- **Estudiar** las deformaciones plásticas para evaluar vigas hechas de materiales elastoplásticos
- **Analizar** miembros sometidos a cargas axiales excéntricas, que implican tanto esfuerzos normales por fuerza axial como por flexión
- **Revisar** vigas sometidas a flexión asimétrica, es decir, en las que la flexión no ocurre en un plano de simetría
- **Estudiar** la flexión de miembros curvos

Introducción

4.1 Miembros simétricos sometidos a flexión pura
4.1A Momento interno y relaciones de esfuerzo
4.1B Deformaciones
4.2 Esfuerzos y deformaciones en el rango elástico
4.3 Deformaciones en una sección transversal
4.4 Miembros hechos de materiales compuestos
4.5 Concentraciones de esfuerzo
***4.6 Deformaciones plásticas**
***4.6A** Miembros hechos de material elastoplástico
***4.6B** Miembros con un solo plano de simetría
***4.6C** Esfuerzos residuales
4.7 Carga axial excéntrica en un plano de simetría
4.8 Análisis de flexión asimétrica
4.9 Caso general de análisis de carga axial excéntrica
***4.10 Miembros curvos**

Introducción

Este capítulo y los dos siguientes analizan los esfuerzos y deformaciones en miembros prismáticos sometidos a *flexión*. La flexión es un concepto importante usado en el diseño de muchas componentes de máquinas y estructurales, como vigas y trabes.

Este capítulo se ocupa del análisis de miembros prismáticos sometidos a momentos iguales y opuestos **M** y **M**′ que actúan en el mismo plano longitudinal. Se dice que tales miembros están sometidos a *flexión pura*. Se supone que los miembros poseen un plano de simetría con los momentos **M** y **M**′ actuando en ese plano (figura 4.1).

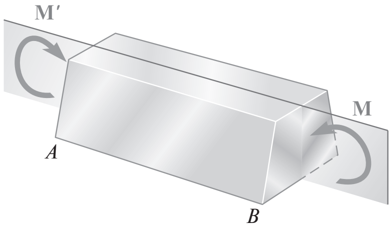


Figura 4.1 Miembro sometido a flexión pura.

La barra de pesas es un ejemplo de flexión pura cuando un levantador de pesas la sostiene sobre su cabeza como se muestra en la fotografía al inicio de este capítulo. La barra soporta pesos iguales a distancias iguales de las manos del levantador de pesas. Por la simetría del diagrama de cuerpo libre de la figura (figura 4.2*a*), las reacciones en las manos deben ser iguales y opuestas a los pesos. Por consiguiente, en la parte media *CD* de la barra, los pesos y las reacciones pueden ser reemplazados por dos momentos iguales y opuestos de 960 lb·in. (figura 4.2*b*), lo que demuestra que la parte media de la barra está sometida a flexión pura. Un análisis semejante de un pequeño triciclo deportivo (fotografía 4.1) muestra que el eje está sometido a flexión pura entre los puntos de sujeción al marco.

Se usarán los resultados obtenidos con las aplicaciones directas de flexión pura en el análisis de otros tipos de cargas, como *cargas axiales excéntricas* y *cargas transversales.*

La fotografía 4.2 muestra una prensa con barra de acero de 12 in., utilizada para ejercer fuerzas de 150 lb sobre dos piezas de madera cuando se unen con pegamento. La figura 4.3*a* muestra las fuerzas iguales y opuestas ejercidas por las piezas de madera en la prensa. Estas fuerzas producen una *carga excéntrica* en la parte recta de la prensa. En la figura 4.3*b* se seccionó la prensa en *CC*′ y se dibujó un diagrama de cuerpo libre de la mitad superior de la prensa. Las fuerzas internas en la sección equivalen a una fuerza de tensión axial **P** de 150 lb y a un momento **M** de 750 lb · in. Al combinar nuestro conocimiento de los esfuerzos producidos por una carga *centrada* y los resultados de un análisis de esfuerzos en flexión pura, se obtiene la distribución de los esfuerzos producidos por una carga *excéntrica*. Esto se analiza en la sección 4.8.

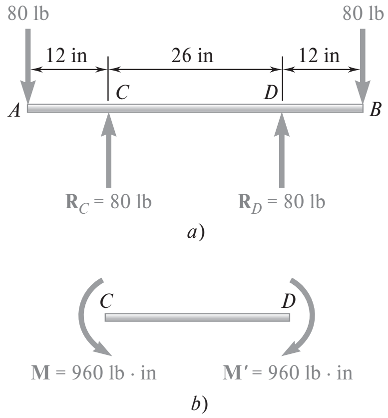


Figura 4.2 *a*) Diagrama de cuerpo libre de la barra de pesas que aparece en la fotografía de inicio del capítulo y *b*) diagrama de cuerpo libre de la parte central de la barra, la cual se encuentra sometida a flexión pura.

Fotografía 4.1 La parte central del eje trasero del triciclo deportivo se encuentra sometido a flexión pura.

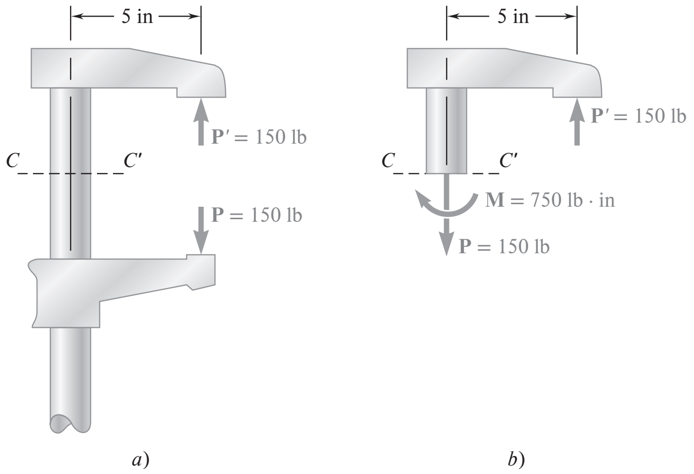
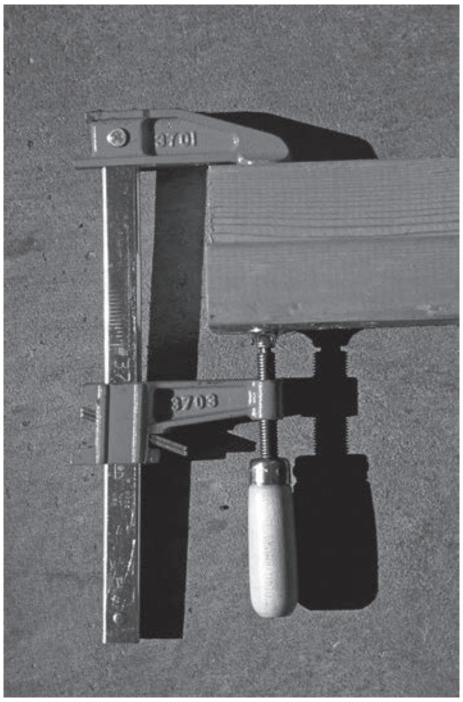


Figura 4.3 *a*) Diagrama de cuerpo libre de una prensa, *b*) diagrama de cuerpo libre de la parte superior de la prensa.



Fotografía 4.2 Prensa utilizada para pegar piezas de madera con pegamento.

El estudio de flexión pura desempeña un rol esencial en el estudio de vigas (es decir, miembros prismáticos) sometidos a varios tipos de *cargas transversales.* Considere una viga en voladizo AB que soporta una carga concentrada **P** en su extremo libre (figura 4.4*a*). Si la viga se secciona en C a una distancia x de A, el diagrama de cuerpo libre de AC (figura 4.4*b*) muestra que las fuerzas internas en la sección se componen de una fuerza **P′** igual y opuesta a **P** y un momento **M** de magnitud $M = Px$. La distribución de los esfuerzos normales en la sección se pueden obtener del momento **M** como si la viga estuviera sometida a flexión pura. Los esfuerzos cortantes en la sección dependen de la fuerza **P′**, y de su distribución sobre una sección dada se analiza en el capítulo 6.

La primera parte de este capítulo cubre los análisis de esfuerzos y deformaciones originados por flexión pura en un miembro homogéneo, que posee un plano de simetría hecho de un material que sigue la ley de Hooke. En la sección 4.1A se utilizan los métodos de estática para derivar tres ecuaciones fundamentales que los esfuerzos normales deben satisfacer en cualquier sección transversal dada del miembro. En la sección 4.1B, se demostrará que las *secciones transversales permanecen planas* en un miembro sometido a flexión pura, mientras que en la sección 4.2 se desarrollan fórmulas para determinar los *esfuerzos normales* y el *radio de curvatura* para ese miembro dentro del rango elástico.

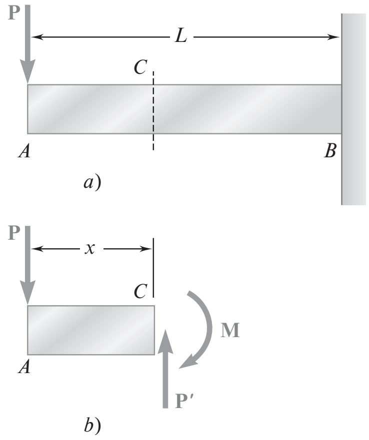


Figura 4.4 *a*) Viga en voladizo con carga en el extremo. *b*) Tal como la porción AC muestra, la viga no está en flexión pura.

La sección 4.4 cubre los esfuerzos y deformaciones en *miembros compuestos* hechos de más de un material, como vigas de concreto reforzado, las cuales utilizan las mejores características del acero y el concreto y que se utilizan extensamente en la construcción de edificios y puentes. Aprenderá a dibujar una *sección transformada* que representa un miembro hecho de un material homogéneo que experimenta las mismas deformaciones que el mismo miembro compuesto sometido a la misma carga. La sección transformada se utiliza para determinar los esfuerzos y deformaciones en el miembro compuesto original. La sección 4.5 aborda la determinación de la *concentración de esfuerzo* que ocurre donde la sección transversal de un miembro sufre un cambio repentino.

La sección 4.6 se ocupa de las *deformaciones plásticas*, en miembros hechos de un material que no siguen la ley de Hooke y que están sometidos a flexión. Los esfuerzos y deformaciones en miembros hechos de un *material elastoplástico* se analizan en la sección 4.6A. Al comenzar con el *momento elástico máximo* M_Y, el cual corresponde al inicio de la cedencia, considerará los efectos de momentos cada vez más grandes hasta que se alcanza el momento plástico M_P. También determinará las *deformaciones permanentes* y los *esfuerzos residuales* que resultan de las cargas (sección 4.6C).

En la sección 4.7 analizará una *carga axial excéntrica* en un plano de simetría (figura 4.3) superponiendo los esfuerzos provocados por flexión pura y una carga axial céntrica.

El estudio de la flexión de miembros prismáticos concluye con el análisis de la *flexión asimétrica* (sección 4.8) y el estudio del caso general de *carga axial excéntrica* (sección 4.9). La sección final de este capítulo se dedica a la determinación de los esfuerzos en *miembros curvos* (sección 4.10).

4.1 MIEMBROS SIMÉTRICOS SOMETIDOS A FLEXIÓN PURA

4.1A Momento interno y relaciones de esfuerzo

Considere un miembro prismático AB que posee un plano de simetría sometido a momentos iguales y opuestos **M** y **M**′ que actúan en dicho plano (figura 4.5*a*). Si el miembro AB se secciona en algún punto arbitrario C, las condiciones de equilibrio de la parte AC del miembro requieren que las fuerzas internas en la sección sean equivalentes al momento **M** (figura 4.5*b*). El momento M es el *momento flector* en la sección C. Siguiendo la convención usual, se asigna un signo positivo a M cuando el miembro se flexiona como se muestra en la figura 4.5*a* (es decir, cuando la concavidad de la viga es hacia arriba) y un signo negativo de lo contrario.

Si σ_x denota el esfuerzo normal en un punto dado de la sección transversal y τ_{xy} y τ_{xz} denotan las componentes del esfuerzo cortante, se expresa que el sistema de las fuerzas elementales internas ejercidas sobre la sección equivale al momento **M** (figura 4.6).

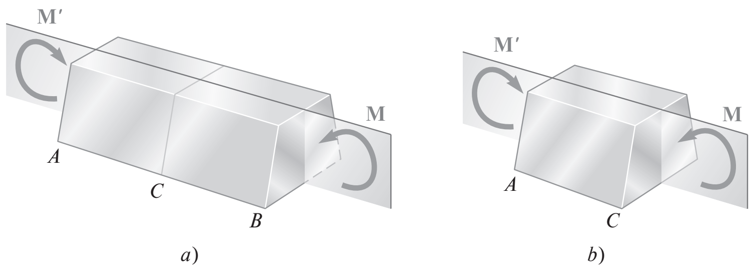


Figura 4.5 *a*) Miembro sometido a flexión pura. *b*) Cualquier parte intermedia de *AB* también estará sometida a flexión pura.

Recuerde de la estática que el momento **M** en realidad se compone de dos fuerzas iguales y opuestas. La suma de las componentes de estas fuerzas en cualquier dirección es por consiguiente igual a cero. Además, el momento es el mismo con respecto a *cualquier* eje perpendicular a su plano y es cero con respecto a cualquier eje contenido en dicho plano. Al seleccionar arbitrariamente el eje z mostrado en la figura 4.6, la equivalencia de las fuerzas internas elementales y el momento **M** se expresa escribiendo

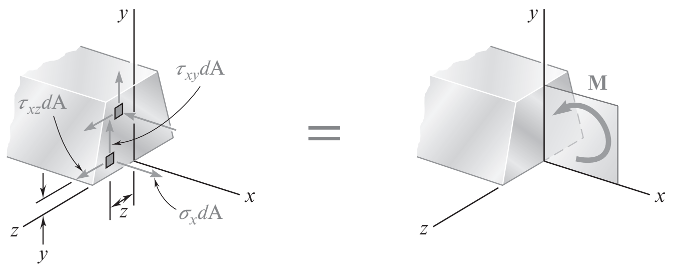


Figura 4.6 Esfuerzos producidos por flexión pura debido a un momento M.

que las sumas de las componentes y momentos de fuerzas son iguales a las componentes y momentos correspondientes del momento **M**:

Componentes x: $$\int \sigma_x \, dA = 0 \quad (4.1)$$

Momentos con respecto al eje y: $$\int z\sigma_x \, dA = 0 \quad (4.2)$$

Momentos con respecto al eje z: $$\int (-y\sigma_x \, dA) = 0 \quad (4.3)$$

Se podrían obtener tres ecuaciones adicionales si se iguala a cero las sumas de las componentes y, las componentes z y los momentos con respecto al eje x, aunque estas ecuaciones incluirían solo las componentes del esfuerzo cortante y, como verá en las siguiente sección, ambas componentes del esfuerzo cortante son iguales a cero.

Deben hacerse dos observaciones en este punto:

1. El signo menos en la ecuación (4.3) se debe al hecho de que el esfuerzo de tensión ($\sigma_x > 0$) produce un momento negativo (en el sentido de las manecillas del reloj) de la fuerza normal $\sigma_x \, dA$ con respecto al eje z.
2. Se podría haber anticipado la ecuación (4.2), ya que la aplicación de los momentos en el plano de simetría del miembro AB produce una distribución simétrica de los esfuerzos normales con respecto al eje y.

Una vez más, observe que la distribución real de los esfuerzos en una sección transversal dada no se puede determinar con solo la estática. Es *estáticamente indeterminada* y solo se puede obtener analizando las *deformaciones* producidas en el miembro.

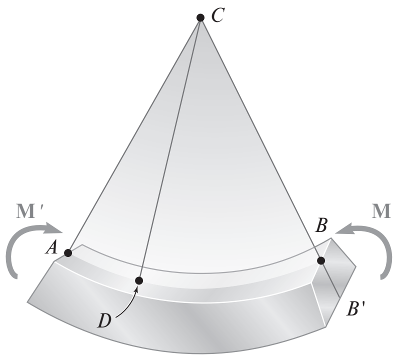


Figura 4.7 Los miembros inicialmente rectos sometidos a flexión se deforman en un arco circular.

4.1B Deformaciones

Ahora se analizará las deformaciones de un miembro prismático que posee un plano de simetría. Sus extremos se someten a momentos iguales y opuestos **M** y **M′** que actúan en el plano de simetría. El miembro se flexionará por la acción de los momentos, pero permanecerá simétrico con respecto a dicho plano (figura 4.7) Además, como el momento flector M es el mismo en cualquier sección transversal, el miembro se flexionará uniformemente. Por lo tanto, la línea AB a lo largo de la cara superior del miembro que interseca el plano de los momentos tendrá una curvatura constante. En otras palabras, la línea AB se transformará en un círculo de centro C, como lo hará la línea $A'B'$ a lo largo de la cara inferior del miembro. Observe que la línea AB se acortará cuando el miembro se flexiona (es decir, cuando $M > 0$), mientras que $A'B'$ se alargará.

A continuación se comprobará que cualquier sección transversal perpendicular al eje del miembro permanece plana, y que el plano de la sección pasa a través de C. De no ser este el caso, se vería que un punto E de la sección original a través de D (figura 4.8*a*) el cual, una vez que el miembro se flexiona, *no permanecería* en el plano perpendicular al plano de simetría que contiene la línea CD (figura 4.8*b*). Pero, debido a la simetría del miembro, habría otro punto E' que se transformaría exactamente de la misma manera. Suponga que, una vez que la viga se ha flexionado, ambos puntos estarían a la izquierda del plano definido por CD, como se muestra en la figura 4.8*b*. Como el momento flector M es el mismo en todo el miembro, en cualquier otra sección prevalecería una situación similar, y los puntos correspondientes a E y E' también se moverían a la izquierda. Por lo tanto, un observador situado en A, concluiría que la carga hace que los puntos E y E' situados en las diversas secciones transversales se muevan hacia el observador. Pero un observador en B, a quien la carga le parece la misma, y que observa los puntos E y E' en las mismas posiciones (excepto que ahora están invertidos) llegaría a la conclusión inversa. Esta inconsistencia nos conduce a concluir que E y E' estarán en el plano definido por CD y, por consiguiente, que la sección permanece plana y que pasa a través de C. Sin embargo, debe tener en cuenta que este planteamiento no excluye la posibilidad de que ocurran deformaciones dentro del plano de la sección (vea la sección 4.3).

Suponga que el miembro se divide en un gran número de pequeños elementos cúbicos con sus caras respectivamente paralelas a los tres planos de coordenadas. La propiedad que se ha establecido requiere que estos elementos se transformen como se

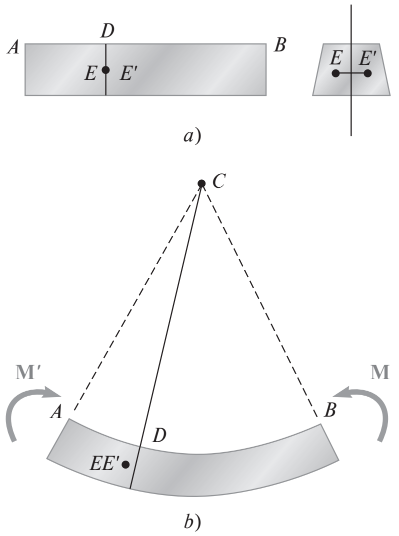


Figura 4.8 *a*) Dos puntos situados en una sección transversal en D perpendicular al eje del miembro. *b*) Considerando la posibilidad de que estos puntos no permanezcan en la sección transversal después de la flexión.

muestra en la figura 4.9, cuando el miembro se somete a los momentos **M** y **M**′. Como todas las caras representadas en las dos proyecciones de la figura 4.9 están a 90° entre sí, se concluye que $\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0$, y por lo tanto, que $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. En cuanto a las tres componentes de esfuerzo que aún no se han analizado, es decir, σ_y, σ_z, τ_{yz}, se observa que debe ser cero en la superficie del miembro. Puesto que, por otra parte, las deformaciones implicadas no requieren ninguna interacción entre los elementos de una sección transversal dada, se puede suponer que estas tres componentes de esfuerzo son iguales a cero en todo el miembro. Esta suposición se constata, tanto por evidencia experimental como por la teoría de elasticidad, para miembros esbeltos que experimentan pequeñas deformaciones.† Se concluye que solo la componente de esfuerzo no cero ejercida en cualquiera de los pequeños elementos cúbicos considerados aquí es la componente normal σ_x. Así pues, en cualquier punto de un miembro esbelto sometido a flexión pura, se tiene un estado de *esfuerzo uniaxial.* Al recordar que, con $M > 0$, se observa que las líneas AB y $A'B'$, respectivamente, se acortan y alargan, y que la deformación ϵ_x y el esfuerzo σ_x son negativos en la parte superior del miembro (*compresión*) y positivos en la parte inferior (*tensión*).

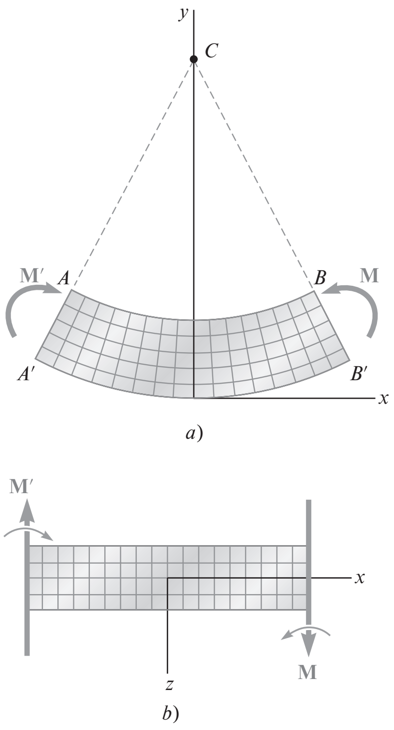


Figura 4.9 Dos vistas de un miembro sometido a flexión pura. *a*) Sección longitudinal vertical (plano de simetría). *b*) Sección longitudinal horizontal.

De lo anterior se desprende que debe haber una superficie paralela a las caras superior e inferior del miembro donde ϵ_x y σ_x son cero. Esta superficie se conoce como *superficie neutra.* La superficie neutra corta el plano de simetría a lo largo de un arco de círculo DE (figura 4.10*a*) y corta una sección transversal a lo largo de una línea recta llamada *eje neutro* de la sección (figura 4.10*b*). El origen de las coordenadas ahora se selecciona sobre la superficie neutra, en lugar de sobre la cara inferior del miembro, de modo que su coordenada y mide la distancia de cualquier punto al eje neutro.

Si ρ denota el radio del arco DE (figura 4.10*a*), y θ denota el ángulo central correspondiente a DE, y al observar que la longitud de DE es igual a la longitud de L del miembro no deformado, se escribe

$$L = \rho\theta \tag{4.4}$$

Al considerar que el arco JK se encuentra a una distancia y arriba del eje neutro, su longitud L' es

$$L' = (\rho - y)\theta \tag{4.5}$$

Dado que la longitud original del arco JK era igual a L, el alargamiento de JK es

$$\delta = L' - L \tag{4.6}$$

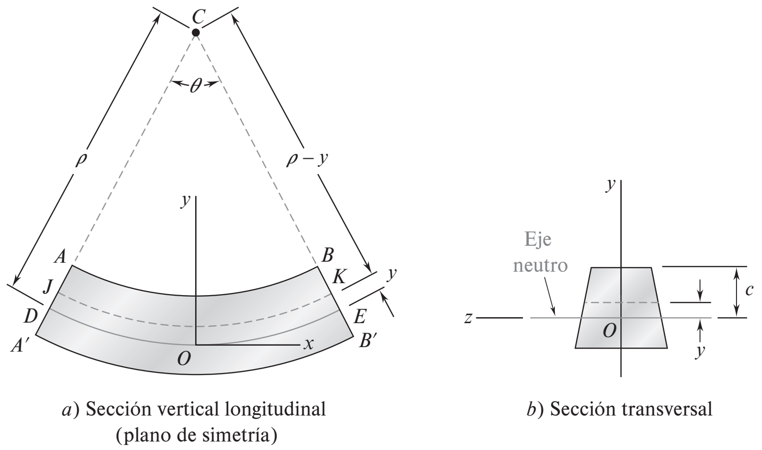


Figura 4.10 Establecimiento del eje neutro. *a*) Vista vertical longitudinal. *b*) Sección transversal en el origen.

† Vea también el problema 4.32.

o, al sustituir de las ecuaciones (4.4) y (4.5) en la ecuación (4.6),

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \quad (4.7)$$

La deformación longitudinal ϵ_x en los elementos de JK se obtiene dividiendo δ entre la longitud original L de JK. Se escribe

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

o

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (4.8)$$

El signo menos se debe a que se supuso que el momento flector es positivo, y por lo tanto la viga es cóncava hacia arriba.

Debido al requerimiento de que las secciones transversales permanezcan planas, las deformaciones son idénticas en todos los planos paralelos al plano de simetría. Por consiguiente, el valor de la deformación dada por la ecuación (4.8) es válida en cualquier lugar, y la *deformación longitudinal normal* ϵ_x *varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra*.

La deformación ϵ_x alcanza su valor máximo absoluto cuando y es la distancia más grande. Al denotar la distancia más grande a la superficie neutra como c (correspondiente a la superficie inferior o superior del miembro) y el *valor absoluto máximo* de la deformación como ϵ_m, se tiene

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad (4.9)$$

Al resolver ρ de la ecuación (4.9) y sustituir en la ecuación (4.8),

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \quad (4.10)$$

Para calcular la deformación o el esfuerzo en un punto dado del miembro, primero se debe localizar su superficie neutra. Para hacerlo, se debe especificar la relación esfuerzo-deformación del material utilizado, como se considerará en la siguiente sección.[†]

4.2 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL RANGO ELÁSTICO

Ahora se considerará el caso en que el momento flector M es tal que los esfuerzos normales en el miembro permanecen por debajo de la resistencia a la cedencia σ_Y. Esto significa que los esfuerzos en el miembro permanecen por debajo del límite proporcional y también por debajo del límite elástico. No habrá deformación permanente, y la ley de Hooke es aplicable. Suponiendo que el material es homogéneo y denotando su módulo de elasticidad como E, el esfuerzo normal en la dirección longitudinal x es

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (4.11)$$

Al recordar la ecuación (4.10) y multiplicando ambos miembros por E, se escribe

$$E\epsilon_x = -\frac{y}{c}(E\epsilon_m)$$

[†] Se observa que, si el miembro posee tanto un plano vertical como uno horizontal de simetría (por ejemplo, un miembro con sección transversal rectangular) y la curva de esfuerzo-deformación es la misma a tensión y compresión, la superficie neutra coincidirá con el plano de simetría (vea la sección 4.6).

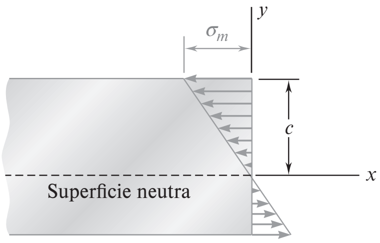


Figura 4.11 Los esfuerzos por flexión varían linealmente con la distancia al eje neutro.

o utilizando la ecuación (4.11),

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \tag{4.12}$$

donde σ_m denota el *valor máximo absoluto* del esfuerzo. Este resultado muestra que, *en el rango elástico, el esfuerzo normal varía linealmente con la distancia desde la superficie neutra* (figura 4.11).

Observe que aún no se han determinado ni la ubicación de la superficie neutra ni el valor máximo del esfuerzo σ_m. Ambos se pueden determinar con las ecuaciones (4.1) y (4.3). Al sustituir σ_x de la ecuación (4.12) en la ecuación (4.1), se escribe

$$\int \sigma_x \, dA = \int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA = 0$$

de la cual

$$\int y \, dA = 0 \tag{4.13}$$

Esta ecuación muestra que el primer momento de la sección transversal con respecto a su eje neutro debe ser cero.† Por consiguiente, para un miembro sometido a flexión pura y *mientras que los esfuerzos permanezcan en el rango elástico, el eje neutro pasa por el centroide de la sección*.

Recuerde la ecuación (4.3), la cual se desarrolló con respecto a un eje z horizontal arbitrario:

$$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Al especificar que el eje z coincide con el eje neutro de la sección transversal, sustituya σ_x de la ecuación (4.12) en la ecuación (4.3):

$$\int (-y)\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = M$$

o

$$\frac{\sigma_m}{c}\int y^2 \, dA = M \tag{4.14}$$

Recuerde que para flexión pura el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal e I es el momento de inercia o segundo momento de área de la sección transversal con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano del momento **M**. Al resolver σ_m de la ecuación (4.14)‡

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

Al sustituir σ_m de la ecuación (4.15) en la ecuación (4.12) se obtiene el esfuerzo normal σ_x a cualquier distancia y del eje neutro:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

† Vea el apéndice A para una explicación de los momentos de áreas.

‡ Recuerde que se supone que el momento flector es positivo. Si el momento flector es negativo, M debe reemplazarse en la ecuación (4.15) por su valor absoluto $|M|$.

Las ecuaciones (4.15) y (4.16) se conocen como *fórmulas de flexión elástica*, y el esfuerzo normal σ_x por el doblado o "flexión" del miembro, a menudo se denomina *esfuerzo por flexión.* El esfuerzo es de compresión ($\sigma_x < 0$) sobre el eje neutro ($y > 0$) cuando el momento flector M es positivo y de tensión ($\sigma_x > 0$) cuando M es negativo.

De regreso a la ecuación (4.15), la razón I/c depende solo de la geometría de la sección transversal. Esta razón se define como *módulo de sección elástico S*, donde

$$\text{Módulo de sección elástico } = S = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

Al sustituir S en lugar de I/c en la ecuación (4.15), esta ecuación en forma alternativa es

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \tag{4.18}$$

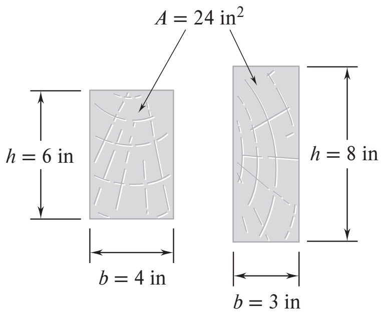


Figura 4.12 Secciones transversales de vigas de madera.

Dado que el esfuerzo máximo σ_m es inversamente proporcional al módulo de sección elástico S, las vigas deben diseñarse con un valor de S tan grande como sea práctico. Por ejemplo, una viga de madera con una sección transversal rectangular de ancho b y peralte o altura h tiene

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \tfrac{1}{6}bh^2 = \tfrac{1}{6}Ah \tag{4.19}$$

donde A es el área de sección transversal de la viga. Para dos vigas con la misma área de sección transversal A (figura 4.12), la viga con la mayor altura h tendrá el mayor módulo de sección y resistirá más la flexión.†

En el caso de acero estructural (fotografía 4.3), se prefieren las vigas americanas estándar (vigas S) y las vigas de brida o ala ancha (vigas W) a otros perfiles debido a que una gran parte de su sección transversal se encuentra lejos del eje neutro (figura 4.13). Por consiguiente, para un área de sección y altura dadas, su diseño proporciona valores grandes de I y S. En tablas que incluyen varias propiedades geométricas se

Fotografía 4.3 En la estructura de este edificio se utilizan vigas de brida o ala ancha.

† Sin embargo, los valores grandes de la razón h/b podrían provocar inestabilidad lateral de la viga.

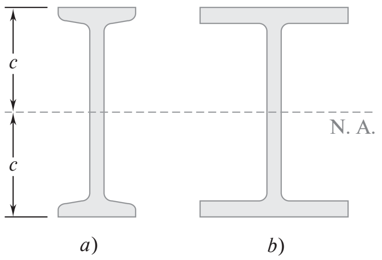


Figura 4.13 Dos tipos de secciones transversales de viga de acero: *a*) viga estándar americana (*S*); *b*) viga de brida ancha (*W*).

pueden obtener valores del módulo de sección elástico de vigas comúnmente fabricadas. Para determinar el esfuerzo máximo σ_m en una sección dada de una viga estándar, el ingeniero solo tiene que leer el valor del módulo S de sección elástico en la tabla y dividir el momento flector M de la sección entre S.

La deformación del miembro producida por el momento flector M se mide por la *curvatura* de la superficie neutra. La curvatura se define como el recíproco del radio de curvatura ρ y se obtiene resolviendo $1/\rho$ de la ecuación (4.9):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \qquad (4.20)$$

En el rango elástico, $\epsilon_m = \sigma_m/E$. Al sustituir ϵ_m en la ecuación (4.20) y al recordar la ecuación (4.13), se escribe

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I}$$

o

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (4.21)$$

Aplicación de conceptos 4.1

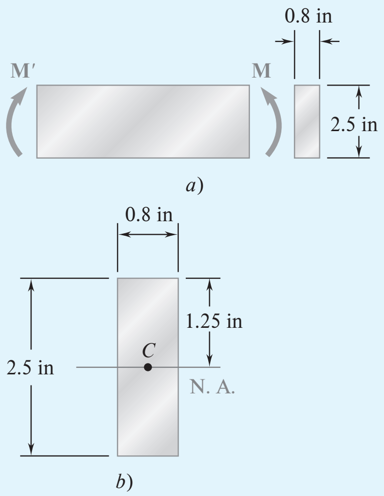


Figura 4.14 *a*) Barra de sección transversal rectangular sometida a flexión pura. *b*) Centroide y dimensiones de la sección transversal.

Una barra de acero de sección transversal rectangular de 0.8 × 2.5 in se somete a momentos iguales y opuestos que actúan en el plano vertical de simetría de la barra (figura 4.14*a*). Determine el valor del momento flector M que hace que la barra ceda. Suponga $\sigma_y = 36$ ksi.

Dado que el eje neutro debe pasar por el centroide C de la sección transversal, $c = 1.25$ in (figura 4.14*b*). Por otra parte, el momento de inercia centroidal de la sección transversal rectangular es

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(0.8 \text{ in})(2.5 \text{ in})^3 = 1.042 \text{ in}^4$$

Al resolver M de la ecuación (4.15) y al sustituir los datos anteriores,

$$M = \frac{I}{c}\sigma_m = \frac{1.042 \text{ in}^4}{1.25 \text{ in}}(36 \text{ ksi})$$

$$M = 30 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

Aplicación de conceptos 4.2

Una varilla de aluminio con una sección semicircular de radio $r = 12$ mm (figura 4.15*a*) se flexiona en la forma de un arco circular de radio medio $\rho = 2.5$ m. Si la cara plana de la varilla se hace girar hacia el centro de curvatura del arco determine el esfuerzo de tensión y compresión máximo en la varilla. Use $E = 70$ GPa.

Se puede utilizar la ecuación (4.21) para determinar el momento flector M correspondiente al radio de curvatura dado ρ y luego la ecuación (4.15) para determi-

nar σ_m. Sin embargo, es más simple utilizar la ecuación (4.9) para determinar ϵ_m y la ley de Hooke para obtener σ_m.

La ordenada del centroide C de la sección transversal semicircular es

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12 \text{ mm})}{3\pi} = 5.093 \text{ mm}$$

El eje neutro pasa por C (figura 4.15*b*) y la distancia c al punto de la sección transversal más alejado del eje neutro es

$$c = r - \bar{y} = 12 \text{ mm} - 5.093 \text{ mm} = 6.907$$

Al usar la ecuación (4.9),

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6.907 \times 10^{-3} \text{ m}}{2.5 \text{ m}} = 2.763 \times 10^{-3}$$

y al aplicar la ley de Hooke,

$$\sigma_m = E\epsilon_m = (70 \times 10^9 \text{ Pa})(2.763 \times 10^{-3}) = 193.4 \text{ MPa}$$

Como este lado de la varilla mira hacia el otro lado del centro de curvatura, el esfuerzo obtenido es un esfuerzo de tensión. El esfuerzo de compresión máximo ocurre en el lado plano de la varilla. Ante el hecho de que el esfuerzo se produce a una cierta distancia del eje neutro, se escribe

$$\sigma_{\text{comp}} = -\frac{\bar{y}}{c}\sigma_m = -\frac{5.093 \text{ mm}}{6.907 \text{ mm}}(193.4 \text{ MPa})$$
$$= -142.6 \text{ MPa}$$

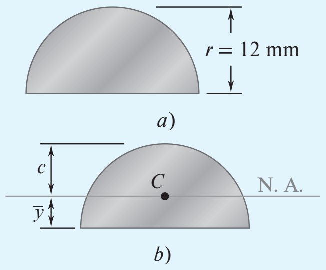


Figura 4.15 *a*) Sección semicircular de varilla en flexión pura. *b*) Centroide y eje neutro de la sección transversal.

4.3 DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN TRANSVERSAL

Aunque la sección 4.1B demostró que la sección transversal de un miembro sometido a flexión pura permanece plana, existe la posibilidad de que ocurran deformaciones dentro del plano de la sección. Hay que recordar de la sección 2.4 que los elementos que se encuentran en un estado de esfuerzo uniaxial, $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$ se deforman en las direcciones transversales y y z, y también en la dirección axial x. Las deformaciones normales ϵ_y y ϵ_z dependen de la relación de Poisson ν del material empleado y se expresan como

$$\epsilon_y = -\nu\epsilon_x \qquad \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$$

o al recordar la ecuación (4.8),

$$\epsilon_y = \frac{\nu y}{\rho} \qquad \epsilon_z = \frac{\nu y}{\rho} \tag{4.22}$$

Estas relaciones muestran que los elementos situados arriba de la superficie neutra ($y > 0$) se expanden en las direcciones y y z, en tanto que los elementos situados debajo de la superficie neutra ($y < 0$) se contraen. En un miembro de sección transversal rectangular, la expansión y contracción de los diversos elementos en la dirección vertical se compensarán y no se observará ningún cambio en la dimensión vertical de la sección transversal. Sin embargo, en cuanto a las deformaciones en la dirección trans-

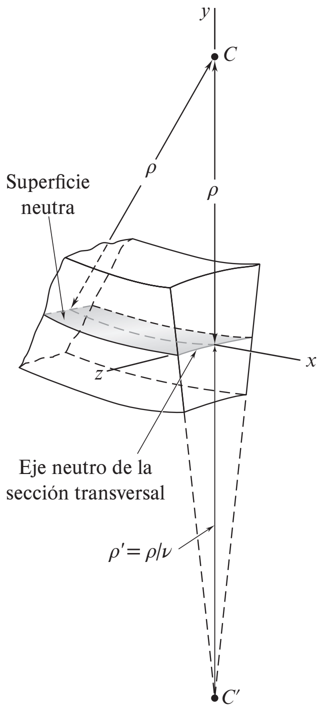


Figura 4.16 Deformación de una sección transversal.

versal horizontal z, la expansión de los elementos localizados arriba de la superficie neutra y la contracción correspondiente de los elementos localizados debajo de la superficie producirán varias líneas horizontales en la sección que se está flexionando en la forma de arcos de círculo (figura 4.16). Esta situación es similar a la que ocurre en una sección transversal longitudinal. Al comparar la segunda de las ecuaciones (4.22) con la ecuación (4.8), el eje neutro de la sección transversal se flexiona en la forma de un círculo de radio $\rho' = \rho/\nu$. El centro C' de este círculo se encuentra debajo de la superficie neutra (suponiendo $M > 0$) (es decir, en el lado opuesto al centro de curvatura C). El recíproco del radio de curvatura ρ' representa la curvatura de la sección transversal y se llama *curvatura anticlástica.*

$$\text{Curvatura anticlástica} = \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \tag{4.23}$$

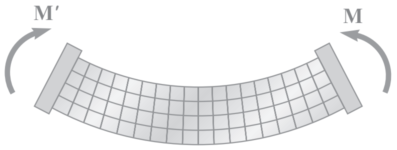


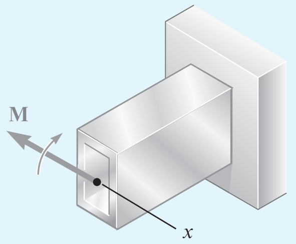
Figura 4.17 Flexión pura con placas en los extremos para garantizar que las secciones planas permanezcan planas.

En esta sección se analizará la manera en que se aplican los momentos **M** y **M**′ al miembro. Si *todas* las secciones transversales del miembro, de un extremo al otro, han de permanecer planas y libres de esfuerzos cortantes, los momentos deben aplicar de modo que los extremos permanezcan planos y libres de esfuerzos cortantes. Esto se puede lograr aplicando los momentos **M** y **M**′ al miembro por medio de placas lisas rígidas (figura 4.17). Las fuerzas ejercidas por las placas serán normales a las secciones extremas, y estas, al permanecer planas, no se deformarán como previamente se describió en esta sección.

Observe que estas condiciones de carga en realidad no pueden llevarse a cabo, ya que requieren que cada placa ejerza fuerzas de tensión en la sección extrema correspondiente debajo de su eje neutro, al mismo tiempo que permiten que se deformen libremente en su propio plano. Sin embargo, el hecho de que el modelo de placas rígidas extremas de la figura 4.17 no pueda realizarse físicamente, no le resta importancia, ya que nos permite *visualizar* las condiciones de carga correspondientes a las relaciones en las secciones anteriores. Las condiciones de carga reales pueden diferir apreciablemente de este modelo idealizado. Sin embargo, si se utiliza el principio de Saint-Venant, se pueden usar estas relaciones para calcular esfuerzos en situaciones de ingeniería, en tanto la sección considerada no esté demasiado cerca de los puntos donde se aplican los momentos.

Problema modelo 4.1

El tubo rectangular mostrado hecho de una aleación de aluminio para la cual $\sigma_Y = 40$ ksi, $\sigma_U = 60$ ksi y $E = 10.6 \times 10^6$ psi. Ignore el efecto de los filetes y determine *a*) el momento flector M para el cual el factor de seguridad será de 3.00 y *b*) el radio de curvatura correspondiente del tubo.



ESTRATEGIA: Use el factor de seguridad para determinar el esfuerzo permisible. Luego calcule el momento flector y el radio de curvatura con las ecuaciones (4.15) y (4.21).

MODELAR y ANALIZAR:

Momento de inercia. Al considerar el área de sección transversal del tubo como la diferencia entre los dos rectángulos mostrados en la figura 1 y recordar la fórmula para momento de inercia centroidal de un rectángulo, se escribe

$$I = \tfrac{1}{12}(3.25)(5)^3 - \tfrac{1}{12}(2.75)(4.5)^3 \qquad I = 12.97 \text{ in}^4$$

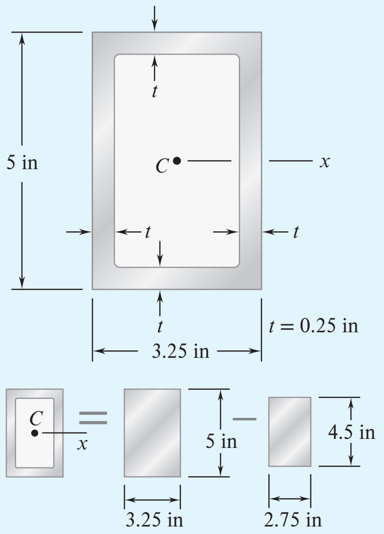


Figura 1 Superposición para calcular el momento de inercia.

Esfuerzo permisible. Para un factor de seguridad de 3.00 y un esfuerzo último de 60 ksi, se tiene

$$\sigma_{\text{todos}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{60 \text{ ksi}}{3.00} = 20 \text{ ksi}$$

Como $\sigma_{\text{todos}} < \sigma_Y$, el tubo permanece en el rango elástico y se pueden aplicar los resultados de la sección 4.2.

***a)* Momento flector.** Con $c = \frac{1}{2}(5 \text{ in}) = 2.5$ in, se escribe

$$\sigma_{\text{todos}} = \frac{Mc}{I} \qquad M = \frac{I}{c}\sigma_{\text{todos}} = \frac{12.97 \text{ in}^4}{2.5 \text{ in}}(20 \text{ ksi}) \qquad M = 103.8 \text{ kip} \cdot \text{in} \quad ◀$$

***b)* Radio de curvatura.** Al utilizar la figura 2 y recordar que $E = 10.6 \times 10^6$ psi, se sustituye este valor y los valores obtenidos de I y M en la ecuación (4.21) y se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{103.8 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in}}{(10.6 \times 10^6 \text{ psi})(12.97 \text{ in}^4)} = 0.755 \times 10^{-3} \text{ in}^{-1}$$

$$\rho = 1\,325 \text{ in} \qquad \rho = 110.4 \text{ ft} \quad ◀$$

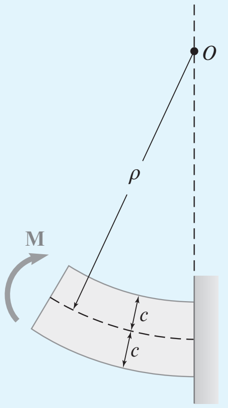


Figura 2 Perfil deformado de una viga.

REVISAR y PENSAR: Como alternativa, se puede calcular el radio de curvatura con la ecuación (4.9). Como se sabe que el esfuerzo máximo es $\sigma_{\text{todos}} = 20$ ksi, es posible determinar la deformación máxima ϵ_m, y la ecuación (4.9) da

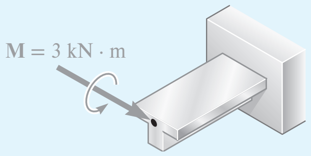
$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{\text{todos}}}{E} = \frac{20 \text{ ksi}}{10.6 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.887 \times 10^{-3} \text{ in/in}$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \qquad \rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{2.5 \text{ in}}{1.887 \times 10^{-3} \text{ in/in}}$$

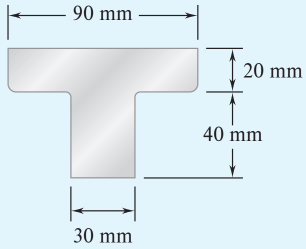
$$\rho = 1\,325 \text{ in} \qquad \rho = 110.4 \text{ ft} \quad ◀$$

Problema modelo 4.2

El momento mostrado de 3 kN · m actúa en una pieza de máquina de hierro colado. Si se sabe que $E = 165$ GPa e ignorando el efecto de los filetes, determine *a*) los esfuerzos de tensión y compresión máximos en la pieza y *b*) el radio de curvatura de la pieza.



ESTRATEGIA: El momento de inercia se determina, reconociendo que primero hay que localizar el eje neutro. Luego se utilizan las ecuaciones (4.15) y (4.21) para determinar los esfuerzos y el radio de curvatura.



MODELAR y ANALIZAR:

Centroide. Divida la sección transversal en T en dos rectángulos como se muestra en la figura 1 y escriba

	Área, mm²	**$\bar{y}$, mm**	**$\bar{y}A$, mm³**	
1	$(20)(90) = 1\,800$	50	90×10^3	$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A$
2	$(40)(30) = 1\,200$	20	24×10^3	$\bar{Y}(3\,000) = 114 \times 10^6$
	$\Sigma A = 4\,000$		$\Sigma\bar{y} = 114 \times 10^3$	$\bar{Y} = 38$ mm

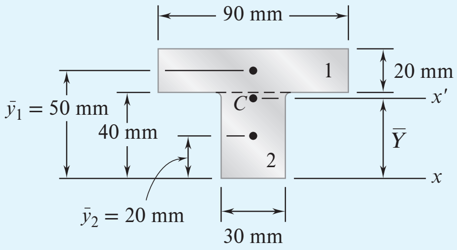


Figura 1 Áreas compuestas para calcular el centroide.

Momento centroidal de inercia. Se utiliza el teorema del eje paralelo para determinar el momento de inercia de cada rectángulo (figura 2) con respecto al eje x' que pasa por el centroide de la sección compuesta. Al sumar los momentos de inercia de los rectángulos se escribe

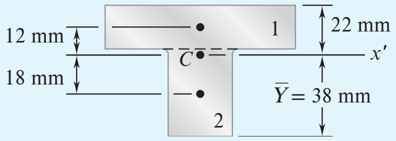


Figura 2 Áreas compuestas para calcular el momento de inercia.

$$I_{x'} = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = \Sigma(\tfrac{1}{12}bh^3 + Ad^2)$$
$$= \tfrac{1}{12}(90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \tfrac{1}{12}(30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2$$
$$= 868 \times 10^3 \text{ mm}^4$$
$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

***a*) Esfuerzo máximo de tensión.** Como el momento aplicado flexiona la pieza hacia abajo, el centro de curvatura se encuentra debajo de la sección transversal. El esfuerzo máximo de tensión ocurre en el punto A (figura 3), que es el punto más alejado del centro de curvatura.

$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(3 \text{ kN}\cdot\text{m})(0.022 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \qquad \sigma_A = +76.0 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Esfuerzo máximo de compresión. Este ocurre en el punto B (figura 3):

$$\sigma_B = -\frac{Mc_B}{I} = -\frac{(3 \text{ kN}\cdot\text{m})(0.038 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \qquad \sigma_B = -131.3 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

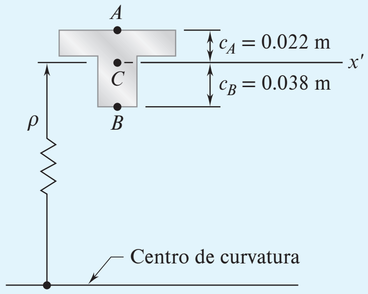


Figura 3 El radio de curvatura se mide hasta el centroide de la sección transversal.

***b*) Radio de curvatura.** Por medio de la ecuación (4.21) y la figura 3, se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{3 \text{ kN}\cdot\text{m}}{(165 \text{ GPa})(868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}$$
$$= 20.95 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} \qquad \rho = 47.7 \text{ m} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Observe que la sección T tiene un plano vertical de simetría, con el momento aplicado en él. Por consiguiente, el efecto de este momento aplicado queda en el plano de simetría, y el resultado es una flexión simétrica. Si el plano estuviera en otro plano, se tendría una flexión asimétrica y por lo tanto no se necesitaría aplicar los principios de la sección 4.8.

Problemas

4.1 y 4.2 Si se sabe que el momento mostrado actúa en un plano vertical, determine el esfuerzo en *a*) punto *A*, *b*) punto *B*.

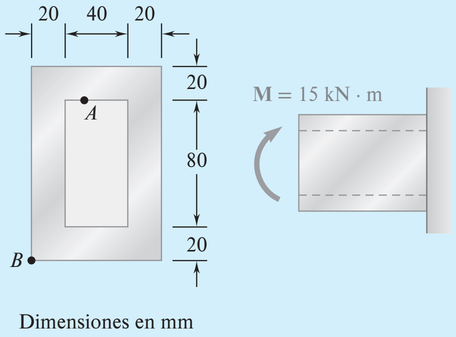


Figura P4.1

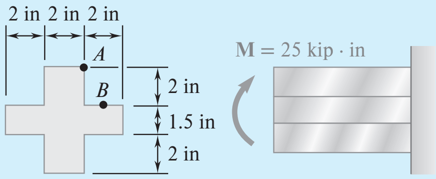


Figura P4.2

4.3 Mediante un esfuerzo permisible de 155 MPa, determine el momento flector máximo **M** que se puede aplicar a la viga de brida ancha mostrada. Ignore el efecto de los filetes.

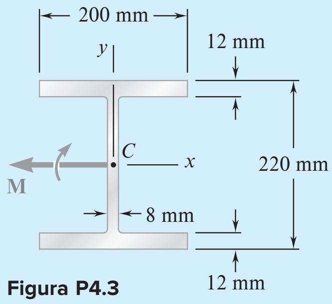


Figura P4.3

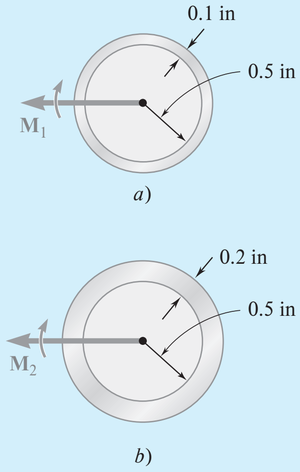


Figura P4.5

4.4 Resuelva el problema 4.3, suponiendo que un momento M_y flexiona la viga de brida ancha con respecto al eje *y*.

4.5 Utilizando un esfuerzo permisible de 16 ksi, determine el momento máximo que se puede aplicar a cada tubo.

4.6 Si se sabe que el momento mostrado actúa en un plano vertical, determine el esfuerzo en el *a*) punto *A*, *b*) en el punto *B*.

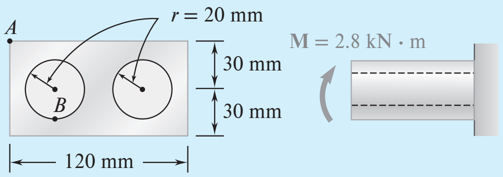


Figura P4.6

4.7 y 4.8 Dos secciones W4 × 13 laminadas se sueldan como se muestra. Si se sabe que para la aleación de acero usada $\sigma_U = 58$ ksi y utilizando un factor de seguridad de 3.0, determine el momento máximo que se puede aplicar cuando el ensamble se flexiona con respecto al eje z.

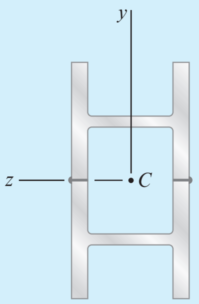


Figura *P4.7*

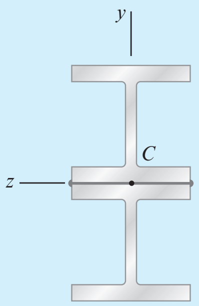


Figura *P4.8*

4.9 a 4.11 Se aplican dos fuerzas verticales a una viga de la sección transversal mostrada. Determine los esfuerzos máximo de tensión y compresión en la parte BC de la viga.

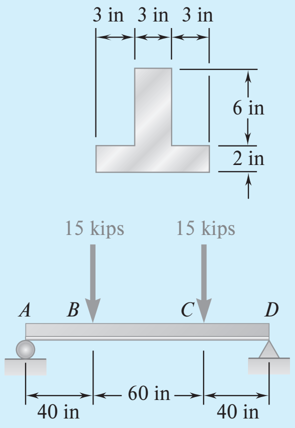


Figura P4.9

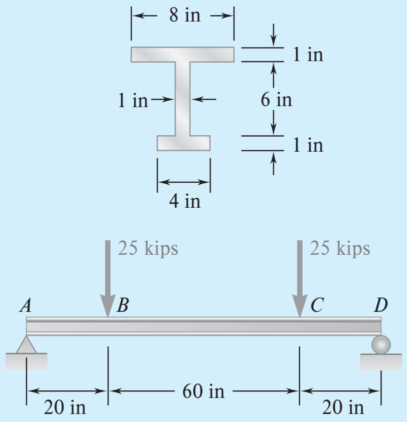


Figura P4.10

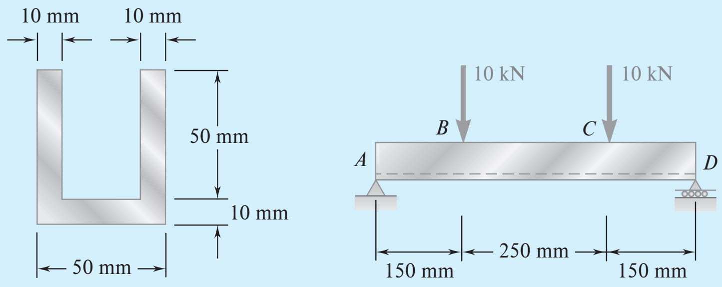


Figura P4.11

4.12 Si se sabe que una viga de la sección transversal mostrada se flexiona con respecto a un eje horizontal y que el momento flector es de 6 kN · m, determine la fuerza total que actúa en parte sombreada del alma de la viga.

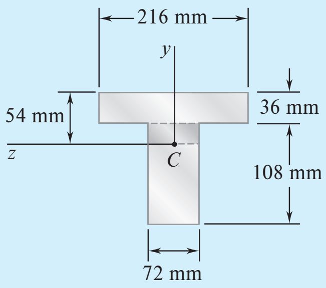


Figura P4.12

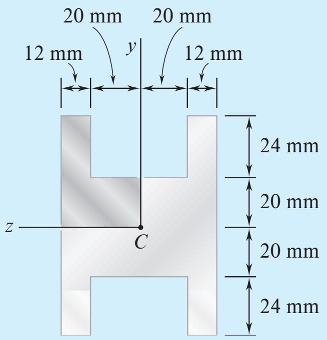


Figura ***P4.13***

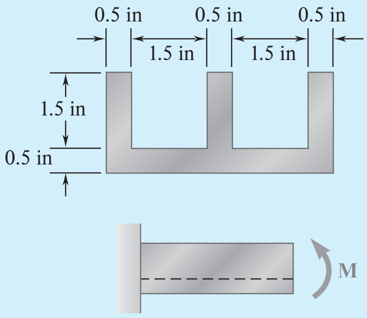


Figura P4.15

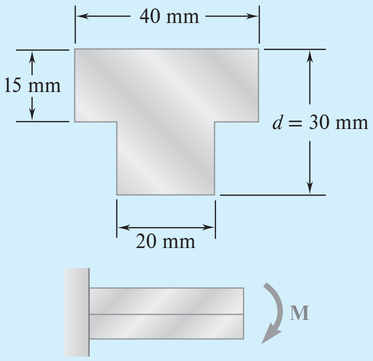


Figura P4.16

4.13 Si se sabe que una viga de la sección transversal mostrada se flexiona con respecto a un eje horizontal y que el momento flector es de 4 kN · m, determine la fuerza total que actúa en la parte sombreada de la viga.

4.14 Resuelva el problema 4.13, suponiendo que un momento de 4 kN · m flexiona la viga con respecto al eje vertical.

4.15 Si se sabe que para la viga extruida mostrada el esfuerzo permisible es de 12 ksi a tensión y de 16 ksi a compresión, determine el momento máximo **M** que se puede aplicar.

4.16 La viga mostrada es de nylon para el cual el esfuerzo permisible es de 24 MPa a tensión y de 30 MPa a compresión. Determine el momento máximo **M** que se puede aplicar a la viga.

4.17 Resuelva el problema 4.16 suponiendo que $d = 40$ mm.

4.18 Si se sabe que para la viga mostrada el esfuerzo permisible es de 12 ksi a tensión y de 16 ksi a compresión, determine el momento máximo **M** que se puede aplicar.

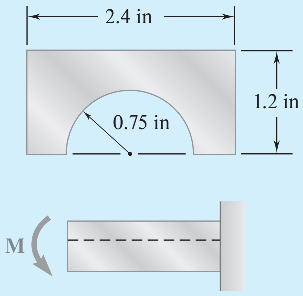


Figura P4.18

4.19 y ***4.20*** Si se sabe que para la viga extruida mostrada el esfuerzo permisible es de 120 MPa a tensión y de 150 MPa a compresión, determine el momento máximo **M** que se puede aplicar.

4.21 Varillas rectas de 6 mm de diámetro y 30 m de largo se almacenan enrollándolas adentro de un tambor de 1.25 m de diámetro interno. Suponiendo que no se excede resistencia a la fluencia o cedencia, determine *a*) el esfuerzo máximo en una varilla enrollada, *b*) el momento flector correspondiente en la varilla. Use $E = 200$ GPa.

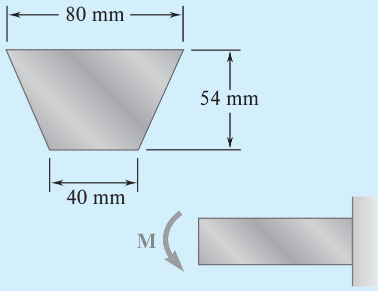


Figura P4.19

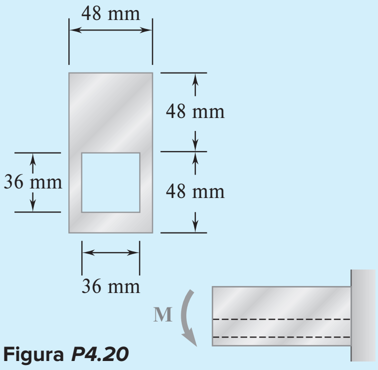


Figura ***P4.20***

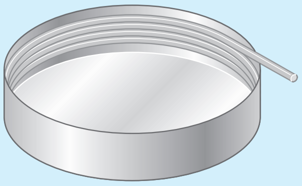


Figura P4.21

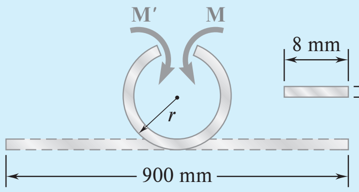


Figura P4.22

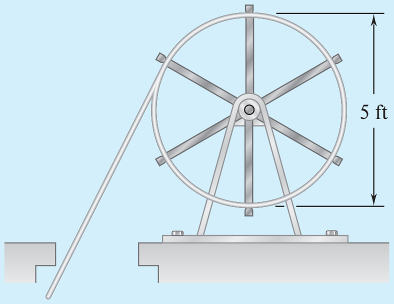


Figura P4.23

4.22 Dos momentos aplicados flexionan un fleje de acero de 900 mm hasta que forma un círculo completo como se muestra. Determine *a*) el espesor mínimo *t* del fleje si el esfuerzo permisible del acero es de 420 MPa, *b*) el momento *M* correspondiente. Use $E = 200$ GPa.

4.23 En ocasiones se utilizan varillas rectas de 0.30 in de diámetro y 200 ft de largo para destapar conductos subterráneos o para introducir alambres a través de un conducto nuevo. Las varillas están hechas de acero de alta resistencia, y para almacenarlas y transportarlas, se enrollan en carretes de 5 ft de diámetro. Suponiendo que no se excede la resistencia a la cedencia, determine *a*) el esfuerzo máximo cuando la varilla inicialmente recta se enrolla en un carrete, *b*) el momento flector correspondiente en la varilla. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

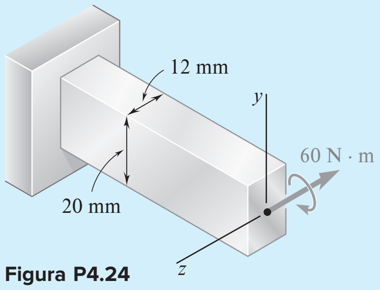


Figura P4.24

4.24 Se aplica un momento de 60 N · m a la barra de acero mostrada. *a*) Suponiendo que el momento se aplica con respecto a eje *z* como se muestra, determine el esfuerzo máximo y el radio de curvatura de la barra. *b*) Resuelva el inciso *a*), suponiendo que el momento se aplica con respecto al eje *y*. Use $E = 200$ GPa.

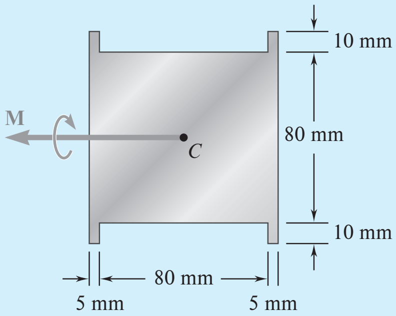


Figura P4.25

4.25 *a*) Utilizando un esfuerzo permisible de 120 MPa, determine el momento máximo **M** que se puede aplicar a la viga de la sección transversal mostrada. *b*) Resuelva el inciso *a*), suponiendo que la sección transversal de la viga es un cuadrado de 80 mm por lado.

4.26 Un momento **M** flexiona un tubo de pared gruesa con respecto al eje horizontal. El tubo puede diseñarse con o sin cuatro aletas. *a*) Empleando un esfuerzo permisible de 20 ksi, determine el momento máximo que se puede aplicar si el tubo se diseña con cuatro aletas como se muestra. *b*) Resuelva el inciso *a*), suponiendo que el tubo se diseñó sin aletas.

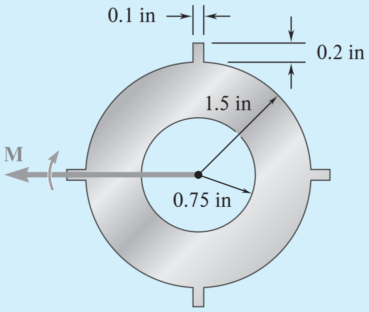


Figura P4.26

4.27 Se aplicará un momento **M** a una viga de sección transversal rectangular que se tiene que aserrar de un tronco de sección transversal circular. Determine

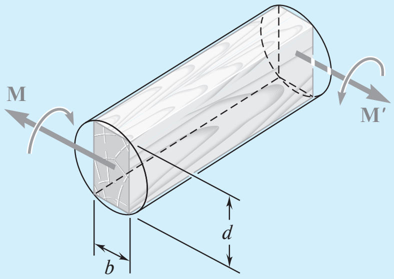


Figura *P4.27*

la razón d/b para la cual *a*) el esfuerzo máximo σ_m será lo más pequeño posible, *b*) el radio de curvatura de la viga será máximo.

4.28 Mediante fresado se quita una parte de una barra cuadrada, de modo que su sección transversal es como se muestra. Luego la barra se flexiona con respecto a su eje horizontal por medio de un momento **M**. Considerando el caso en que $h = 0.9h_0$, exprese el esfuerzo máximo en la barra como $\sigma_m = k\sigma_0$, donde σ_0 es el esfuerzo máximo que hubiera ocurrido si la barra cuadrada original se hubiera flexionado con el mismo momento **M**, determine el valor de k.

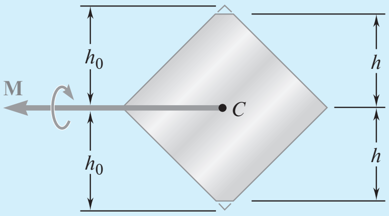


Figura *P4.28*

4.29 En el problema 4.28, determine *a*) el valor de h para el cual el esfuerzo máximo σ_m es lo más pequeño posible, *b*) el valor correspondiente de k.

4.30 Para la barra y carga de la Aplicación de conceptos 4.1, determine *a*) el radio de curvatura ρ, *b*) el radio de curvatura ρ' de una sección transversal, *c*) el ángulo entre los lados de la barra que originalmente era vertical. Use $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$.

4.31 Una viga W200 × 31.3 de acero laminado se somete a un momento **M** de 45 kN · m. Si se sabe que $E = 200$ GPa y $\nu = 0.29$, determine *a*) el radio de curvatura ρ, *b*) el radio de curvatura ρ' de una sección transversal.

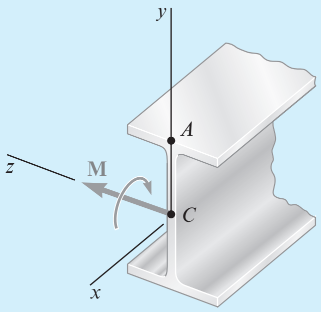


Figura P4.31

4.32 En la sección 4.1B se supuso que los esfuerzos normales σ_Y en un miembro sometido a tensión pura son insignificantes. Para un miembro elástico inicialmente recto de sección transversal rectangular, *a*) deduzca una expresión aproximada para σ_Y en función de y, *b*) demuestre que $(\sigma_Y)_{máx} = -(c2\rho)(\sigma_x)_{máx}$ y, por consiguiente, que σ_Y se puede ignorar en todas las situaciones prácticas. (*Sugerencia:* Considere el diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga situada debajo de la superficie de ordenada y y suponga que la distribución del esfuerzo σ_x sigue siendo lineal).

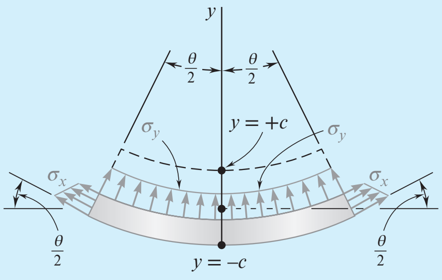


Figura P4.32

4.4 MIEMBROS HECHOS DE MATERIALES COMPUESTOS

Las derivaciones que aparecen en la sección 4.2 están basadas en la suposición de un material homogéneo con un módulo de elasticidad E dado. Si el miembro está hecho de dos o más materiales con diferentes módulos de elasticidad, el miembro es un miembro compuesto.

Considere una barra compuesta de dos partes de diferentes materiales pegadas como se muestra en la figura 4.18. Esta barra compuesta se deformará como se describe en la sección 4.1B, ya que su sección transversal no cambia a lo largo de toda su longitud, y no se hizo ninguna suposición en la sección 4.1B con respecto a la relación esfuerzo-deformación del material o materiales implicados. Por tanto, la deformación normal ϵ_x seguirá variando linealmente con la distancia y al eje neutro de la sección (figuras 4.21*a* y 4.21*b*), y la fórmula (4.8) sigue teniendo validez.

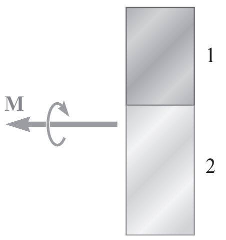


Figura 4.18 Sección transversal hecha de diferentes materiales.

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

Sin embargo, no se puede suponer que el eje neutro pasa por el centroide de la sección compuesta, y uno de los objetivos de este análisis es determinar la ubicación de este eje.

Como los módulos de elasticidad E_1 y E_2 de los dos materiales son diferentes, las ecuaciones para el esfuerzo normal en cada material son

$$\sigma_1 = E_1\epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho}$$
$$\sigma_2 = E_2\epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho} \tag{4.24}$$

Se obtiene una curva de esfuerzo-distribución compuesta de dos segmentos con líneas rectas como se muestra en la figura 4.19*c*. De las ecuaciones (4.24) se desprende que la fuerza dF_1 ejercida en un elemento de área dA de la parte superior de la sección transversal es

$$dF_1 = \sigma_1 dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA \tag{4.25}$$

en tanto que la fuerza dF_2 ejercida en un elemento de la misma área dA de la parte inferior es

$$dF_2 = \sigma_2 dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA \tag{4.26}$$

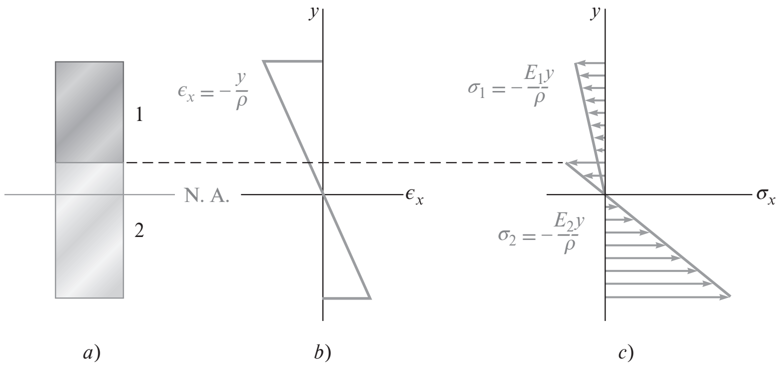


Figura 4.19 Distribuciones del esfuerzo y deformación en una barra hecha de dos materiales. *a*) Eje neutro desviado del centroide. *b*) Distribución de la deformación. c) Distribución del esfuerzo correspondiente.

Al denotar la relación E_2/E_1 de los dos módulos de elasticidad como n, es posible escribir

$$dF_2 = -\frac{(nE_1)y}{\rho}\,dA = -\frac{E_1 y}{\rho}\,(n\,dA) \qquad (4.27)$$

Al comparar las ecuaciones (4.25) y (4.27), se observa que se ejercería la misma fuerza dF_2 en un elemento de área $n\,dA$ del primer material. De este modo, la resistencia a la flexión de la barra no cambiaría si ambas partes estuvieran hechas del primer material siempre que el ancho de cada elemento de la parte inferior se multiplicara por el factor n. Observe que este ensanchamiento (si $n > 1$) o estrechamiento (si $n < 1$) debe ocurrir *en una dirección paralela al eje neutro de la sección*, ya que es esencial que la distancia y de cada elemento al eje neutro no cambie. Esta nueva sección se llama *sección transformada* del miembro (figura 4.20).

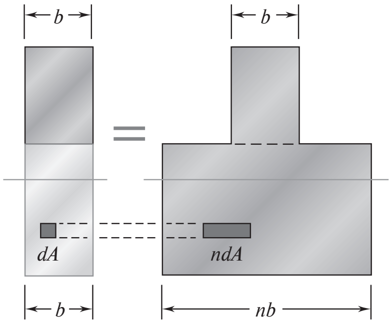


Figura 4.20 Sección transformada que se obtiene al reemplazar el material de la parte inferior con el de la parte superior.

Como la sección transformada representa la sección transversal de un miembro hecho de un *material homogéneo* con módulo de elasticidad E_1, se puede usar el método descrito en la sección 4.2 para determinar el eje neutro de la sección y el esfuerzo normal en varios puntos. El eje neutro se traza *a través del centroide de la sección transformada* (figura 4.21), y el esfuerzo σ_x en cualquier punto del miembro homogéneo correspondiente obtenido con la ecuación (4.16) es

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad (4.16)$$

donde y es la distancia a la superficie neutra e I es *el momento de inercia de la sección transformada* con respecto a su eje centroidal.

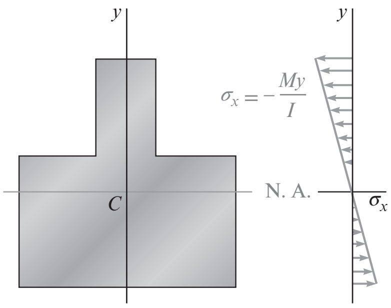


Figura 4.21 Distribución de esfuerzos en la sección transformada.

Para obtener el esfuerzo σ_1 en un punto situado en la parte superior de la sección transversal de la barra compuesta original, calcule el esfuerzo σ_x en el punto correspondiente de la sección transformada. Sin embargo, para obtener el esfuerzo σ_2 en un punto de la parte inferior de la sección transversal, se debe *multiplicar por n* el esfuerzo σ_x calculado en el punto correspondiente de la sección transformada. De hecho, se aplica la misma fuerza elemental dF_2 a un elemento de área $n\,dA$ de la sección transformada y a un elemento de área dA de la sección original. Por lo tanto, el esfuerzo σ_2 en un punto de la sección original debe ser n veces mayor que el esfuerzo en el punto correspondiente de la sección transformada.

También se pueden determinar las deformaciones de un miembro compuesto utilizando la sección transformada. Hay que recordar que la sección transformada representa la sección transversal de un miembro, hecho de un material homogéneo de módulo E_1, que se deforma de la misma manera que el miembro compuesto. Por consiguiente, utilizando la ecuación (4.21), se escribe que la curvatura del miembro compuesto es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I}$$

donde I es el momento de inercia de la sección transformada con respecto a su eje neutro.

Aplicación de conceptos 4.3

Una barra obtenida al unir piezas de acero ($E_s = 29 \times 10^6$ psi) y latón ($E_b = 15 \times 10^6$ psi) tiene la sección mostrada (figura 4.22*a*). Determine el esfuerzo máximo en el acero y en el latón cuando la barra se somete a flexión pura con un momento flector $M = 40$ kip · in.

La sección transformada correspondiente a una barra equivalente hecha toda de latón se muestra en la figura 4.22*b*. Como

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{29 \times 10^6 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.933$$

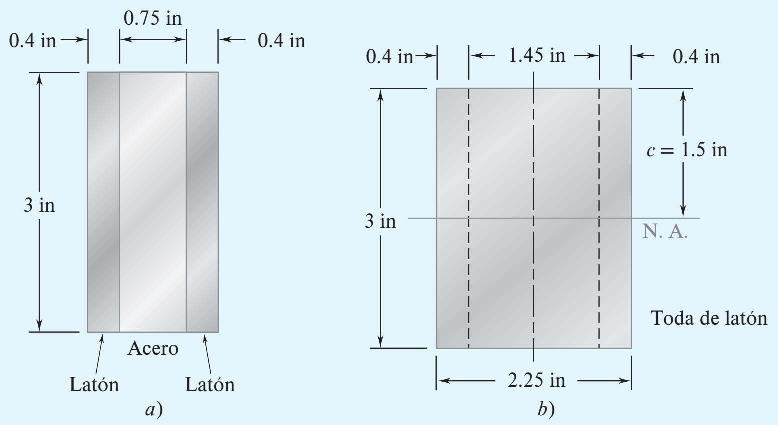


Figura 4.22 *a*) Barra compuesta. *b*) Sección transformada.

el ancho de la parte central de latón, la cual reemplaza a la parte de acero original, se obtiene multiplicando el ancho original por 1.933:

$$(0.75 \text{ in})(1.933) = 1.45 \text{ in}$$

Observe que este cambio de dimensión ocurre en una dirección paralela al eje neutro. El momento de inercia de la sección transformada con respecto a su eje centroidal es

$$I = \tfrac{1}{12} bh^3 = \tfrac{1}{12}(2.25 \text{ in})(3 \text{ in})^3 = 5.063 \text{ in}^4$$

y la distancia máxima al eje neutro es $c = 1.5$ in. Usando la ecuación (4.15), el esfuerzo máximo en la sección transformada es

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ kip} \cdot \text{in})(1.5 \text{ in})}{5.063 \text{ in}^4} = 11.85 \text{ ksi}$$

Este valor también representa el esfuerzo máximo en la parte de latón de la barra compuesta original. El esfuerzo máximo en la parte de acero, sin embargo, será mayor que el de la sección transformada, dado que el área de la parte central debe reducirse por el factor $n = 1.933$. Por consiguiente,

$$(\sigma_{\text{latón}})_{\text{máx}} = 11.85 \text{ ksi}$$

$$(\sigma_{\text{acero}})_{\text{máx}} = (1.933)(11.85 \text{ ksi}) = 22.9 \text{ ksi}$$

Las *vigas de concreto reforzado* (fotografía 4.4) son un importante ejemplo de miembros estructurales hechos de dos materiales diferentes. Cuando estas vigas se someten a momentos flectores positivos, se refuerzan con varillas de acero colocadas a una corta distancia sobre su cara inferior (figura 4.23*a*). Como el concreto es muy débil a tensión, se fractura debajo de la superficie neutra, y las varillas de acero soportan toda la carga de tensión, mientras que la parte superior de la viga de concreto soporta la carga de compresión.

Para obtener la sección transformada de una viga de concreto reforzado, se reemplaza el área de sección transversal total A_s de las varillas de acero por un área equivalente nA_s, donde n es la razón E_s/E_c de los módulos de elasticidad del acero y concreto (figura 4.23*b*). Como el concreto en la viga actúa efectivamente solo a compresión, solamente la parte situada arriba del eje neutro debe utilizarse en la sección transformada.

La posición del eje neutro se obtiene determinando la distancia x de la cara superior de la viga al centroide C de la sección transformada. Utilizando el ancho b de la viga y

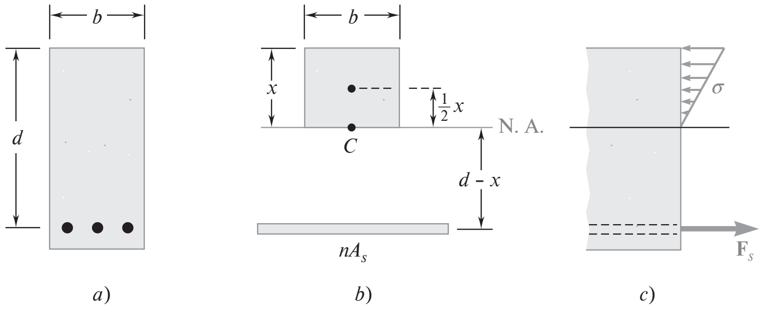


Figura 4.23 Viga de concreto reforzado: *a*) Sección transversal que muestra la ubicación del acero de refuerzo. *b*) Sección transformada de todo el concreto. *c*) Esfuerzos en el concreto y fuerza resultante en el acero.

Fotografía 4.4 Estructura de un edificio de concreto reforzado.

a distancia d de la cara superior a la línea de centros de las varillas de acero, el primer momento de la sección transformada con respecto al eje neutro debe ser cero. Como el primer momento de cada parte de la sección transformada se obtiene multiplicando su área por la distancia de su propio centroide al eje neutro,

$$(bx)\frac{x}{2} - nA_s(d - x) = 0$$

o

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0 \quad (4.28)$$

Al resolver x en esta ecuación cuadrática, se obtiene tanto la posición del eje neutro en la viga como la parte de la sección transversal de la viga de concreto que efectivamente se utiliza.

Los esfuerzos en la sección transformada se determinan como antes se explicó en esta sección (vea el problema modelo 4.4). La distribución de los esfuerzos de compresión en el concreto y la resultante $\mathbf{F}_s$ de las fuerzas de tensión en las varillas de acero se muestran en la figura 4.23*c*.

4.5 CONCENTRACIONES DE ESFUERZO

La fórmula $\sigma_m = Mc/I$ para un miembro con un plano de simetría y una sección transversal uniforme es precisa a todo lo largo del miembro solo si los momentos **M** y **M′** se aplican por medio de placas rígidas y lisas. En otras condiciones de aplicación de las cargas, existen concentraciones de esfuerzo cerca de los puntos donde se aplican las cargas.

También ocurren esfuerzos elevados si la sección transversal de miembro sufre un cambio repentino. Dos casos particulares son una barra plana con un cambio repentino del ancho y una barra plana con ranuras. Dado que la distribución de esfuerzos en las secciones transversales críticas depende solo de la geometría de los miembros, se pueden determinar factores de concentración de esfuerzo para varias razones de los parámetros implicados y registrados, como se muestra en las figuras 4.24 y 4.25. El valor del esfuerzo máximo en la sección transversal crítica se expresa como

$$\sigma_m = K\frac{Mc}{I} \quad (4.29)$$

donde K es el factor de concentración de esfuerzo y c e I se refieren a la sección crítica (es decir, la sección de ancho d). Las figuras 4.24 y 4.25 muestran con claridad la importancia de utilizar filetes y ranuras de radio r tan grande como sea práctico.

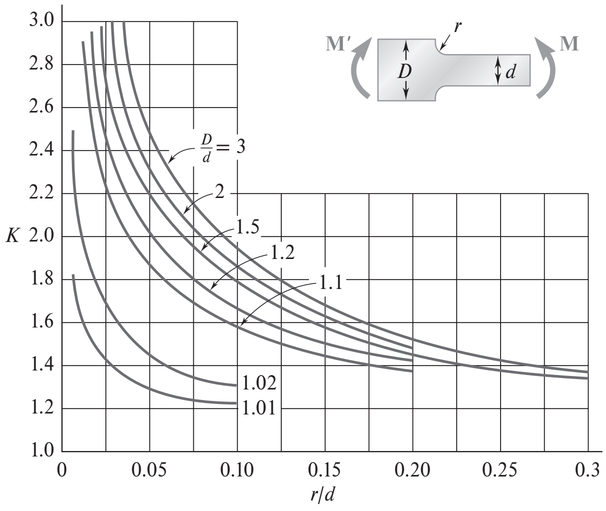


Figura 4.24 Factores de concentración de esfuerzo en *barras planas* con filetes sometidas a flexión pura. (Fuente: W. D. Pilkey y D. F. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 3a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 2008).

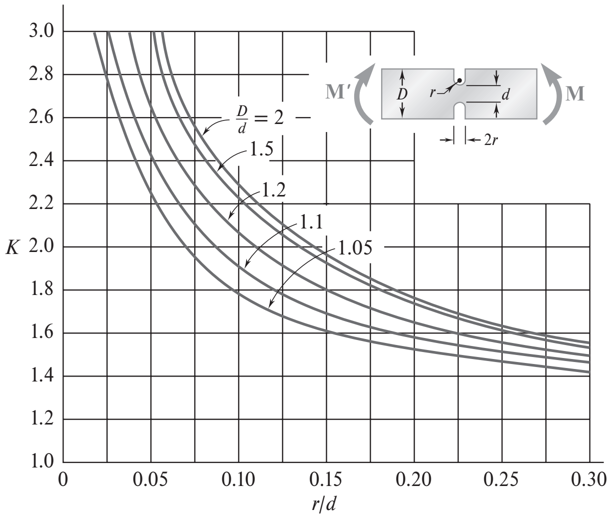


Figura 4.25 Factores de concentración de esfuerzo en *barras planas* con ranuras (muescas) sometidas a flexión pura. Fuente: W. D. Pilkey y D. F. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 3a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 2008).

Por último, en cuanto a carga axial y torsión, los valores de los factores K se calculan suponiendo una relación lineal entre esfuerzo y deformación. En muchas aplicaciones ocurren deformaciones plásticas y producen valores del esfuerzo máximo menores que los indicados por la ecuación (4.29).

Aplicación de conceptos 4.4

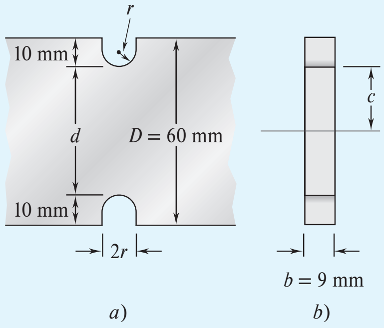


Figura 4.26 *a*) Dimensiones de la barra ranurada. *b*) Sección transversal.

Se tienen que cortar ranuras de 10 mm de profundidad en una barra de acero de 60 mm de ancho y 9 mm de espesor (figura 4.26). Determine el ancho mínimo permisible de las ranuras si el esfuerzo en la barra no debe exceder de 150 MPa, cuando el momento flector es igual a 180 N · m.

En la figura se observa que

$$d = 60 \text{ mm} - 2(10 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$

$$c = \tfrac{1}{2}d = 20 \text{ mm} \qquad b = 9 \text{ mm}$$

El momento de inercia de la sección transversal crítica con respecto a su eje neutro es

$$I = \tfrac{1}{12}bd^3 = \tfrac{1}{12}(9 \times 10^{-3} \text{ m})(40 \times 10^{-3} \text{ m})^3$$
$$= 48 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

El valor del esfuerzo Mc/I es

$$\frac{Mc}{I} = \frac{(180 \text{ N}\cdot\text{m})(20 \times 10^{-3}\text{m})}{48 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 75 \text{ MPa}$$

Al sustituir este valor de Mc/I en la ecuación (4.29) y con $\sigma_m = 150$ MPa, se escribe

$$150 \text{ MPa} = K(75 \text{ MPa})$$
$$K = 2$$

Por otra parte,

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1.5$$

Al usar la curva de la figura 4.25, correspondiente a $D/d = 1.5$, se encuentra que el valor de $K = 2$ corresponde a un valor de r/d igual a 0.13. Por consiguiente,

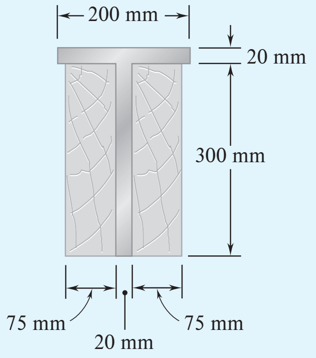
$$\frac{r}{d} = 0.13$$

$$r = 0.13d = 0.13(40 \text{ mm}) = 5.2 \text{ mm}$$

El ancho mínimo permisible de las ranuras es

$$2r = 2(5.2 \text{ mm}) = 10.4 \text{ mm}$$

Problema modelo 4.3



Se soldaron dos placas de acero para formar una viga en forma de T reforzada con dos maderos firmemente atornillados a ella como se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 12.5 GPa para la madera y de 200 GPa para el acero. Si se sabe que el momento flector $M = 50$ kN · m se aplica a la viga compuesta, determine *a*) el esfuerzo máximo en la madera y *b*) el esfuerzo en el acero a lo largo del borde superior.

ESTRATEGIA: Primero se transforma a una viga hecha de un solo material (acero o madera). Luego se determina el momento de inercia para la sección transformada, y se utiliza para determinar los esfuerzos requeridos; se debe tener presente que los esfuerzos reales deben basarse en el material original.

MODELAR:

Sección transformada. Primero se calcula la razón

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200 \text{ GPa}}{12.5 \text{ GPa}} = 16$$

Al multiplicar las dimensiones horizontales de la parte de acero de la sección por $n = 16$, se obtiene una sección transformada hecha enteramente de madera.

Eje neutro. La figura 1 muestra la sección transformada. El eje neutro pasa por el centroide de la sección transformada. Como la sección se compone de dos rectángulos,

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{(0.160 \text{ m})(3.2 \text{ m} \times 0.020 \text{ m}) + 0}{3.2 \text{ m} \times 0.020 \text{ m} + 0.470 \text{ m} \times 0.300 \text{ m}} = 0.050 \text{ m}$$

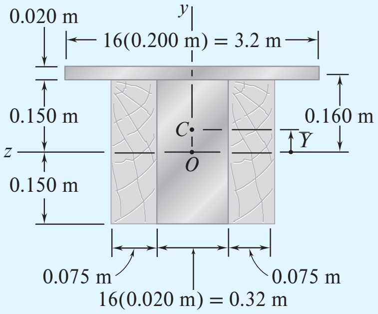


Figura 1 Sección transversal transformada.

Momento centroidal de inercia. Utilizando la figura 2 y el teorema del eje paralelo,

$$I = \tfrac{1}{12}(0.470)(0.300)^3 + (0.470 \times 0.300)(0.050)^2$$
$$+ \tfrac{1}{12}(3.2)(0.020)^3 + (3.2 \times 0.020)(0.160 - 0.050)^2$$
$$I = 2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

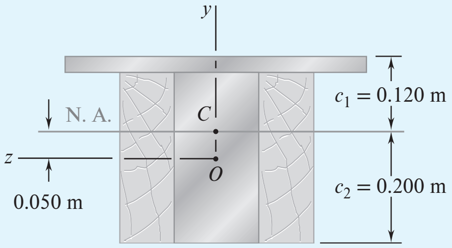


Figura 2 Sección transformada que muestra el eje neutro y las distancias a las fibras extremas.

ANALIZAR:

***a*) Esfuerzo máximo en la madera.** La madera más alejada del eje neutro se encuentra a lo largo del borde inferior, donde $c_2 = 0.200$ m.

$$\sigma_w = \frac{Mc_2}{I} = \frac{(50 \times 10^3 \mathrm{N \cdot m})(0.200 \mathrm{~m})}{2.19 \times 10^{-3} \mathrm{~m}^4}$$

$\sigma_w = 4.57$ MPa ◀

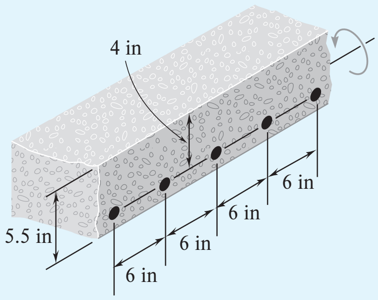
***b*) Esfuerzo en el acero.** A lo largo del borde superior, $c_1 = 0.120$ m. Con la sección transformada se obtiene un esfuerzo equivalente en la madera, el cual debe multiplicarse por n para obtener el esfuerzo en el acero.

$$\sigma_s = n\frac{Mc_1}{I} = (16)\frac{(50 \times 10^3 \mathrm{N \cdot m})(0.120 \mathrm{~m})}{2.19 \times 10^{-3} \mathrm{~m}^4}$$

$\sigma_s = 43.8$ MPa ◀

REVISAR y PENSAR: Como la sección transformada se basó en una viga hecha enteramente de madera, se tuvo que utilizar n para obtener el esfuerzo real en el acero. Además, a cualquier distancia común al eje neutro, el esfuerzo en el acero será sustancialmente mayor que aquél en la madera, un reflejo del módulo de elasticidad mucho mayor para el acero.

Problema modelo 4.4



Una losa de piso de concreto se refuerza con varillas de acero de $\frac{5}{8}$ in de diámetro colocadas a 1.5 in, arriba de la cara inferior de la losa a 6 in, una de otra, como se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 3.6×10^6 psi para el concreto utilizado y de 29×10^6 psi para el acero. Si se sabe que se aplica un momento flector de 40 kip · in, a cada 1 ft de ancho de la losa, determine *a*) el esfuerzo máximo en el concreto y *b*) el esfuerzo en el acero.

ESTRATEGIA: Transforme la sección en un solo material, concreto, y luego calcule el momento de inercia para la sección transformada. Continúe calculando los esfuerzos requeridos, recordando que los esfuerzos reales deben basarse en el material original.

MODELAR:

Sección transformada. Considere una parte de la losa de 12 in de ancho, en la cual hay dos varillas de $\frac{5}{8}$ in de diámetro, cuya área de sección transversal total es

$$A_s = 2\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{8}\text{ in}\right)^2\right] = 0.614\text{ in}^2$$

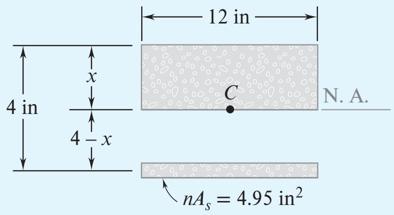


Figura 1 Sección transformada.

Como el concreto actúa solo a compresión, las varillas de acero soportan todas las fuerzas de tensión, y la sección transformada (figura 1) se compone de las dos áreas mostradas. Una es la parte de concreto a compresión (situada arriba del eje neutro) y la otra es el área transformada de acero nA_s. Se tiene

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6\text{ psi}}{3.6 \times 10^6\text{ psi}} = 8.06$$

$$nA_s = 8.06(0.614\text{ in}^2) = 4.95\text{ in}^2$$

Eje neutro. El eje neutro de la losa pasa por el centroide de la sección transformada. Al sumar los momentos del área transformada con respecto al eje neutro, se escribe

$$12x\left(\frac{x}{2}\right) - 4.95(4 - x) = 0 \qquad x = 1.450\text{ in}$$

Momento de inercia. Utilizando la figura 2, el momento centroidal de inercia del área transformada es

$$I = \tfrac{1}{3}(12)(1.450)^3 + 4.95(4 - 1.450)^2 = 44.4\text{ in}^4$$

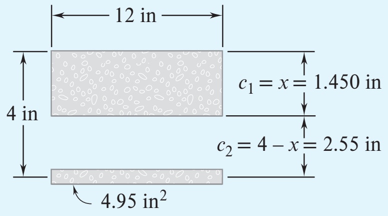


Figura 2 Dimensiones de la sección transformada utilizada para calcular el momento de inercia.

ANALIZAR:

***a)* Esfuerzo máximo en el concreto.** La figura 3 muestra los esfuerzos en la sección transversal. En la cara superior de la losa, se tiene $c_1 = 1.450$ in, y

$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(40\text{ kip}\cdot\text{in})(1.450\text{ in})}{44.4\text{ in}^4} \qquad \sigma_c = 1.306\text{ ksi} \blacktriangleleft$$

***b)* Esfuerzo en el acero.** Para el acero, se tiene $c_2 = 2.55$ in, $n = 8.06$ y

$$\sigma_s = n\frac{Mc_2}{I} = 8.06\frac{(40\text{ kip}\cdot\text{in})(2.55\text{ in})}{44.4\text{ in}^4} \qquad \sigma_s = 18.52\text{ ksi} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Como la sección transformada se basó en una viga hecha enteramente de concreto, se tuvo que utilizar n para obtener el esfuerzo real en el acero. La diferencia en los esfuerzos resultantes refleja las grandes diferencias en los módulos de elasticidad.

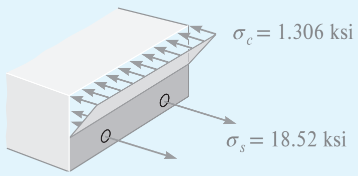


Figura 3 Diagrama de esfuerzo.

Problemas

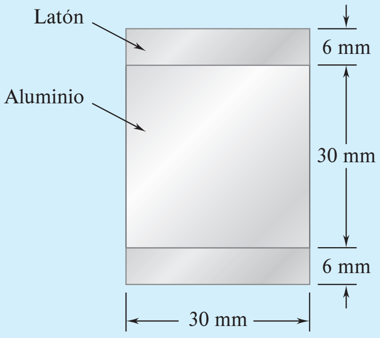


Figura P4.33

4.33 y 4.34 Una barra que tiene la sección transversal mostrada se formó uniendo firmemente barras de latón y aluminio. Utilizando los datos dados a continuación, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra compuesta se flexiona con respecto a un eje horizontal.

	Aluminio	**Latón**
Módulo de elasticidad	70 GPa	105 GPa
Esfuerzo permisible	100 GPa	160 MPa

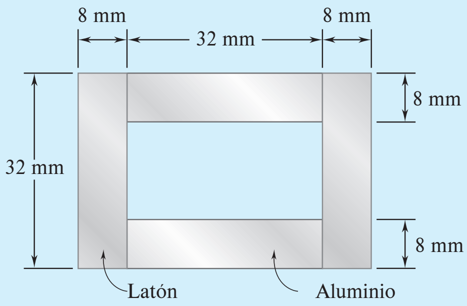


Figura P4.34

4.35 y 4.36 Para la barra compuesta indicada, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra se flexiona con respecto a un eje vertical.

4.35 Barra del problema 4.33.

4.36 Barra del problema 4.34.

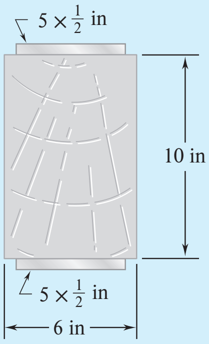


Figura P4.37

4.37 y 4.38 Vigas de madera y placas de acero se atornillan firmemente entre sí para formar el miembro compuesto mostrado. Mediante los datos dados a continuación, determine el momento flector máximo permisible cuando el miembro se flexiona con respecto a un eje horizontal.

	Madera	**Acero**
Módulo de elasticidad	2×10^6 psi	29×10^6 psi
Esfuerzo permisible	2 000 psi	22 ksi

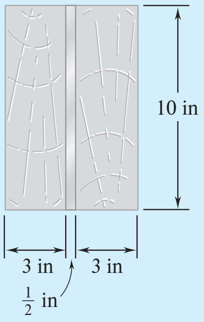


Figura P4.38

4.39 y 4.40 Una tira de cobre (E_c = 105 GPa y una tira de aluminio (E_a = 75 GPa se unen para formar la viga compuesta mostrada. Si se sabe que la viga se

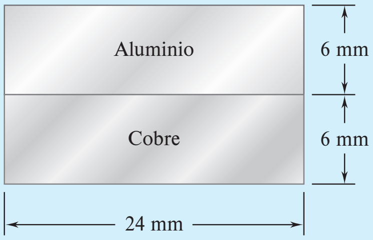


Figura P4.39

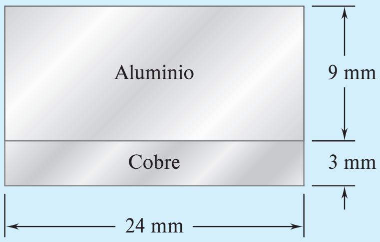


Figura P4.40

flexiona con respecto a un eje horizontal por la acción de un momento $M = 35$ N · m, determine el esfuerzo máximo en *a*) la tira de aluminio, *b*) la tira de cobre.

4.41 y *4.42* La viga de madera de 6 × 12 in se reforzó atornillando a ella el refuerzo de acero mostrado. El módulo de elasticidad para madera es de 1.8×10^6 psi y para acero es de 29×10^6 psi. Si se sabe que la viga se flexiona con respecto a un eje horizontal por la acción de un momento $M = 450$ kip · in, determine el esfuerzo máximo en *a*) la madera, *b*) el acero.

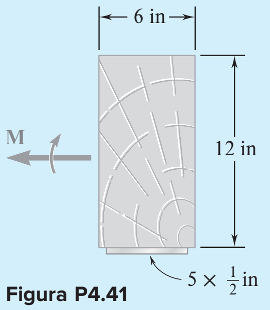


Figura P4.41

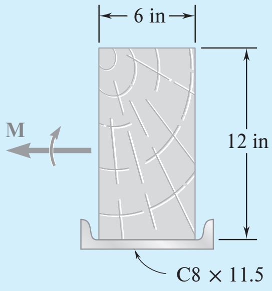


Figura *P4.42*

4.43 y 4.44 Para la viga compuesta indicada, determine el radio de curvatura producido por un momento de 35 N · m.

4.43 Viga del problema 4.39.

4.44 Viga del problema 4.40.

4.45 y *4.46* Para la viga compuesta indicada, determine el radio de curvatura producido por un momento de 450 kip · in.

4.45 Viga del problema 4.41.

4.46 Viga del problema 4.42.

4.47 Una losa de concreto se refuerza con varillas de acero de $\frac{5}{8}$ in, colocadas a 5.5 in, una de otra. El módulo de elasticidad es de 3×10^6 psi para el concreto y de 29×10^6 psi para el acero. Utilizando un esfuerzo permisible de 1 400 psi para el concreto y de 29 ksi para el acero, determine el momento flector máximo en una parte de la losa de 1 pie de ancho.

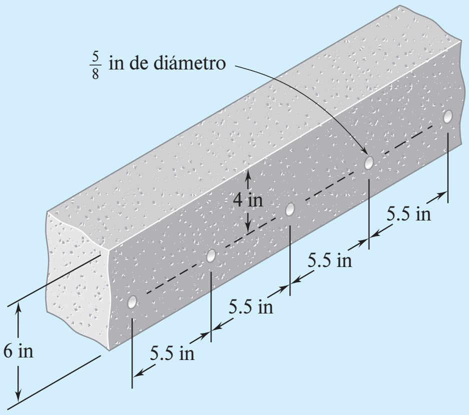


Figura P4.47

4.48 Resuelva el problema 4.47, suponiendo que la separación de las varillas de acero de $\frac{5}{8}$ in de diámetro se incrementa a 7.5 in.

4.49 La viga de concreto reforzado mostrada se somete a un momento flector positivo de 175 kN · m. Si se sabe que el módulo de elasticidad es de 25 GPa

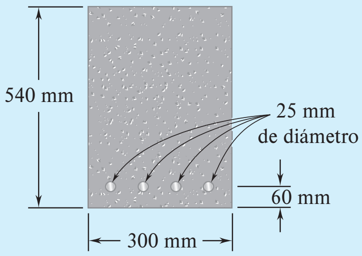


Figura P4.49

para el concreto y de 200 GPa para el acero, determine *a*) el esfuerzo en el acero, *b*) el esfuerzo máximo en el concreto.

4.50 Resuelva el problema 4.49, suponiendo que el ancho de 300 mm se incrementa a 350 mm.

4.51 Si se sabe que el momento flector en la viga de concreto reforzado es de +100 kip · ft y que el módulo de elasticidad es de 3.625×10^6 psi para el concreto y de 29×10^6 psi para el acero, determine *a*) el esfuerzo en el acero, *b*) el esfuerzo máximo en el concreto.

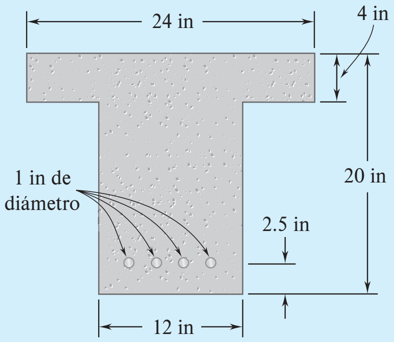


Figura *P4.51*

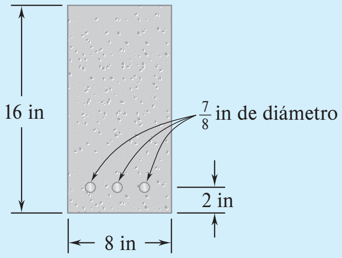


Figura *P4.52*

4.52 Una viga de concreto se refuerza con tres varillas de acero colocadas como se muestra. el módulo de elasticidad es de 3×10^6 psi para el concreto y de 29×10^6 psi para el acero. Utilizando un esfuerzo permisible de 1 350 psi para el concreto y de 20 ksi para el acero, determine el momento flector máximo permisible en la viga.

4.53 Se dice que el diseño de una viga de concreto reforzado está *balanceado* si los esfuerzos máximos en el acero y el concreto son iguales, respectivamente, a los esfuerzos permisibles σ_s y σ_c. Demuestre que para obtener un diseño balanceado la distancia x de la cara superior de la viga al eje neutro debe ser

$$x = \frac{d}{1 + \dfrac{\sigma_s E_c}{\sigma_c E_s}}$$

donde E_c y E_s son los módulos de elasticidad de concreto y el acero, respectivamente, y d es la distancia de la cara superior de la viga al acero de refuerzo.

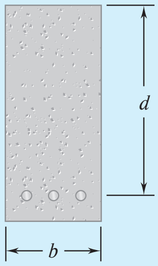


Figura P4.53 y P4.54

4.54 Para la viga de concreto mostrada, el módulo de elasticidad es de 25 GPa para el concreto y de 200 GPa para el acero. Si se sabe que b = 200 mm y d = 450 mm, y utilizando un esfuerzo permisible de 12.5 MPa para el concreto y de 140 MPa para el acero, determine *a*) el área requerida A_s del refuerzo de acero si la viga debe estar balanceada, *b*) el momento flector máximo permisible. (Vea el problema 4.53 para la definición de una viga balanceada.)

4.55 y *4.56* Cinco tiras de metal, cada una de 0.5 × 1.5 in. de sección transversal, se unen para formar la viga compuesta mostrada. El módulo de elasticidad es de 30×10^6 psi para el acero, y de 15×10^6 psi para el latón, y de 10×10^6 para el aluminio. Si se sabe que la viga se flexiona con respecto a un eje horizontal por un momento de 12 kip · in, determine *a*) el esfuerzo máximo en cada uno de los tres metales, *b*) el radio de curvatura de la viga compuesta.

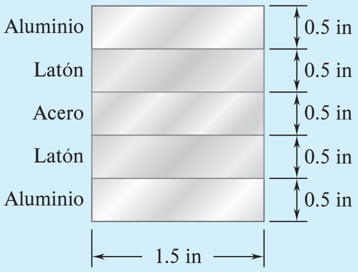


Figura P4.55

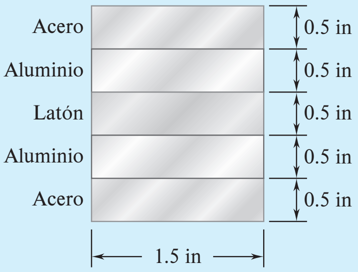


Figura *P4.56*

4.57 La viga compuesta mostrada se formó uniendo una varilla de latón y una varilla de aluminio de sección transversal semicircular. El módulo de elasticidad es de 15×10^6 psi para el latón y de 10×10^6 psi para el aluminio. Si se sabe que la viga compuesta se flexiona con respecto a un eje horizontal por medio de momentos de 8 kip · in, determine el esfuerzo máximo *a*) en el latón, *b*) en el aluminio.

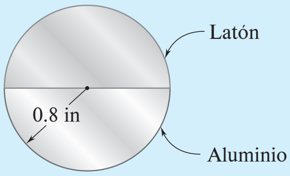


Figura P4.57

4.58 Un tubo de acero y un tubo de aluminio se unen firmemente para formar la viga compuesta mostrada. El módulo de elasticidad es de 200 GPa para el acero y de 70 GPa para el aluminio. Si se sabe que la viga compuesta se flexiona por la acción de un momento de 500 N · m, determine el esfuerzo máximo *a*) en el aluminio y *b*) en el acero.

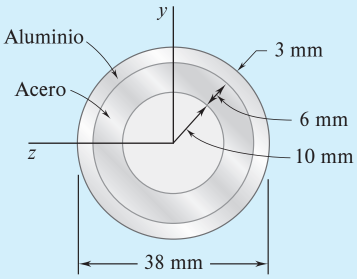


Figura *P4.58*

4.59 La viga rectangular mostrada es de plástico para la cual el valor de módulo de elasticidad a tensión es de la mitad del valor a compresión. Para un momento flector $M = 600$ N · m, determine el esfuerzo máximo *a*) a tensión, *b*) a compresión.

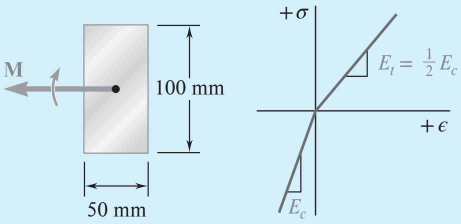


Figura P4.59

***4.60** Se fabrica una viga rectangular de un material para el cual el módulo de elasticidad es E_t a tensión y E_c a compresión. Demuestre que la curvatura de la viga a flexión pura es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_r I}$$

donde

$$E_r = \frac{4E_t E_c}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c})^2}$$

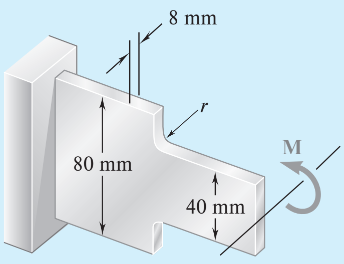


Figura P4.61 y *P4.62*

4.61 Si se sabe que $M = 250$ N · m, determine el esfuerzo máximo en la viga mostrada cuando el radio r de los filetes es *a*) 4 mm, *b*) 8 mm.

4.62 Si se sabe que el esfuerzo permisible para la viga mostrada es de 90 MPa, determine el momento flector permisible M cuando el radio r de los filetes es *a*) 8 mm, *b*) 12 mm.

4.63 Ranuras semicirculares de radio r deben fresarse como se muestra en los costados de un miembro de acero. Utilizando un esfuerzo permisible de 8 ksi, determine el momento flector máximo que se puede aplicar al miembro cuando *a*) $r = \frac{3}{8}$ in, *b*) $r = \frac{3}{4}$ in.

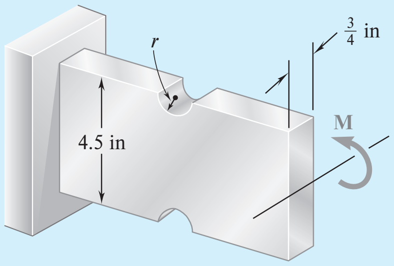


Figura P4.63 y P4.64

4.64 Ranuras semicirculares de radio r deben fresarse como se muestra en los costados de un miembro de acero. Si se sabe que $M = 4$ kip · in, determine el esfuerzo máximo en el miembro cuando el radio r de las ranuras semicirculares es *a*) $r = \frac{3}{8}$ in, *b*) $\frac{3}{4}$ in.

4.65 Se tiene que aplicar un momento $M = 2$ kN · m al extremo de una barra de acero. Determine el esfuerzo máximo en la barra *a*) si la barra se diseña con ranuras que tiene partes semicirculares de radio $r = 10$ mm, como se muestra en la figura *a*, *b*) si la barra se vuelve a diseñar eliminando el material a la izquierda y derecha de las líneas de rayas, como se muestra en la figura *b*.

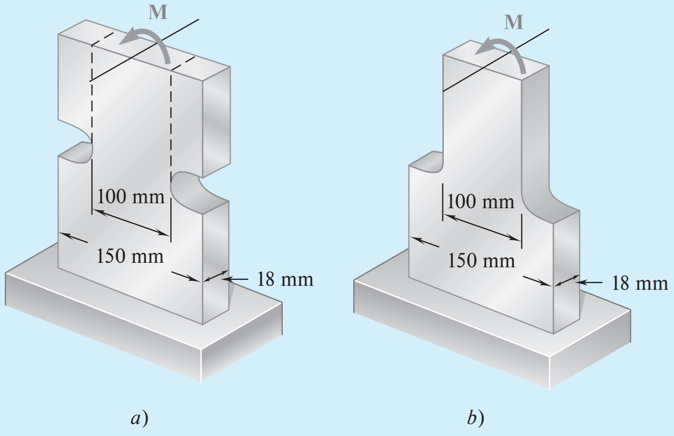


Figura P4.65 y *P4.66*

4.66 El esfuerzo permisible utilizado en el diseño de una barra de acero es de 80 MPa. Determine el momento máximo **M** que se puede aplicar a la barra *a*) si la barra se diseña con ranuras que tienen partes semicirculares de radio $r = 15$ mm, como se muestra en la figura *a*, *b*) si la barra se vuelve a diseñar eliminando el material a la izquierda y derecha de las líneas de rayas como se muestra en la figura *b*.

*4.6 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

En la relación fundamental $\sigma_x = -My/I$ en la sección 4.2, se aplicó la ley de Hooke a todo el miembro. Si se excede la resistencia a la cedencia en alguna parte del miembro o el material implicado es un material frágil con un diagrama de esfuerzo-deformación no lineal, esta relación deja de ser válida. Esta sección desarrolla un método más general de determinar la distribución de esfuerzos en un miembro sometido a flexión pura que se puede usar cuando la ley de Hooke no es aplicable.

Recuerde que en la sección 4.1B no se supuso ninguna relación esfuerzo-deformación específica, cuando se demostró que la deformación normal ϵ_x varía linealmente con distancia y a la superficie neutra. Ahora se puede usar esta propiedad para escribir

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \tag{4.10}$$

donde y representa la distancia del punto considerado a la superficie neutra, y c es el valor máximo de y.

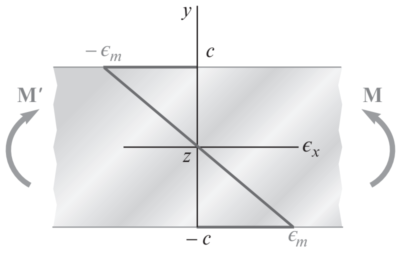


Figura 4.27 Distribución lineal de la deformación en un miembro sometido a flexión pura.

Sin embargo, no es posible suponer que el eje neutro pasa por el centroide de una sección dada, ya que esta propiedad se derivó en la sección 4.2 bajo la suposición de deformaciones elásticas. El eje neutro debe localizarse mediante ensayo y error hasta que se haya encontrado una distribución de esfuerzos que satisfaga las ecuaciones (4.1) y (4.3) de la sección 4.1. Sin embargo, en un miembro que posee tanto un plano de simetría vertical como horizontal y hecho de un material caracterizado por la misma relación esfuerzo-deformación a tensión y a compresión, el eje neutro coincide con el eje horizontal de simetría de dicha sección. Las propiedades del material requieren que los esfuerzos sean simétricos con respecto al eje neutro (esto es, con respecto a *algún* eje horizontal) y está condición se cumple [y la ecuación (4.1) se satisface] solo si el eje es el eje de simetría horizontal.

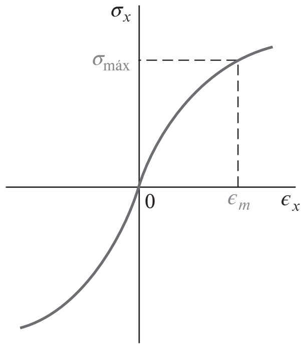


Figura 4.28 Material con diagrama de esfuerzo-deformación no lineal.

La distancia y en la ecuación (4.10) se mide desde el eje horizontal de simetría z de la sección transversal, y la distribución de la deformación ϵ_x es lineal y simétrica con respecto a ese eje (figura 4.27). Por otra parte, la curva de esfuerzo-deformación es simétrica con respecto al origen de coordenadas (figura 4.28).

La distribución de esfuerzos en la sección transversal del miembro (es decir, la curva de σ_x contra y) se obtiene como sigue. Si se supone que $\sigma_{máx}$ se ha especificado, primero se determina el valor de ϵ_m con el diagrama de esfuerzo-deformación y se lleva a la ecuación (4.10). Luego para cada valor de y, se determina el valor correspondiente de ϵ_x con la ecuación (4.10) o la figura 4.27 y se obtiene del diagrama de esfuerzo-deformación de la figura 4.28 el esfuerzo σ_x correspondiente a ϵ_x. Al trazar σ_x contra y se obtiene la distribución de esfuerzos deseada (figura 4.29).

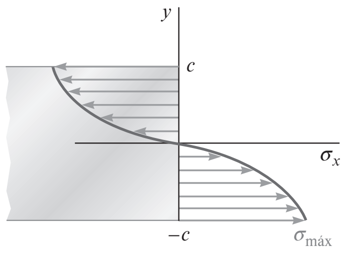


Figura 4.29 Distribución de esfuerzo no lineal en un miembro sometido a flexión pura.

Recuerde que la ecuación (4.3) no contempla ninguna relación particular entre esfuerzo y deformación. Por consiguiente, la ecuación (4.3) se puede usar para determinar el momento flector M correspondiente a la distribución de esfuerzo obtenida en la figura 4.29. Considerando un miembro con una sección transversal rectangular de ancho b, el elemento de área en la ecuación (4.3) se expresa como $dA = b\,dy$, por lo tanto

$$M = -b\int_{-c}^{c} y\sigma_x\,dy \tag{4.30}$$

donde σ_x es la función de y trazada en la figura 4.29. Como σ_x es una función impar de y, la ecuación (4.30) en la forma alternativa es

$$M = -2b\int_{0}^{c} y\sigma_x\,dy \tag{4.31}$$

Si σ_x es una función analítica conocida de ϵ_x, se puede usar la ecuación (4.10) para expresar σ_x como una función de y, y la integral de la ecuación (4.31) se puede determinar analíticamente. Si no, el momento flector M se puede obtener mediante integración numérica. Este cálculo adquiere más sentido si se observa que la integral de la ecuación (4.31) representa el primer momento con respecto al eje horizontal del área

que aparece en la figura 4.29 localizada arriba del eje horizontal y limitada por la curva de distribución de esfuerzo y el eje vertical.

Un valor importante es el momento flector último M_U, que ocasiona la falla del miembro. Este se puede determinar a partir de la resistencia última σ_U del material seleccionando $\sigma_{máx} = \sigma_U$. Sin embargo, en la práctica es más conveniente determinar M_U experimentalmente para un espécimen de un material dado. Suponiendo una distribución de esfuerzos ficticia, se utiliza la ecuación (4.15) para determinar el esfuerzo máximo correspondiente R_B:

$$R_B = \frac{M_U c}{I} \tag{4.32}$$

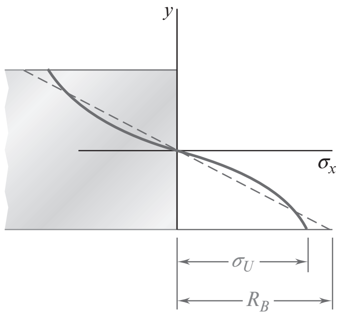


Figura 4.30 Distribución de esfuerzo en el miembro al momento último M_U.

El esfuerzo ficticio R_B se conoce como *módulo de ruptura en flexión* del material. Se puede usar para determinar el momento flector último M_U de un miembro hecho del mismo material y que tiene una sección transversal de la misma forma, pero de dimensiones diferentes, al resolver M_U en la ecuación (4.32). Como, en el caso de un miembro con una sección transversal rectangular, las distribuciones de esfuerzo lineal real y ficticia mostradas en la figura 4.30 deben dar el mismo valor M_U para el momento flector último, las áreas que definen deben tener el mismo primer momento con respecto al eje horizontal. Por consiguiente, el módulo de ruptura R_B siempre será mayor que la resistencia última real σ_U.

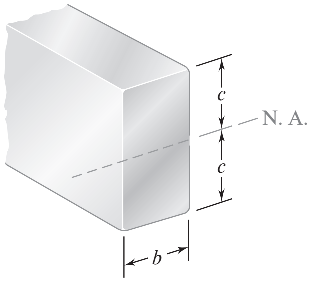


Figura 4.31 Miembro con sección transversal rectangular.

*4.6A Miembros hechos de material elastoplástico

Para tener una mejor idea del comportamiento plástico de una miembro en flexión, considere un miembro hecho de un *material elastoplástico* y suponga que tiene una *sección transversal rectangular* de ancho b y altura $2c$ (figura 4.31). Recuerde de la sección 2.12 que el diagrama de esfuerzo-deformación de un material elastoplástico idealizado es como se muestra en la figura 4.32.

Siempre que el esfuerzo normal σ_x no exceda la resistencia a la cedencia σ_Y, la ley de Hooke es aplicable, y la distribución de esfuerzo a través de la sección es lineal (figura 4.33*a*). El valor máximo del esfuerzo es

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

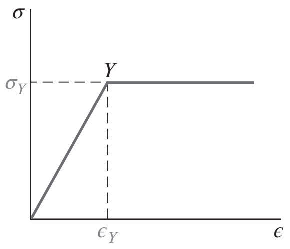


Figura 4.32 Diagrama de esfuerzo-deformación de un material elastoplástico idealizado.

Conforme el momento flector se incrementa, σ_m finalmente alcanza σ_Y (figura 4.33*b*). Al sustituir este valor en la ecuación (4.15) y resolviendo M, el valor de M_Y del momento flector al inicio de la cedencia es

$$M_Y = \frac{I}{c}\sigma_Y \tag{4.33}$$

El momento M_Y es el *momento máximo elástico,* ya que el momento más grande para el cual la deformación permanece totalmente elástica. Hay que recordar que, para la sección transversal rectangular,

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{2}{3}bc^2 \tag{4.34}$$

así que

$$M_Y = \frac{2}{3}bc^2\sigma_Y \tag{4.35}$$

Conforme el momento flector se incrementa aún más, se desarrollan zonas plásticas en el miembro. El esfuerzo es uniformemente igual a $-\sigma_Y$ en la zona superior y a $+\sigma_Y$ en la zona inferior (figura 4.33*c*). Entre las zonas plásticas, subsiste un núcleo elástico en el cual el esfuerzo σ_x varía linealmente con y:

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_Y}{y_Y}y \tag{4.36}$$

Aquí y_Y representa la mitad del núcleo elástico. A medida que M se incrementa, las zonas plásticas se expanden, y en el límite, la deformación es totalmente plástica (figura 4.33*d*).

La ecuación (4.31) se utiliza para determinar el valor del momento flector M correspondiente a un espesor dado $2y_Y$ del núcleo elástico. Hay que recordar que la ecuación (4.36) da σ_x para $0 \leq y \leq y_Y$ y es igual a $-\sigma_Y$ para $y_Y \leq y \leq c$,

$$M = -2b\int_0^{y_Y} y\left(-\frac{\sigma_Y}{y_Y}y\right)dy - 2b\int_{y_Y}^{c} y(-\sigma_Y)dy$$

$$= \frac{2}{3}by_Y^2\sigma_Y + bc^2\sigma_Y - by_Y^2\sigma_Y$$

$$M = bc^2\sigma_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \quad \textbf{(4.37)}$$

o considerando la ecuación (4.35),

$$M = \frac{3}{2}M_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \quad \textbf{(4.38)}$$

donde M_Y es el momento elástico máximo. Observe que conforme σ_Y tiende a cero, el momento flector tiende al valor límite.

$$M_p = \frac{3}{2}M_Y \quad \textbf{(4.39)}$$

Este valor del momento flector corresponde a una deformación totalmente plástica (figura 4.33*d*) y se llama *momento plástico* del miembro. Observe que la ecuación (4.39) es válida solo para un *miembro rectangular hecho de un material elastoplástico*.

La distribución de la *deformación* a través de la sección permanece lineal después del inicio de la cedencia. Por consiguiente, la ecuación (4.8) permanece válida y se puede usar para determinar la mitad del espesor y_Y del núcleo elástico:

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \quad \textbf{(4.40)}$$

donde ϵ_Y es la deformación en cedencia y ρ es el radio de curvatura correspondiente a un momento flector $M \geq M_Y$. Cuando el momento flector es igual a M_Y, $y_Y = c$ y la ecuación (4.40) da

$$c = \epsilon_Y \rho_Y \quad \textbf{(4.41)}$$

donde ρ_Y es el radio de curvatura correspondiente a M_Y. Al dividir la ecuación (4.40) entre la ecuación (4.41) miembro a miembro, la relación es[†]

$$\frac{y_Y}{c} = \frac{\rho}{\rho_Y} \quad \textbf{(4.42)}$$

Al sustituir y_Y/c de la ecuación (4.42) en la ecuación (4.38), el momento flector M es una función del radio de curvatura ρ de la superficie neutra:

$$M = \frac{3}{2}M_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\rho^2}{\rho_Y^2}\right) \quad \textbf{(4.43)}$$

Observe que la ecuación (4.43) es válida solo después del inicio de la cedencia para valores de M mayor que M_Y. Para $M < M_Y$, no debe utilizarse la ecuación (4.21).

En la ecuación (4.43) se observa que el momento flector es $M_p = \frac{3}{2}M_Y$ solo cuando $\rho = 0$. Ya que claramente no es posible tener un radio de curvatura cero en cada punto

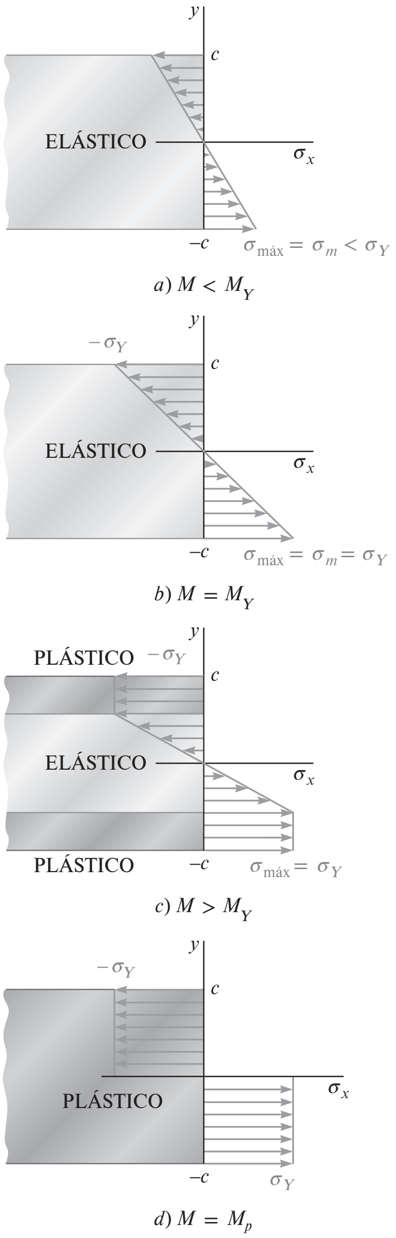


Figura 4.33 Distribución del esfuerzo por flexión en un miembro con: *a*) $M < M_Y$, elástico, *b*) cedencia inminente, $M = M_Y$, *c*) cedencia parcial, $M > M_Y$ y *d*) cedencia totalmente plástica, $M = M_p$.

[†] La ecuación (4.42) se aplica a cualquier miembro hecho de cualquier material dúctil con un punto de cedencia bien definido, ya que su derivación es independiente tanto de la forma de la sección transversal como de la forma del diagrama de esfuerzo-deformación más allá del punto de cedencia.

de la superficie neutra, no se puede desarrollar una deformación totalmente plástica en flexión pura. Sin embargo, en el capítulo 6 se demostrará que tal situación puede ocurrir en un punto de una viga que soporta una carga transversal.

Las distribuciones de esfuerzo en un miembro rectangular correspondientes al momento elástico máximo M_Y y al caso limitante del momento plástico M_p se representan en la figura 4.34. Como las resultantes de las fuerzas de tensión y compresión deben pasar por los centroides y ser iguales en magnitud a los volúmenes que representan las distribuciones de esfuerzo, entonces

$$R_Y = \tfrac{1}{2}bc\sigma_Y$$

y

$$R_p = bc\sigma_Y$$

Los momentos correspondientes son, respectivamente,

$$M_Y = (\tfrac{4}{3}c)R_Y = \tfrac{2}{3}bc^2\sigma_Y \qquad (4.44)$$

y

$$M_p = cR_p = bc^2\sigma_Y \qquad (4.45)$$

Por consiguiente para un miembro rectangular $M_p = \frac{3}{2}M_Y$ como la ecuación (4.39) lo requiere.

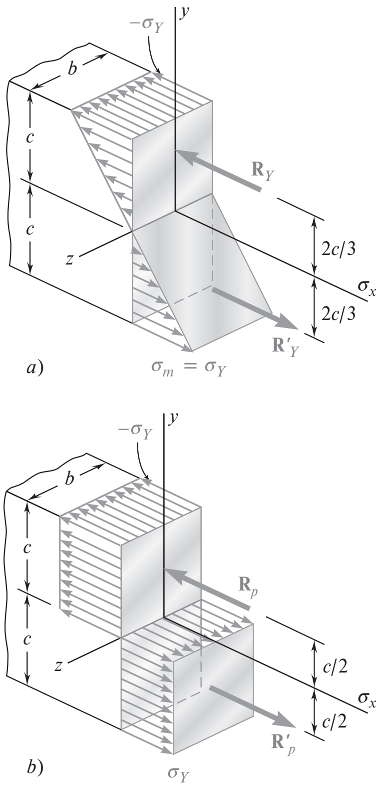


Figura 4.34 Distribuciones de esfuerzo en un miembro en *a*) momento elástico máximo y en *b*) momento plástico.

Para vigas de *sección transversal no rectangular,* el cálculo del momento elástico máximo M_Y y momento plástico M_p en general se simplifica si se utiliza un método de análisis gráfico, como se muestra en el problema modelo 4.5. En este caso la razón $k = M_p/M_Y$ en general no es igual a $\frac{3}{2}$. Para perfiles estructurales como vigas de brida ancha, esta razón varía aproximadamente de 1.08 a 1.14. Debido a que depende solo de la forma de la sección transversal, la razón $k = M_p/M_Y$ se llama *factor de forma* de la sección transversal. Observe que si el factor de forma k y el momento elástico máximo M_Y de una viga se conocen, se puede obtener el momento plástico M_p de la viga mediante

$$M_p = kM_Y \qquad (4.46)$$

La razón M_p/σ_Y se llama *módulo de sección plástico* del miembro y se denota como Z. Cuando el módulo de sección plástico Z y la resistencia a la cedencia σ_Y de una viga se conocen, su momento plástico se puede obtener mediante

$$M_p = Z\sigma_Y \qquad (4.47)$$

Al recordar de la ecuación (4.40) que $M_Y = S\sigma_Y$ y al comparar esta relación con la ecuación (4.47), el factor de forma $k = M_p/M_Y$ de una sección transversal dada es la relación de los módulos de sección plástico y elástico:

$$k = \frac{M_p}{M_Y} = \frac{Z\sigma_Y}{S\sigma_Y} = \frac{Z}{S} \qquad (4.48)$$

Al considerar una viga rectangular de ancho d y altura h, observe de las ecuaciones (4.45) y (4.47) que el *módulo de sección plástico* de una viga rectangular es

$$Z = \frac{M_p}{\sigma_Y} = \frac{bc^2\sigma_Y}{\sigma_Y} = bc^2 = \tfrac{1}{4}bh^2$$

Sin embargo, recuerde de la ecuación (4.19) que el *módulo de sección elástico* de la misma viga es

$$S = \tfrac{1}{6}bh^2$$

Al sustituir los valores obtenidos para Z y S en la ecuación (4.48), el factor de forma de una viga rectangular es

$$k = \frac{Z}{S} = \frac{\frac{1}{4}bh^2}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3}{2}$$

Aplicación de conceptos 4.5

Un miembro de sección transversal uniforme de 50 × 120 mm (figura 4.35 se somete a un momento flector $M = 36.8$ kN · m. Suponiendo que el miembro está hecho de un material elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 200 MPa y un módulo de elasticidad de 200 GPa, determine *a*) el espesor del núcleo elástico y *b*) el radio de curvatura de la superficie neutra.

***a*) Espesor del núcleo elástico.** Determine el momento elástico máximo M_Y. Al sustituir los datos dados en la ecuación (4.34),

$$\frac{I}{c} = \frac{2}{3}bc^2 = \frac{2}{3}(50 \times 10^{-3}\text{ m})(60 \times 10^{-3}\text{ m})^2$$
$$= 120 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

Luego si se sustituye este valor y $\sigma_Y = 240$ MPa en la ecuación (4.33),

$$M_Y = \frac{I}{c}\sigma_Y = (120 \times 10^{-6}\text{ m}^3)(240\text{ MPa}) = 28.8\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Al sustituir los valores de M y M_Y en la ecuación (4.38),

$$36.8\text{ kN}\cdot\text{m} = \frac{3}{2}(28.8\text{ kN}\cdot\text{m})\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right)$$
$$\left(\frac{y_Y}{c}\right)^2 = 0.444 \qquad \frac{y_Y}{c} = 0.666$$

Como $c = 60$ mm,

$$y_Y = 0.666(60\text{ mm}) = 40\text{ mm}$$

Por lo tanto, el espesor $2y_Y$ del núcleo elástico es de 80 mm.

***b*) Radio de curvatura.** La deformación en cedencia es

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{240 \times 10^6\text{ Pa}}{200 \times 10^9\text{ Pa}} = 1.2 \times 10^{-3}$$

Al resolver ρ en la ecuación (4.40) y al sustituir los valores obtenidos y_Y y ϵ_Y,

$$\rho = \frac{y_Y}{\epsilon_Y} = \frac{40 \times 10^{-3}\text{ m}}{1.2 \times 10^{-3}} = 33.3\text{ m}$$

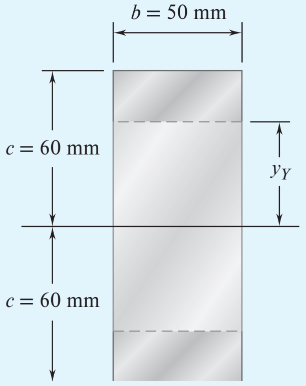


Figura 4.35 Sección transversal rectangular con una carga $M_Y < M < M_p$.

*4.6B Miembros con un solo plano de simetría

Hasta ahora el miembro en flexión ha tenido dos planos de simetría: uno que contiene los momentos **M** y **M′** y uno perpendicular a dicho plano. Ahora, se considera cuando el miembro posee solo un plano de simetría que contiene los momentos **M** y **M′**. El análisis se limitará a la situación en la que la deformación es totalmente plástica, con el esfuerzo normal σ_x uniformemente igual a $-\sigma_Y$ arriba de la superficie neutra y $+\sigma_Y$ debajo de dicha superficie (figura 4.36*a*).

Como se indicó en la sección 4.6, no se puede suponer que el eje neutro coincide con el eje centroidal de la sección transversal cuando ésta no es simétrica a ese eje. Para localizar el eje neutro, se considera que la resultante $\mathbf{R}_1$ de las fuerzas de compresión elementales se ejerce en la parte A_1 de la sección transversal localizada arriba del eje

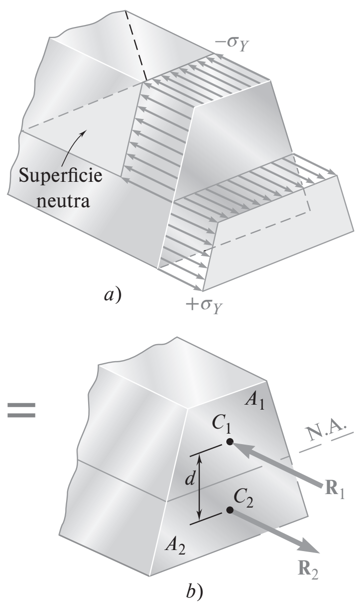


Figura 4.36 Viga no simétrica sujeta a un momento plástico. *a*) Distribuciones de esfuerzos y *b*) fuerzas resultantes que actúan en los centroides a tensión/compresión.

neutro, y que la resultante $\mathbf{R}_2$ de las fuerzas de tensión se ejerce en la parte A_2 localizada debajo del eje neutro (figura 4.36*b*). Como las fuerzas $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ forman un momento equivalente al aplicado al miembro, deben tener la misma magnitud. Por consiguiente $R_1 = R_2$ o $A_1\sigma_Y = A_2\sigma_Y$, de lo cual se concluye que $A_1 = A_2$. Por consiguiente, *el eje neutro divide la sección transversal en dos partes de áreas iguales.* Observe que el eje obtenido de esta manera *no* es el eje centroidal de la sección.

Las líneas de acción de las resultantes $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ pasan por los centroides C_1 y C_2 de las partes que se acaban de definir. Al denotar como d la distancia entre C_1 y C_2 y como A el área total de la sección transversal, el momento plástico del miembro es

$$M_p = \left(\frac{1}{2}A\sigma_Y\right)d$$

El cálculo real del momento plástico de un miembro con solo un plano de simetría se da en el problema modelo 4.6.

*4.6C Esfuerzos residuales

Se acaba de ver que se desarrollan zonas plásticas en un miembro hecho de un material elastoplástico si el momento flector es suficientemente grande. Cuando el momento flector se reduce de nuevo a cero, la reducción correspondiente del esfuerzo y deformación en cualquier punto dado está representada por una línea recta en el diagrama de esfuerzo-deformación, como se muestra en la figura 4.37. El valor final del esfuerzo en un punto (en general) no será cero. Existe un esfuerzo residual en la mayoría de los puntos, y que el esfuerzo puede o no tener el mismo signo que el esfuerzo máximo alcanzado al final de la fase de carga.

Como la relación lineal entre σ_x y ϵ_x es válida en todos los puntos del miembro durante la fase de descarga, se puede usar la ecuación (4.16) para obtener el cambio de esfuerzo en cualquier punto dado. La fase de descarga se puede manejar suponiendo que el miembro es totalmente elástico.

Los esfuerzos residuales se obtienen aplicando el principio de superposición de una manera similar a la descrita en la sección 2.13 para una carga céntrica axial y empleada de nuevo en la sección 3.8 para torsión. Se considera, por un lado, los esfuerzos producidos por la aplicación de momento flector dado M, y por el otro, los esfuerzos inversos producidos por el momento flector igual y opuesto $-M$ que se aplica para descargar el miembro. El primer grupo de esfuerzos refleja el comportamiento *elastoplástico* del material durante la fase de carga, y el segundo grupo el comportamiento *lineal* del mismo material durante la fase de descarga. Al sumar los dos grupos de esfuerzos se obtiene la distribución de los esfuerzos residuales en el miembro.

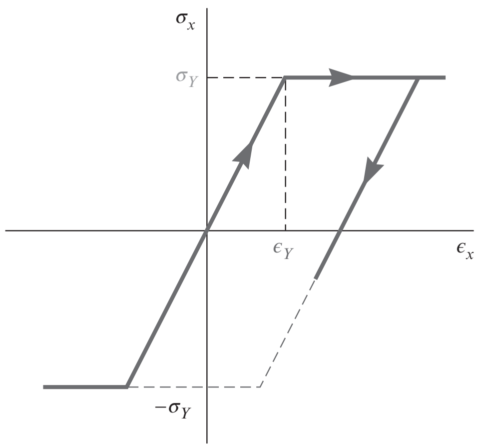


Figura 4.37 Diagrama de esfuerzo-deformación elastoplástica de un material con inversión de la carga.

Aplicación de conceptos 4.6

Para el miembro de la figura 4.35, determine *a*) la distribución de esfuerzos residuales, *b*) el radio de curvatura, después de que el momento flector se ha reducido de su valor máximo de 36.8 kN · m de vuelta a cero.

***a*) Distribución de los esfuerzos residuales.** Hay que recordar de la Aplicación de conceptos 4.5 que la resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 240$ MPa y que el espesor del núcleo elástico es $2y_Y = 80$ mm. La distribución de los esfuerzos en el miembro cargado es como se muestra en la figura 4.38*a*.

La distribución de los esfuerzos inversos producidos por el momento flector opuesto de 36.8 kN · m requerido para descargar el miembro es lineal y se muestra en la figura 4.38*b*. El esfuerzo máximo en esa distribución se obtiene con la ecuación (4.15). Al recordar que $I/c = 120 \times 10^{-6}$ m^3,

$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{36.8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{120 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 306.7 \text{ MPa}$$

Al superponer las dos distribuciones de esfuerzos se obtienen los esfuerzos mostrados en la figura 4.38*c*. Se observa que aun cuando los esfuerzos inversos son mayores que la resistencia a la cedencia σ_Y, la suposición de una distribución lineal de los esfuerzos inversos es válida, ya que no exceden de $2\sigma_Y$.

***b*) Radio de curvatura después de la descarga.** Se aplica la ley de Hooke a cualquier parte del núcleo $|y| < 40$ mm, ya que no ha habido deformación plástica en esa parte del miembro. Por consiguiente, la deformación residual a la distancia $y = 40$ mm es

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-35.5 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = -177.5 \times 10^{-6}$$

Al resolver ρ de la ecuación (4.8) y sustituir los valores apropiados de y y ϵ_x da

$$\rho = -\frac{y}{\text{P}_x} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{177.5 \times 10^{-6}} = 225 \text{ m}$$

El valor obtenido para ρ después de que la carga se ha retirado representa una deformación permanente del miembro.

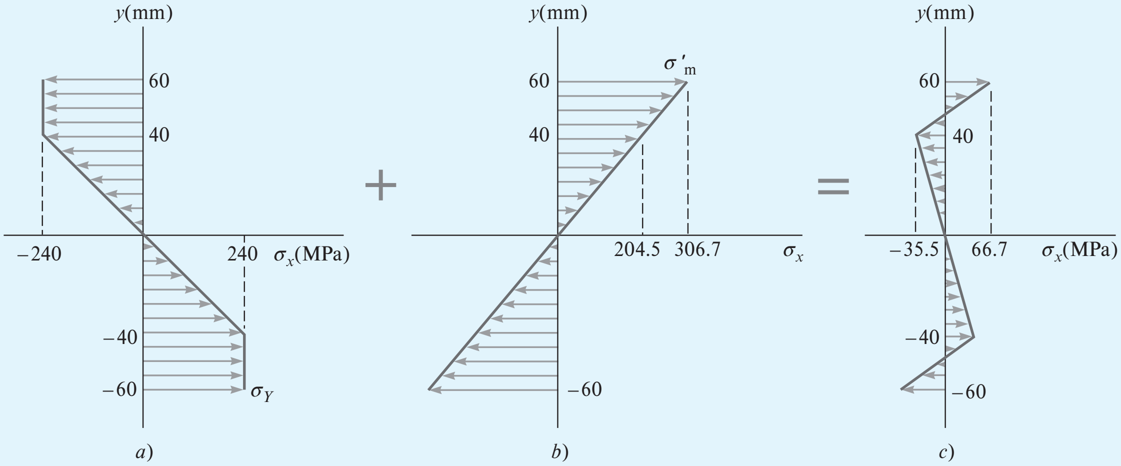
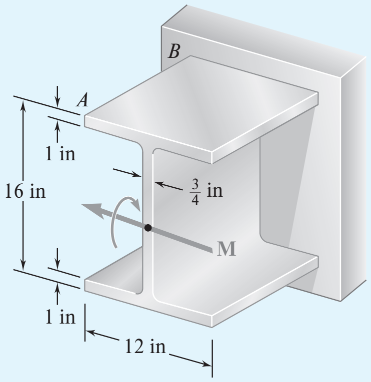


Figura 4.38 Determinación del esfuerzo residual: *a*) Esfuerzos máximos al momento máximo. *b*) Descarga. *c*) Esfuerzos residuales.

Problema modelo 4.5



La viga AB se fabricó en acero de baja aleación de alta resistencia que se supone es elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 50$ ksi. Ignorando el efecto de los filetes, determine el momento flector M y el radio de curvatura correspondiente *a*) cuando la cedencia ocurre por primera vez, *b*) cuando las bridas acaban de volverse totalmente plásticas.

ESTRATEGIA: Hasta el momento en que la cedencia ocurre por primera vez en las partes superior e inferior de esta sección simétrica, los esfuerzos y el radio de curvatura se calculan suponiendo un comportamiento elástico. Un incremento adicional de la carga desata el comportamiento plástico en partes de la sección transversal, y entonces es necesario trabajar con la distribución de esfuerzos resultante en la sección transversal para obtener el momento y el radio de curvatura correspondientes.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Inicio de la cedencia.** El momento de inercia centroidal de la sección es

$$I = \tfrac{1}{12}(12\text{ in})(16\text{ in})^3 - \tfrac{1}{12}(12\text{ in} - 0.75\text{ in})(14\text{ in})^3 = 1\,524\text{ in}^4$$

Momento flector. Para $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y = 50$ ksi y $c = 8$ in, se tiene

$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \frac{(50\text{ ksi})(1\,524\text{ in}^4)}{8\text{ in}} \qquad M_Y = 9\,525\text{ kip}\cdot\text{in} \quad ◀$$

Radio de curvatura. Como se muestra en la figura 1, la deformación en las partes superior e inferior es la deformación inicial en la cedencia inicial, $\epsilon_Y = \sigma_Y/E = (50\text{ ksi})/(29 \times 10^6\text{ psi}) = 0.001724$. Al observar que $c = 8$ in, se tiene por la ecuación (4.41)

$$c = \epsilon_Y \rho_Y \qquad 8\text{ in} = 0.001727\rho_Y \qquad \rho_Y = 4\,640\text{ in} \quad ◀$$

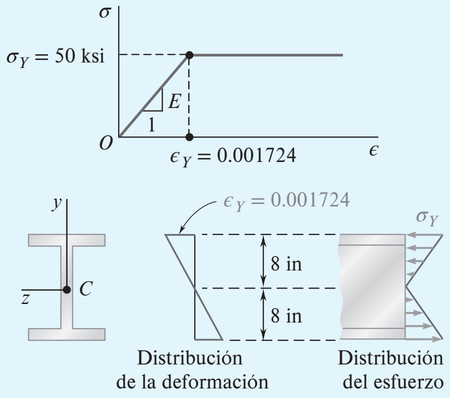


Figura 1 Respuesta del material elastoplástico y distribuciones de la deformación elástica y el esfuerzo.

***b*) Bridas totalmente plásticas.** Cuando las bridas se acaban de volver totalmente plásticas, las deformaciones y los esfuerzos en la sección son como se muestra en la figura 2.

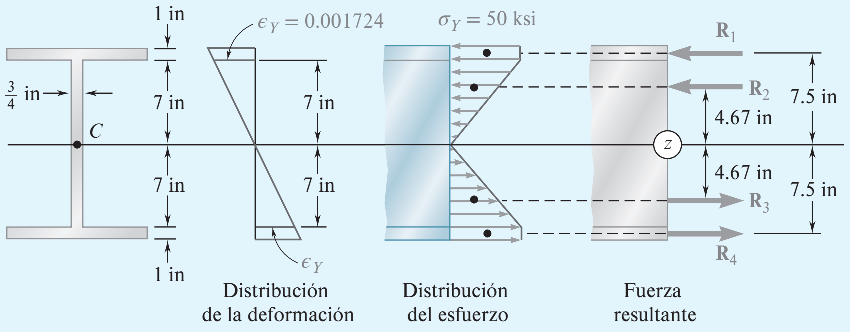


Figura 2 Distribuciones del esfuerzo y deformación con bridas totalmente plásticas.

Las fuerzas de compresión ejercidas en la brida superior y en mitad superior del alma son reemplazadas por sus resultantes $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Asimismo, se reemplazan los esfuerzos de tensión por $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$.

$$R_1 = R_4 = (50 \text{ ksi})(12 \text{ in})(1 \text{ in}) = 600 \text{ kips}$$
$$R_2 = R_3 = \tfrac{1}{2}(50 \text{ ksi})(7 \text{ in})(0.75 \text{ in}) = 131.3 \text{ kips}$$

Momento flector. Al sumar los momentos de $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$ con respecto al eje z, se escribe

$$M = 2[R_1(7.5 \text{ in}) + R_2(4.67 \text{ in})]$$
$$= 2[(600)(7.5) = (131.3)(4.67)] \qquad M = 10\,230 \text{ kip} \cdot \text{in} \quad ◀$$

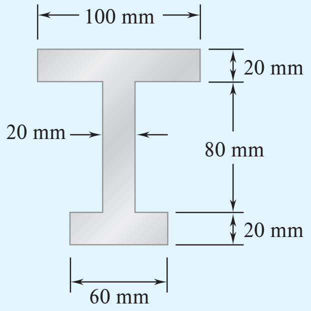
Radio de curvatura. Como $y_Y = 7$ in con esta carga, se tiene por la ecuación (4.40)

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \qquad 7 \text{ in} = (0.001724)\rho \qquad \rho = 4\,060 \text{ in} = 338 \text{ ft} \quad ◀$$

REVISAR y PENSAR: Una vez que la carga se incrementa más allá que la que provoca la cedencia inicial, se tiene que trabajar con la distribución de esfuerzo real para determinar el momento aplicado. El radio de curvatura se basa en la parte elástica de la viga.

Problema modelo 4.6

Determine el momento plástico M_p de una viga con la sección transversal mostrada cuando la viga se flexiona con respecto a un eje horizontal. Suponga que el material es elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 240 MPa.



ESTRATEGIA: Todas las partes de la sección transversal están experimentando cedencia y debe usarse la distribución de esfuerzo resultante para determinar el momento. Como la viga no es simétrica, primero hay que localizar el eje neutro.

MODELAR:

Eje neutro. Cuando la deformación es completamente plástica, el eje neutro divide la sección transversal en dos partes de áreas iguales (figura 1). Como el área total es

$$A = (100)(20) + (80)(20) + (60)(20) = 4\,800 \text{ mm}^2$$

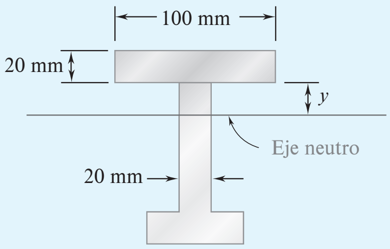


Figura 1 Para deformación totalmente plástica, el eje neutro divide la sección transversal en dos áreas iguales.

el área localizada arriba del eje neutro debe ser de 2 400 mm^2. Se escribe

$$(20)(100) + 20y = 2\,400 \qquad y = 20 \text{ mm}$$

Se observa que el eje neutro *no* pasa por el centroide de la sección transversal.

ANALIZAR:

Momento plástico. Utilizando la figura 2, la resultante R_i de las fuerzas elementales ejercidas en el área parcial A_i es igual a

$$R_i = A_i\sigma_Y$$

y pasa por el centroide de esa área. Se tiene

$$R_1 = A_1\sigma_Y = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 480 \text{ kN}$$
$$R_2 = A_2\sigma_Y = [(0.020 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 96 \text{ kN}$$
$$R_3 = A_3\sigma_Y = [(0.020 \text{ m})(0.060 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$
$$R_4 = A_4\sigma_Y = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$

El momento plástico M_p se obtiene sumando los momentos de las fuerzas con respecto al eje z.

$$\begin{aligned} M_P &= (0.030 \text{ m})R_1 + (0.010 \text{ m})R_2 + (0.030 \text{ m})R_3 + (0.070 \text{ m})R_4 \\ &= (0.030 \text{ m})(480 \text{ kN}) + (0.010 \text{ m})(96 \text{ kN}) \\ &\quad +(0.030 \text{ m})(288 \text{ kN}) + (0.070 \text{ m})(288 \text{ kN}) \\ &= 44.16 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \qquad M_p = 44.2 \text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Como la sección transversal *no* es simétrica con respecto al eje z, la suma de los momentos de $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ *no* es igual a la suma de los momentos de $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$.

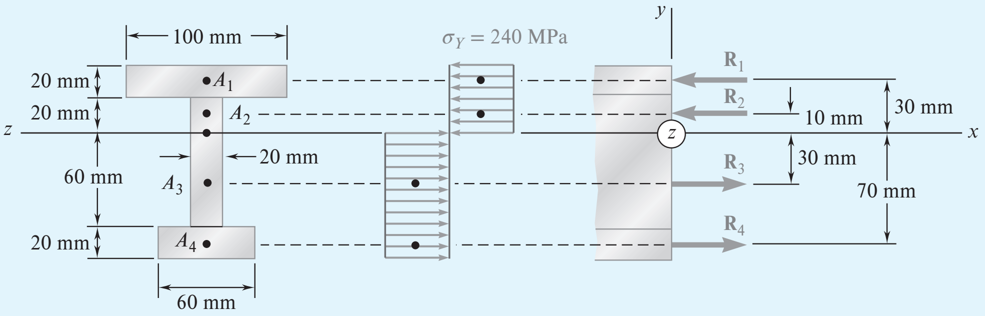


Figura 2 Distribuciones de esfuerzo totalmente plástico y fuerzas resultantes para determinar el momento plástico.

Problema modelo 4.7

Para la viga del problema muestra 4.5, determine los esfuerzos residuales y el radio de curvatura permanente después de que se retira el momento **M** de 10 230 kip · in.

ESTRATEGIA: Comience con el momento y distribución de esfuerzo cuando las bridas se acaban de volver plásticas. La viga luego se descarga mediante un momento que es igual y opuesto al momento originalmente aplicado. Durante la descarga, la acción de la viga es completamente elástica. Los esfuerzos producidos por la carga original y los producidos por la descarga se superponen para obtener la distribución de los esfuerzos residuales.

MODELAR y ANALIZAR:

Carga. En el Problema modelo 4.5 se aplicó un momento $M = 10\,230$ kip · in y se obtuvieron los esfuerzos mostrados en la figura 1*a*.

Descarga elástica. La viga se descarga por la aplicación de un momento $M = -10\,230$ kip · in (el cual es igual y opuesto al momento originalmente aplicado). Durante esta descarga, la acción de la viga es totalmente elástica; al recordar del problema modelo 4.5 que $I = 1\,524$ in^4

$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(10\,230 \text{ kip}\cdot\text{in})(8 \text{ in})}{1\,524 \text{ in}^4} = 53.70 \text{ ksi}$$

Los esfuerzos producidos por la descarga se muestran en la figura 1*b*.

Esfuerzos residuales. Se superponen los esfuerzos producidos por la carga (figura 1*a*) y por la descarga (figura 1*b*) y se obtienen los esfuerzos residuales en la viga (figura 1*c*).

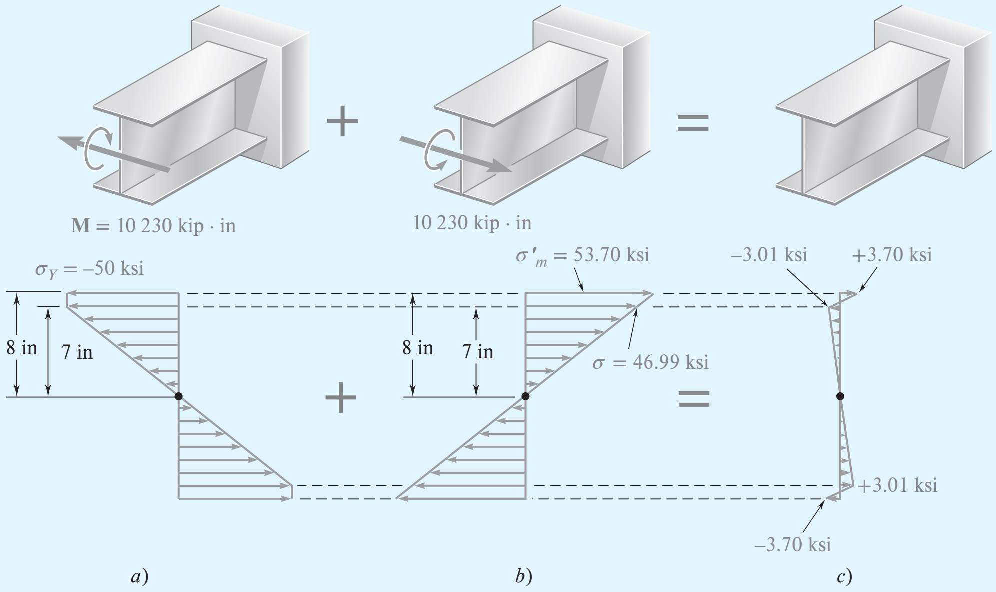


Figura 1 Superposición de la carga plástica y la descarga elástica para obtener los esfuerzos residuales.

Radio de curvatura permanente. En $y = 7$ in, el esfuerzo residual es $\sigma = -3.01$ ksi. Como no hay deformación plástica en este punto, se puede usar la ley de Hooke, y $\epsilon_x = \sigma/E$. Al recordar la ecuación (4.8), se escribe

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{yE}{\sigma} = -\frac{(7 \text{ in})(29 \times 10^6 \text{ psi})}{-3.01 \text{ ksi}} = +67\,400 \text{ in} \qquad \rho = 5\,620 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

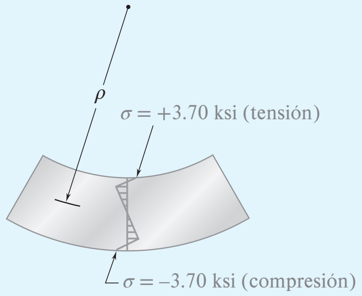


Figura 2 Representación del radio de curvatura permanente.

REVISAR y PENSAR: En la figura 2 se observa que el esfuerzo residual es de tensión en la cara superior de la viga y de compresión en la cara inferior, aun cuando la viga es cóncava hacia arriba.

Problemas

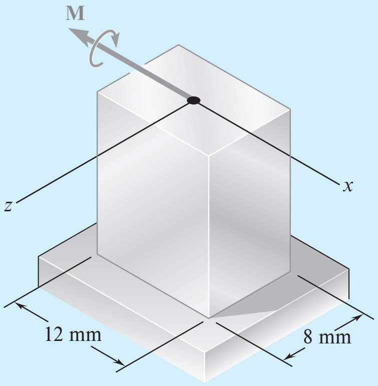


Figura P4.67

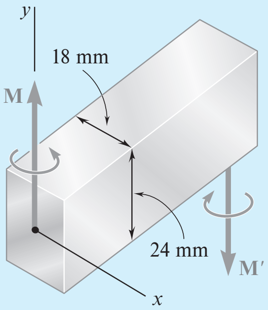


Figura P4.71

4.67 La barra prismática mostrada es de acero que se supone es elastoplástico con $\sigma_Y = 300$ MPa y se somete a un momento **M** paralelo al eje x. Determine el momento M al cual *a*) ocurre la cedencia por primera vez, *b*) el núcleo elástico de la barra es de 4 mm de espesor.

4.68 Resuelva el problema 4.67, suponiendo que el momento **M** es paralelo al eje z.

4.69 Una barra sólida cuadrada de 0.6 in por lado se fabrica en acero que se supone es elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 48$ ksi. Si se sabe que se aplica y mantiene un momento **M** con respecto a un eje paralelo al costado de la sección transversal determine el momento M en el cual el radio de curvatura es de 6 pies.

4.70 Para la barra sólida cuadrada del problema 4.69, determine el momento flector M al cual el radio de curvatura es de 3 pies.

4.71 La barra prismática mostrada se fabrica en acero que se supone es elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 280$ MPa. Si se sabe que se aplican y mantienen los momentos **M** y **M′** de momento 525 N · m con respecto a un eje paralelo al eje y, determine *a*) el espesor del núcleo elástico, *b*) el radio de curvatura de la barra.

4.72 Resuelva el problema 4.71, suponiendo que los momentos **M** y **M′** se aplican y mantienen con respecto a ejes paralelos al eje x.

4.73* y *4.74 Una viga de la sección transversal mostrada se fabrica en un acero que se supone es elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 240$ MPa. Para flexión con respecto al eje z, determine el momento flector al cual *a*) ocurre la cedencia por primera vez, *b*) las zonas plásticas en las caras superior e inferior de la barra son de 30 mm de espesor.

4.75 y *4.76* Una viga de la sección transversal mostrada se fabrica en un acero que se supone es elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 42$ ksi. Para flexión con respecto al eje z, determine el momento flector al cual *a*) ocurre la cedencia por primera vez, *b*) las zonas plásticas en las caras superior e inferior de la barra son de 3 in de espesor.

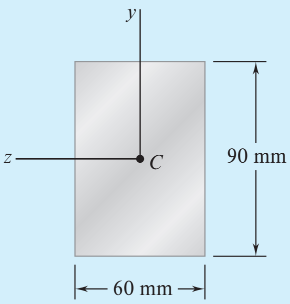


Figura *P4.73*

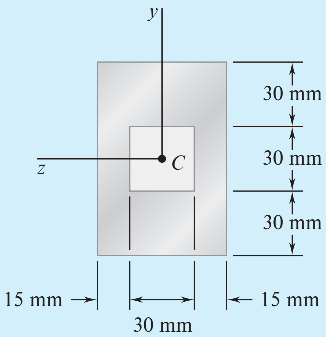


Figura *P4.74*

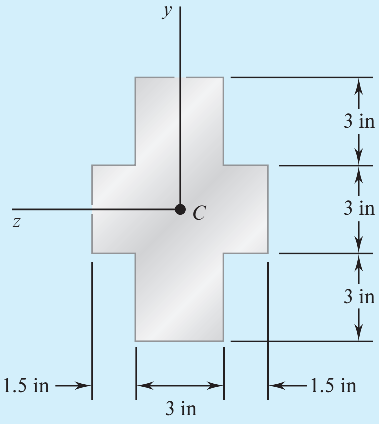


Figura P4.75

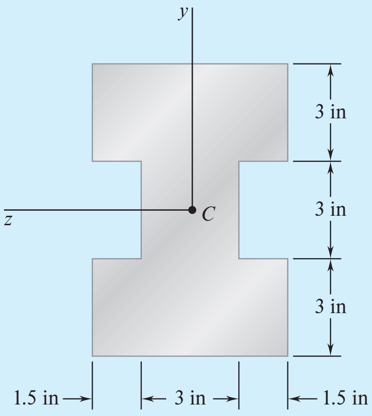


Figura *P4.76*

4.77 a 4.80 Para la viga indicada, determine *a*) el momento plástico, *Mp*, *b*) el factor de forma de la sección transversal.

- **4.77** Viga del problema *4.73*.
- **4.78** Viga del problema 4.74.
- **4.79** Viga del problema *4.75*.
- **4.80** Viga del problema *4.76*.

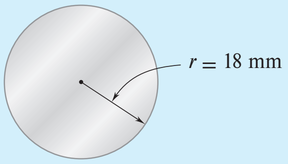


Figura P4.81

4.81 a *4.83* Determine el momento plástico M_p de una viga de acero de la sección transversal mostrada, suponiendo que el acero es elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 240 MPa.

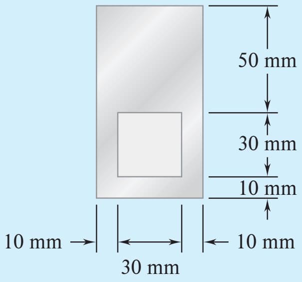


Figura P4.82

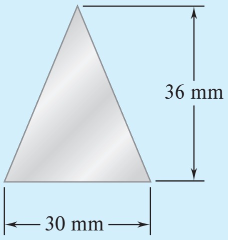


Figura *P4.83*

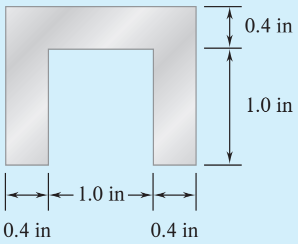


Figura P4.84

4.84 Determine el momento plástico M_p de una viga de acero de la sección transversal mostrada, suponiendo que el acero es elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 42 ksi.

4.85 Determine el momento plástico M_p de la sección transversal mostrada cuando la viga se flexiona con respecto a un eje horizontal. Suponga que el material es elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 175 MPa.

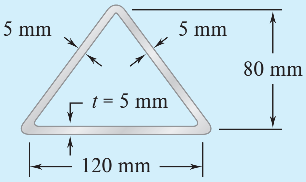


Figura *P4.85*

4.86. Determine el momento plástico M_p de una viga de acero de la sección transversal mostrada, suponiendo que el acero es elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 36 ksi.

4.87 y 4.88 Para la viga indicada, se aplica un momento igual al momento totalmente plástico M_p y luego se retira. Utilizando una resistencia a la cedencia de 240 MPa, determine el esfuerzo residual en $y = 45$ mm.

- **4.87** Viga del problema 4.73.
- **4.88** Viga del problema 4.74.

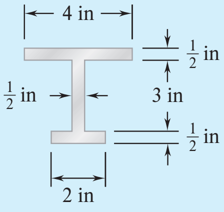


Figura P4.86

4.89* y *4.90 Se aplica un momento flector a la barra indicada y hace que se desarrollen zonas plásticas de 3 in de espesor en las caras superior e inferior de la barra. Después de que se retira el momento, determine *a*) el esfuerzo residual en $y = 4.5$ in, *b*) los puntos donde el esfuerzo residual es cero, *c*) el radio de curvatura correspondiente a la deformación permanente de la barra.

- ***4.89*** Viga del problema 4.75.
- ***4.90*** Viga del problema 4.76.

4.91 Se aplica un momento flector a la viga del problema 4.73 y hace que se desarrollen zonas plásticas de 30 mm de espesor en las caras superior e inferior de la barra. Después de que se retira el momento, determine *a*) el esfuerzo residual en $y = 45$ mm, *b*) los puntos donde el esfuerzo residual es cero, *c*) el radio de curvatura correspondiente a la deformación permanente de la viga.

4.92 Una viga de la sección transversal mostrada se fabrica en acero que se supone es elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 42$ ksi. Se aplica un momento a la viga con respecto al eje *z*, y hace que se desarrollen zonas plásticas

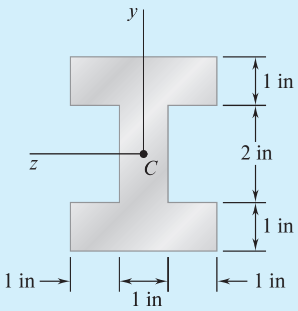


Figura P4.92

de 2 in de espesor en las caras superior e inferior de la viga. Después de que el momento se retira, determine *a*) el esfuerzo residual en $y = 2$ in, *b*) los puntos donde el esfuerzo residual es cero, *c*) el radio de curvatura correspondiente a la deformación permanente de la viga.

4.93 Una barra rectangular recta y libre de esfuerzos se flexiona hasta que forma un círculo de radio ρ por medio de dos momentos *M*. Después de que los momentos se retiran, se observa que el radio de curvatura de la barra es ρ_R. Si ρ_Y denota el radio de curvatura de la barra al inicio de la cedencia, demuestre que los radios de curvatura satisfacen la siguiente relación:

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_Y}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_Y}\right)^2\right]\right\}$$

4.94 Una barra sólida de sección transversal rectangular está hecha de un material que se supone es elastoplástico. Si se denota como M_Y y ρ_Y, respectivamente, el momento flector y el radio de curvatura al inicio de la cedencia, determine *a*) el radio de curvatura cuando se aplica un momento $M = 1.25\ M_Y$ a la barra, *b*) el radio de curvatura después de que se retira el momento. Compruebe los resultados obtenidos mediante la relación derivada en el problema 4.93.

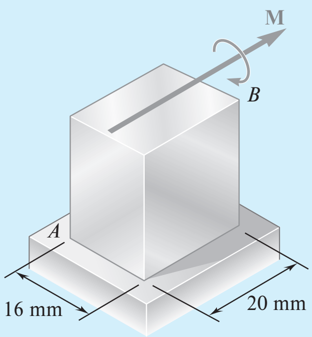


Figura P4.95

4.95 La barra prismática *AB* es de acero que se supone es elastoplástico y para el cual $E = 200$ GPa. Si se sabe que el radio de curvatura de la barra es de 2.4 m cuando se aplica un momento $M = 350$ N · m, como se muestra, determine *a*) la resistencia de cedencia del acero, *b*) el espesor del núcleo elástico de la barra.

4.96 La barra prismática *AB* es de una aleación de aluminio para la cual el diagrama de esfuerzo de tensión-deformación es como se muestra. Suponiendo que el diagrama de σ-ϵ es el mismo a compresión y a tensión, determine *a*) el radio de curvatura de la barra cuando el esfuerzo máximo es de 250 MPa, *b*) el valor correspondiente del momento flector. (*Sugerencia:* Para la parte *b*, trace σ contra *y* y use un método de integración aproximado).

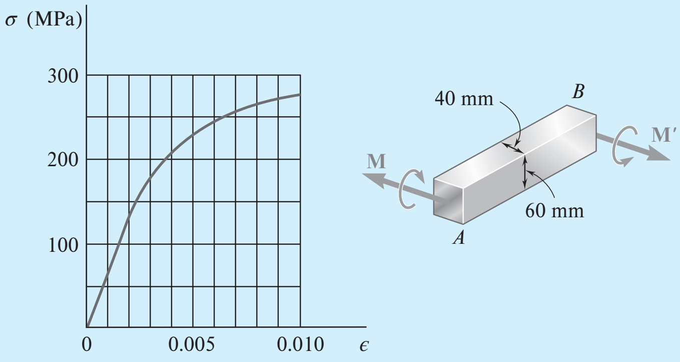


Figura P4.96

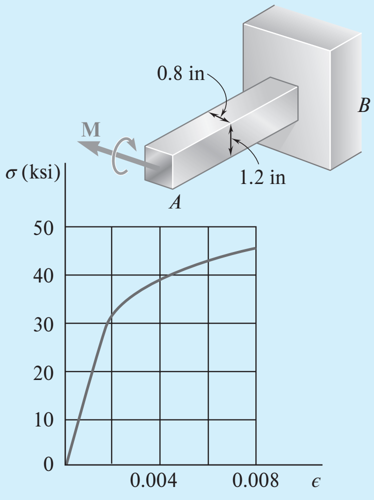


Figura *P4.97*

4.97 La barra prismática *AB* está hecha de una aleación de bronce para la cual el diagrama de esfuerzo de tensión es como se muestra. Suponiendo que el diagrama σ-ϵ es el mismo a compresión que a tensión, determine *a*) el esfuerzo máximo en la barra cuando su radio de curvatura es de 100 in, *b*) el valor correspondiente del momento flector. (Vea la sugerencia dada en el problema 4.96).

4.98 Una barra prismática de sección transversal rectangular está hecha de una aleación para la cual el diagrama de esfuerzo-deformación puede estar representado por la relación $\epsilon = k\sigma^n$ para $\sigma > 0$ y $\epsilon = -|k\sigma^n|$ para $\sigma < 0$. Si se aplica un momento **M** a la barra, demuestre que el esfuerzo máximo es

$$\sigma_m = \frac{1 + 2n}{3n}\frac{Mc}{I}$$

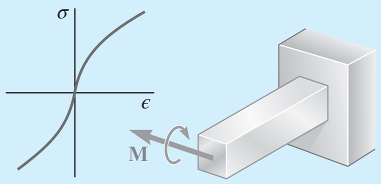


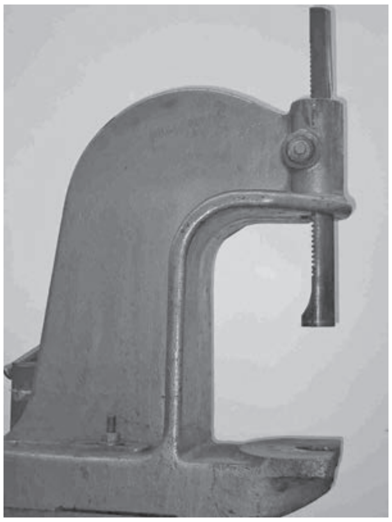
Figura P4.98

4.7 CARGA AXIAL EXCÉNTRICA EN UN PLANO DE SIMETRÍA

En la sección 1.2A se vio que la distribución de esfuerzos en la sección transversal de un miembro sometido a una carga axial puede suponerse uniforme solo si la línea de acción de las cargas **P** y **P′** pasa por el centroide de la sección transversal. Se dice que tal carga es *céntrica.* A continuación se analiza la distribución de esfuerzos cuando la línea de acción de las cargas *no* pasa por el centroide de la sección transversal, es decir, cuando la carga es *excéntrica.*

En las fotografías 4.5 y 4.6 se muestran dos ejemplos de una carga excéntrica. En la fotografía 4.5, el peso de la lámpara ejerce una carga excéntrica en el poste. Asimismo, las fuerzas verticales ejercidas en la prensa de la fotografía 4.6 provocan una carga excéntrica en la columna trasera de la prensa.

Fotografía 4.5 Luminaria de banqueta.



Fotografía 4.6 Prensa de banco.

En esta sección, el análisis se limitará a miembros que poseen un plano de simetría, y se supondrá que las cargas se aplican en el plano de simetría del miembro (figura 4.39*a*). Las fuerzas internas que actúan en una sección dada pueden representarse entonces por una fuerza **F** aplicada en el centroide *C* de la sección y un momento **M** que

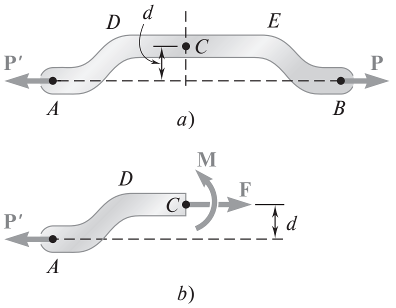


Figura 4.39 *a*) Miembro con carga excéntrica. *b*) Diagrama de cuerpo libre del miembro con cargas internas en la sección *C*.

actúa en el plano de simetría del miembro (figura 4.39*b*). Las condiciones de equilibrio del cuerpo libre *AC* requieren que la fuerza **F** sea igual y opuesta a **P**′ y que el momento **M** sea igual y opuesto al momento de **P**′ con respecto a *C*. Al denotar como *d* la distancia del centroide *C* a la línea de acción *AB* de las fuerzas **P** y **P**′, se tiene

$$F = P \qquad \text{y} \qquad M = Pd \tag{4.49}$$

Ahora se observa que las fuerzas internas en la sección estarían representadas por la misma fuerza y el momento si la parte recta *DE* del miembro *AB* se hubiera desprendido de *AB* y sometida simultáneamente a las cargas **P** y **P**′ y a los momentos flectores **M** y **M**′ (figura 4.40). Por consiguiente, la distribución de esfuerzos debido a la carga excéntrica original se puede obtener superponiendo la distribución de esfuerzos uniforme correspondiente a las cargas céntricas **P** y **P**′ y la distribución lineal correspondiente a los momentos flectores **M** y **M**′ (figura 4.41). Se escribe

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{céntrica}} + (\sigma_x)_{\text{flexionante}}$$

o al recordar las ecuaciones (1.5) y (4.16),

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \tag{4.50}$$

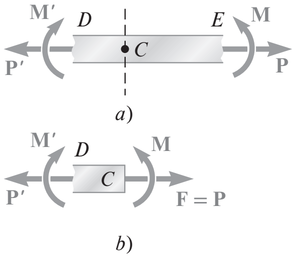


Figura 4.40 *a*) Diagrama de cuerpo libre de la parte recta *DE*. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la parte *CD*.

donde *A* es el área de sección transversal e *I* es su momento de inercia centroidal y *y* se mide con respecto al eje centroidal de la sección transversal. Esta relación muestra que la distribución de esfuerzos a través de la sección es *lineal pero no uniforme*. Dependiendo de la geometría de la sección transversal y la excentricidad de la carga, todos los esfuerzos combinados pueden tener el mismo signo, como se muestra en la figura 4.41, o algunos pueden ser positivos y otros negativos, como se muestra en la figura 4.42. En el último caso, habrá una línea en la sección, a lo largo de la cual $\sigma_x = 0$. Esta línea representa el *eje neutro* de la sección. Se observa que el eje neutro *no* coincide con el eje centroidal de la sección, ya que $\sigma_x \neq 0$ para $y = 0$.

Los resultados obtenidos son válidos solo al grado en que se cumplen las condiciones de aplicabilidad del principio de superposición (sección 2.5) y del principio de Saint-Venant (sección 2.10). Esto significa que los esfuerzos involucrados no deben exceder el límite proporcional del material. Las deformaciones provocadas por la flexión no debe afectar apreciablemente la distancia *d* en la figura 4.39*a*, y la sección transversal donde se calculan los esfuerzos no debe estar demasiado cerca de los puntos *D* o *E*. El primero de estos requisitos muestra con claridad que no se puede aplicar el método de superposición a deformaciones plásticas.

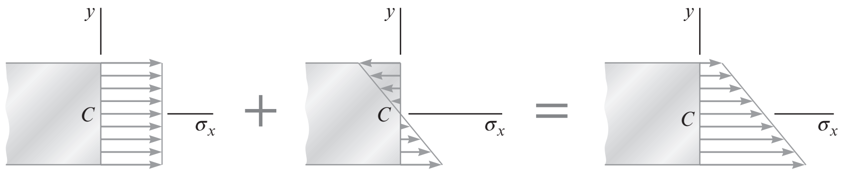


Figura 4.41 La distribución de esfuerzos con carga excéntrica se obtiene superponiendo las distribuciones de flexión axial y pura.

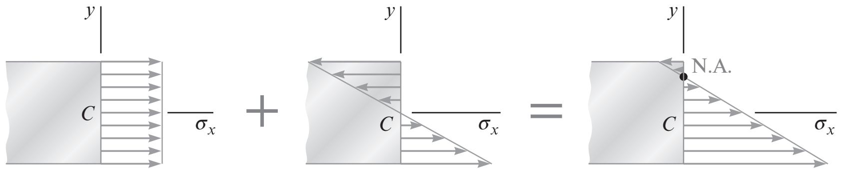


Figura 4.42 Distribución de esfuerzos alternativa con una carga excéntrica que produce zonas de tensión y compresión.

Aplicación de conceptos 4.7

Curvando varillas de acero de bajo carbono de 0.5 in de diámetro en la mostrada (figura 4.43*a*) se obtiene una cadena de eslabones abiertos. Si se sabe que la cadena soporta una carga de 160 lb, determine *a*) los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la parte recta de un eslabón, *b*) la distancia entre el eje centroidal y el eje neutro de una sección transversal.

a) Esfuerzos máximos de tensión y compresión. Las fuerzas internas en la sección transversal equivalen a una fuerza céntrica **P** y a un momento flector **M** (figura 4.43*b*) de magnitudes

$$P = 160 \text{ lb}$$
$$M = Pd = (160 \text{ lb})(0.65 \text{ in}) = 104 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

Las distribuciones de esfuerzo correspondientes se muestran en las figuras 4.43*c* y *d*. La distribución producida por la fuerza céntrica **P** es uniforme e igual a $\sigma_0 = P/A$. Se tiene

$$A = \pi c^2 = \pi (0.25 \text{ in})^2 = 0.1963 \text{ in}^2$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{160 \text{ lb}}{0.1963 \text{ in}^2} = 815 \text{ psi}$$

La distribución producida por el momento flector **M** es lineal con un esfuerzo máximo $\sigma_m = Mc/I$. Se escribe

$$I = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi (0.25 \text{ in})^4 = 3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(104 \text{ lb} \cdot \text{in})(0.25 \text{ in})}{3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4} = 8\,475 \text{ psi}$$

Al superponer las dos distribuciones, se obtiene la distribución de esfuerzos correspondiente a la carga excéntrica (figura 4.43*e*). Se determina que los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la sección son, respectivamente,

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m = 815 + 8\,475 = 9\,290 \text{ psi}$$

$$\sigma_c = \sigma_0 - \sigma_m = 815 - 8\,475 = -7\,660 \text{ psi}$$

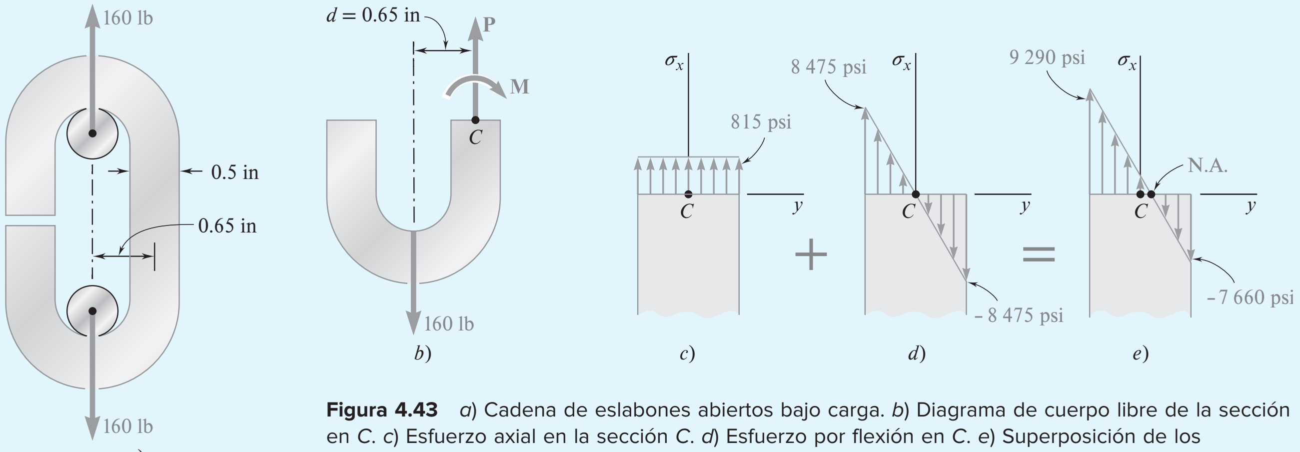


Figura 4.43 *a*) Cadena de eslabones abiertos bajo carga. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la sección en *C*. *c*) Esfuerzo axial en la sección *C*. *d*) Esfuerzo por flexión en *C*. *e*) Superposición de los esfuerzos.

***b*) Distancia entre los ejes centroidal y neutro.** La distancia y_0 del eje centroidal al eje neutro de la sección se obtiene al hacer $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.50) y al resolver y_0:

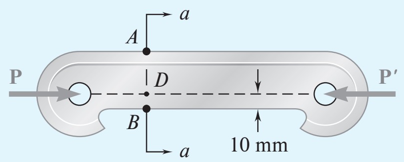
$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_0}{I}$$

$$y_0 = \left(\frac{P}{A}\right)\left(\frac{I}{M}\right) = (815 \text{ psi})\frac{3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4}{104 \text{ lb} \cdot \text{in}}$$

$$y_0 = 0.0240 \text{ in}$$

Problema modelo 4.8

Si se sabe que para el eslabón de hierro colado mostrado los esfuerzos permisibles son de 30 MPa a tensión y de 120 MPa a compresión, determine la fuerza máxima **P** que se puede aplicar al eslabón. (*Nota:* La sección transversal en forma de T del eslabón previamente se consideró en el problema modelo 4.2).



ESTRATEGIA: Los esfuerzos generados por la carga axial y el momento que resulta de la excentricidad de la carga axial con respecto al eje neutro se superponen para obtener los esfuerzos máximos. La sección transversal tiene un solo plano de simetría así que es necesario determinar tanto el esfuerzo máximo de compresión como el esfuerzo máximo de tensión y comparar cada uno con el esfuerzo permisible correspondiente para determinar **P**.

MODELAR y ANALIZAR:

Propiedades de la sección transversal. La sección transversal se muestra en la figura 1. Del problema modelo 4.2, se tiene

$$A = 3\,000 \text{ mm}^2 = 3 \times 10^{-3}\text{m}^2 \qquad \bar{Y} = 38 \text{ mm} = 0.038 \text{ m}$$

$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

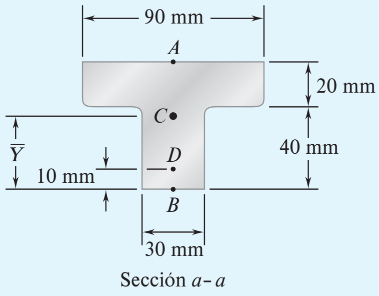


Figura 1 Geometría de la sección para localizar el centroide.

Ahora se escribe (figura 2): $d = (0.0038 \text{ m}) - (0.010 \text{ m}) = 0.028 \text{ m}$

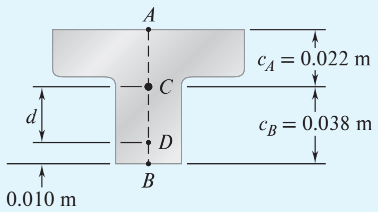


Figura 2 Dimensiones para determinar *d*.

Fuerza y momento en C. Al utilizar la figura 3, **P** se reemplaza por un sistema de fuerza-momento equivalente en el centroide C.

$$P = PM = P(d) = P(0.028 \text{ m}) = 0.028P$$

La fuerza **P** que actúa en el centroide produce una distribución de esfuerzos uniforme (figura 4*a*). El momento flector **M** produce una distribución de esfuerzos lineal (figura 4*b*).

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{3 \times 10^{-3}} = 333P \qquad \text{(Compresión)}$$

$$\sigma_1 = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(0.028P)(0.022)}{868 \times 10^{-9}} = 710P \qquad \text{(Tensión)}$$

$$\sigma_2 = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(0.028P)(0.038)}{868 \times 10^{-9}} = 1\,226P \qquad \text{(Compresión)}$$

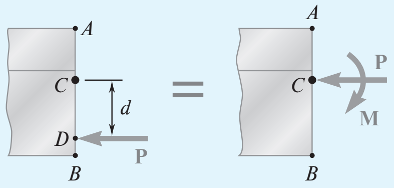


Figura 3 Sistema de fuerza-momento equivalente en el centroide C.

Superposición. La distribución total de esfuerzos (figura 4*c*) se determina superponiendo a la distribución de esfuerzos generada por la fuerza céntrica **P** y por el momento **M**. Como la tensión es positiva, y la compresión negativa, se tiene

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -333P + 710P = +377P \qquad \text{(Tensión)}$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -333P - 1\,226P = -1\,559P \qquad \text{(Compresión)}$$

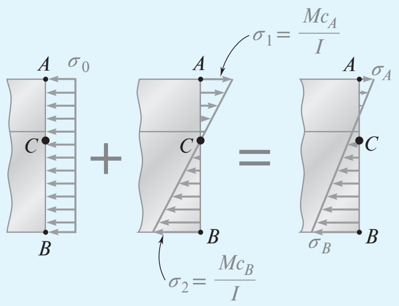


Figura 4 La distribución de esfuerzos en la sección C es la superposición de las distribuciones axial y de flexión.

Fuerza máxima permisible. La magnitud de **P** con la cual el esfuerzo de tensión en el punto A es igual al esfuerzo de tensión permisible de 30 MPa se determina escribiendo

$$\sigma_A = 377P = 30 \text{ MPa} \qquad P = 79.6 \text{ kN} \quad ◀$$

También se determina la magnitud de **P** con la cual el esfuerzo en B es igual al esfuerzo de compresión permisible de 120 MPa.

$$\sigma_B = -1\,559P = -120 \text{ MPa} \qquad P = 77.0 \text{ kN} \quad ◀$$

La magnitud de la fuerza máxima **P** que se puede aplicar sin exceder cualquiera de los esfuerzos permisibles es el menor de los dos valores encontrados.

$$P = 77.0 \text{ kN} \quad ◀$$

Problemas

4.99 Si se sabe que la magnitud de la fuerza horizontal **P** es de 8 kN, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

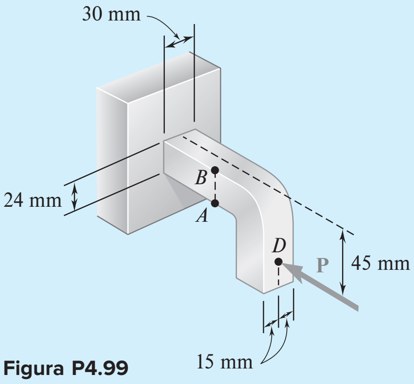


Figura P4.99

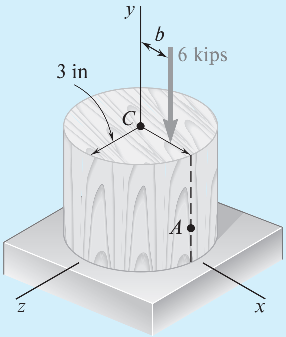


Figura P4.100

4.100 Un corto poste de madera soporta una carga axial de 6 kips como se muestra. Determine el esfuerzo en el punto *A* cuando *a*) $b = 0$, *b*) $b = 1.5$ in, *c*) $b = 3$ in.

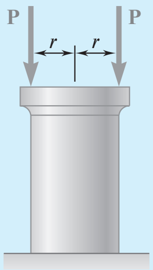


Figura P4.101

4.101 Las fuerzas **P** se pueden aplicar por separado o al mismo tiempo a una placa que está soldada a una barra circular sólida de radio *r*. Determine el esfuerzo máximo de compresión en la barra circular, *a*) cuando ambas fuerzas se aplican, *b*) cuando solo una de las fuerzas se aplica.

4.102 Una corta columna de 120×180 mm soporta las tres cargas axiales mostradas. Si se sabe que la sección *ABD* está suficientemente alejada de las cargas para permanecer plana, determine el esfuerzo en *a*) la esquina *A*, *b*) la esquina *B*.

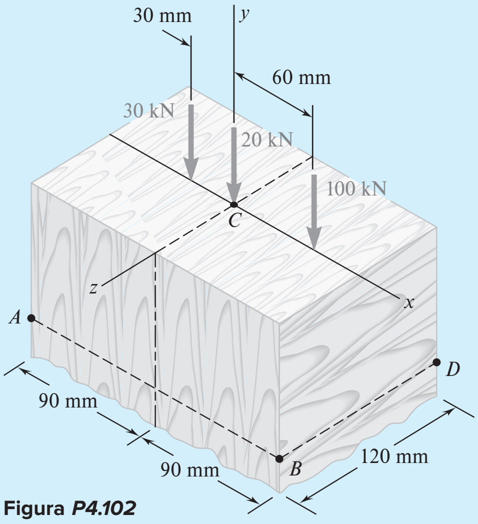


Figura *P4.102*

4.103 Tantas como tres cargas axiales de magnitud $P = 50$ kN se pueden aplicar al extremo de un perfil W200 × 31.1 de acero laminado. Determine el esfuerzo en el punto A, *a*) para la carga mostrada, *b*) si las cargas se aplican solo en los puntos 1 y 2.

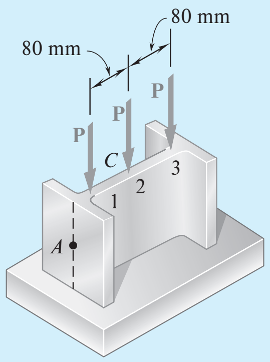


Figura P4.103

4.104 Se aplican dos fuerzas de 10 kN a una barra rectangular de 20 × 60 mm como se muestra. Determine el esfuerzo en el punto A cuando *a*) $b = 0$, *b*) $b = 15$ mm, *c*) $b = 25$ mm.

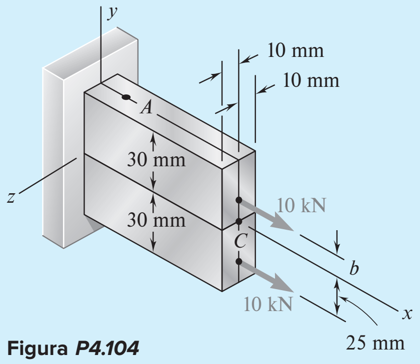


Figura *P4.104*

4.105 Partes de una barra cuadrada de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ in se flexionaron para formar las dos componentes de máquina mostradas. Si se sabe que el esfuerzo permisible es de 15 ksi, determine la carga máxima que se puede aplicar a cada componente.

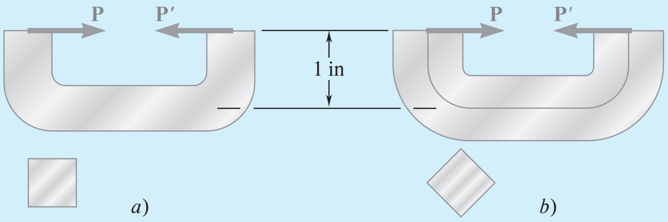


Figura P4.105

4.106 Si se sabe que el esfuerzo permisible en la sección ABD es de 80 MPa, determine la fuerza máxima **P** que se puede aplicar a la ménsula mostrada.

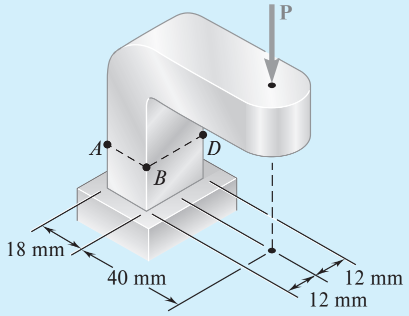


Figura P4.106

4.107 Se utilizó una operación de fresado para remover una parte de una barra sólida de sección cuadrada. Si se sabe que $a = 30$ mm, $d = 20$ mm y $\sigma_{todos} = 60$ MPa, determine la magnitud de P de las fuerzas máximas que se pueden aplicar con seguridad en los centros de los extremos de la barra.

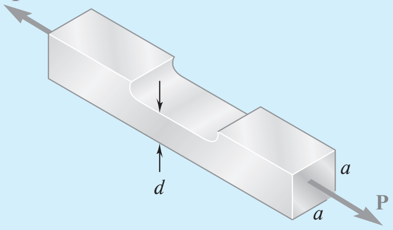


Figura P4.107 y P4.108

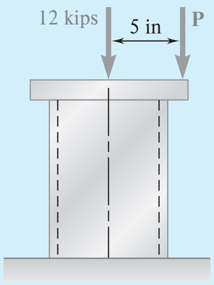


Figura P4.109

4.108 Se utilizó una operación de fresado para remover una parte de una barra sólida de sección cuadrada. Se aplican fuerzas de magnitud $P = 18$ kN en los centros de los extremos de la barra. Si se sabe que $a = 30$ mm y $\sigma_{todos} = 135$ MPa, determine la menor altura permisible d de la parte fresada de la barra.

4.109 Las dos fuerzas mostradas se aplican a una placa rígida soportada por tubo de acero de 8 in de diámetro externo y 7 in. de diámetro interno. Determine el valor de **P** con el cual el esfuerzo máximo de compresión en el tubo es de 15 ksi.

4.110 Se debe introducir una inflexión h en una varilla circular sólida de diámetro d. Si se sabe que el esfuerzo máximo después de que se introduce la inflexión no debe exceder de cinco veces el esfuerzo en la varilla cuando está recta, determine la inflexión máxima que se puede usar.

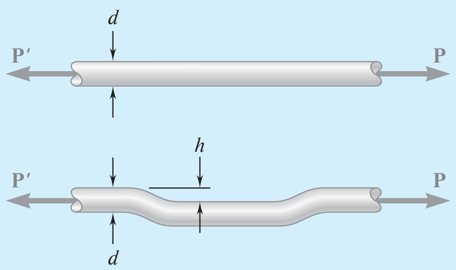


Figura P4.110 y *P4.111*

4.111 Se debe introducir una inflexión h en un tubo de metal de 0.75 in de diámetro externo y espesor de pared de 0.08 in. Si se sabe que el esfuerzo máximo después de que se introduce la inflexión no debe ser exceder de cuatro veces el esfuerzo en el tubo cuando está recto, determine la inflexión máxima que se puede usar.

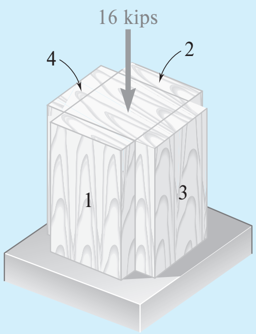


Figura *P4.112*

4.112 Una columna corta se hace clavando cuatro tablones de 1 × 4 in a una viga de madera de 4 × 4 in. Utilizando un esfuerzo permisible de 600 psi, determine la carga máxima de compresión **P** que se puede aplicar en el centro de la sección superior de la columna de madera como se muestra si *a*) la columna es como se describe, *b*) se quita el tablón 1, *c*) se quitan los tablones 1 y 2, *d*) se quitan los tablones, 1, 2 y 3, *e*) se quitan todos los tablones.

4.113 Una varilla vertical se fija en el punto A al soporte colgante mostrado. Si se sabe que los esfuerzos permisibles en el soporte son $\sigma_{todos} = +5$ ksi y $\sigma_{todos} = -12$ ksi, determine la fuerza máxima dirigida hacia abajo y la fuerza máxima dirigida hacia arriba que la varilla puede ejercer.

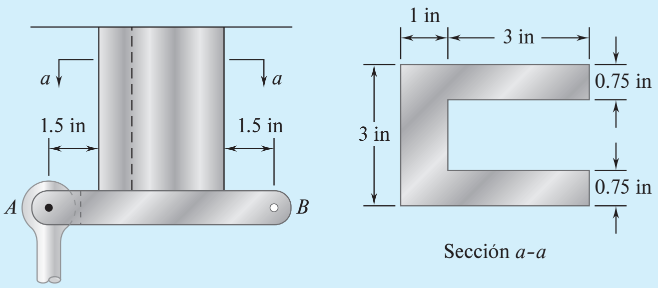


Figura P4.113

4.114 Resuelva el problema 4.113, suponiendo que la varilla vertical se fija en el punto *B* en lugar de en el punto *A*.

4.115 Si se sabe que la prensa de tornillo mostrado se aprieta hasta que $P = 400$ N, determine *a*) el esfuerzo en el punto *A*, *b*) el esfuerzo en el punto *B*, *c*) la ubicación del eje neutro de la sección *a-a*.

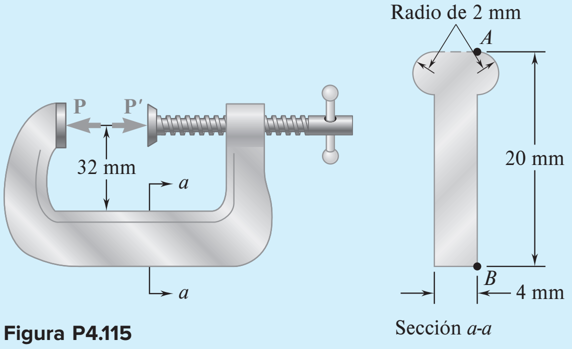


Figura P4.115

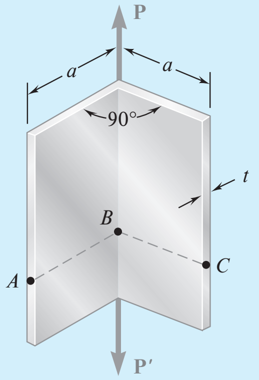


Figura P4.116

4.116 El perfil mostrado se formó doblando una placa de acero delgada. Suponiendo que el espesor *t* es pequeño comparado con la longitud *a* de cada lado del perfil, determine el esfuerzo en *a*) *A*, *b*) en *B*, *c*) en *C*.

4.117 Tres placas de acero, cada una de 25 × 150 mm de sección transversal, se sueldan entre sí para formar una corta columna de perfil H. Más tarde, por razones arquitectónicas, se quita una tira de 25 mm de cada lado de una de las bridas. Si se sabe que la carga permanece céntrica con respecto a la sección transversal original, y que el esfuerzo permisible es de 100 MPa, determine la fuerza máxima **P** *a*) que se podría aplicar a la columna original, *b*) que se puede aplicar a la columna modificada.

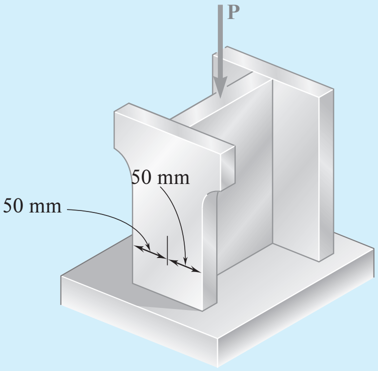


Figura P4.117

4.118 Se aplica una fuerza vertical **P** de 20 kips en el punto *C* situado en el eje de simetría de la sección transversal de una columna corta. Si se sabe que $y =$ 5 in, determine *a*) el esfuerzo en el punto *A*, *b*) el esfuerzo en el punto *B*, *c*) la ubicación del eje neutro.

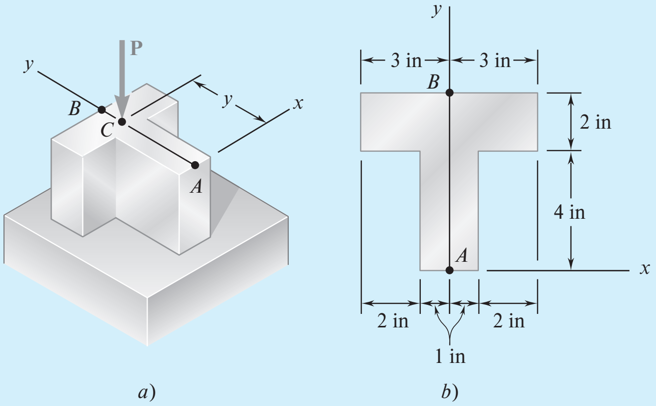


Figura *P4.118* y *P4.119*

4.119 Se aplica una fuerza vertical **P** en el punto *C* localizado en el eje de simetría de la sección transversal de una columna corta. Determine el rango de valores de *y* para los cuales no ocurren esfuerzos de tensión en la columna.

4.120 Las cuatro barras mostradas tienen las mismas áreas de sección transversal. Para las cargas dadas, demuestre que *a*) los esfuerzos máximos de compresión guardan la proporción 4:5:7:9, *b*) los esfuerzos máximos de tensión guardan la proporción 2:3:5:3. (*Nota:* La sección transversal de la barra triangular es un triángulo equilátero).

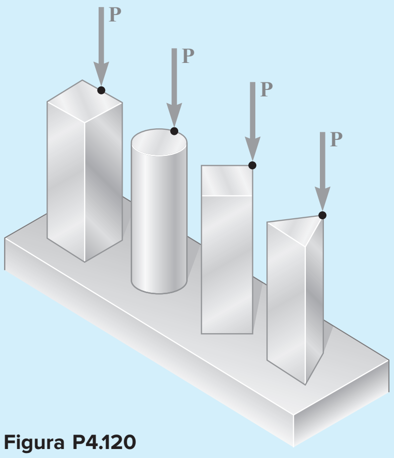


Figura P4.120

4.121 Se aplica una carga excéntrica **P** como se muestra a una barra de acero de sección transversal de 25 × 90 mm. Las deformaciones medidas en *A* y *B* son

$$\epsilon_A = +350\ \mu \qquad\qquad \epsilon_B = -70\ \mu$$

Si se sabe que $E = 200$ GPa, determine *a*) la distancia *d*, *b*) la magnitud de la fuerza **P**.

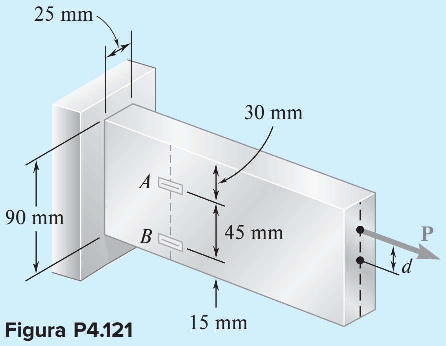


Figura P4.121

4.122 Resuelva el problema 4.121, suponiendo que las deformaciones medidas son

$$\epsilon_A = +600\ \mu \qquad\qquad \epsilon_B = +420\ \mu$$

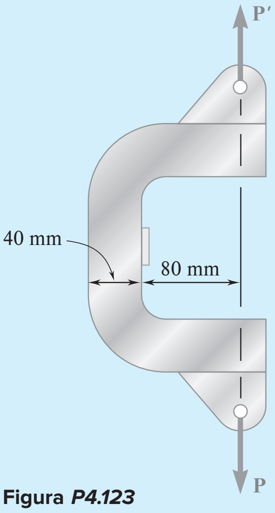


Figura *P4.123*

4.123 La barra de acero en C se utiliza como dinamómetro para determinar la magnitud *P* de las fuerzas mostradas. Si se sabe que la sección transversal de la barra es un cuadrado de 40 mm por lado y que la deformación medida en el borde interno es de 450 μ, determine la magnitud *P* de las fuerzas. Use $E = 200$ GPa.

4.124 Un corto tramo de una columna de acero laminado soporta una placa rígida sobre la cual se aplican dos cargas **P** y **Q** como se muestra. Las deformaciones medidas en dos puntos *A* y *B* situados en la línea de centros de las caras externas de las bridas o alas son

$$\epsilon_A = -400 \times 10^{-6} \text{ in/in} \qquad \epsilon_B = -300 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la magnitud de cada carga.

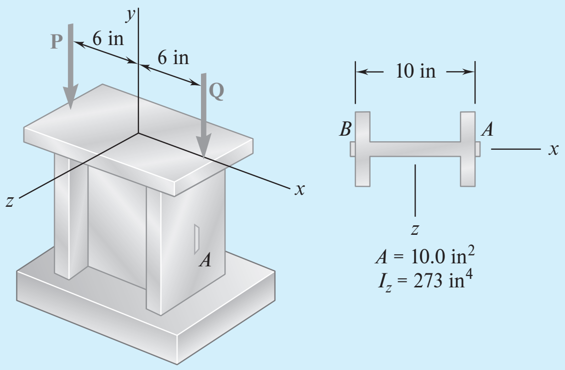


Figura P4.124

4.125 Se aplica una fuerza vertical **P** a un corto poste de acero como se muestra. Calibradores colocados en A, B y C indican las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_A = -500\ \mu \qquad \epsilon_B = -1\,000\ \mu \qquad \epsilon_C = -200\ \mu$$

Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la magnitud de **P**, *b*) la línea de acción de **P**, *c*) la deformación correspondiente en el borde oculto del poste, donde $x = -2.5$ in y $z = -1.5$ in.

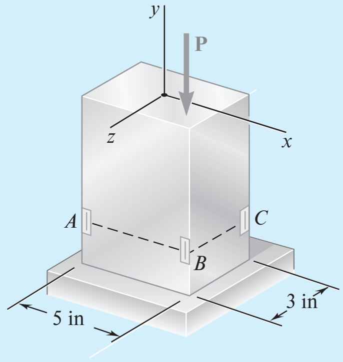


Figura P4.125

4.126 La fuerza axial excéntrica **P** actúa en el punto D, el cual debe estar a 25 mm debajo de la superficie superior de la barra de acero mostrada. Con $P = 60$ kN, *a*) determine la altura d de la barra para el cual el esfuerzo de tensión es máximo en el punto A, *b*) el esfuerzo correspondiente en A.

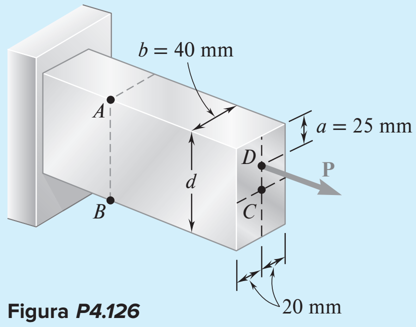


Figura *P4.126*

4.8 ANÁLISIS DE FLEXIÓN ASIMÉTRICA

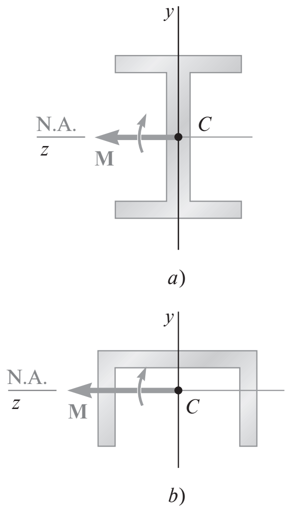


Figura 4.44 Momento en un plano de simetría.

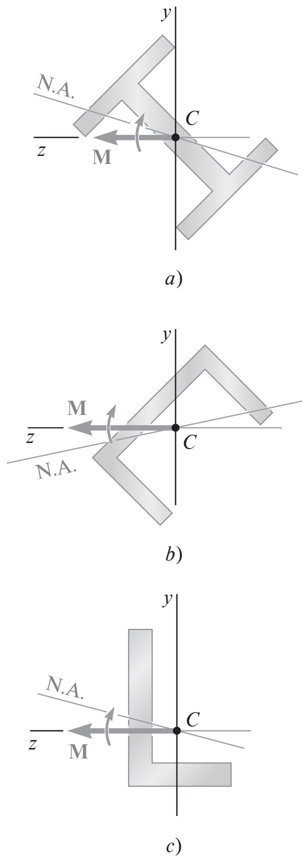


Figura 4.45 Momento que no está en un plano de simetría.

Hasta ahora el análisis de flexión pura se ha limitado a miembros que poseen al menos un plano de simetría y se someten a momentos que actúan en dicho plano. Por la simetría de tales miembros y de sus cargas, éstos permanecen simétricos con respecto al plano de los momentos y por lo tanto se flexionan con respecto a dicho plano (sección 4.1B). Esto se ilustra en la figura 4.44; el inciso *a* muestra la sección transversal de un miembro que posee dos planos de simetría, uno vertical y uno horizontal, y el inciso *b* la sección transversal de un miembro con un solo plano vertical de simetría. En ambos casos el momento ejercido en la sección actúa en el plano de simetría del miembro y se representa con un vector de momento horizontal **M**, y en ambos casos, el eje neutro de la sección transversal coincide con el eje del momento.

Considere ahora situaciones en las que los momentos flectores *no* actúan en un plano de simetría del miembro, o porque actúan en un plano diferente, o porque el miembro no posee ningún plano de simetría. En tales situaciones, no es posible suponer que el miembro se flexionará en el plano de los momentos. Esto se ilustra en la figura 4.45. En cada parte de la figura, el momento ejercido en la sección de nuevo se supuso que actúan en un plano vertical y se representa con un vector de momento horizontal **M**. Sin embargo, como el plano vertical no es un plano de simetría, *no es posible esperar que el miembro se flexione en dicho plano o que el eje neutro de la sección coincida con el eje del momento.*

En la figura 4.46 se muestran las condiciones precisas en las cuales el eje neutro de una sección transversal de forma arbitraria coincide con el eje del momento **M** que representa las fuerzas que actúan en dicha sección. Se supone que tanto el vector de momento **M** como el eje neutro están dirigidos a lo largo del eje z. Hay que recordar de la sección 4.1A que las fuerzas internas elementales $\sigma_x dA$ forman un sistema equivalente al momento **M**. Por lo tanto,

componentes x: $\int \sigma_x dA = 0$ **(4.1)**

momento con respecto al eje y: $\int z\sigma_x dA = 0$ **(4.2)**

momento con respecto al eje z: $\int (-y\sigma_x dA) = M$ **(4.3)**

Cuando todos los esfuerzos se encuentran dentro del límite proporcional, la primera de estas ecuaciones nos conduce al requerimiento de que el eje eje neutro sea un eje centroidal, y la última a la relación fundamental $\sigma_x = -My/I$. Dado que en la sección 4.1A se supuso que la sección transversal era simétrica con respecto al eje y, se descarta la ecuación (4.2) como trivial en ese momento. Ahora que se está considerando una sección transversal de forma arbitraria, la ecuación (4.2) se vuelve altamente significativa. Suponiendo que los esfuerzos permanecen dentro del límite proporcional de material, $\sigma_x = -\sigma_m y/c$ se sustituye en la ecuación (4.2) y así se tiene

$$\int z\left(-\frac{\sigma_m y}{c}\right) dA = 0 \quad \text{o} \quad \int yz\, dA = 0 \qquad \textbf{(4.51)}$$

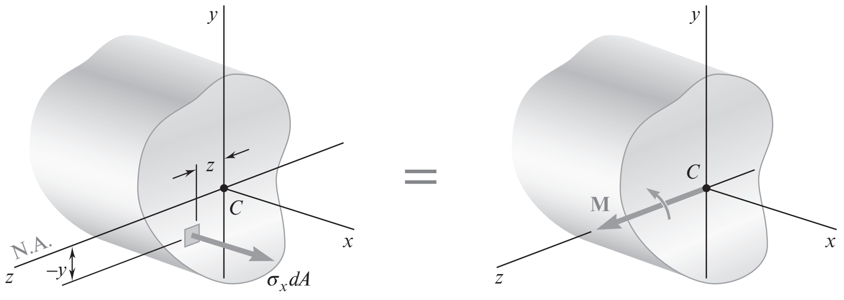


Figura 4.46 Sección de forma arbitraria donde el eje neutro coincide con el eje del momento **M**.

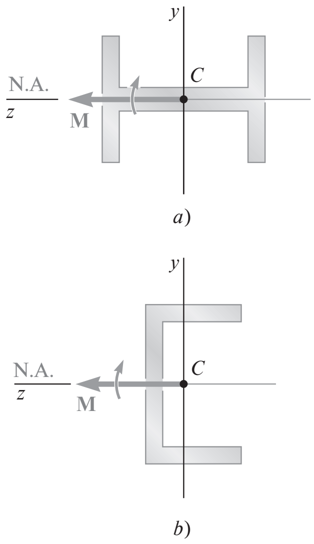


Figura 4.47 Momento alineado con el eje centroidal principal.

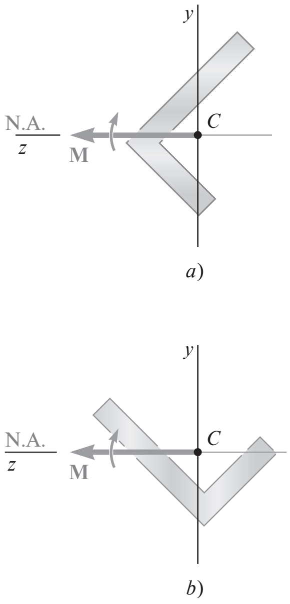


Figura 4.48 Momento no alineado con el eje principal centroidal.

La integral $\int yzdA$ representa el producto de inercia I_{yz} de la sección transversal con respecto a los ejes y y z, y será cero si estos ejes son los *ejes centroidales principales de la sección transversal.*[†] Por lo tanto, el eje neutro de la sección transversal coincide con el eje de momento **M** que representa las fuerzas que actúan en esa sección *si, y solo si, el vector de momento* **M** *está dirigido a lo largo de uno de los ejes centroidales principales de la sección transversal.*

Observe que las secciones transversales mostradas en la figura 4.44 son simétricas con respecto a por lo menos uno de los ejes de coordenadas. En cada caso, los ejes y y z son los ejes centroidales principales de la sección. Como el vector del momento **M** está dirigido a lo largo de uno de los ejes centroidales principales, el eje neutro coincide con el eje del momento. Asimismo, si las secciones transversales se hacen girar 90° (figura 4.47), el vector del momento **M** sigue estando dirigido a lo largo de un eje centroidal principal, y el eje neutro una vez más coincide con el eje del momento, aun cuando en el caso *b* el momento *no* actúa en un plano de simetría del miembro.

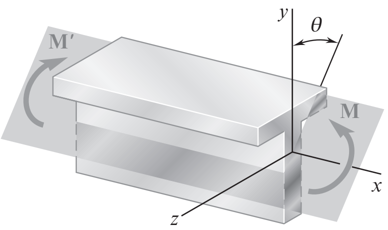


Figura 4.49 Flexión asimétrica, con momento flector que no está en un plano de simetría.

En la figura 4.45, ninguno de los ejes de coordenadas es un eje de simetría para las secciones mostradas, y los ejes de coordenadas no son ejes principales. Por lo tanto, el vector del momento **M** no está dirigido a lo largo de un eje centroidal principal, y el eje neutro no coincide con el eje del momento. Sin embargo, cualquier sección dada posee ejes centroidales principales, incluso si es asimétrica, como la sección mostrada en la figura 4.45*c*, y estos ejes se pueden determinar analíticamente o utilizando el círculo de Mohr.[†] Si el vector del momento **M** está dirigido a lo largo de uno de los ejes centroidales principales de la sección, el eje neutro coincidirá con el eje del momento (figura 4.48), y se pueden usar las ecuaciones derivadas para miembros simétricos a fin de determinar los esfuerzos.

Como verá dentro de poco, se puede usar el principio de superposición para determinar esfuerzos en el caso más general de flexión asimétrica. Considere primero un miembro con plano vertical de simetría sometido a momentos flectores **M** y **M′** que actúan en un plano que forma un ángulo θ con el plano vertical (figura 4.49). El momento vector **M** representa las fuerzas que actúan en una sección transversal dada para formar el mismo ángulo θ con el eje horizontal z (figura 4.50). Al descomponer el

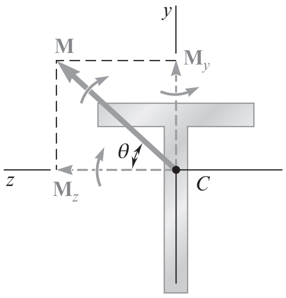


Figura 4.50 El momento aplicado se descompone en los componentes y y z.

[†] Vea Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2008, o *Vector Mechanics for Engineers*, 10a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2013, secciones 9.8-9.10.

vector **M** en vectores componentes $\mathbf{M}_z$ y $\mathbf{M}_y$ a lo largo de los ejes z y y, respectivamente, se obtiene

$$M_z = M \cos \theta \qquad M_y = M \operatorname{sen} \theta \tag{4.52}$$

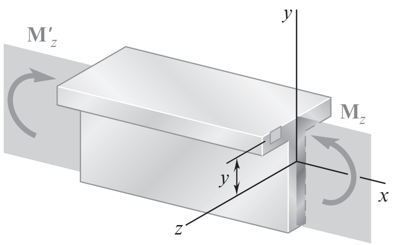


Figura 4.51 $\mathbf{M}_z$ actúa en un plano que incluye un eje centroidal principal y flexiona el miembro en el plano vertical.

Dado que los ejes y y z son los ejes centroidales principales de la sección transversal, la ecuación (4.16) determina los esfuerzos que resultan de la aplicación de cualquiera de los momentos representados por $\mathbf{M}_z$ y $\mathbf{M}_y$. El momento $\mathbf{M}_z$ actúa en un plano vertical y flexiona el miembro en ese plano (figura 4.51). Los esfuerzos resultantes son

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{4.53}$$

donde I_z es el momento de inercia de la sección con respecto al eje centroidal principal z. El signo negativo se debe a la compresión arriba del plano xz ($y > 0$) y la tensión debajo ($y < 0$). El momento $\mathbf{M}_y$ actúa en un plano horizontal y flexiona el miembro en ese plano (figura 4.52). Los esfuerzos resultantes son

$$\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y} \tag{4.54}$$

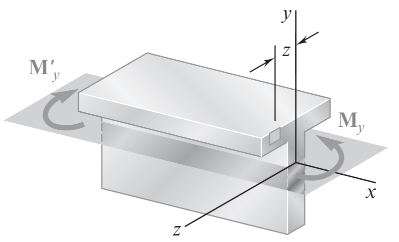


Figura 4.52 $\mathbf{M}_y$ actúa en un plano que incluye un eje centroidal principal y flexiona el miembro en el plano horizontal.

donde I_y es el momento de inercia de la sección con respecto al eje y centroidal principal, y donde el signo positivo se debe al hecho de que se tiene tensión a la izquierda del plano vertical xy ($z > 0$) y compresión a la derecha ($z < 0$). La distribución de los esfuerzos producidos por el momento original **M** se obtiene superponiendo las distribuciones de los esfuerzos definidos por las ecuaciones (4.53) y (4.54), respectivamente, se tiene

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.55}$$

Observe que la expresión obtenida también se puede utilizar para calcular los esfuerzos en una sección asimétrica, como se muestra en la figura 4.53, una vez que se han determinado los ejes centroidales principales y y z. Sin embargo, la ecuación (4.55) es válida solo si satisfacen las condiciones de aplicabilidad del principio de superposición. No debe utilizarse si los esfuerzos combinados exceden el límite proporcional del material o si las deformaciones provocadas por uno de los momentos afectan apreciablemente la distribución de los esfuerzos provocados por el otro.

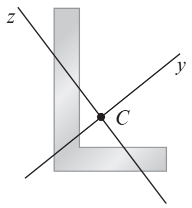


Figura 4.53 Sección transversal asimétrica con ejes principales.

La ecuación (4.55) indica que la distribución de los esfuerzos producidos por la flexión asimétrica es lineal. Sin embargo, el eje neutro de la sección transversal, en general, no coincidirá con el eje del momento flector. Como el esfuerzo normal es cero en cualquier punto del eje neutro, la ecuación que define ese eje se obtiene haciendo $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.55).

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

Al despejar y sustituir M_z y M_y de las ecuaciones (4.52) da

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta\right) z \tag{4.56}$$

Esta ecuación es para una línea recta de pendiente $m = (I_z/I_y) \tan \theta$. Por lo tanto, el ángulo ϕ que el eje neutro forma con el eje z (figura 4.54) se define mediante la relación

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \tag{4.57}$$

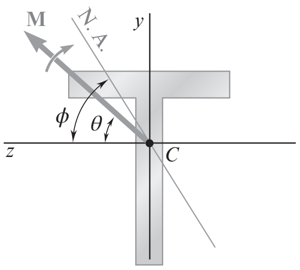


Figura 4.54 Eje neutro para flexión asimétrica.

donde θ es el ángulo que el vector **M** forma con el mismo eje. Como I_z e I_y son positivos, ϕ y θ tienen el mismo signo. Además, $\phi > \theta$ cuando $I_z > I_y$, y $\phi < \theta$ cuando $I_z < I_y$. Por consiguiente, el eje neutro siempre se encuentra entre el vector **M** y el eje principal correspondiente al momento de inercia mínimo.

Aplicación de conceptos 4.8

Se aplica un momento de 1 600 lb · in, a una viga de madera, de sección transversal rectangular de 1.5 por 3.5 in, en un plano que forma un ángulo de 30° con la vertical (figura 4.55*a*). Determine *a*) el esfuerzo máximo en la viga y *b*) el ángulo que la superficie neutra forma con el plano horizontal.

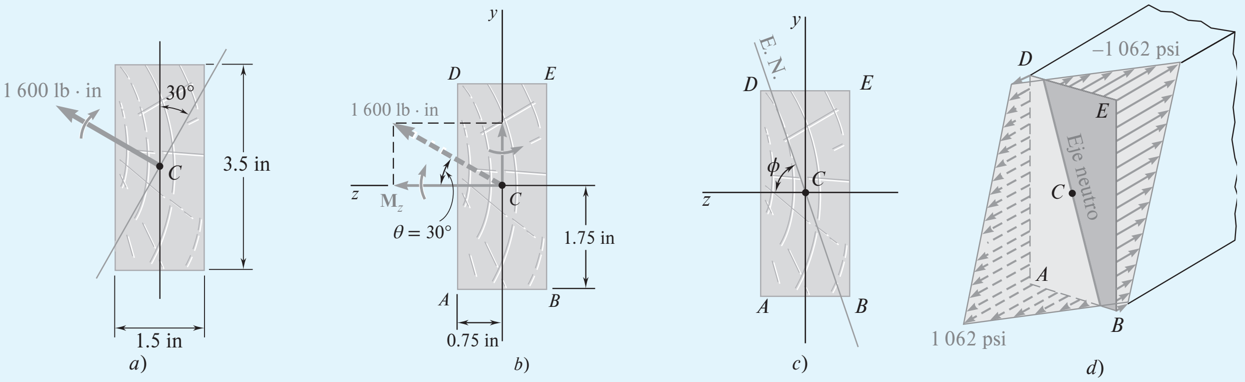


Figura 4.55 *a*) Viga rectangular de madera sujeta a flexión asimétrica. *b*) Momento flector descompuesto en sus componentes. *c*) Sección transversal con eje neutro. *d*) Distribución de esfuerzos.

***a*) Esfuerzo máximo.** Primero se determinan las componentes $\mathbf{M}_z$ y $\mathbf{M}_y$ del vector del momento (figura 4.55*b*):

$$M_z = (1\,600 \text{ lb} \cdot \text{in}) \cos 30° = 1\,386 \text{ lb} \cdot \text{in}$$
$$M_y = (1\,600 \text{ lb} \cdot \text{in}) \text{ sen } 30° = 800 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

Calcule los momentos de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes *z* y *y*:

$$I_z = \tfrac{1}{12}(1.5 \text{ in})(3.5 \text{ in})^3 = 5.359 \text{ in}^4$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}(3.5 \text{ in})(1.5 \text{ in})^3 = 0.9844 \text{ in}^4$$

El esfuerzo máximo de tensión producido por $\mathbf{M}_z$ ocurre a lo largo de *AB* y es

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(1\,386 \text{ lb} \cdot \text{in})(1.75 \text{ in})}{5.359 \text{ in}^4} = 452.6 \text{ psi}$$

El esfuerzo máximo de tensión producido por $\mathbf{M}_y$ ocurre a lo largo de *AD* y es

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{(800 \text{ lb} \cdot \text{in})(0.75 \text{ in})}{0.9844 \text{ in}^4} = 609.5 \text{ psi}$$

Por consiguiente, el esfuerzo máximo de tensión debido a la carga combinada ocurre en *A* y es

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 452.6 + 609.5 = 1\,062 \text{ psi}$$

El esfuerzo máximo de compresión tiene la misma magnitud y ocurre en *E*.

***b*) Ángulo de la superficie neutra con el plano horizontal.** El ángulo ϕ que la superficie neutra forma con el plano horizontal (figura 4.55*c*) se obtiene con la ecuación (4.57):

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta = \frac{5.359 \text{ in}^4}{0.9844 \text{ in}^4} \tan 30° = 3.143$$
$$\phi = 72.48$$

En la figura 4.55*d* se muestra la distribución de los esfuerzos a través de la sección.

4.9 CASO GENERAL DE ANÁLISIS DE CARGA AXIAL EXCÉNTRICA

En la sección 4.7 se analizó los esfuerzos producidos en un miembro por una carga axial excéntrica aplicada en un plano de simetría del miembro. Ahora se estudiará el caso más general cuando la carga axial no se aplica en un plano de simetría.

Considere el miembro recto *AB* sometido a fuerzas axiales excéntricas iguales y opuestas **P** y **P′** (figura 4.56*a*) y sean *a* y *b* las distancias de la línea de acción de las fuerzas a los ejes centroidales principales de la sección transversal del miembro. La fuerza excéntrica **P** es estáticamente equivalente al sistema constituido por la fuerza excéntrica **P** y los dos momentos $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ de momentos $M_y = Pa$ y $M_z = Pb$ en la figura 4.56*b*. Asimismo, la fuerza excéntrica **P′** equivale a la fuerza céntrica **P′** y los momentos $\mathbf{M}'_y$ y $\mathbf{M}'_z$.

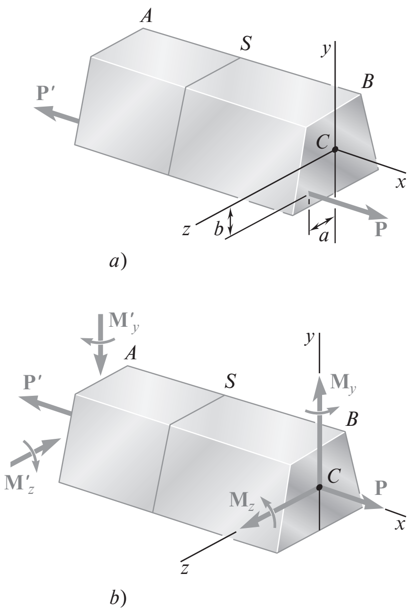


Figura 4.56 Carga axial excéntrica. *a*) Fuerza axial aplicada lejos del centroide de la sección. *b*) Sistema fuerza-momento equivalente que actúa en el centroide.

En virtud del principio de Saint-Venant (sección 2.10), se reemplaza la carga original de la figura 4.56*a* por la carga estáticamente equivalente de la figura 4.56a para determinar la distribución de esfuerzos en la sección *S* del miembro (en tanto dicha sección no esté demasiado cerca de cualquiera de los extremos). Los esfuerzos producidos por la carga de la figura 4.56*b* se pueden obtener superponiendo los esfuerzos correspondientes a la fuerza axial céntrica **P** y a los momentos flectores $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, mientras se satisfagan las condiciones del principio de superposición (sección 2.5). La ecuación (1.5) da los esfuerzos producidos por la carga céntrica **P**, y la ecuación (4.55) da los esfuerzos producidos por los momentos flectores. Por consiguiente,

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad (4.58)$$

donde *y* y *z* se miden con respecto a los ejes centroidales principales de la sección. Esta relación muestra que la distribución de esfuerzos a través de la sección es *lineal*.

Al calcular el esfuerzo combinado σ_x con la ecuación (4.58) asegúrese de determinar correctamente el signo de cada uno de los tres términos del miembro del lado derecho, ya que cada uno puede ser positivo o negativo, según el sentido de las cargas **P** y **P′** y la ubicación de su línea de acción con respecto a los ejes centroidales principales de la sección transversal. Los esfuerzos combinados σ_x obtenidos con la ecuación (4.58) en varios puntos de la sección pueden tener el mismo signo, algunos pueden ser positivos y otros negativos. En el segundo caso, habrá una línea en la sección a lo largo de la cual los esfuerzos son cero. Con $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.58), la ecuación de una línea recta que representa el *eje neutro* de la sección es

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}$$

Aplicación de conceptos 4.9

Se aplica una carga vertical de 4.80 kN como se muestra en un poste de madera de sección transversal rectangular, de 80 por 120 mm (figura 4.57*a*). *a*) Determine el esfuerzo en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. *b*) Localice el eje neutro de la sección transversal.

***a*) Esfuerzos.** La carga excéntrica dada se reemplaza con un sistema equivalente compuesto de una carga céntrica **P** y dos momentos $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ representados por vectores dirigidos a lo largo de los ejes centroidales principales de la sección (figura 4.57*b*). Por consiguiente,

$$M_x = (4.80\ \text{kN})(40\ \text{mm}) = 192\ \text{N}\cdot\text{m}$$
$$M_z = (4.80\ \text{kN})(60\ \text{mm} - 35\ \text{mm}) = 120\ \text{N}\cdot\text{m}$$

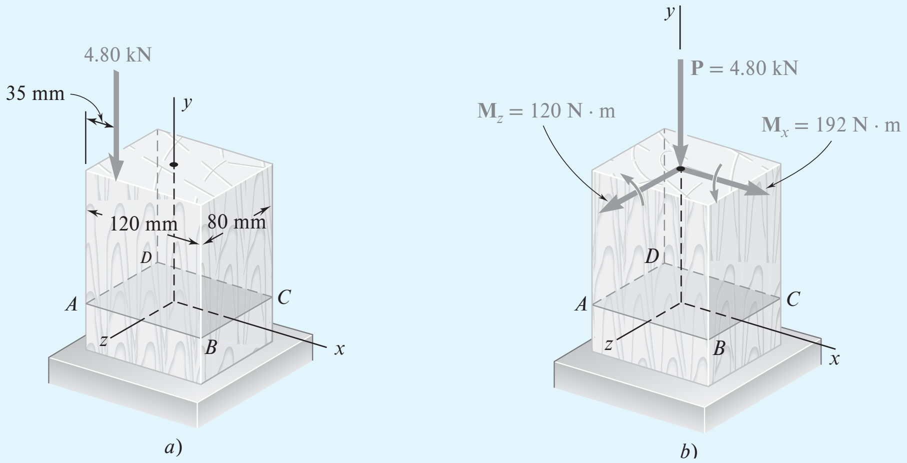


Figura 4.57 *a*) Carga excéntrica sobre una columna rectangular de madera. *b*) Sistema fuerza-momento equivalente a una carga excéntrica.

Calcule el área y los momentos centroidales de inercia de la sección transversal:

$$A = (0.080 \text{ m})(0.120 \text{ m}) = 9.60 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \tfrac{1}{12}(0.120 \text{ m})(0.080 \text{ m})^3 = 5.12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = \tfrac{1}{12}(0.080 \text{ m})(0.120 \text{ m})^3 = 11.52 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

El esfuerzo σ_x producido por la carga céntrica **P** es negativo y uniforme a través de la sección:

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{-4.80 \text{ kN}}{9.60 \times 10^{-3} \text{m}^2} = -0.5 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos producidos por los momentos flectores $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ están linealmente distribuidos a través de la sección con valores máximos iguales a

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{\text{máx}}}{I_x} = \frac{(192 \text{ N} \cdot \text{m})(40 \text{ mm})}{5.12 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 1.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z x_{\text{máx}}}{I_z} = \frac{(120 \text{ N} \cdot \text{m})(60 \text{ mm})}{11.52 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 0.625 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos en las esquinas de la sección son

$$\sigma_y = \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2$$

donde los signos se determinan con la figura 4.57*b*. Al observar que los esfuerzos producidos por $\mathbf{M}_x$ son positivos en *C* y *D* y negativos en *A* y *B* y que los esfuerzos producidos por $\mathbf{M}_z$ son positivos en *B* y *C* y negativos en *A* y *D*, se obtiene.

$$\sigma_A = -0.5 - 1.5 - 0.625 = -2.625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -0.5 - 1.5 + 0.625 = -1.375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -0.5 + 1.5 + 0.625 = +1.625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -0.5 + 1.5 - 0.625 = +0.375 \text{ MPa}$$

***b)* Eje neutro.** El esfuerzo será cero en el punto G entre B y C, y en el punto H entre D y A (figura 4.57*c*). Como la distribución del esfuerzo es lineal,

$$\frac{BG}{80 \text{ mm}} = \frac{1.375}{1.625 + 1.375} \qquad BG = 36.7 \text{ mm}$$

$$\frac{HA}{80 \text{ mm}} = \frac{2.625}{2.625 + 0.375} \qquad HA = 70 \text{ mm}$$

El eje neutro se puede trazar por los puntos G y H (figura 4.57*d*). En la figura 4.57*e* se muestra la distribución de los esfuerzos a través de la sección.

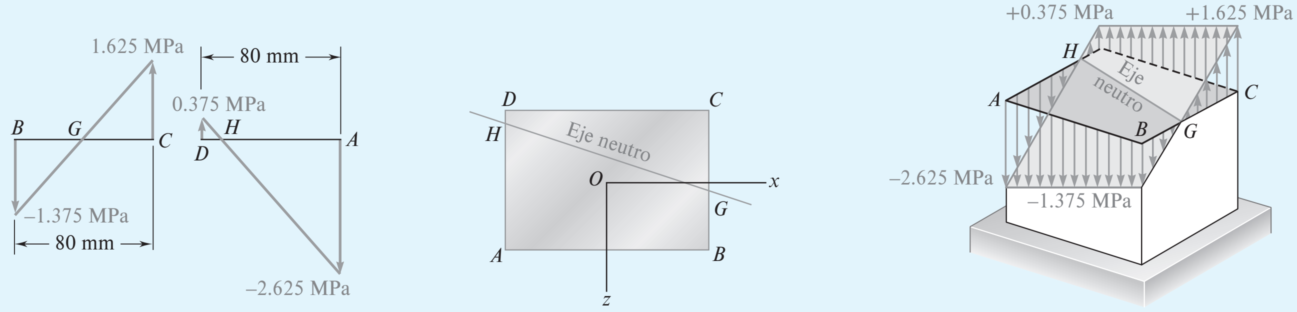


Figura 4.57 (*cont.*) *c*) Distribución de esfuerzos a lo largo de los bordes *BC* y *AD*. *d*) El eje neutro es la línea que pasa por los puntos *G* y *H*, *e*) Distribución de esfuerzos producidos con carga excéntrica.

Problema modelo 4.9

Se aplica una carga horizontal **P** como se muestra a una corta sección de un miembro S10 × 25.4 de acero laminado. Si se sabe que el esfuerzo de compresión en el miembro no es de más de 12 ksi, determine la carga **P** máxima permisible.

ESTRATEGIA: La carga se aplica excéntricamente con respecto a ambos ejes centroidales de la sección transversal. La carga se reemplaza con un sistema equivalente de fuerza-momento en el centroide de la sección transversal. Los esfuerzos producidos por la carga axial y los dos momentos se superponen para determinar los esfuerzos máximos en la sección transversal.

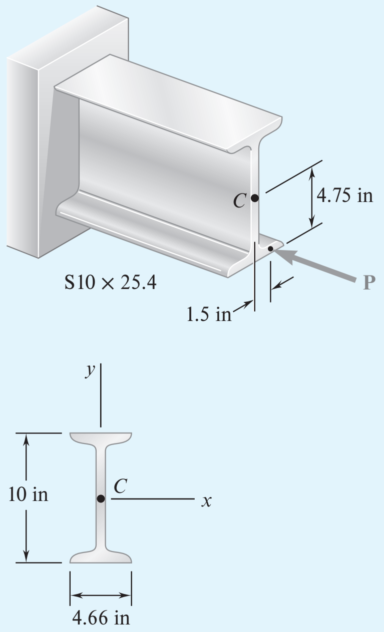


Figura 1 Miembro de acero laminado.

MODELAR y ANALIZAR:

Propiedades de la sección transversal. La sección transversal se muestra en la figura 1, y los siguientes datos se tomaron del apéndice C.

Área: $A = 7.46 \text{ in}^2$
Módulos de sección: $S_x = 24.7 \text{ in}^3 \qquad S_y = 2.91 \text{ in}^3$

Fuerza y momento en C. Utilizando la figura 2, se reemplaza **P** por un sistema de fuerza-momento equivalente en el centroide C de la sección transversal.

$$M_x = (4.75 \text{ in})P \qquad M_y = (1.15 \text{ in})P$$

Se observa que los vectores de las componentes del momento $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$ están dirigidos a lo largo de los ejes principales de la sección transversal.

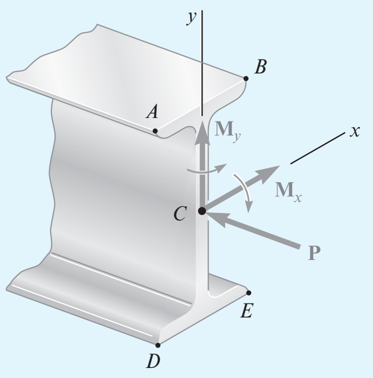


Figura 2 Sistema de fuerza-momento equivalente en el centroide de la sección.

Esfuerzos normales. Los valores absolutos de los esfuerzos en los puntos A, B, D y E producidos, respectivamente, por la carga céntrica $\mathbf{P}$ y los momentos $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$ son

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{7.46 \text{ in}^2} = 0.1340P$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{S_x} = \frac{4.75P}{24.7 \text{ in}^3} = 0.1923P$$

$$\sigma_3 = \frac{M_y}{S_y} = \frac{1.5P}{2.91 \text{ in}^3} = 0.5155P$$

Superposición. Los esfuerzos totales en cada punto se determinan superponiendo los esfuerzos producidos por $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$. Se determina el signo de cada esfuerzo examinando con cuidado el bosquejo del sistema fuerza-momento.

$$\sigma_A = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -0.1340P + 0.1923P + 0.5155P = +0.574P$$
$$\sigma_B = -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = -0.1340P + 0.1923P - 0.5155P = -0.457P$$
$$\sigma_D = -\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = -0.1340P - 0.1923P + 0.5155P = +0.189P$$
$$\sigma_E = -\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = -0.1340P - 0.1923P - 0.5155P = -0.842P$$

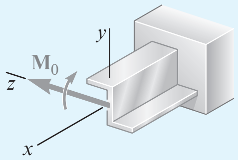
Carga permisible máxima. El esfuerzo máximo de compresión ocurre en el punto E. Al recordar que $\sigma_{\text{todos}} = -12$ ksi, se escribe

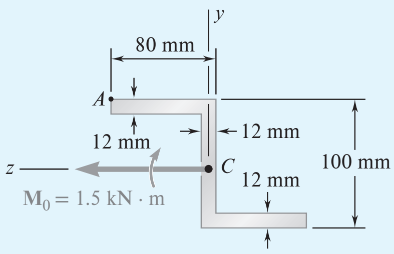
$$\sigma_{\text{todos}} = \sigma_E \qquad -12 \text{ ksi} = -0.842P \qquad P = 14.3 \text{ kips}$$ ◀

*Problema modelo 4.10

Se aplica un momento de magnitud $M_0 = 1.5$ kN · m que actúa en un plano vertical a una viga que tiene la sección transversal en forma de Z mostrada. Determine *a*) el esfuerzo en el punto A y *b*) el ángulo que el eje neutro forma con el plano horizontal. Los momentos y el producto de inercia de la sección calculados con respecto a los ejes y y z son

$$I_y = 3.25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$
$$I_z = 4.18 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$
$$I_{yz} = 2.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$





ESTRATEGIA: La sección transversal en Z no tiene un eje de simetría, así que es necesario determinar la orientación de los ejes principales y los momentos de inercia correspondientes. La carga aplicada se descompone entonces en componentes a lo largo de los ejes principales. Los esfuerzos producidos por la carga axial y los momentos se superponen para determinar el esfuerzo en el punto A. El ángulo entre el eje neutro y el plano horizontal se determina con la ecuación (4.57).

MODELAR y ANALIZAR:

Ejes principales. Se traza el círculo de Mohr y se determina la orientación de los ejes principales y los momentos de inercia principales correspondientes (figura 1)†

$$\tan 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2.87}{0.465} \qquad 2\theta_m = 80.8^\circ \qquad \theta_m = 40.4^\circ$$

$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0.465)^2 + (2.87)^2 \qquad R = 2.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$I_u = I_{\text{mín}} = OU = I_{\text{prom}} - R = 3.72 - 2.91 = 0.810 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$I_v = I_{\text{máx}} = OV = I_{\text{prom}} + R = 3.72 + 2.91 = 6.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

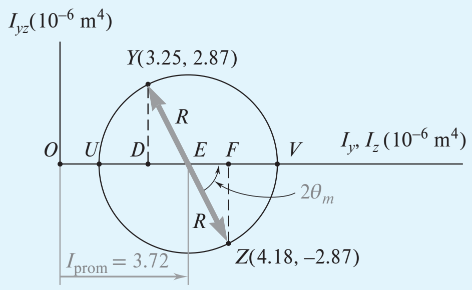


Figura 1 Análisis con el círculo de Mohr.

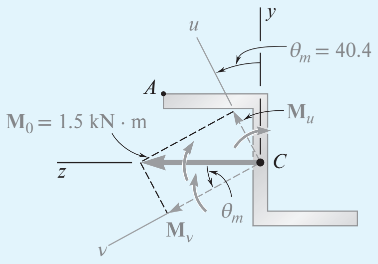


Figura 2 Momento flector descompuesto a lo largo de los ejes principales.

Carga. Como se muestra en la figura 2, el momento aplicado $\mathbf{M}_0$ se descompone en componentes paralelos a los ejes principales.

$$M_u = M_0 \text{ sen } \theta_m = 1\,500 \text{ sen } 40.4^\circ = 972 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_v = M_0 \cos \theta_m = 1\,500 \cos 40.4^\circ = 1\,142 \text{ N} \cdot \text{m}$$

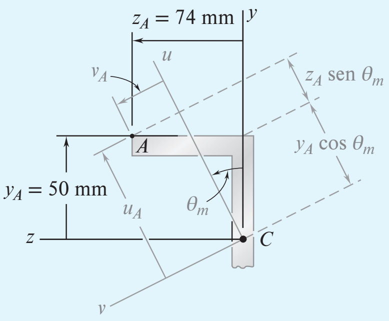


Figura 3 Ubicación de *A* con respecto al eje principal.

***a*) Esfuerzo en *A*.** Las distancias perpendiculares de cada uno de los ejes principales al punto *A* mostradas en la figura 3 son

$$u_A = y_A \cos \theta_m + z_A \text{ sen } \theta_m = 50 \cos 40.4^\circ + 74 \text{ sen } 40.4^\circ = 86.0 \text{ mm}$$

$$v_A = -y_A \text{ sen } \theta_m + z_A \cos \theta_m = -50 \text{ sen } 40.4^\circ + 74 \text{ sen } 40.4^\circ = 23.9 \text{ mm}$$

Considerando por separado la flexión con respecto a cada eje principal, se observa que $\mathbf{M}_u$ produce un esfuerzo de tensión en el punto *A* mientras que $\mathbf{M}_v$ produce un esfuerzo de compresión en el mismo punto.

$$\sigma_A = +\frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_v} = +\frac{(972 \text{ N}\cdot\text{m})(0.0239 \text{ m})}{0.810 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(1\,142 \text{ N}\cdot\text{m})(0.0860 \text{ m})}{6.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$= +(28.68 \text{ MPa}) - (14.81 \text{ MPa}) \qquad \sigma_A = +13.87 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***b*) Eje neutro.** Como se muestra en la figura 4, se encuentra que el ángulo ϕ que el eje neutro forma con el eje v es

$$\tan \phi = \frac{I_v}{I_u} \tan \theta_m = \frac{6.63}{0.810} \tan 40.4^\circ \qquad \phi = 81.8^\circ$$

El ángulo β formado por el eje neutro y la horizontal es

$$\beta = \phi - \theta_m = 81.8^\circ - 40.4^\circ = 41.4^\circ \qquad \beta = 41.4^\circ \blacktriangleleft$$

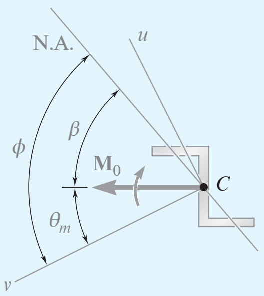


Figura 4 Sección transversal con eje neutro.

† Vea Ferdinand F. Beer y E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2008, o *Vector Mechanics for Engineers*, 10a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2013, secciones 9.8-9.10.

Problemas

4.127 a 4.134 Se aplica un momento **M** a una viga de la sección transversal mostrada en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Determine el esfuerzo en el *a*) punto *A*, *b*) punto *B*, *c*) punto *D*.

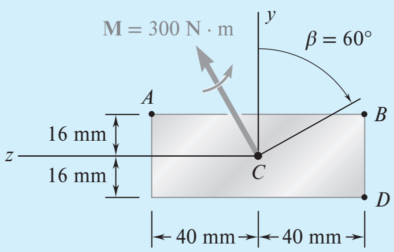


Figura P4.127

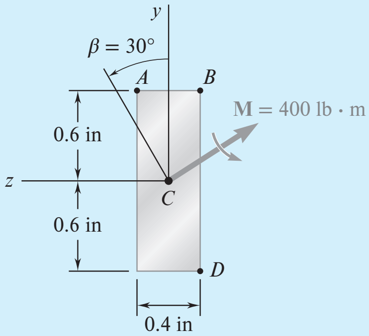


Figura P4.128

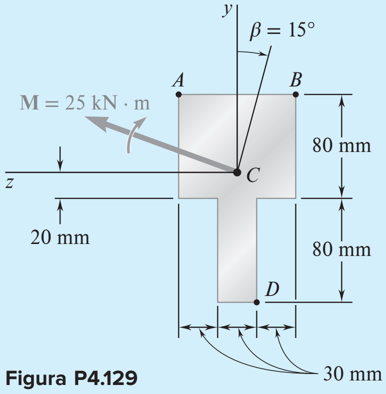


Figura P4.129

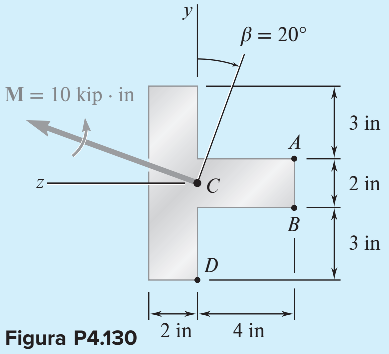


Figura P4.130

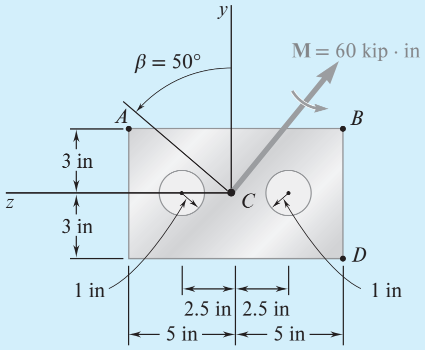


Figura *P4.131*

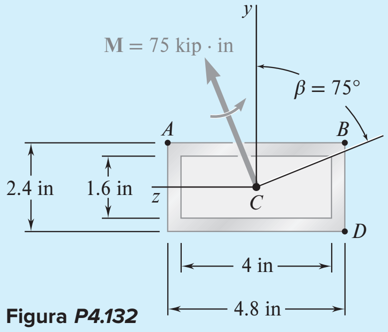


Figura *P4.132*

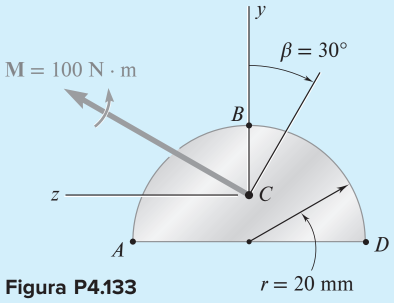


Figura P4.133

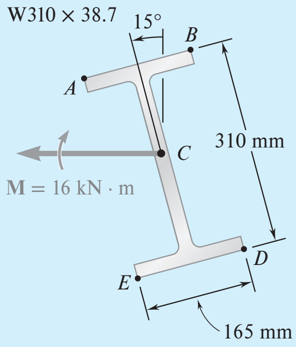


Figura P4.134

4.135 a *4.140* El momento **M** actúa en un plano vertical y se aplica a una viga orientada como se muestra. Determine *a*) el ángulo que el eje neutro forma con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo de tensión en la viga.

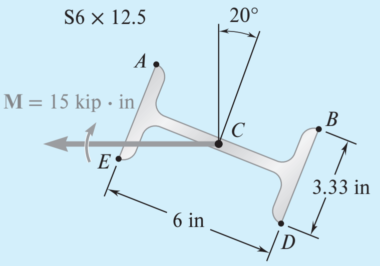


Figura P4.135

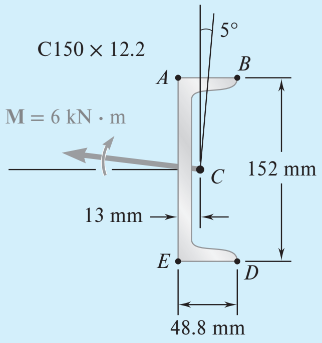


Figura *P4.136*

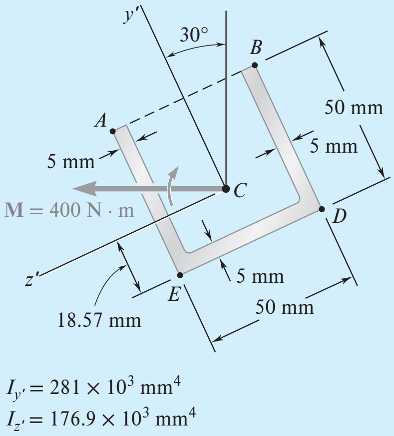


Figura P4.137

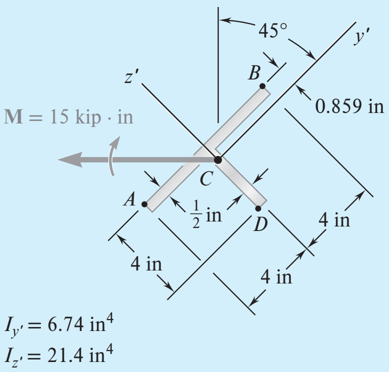


Figura P4.138

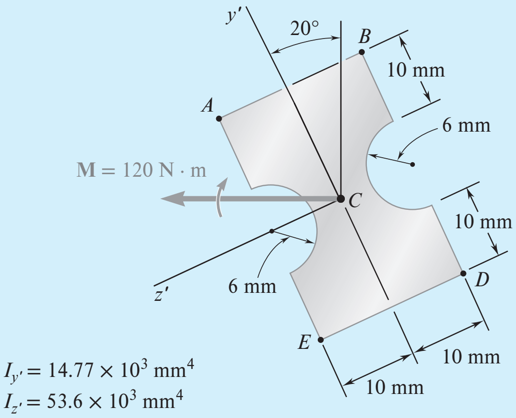


Figura P4.139

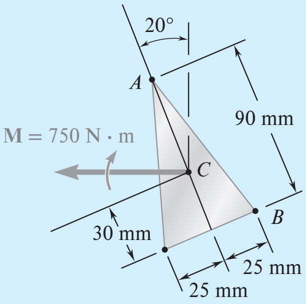


Figura *P4.140*

***4.141 a *4.143** El momento **M** actúa en un plano vertical y se aplica a una viga orientada como se muestra. Determine el esfuerzo en el punto *A*.

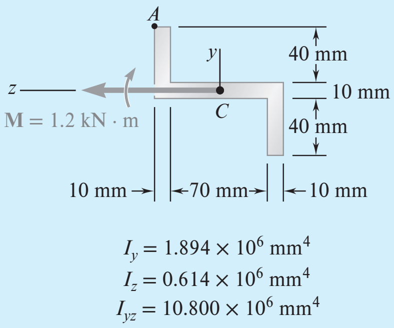


Figura P4.141

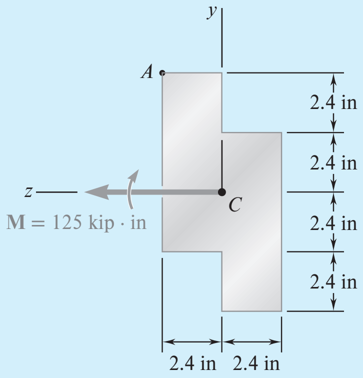


Figura *P4.142*

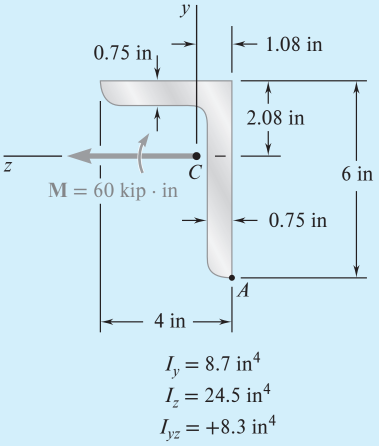


Figura P4.143

4.144 El tubo mostrado tiene un espesor de pared uniforme de 12 mm. Para la carga dada, determine *a*) el esfuerzo en los puntos *A* y *B*, *b*) el punto donde el eje neutro interseca la línea *ABD*.

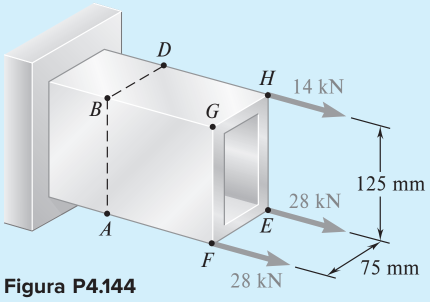


Figura P4.144

4.145 Se aplica una carga horizontal **P** de 100 kN de magnitud a la viga mostrada. Determine la distancia máxima *a* para la cual el esfuerzo máximo de tensión en la viga no excede de 75 MPa.

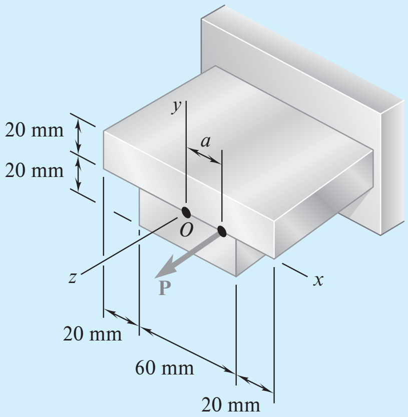


Figura P4.145

4.146 Si se sabe que $P = 90$ kips, determine la distancia máxima *a* para la cual el esfuerzo máximo de compresión no excede de 10 ksi.

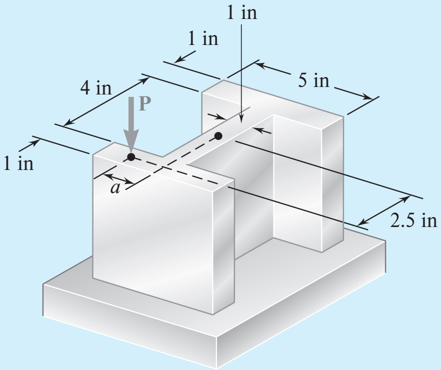


Figura P4.146 y P4.147

4.147 Si se sabe que $a = 1.25$ in, determine el valor máximo de **P** que se puede aplicar sin exceder cualquiera de los siguientes esfuerzos permisibles:

$$\sigma_{\text{ten}} = 10 \text{ ksi} \qquad \sigma_{\text{comp}} = 18 \text{ ksi}$$

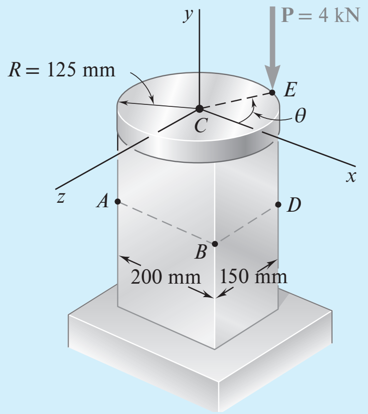


Figura *P4.148*

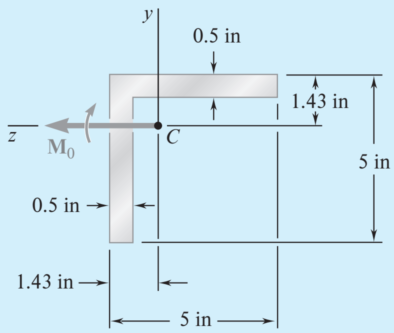


Figura P4.150

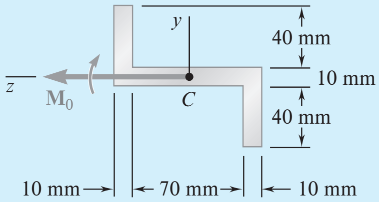


Figura P4.152

4.148 Una placa circular rígida de 125 mm de radio se fija en un poste rectangular de 150 × 200 mm, con el centro de la placa directamente sobre el centro del poste. Si se aplica una fuerza **P** de 4 kN en *E* con $\theta = 30°$, determine *a*) el esfuerzo en el punto *A*, *b*) el esfuerzo en el punto *B*, *c*) el punto donde el eje neutro interseca la línea *ABD*.

4.149 En el problema 4.148, determine *a*) el valor de θ para el cual el esfuerzo en *D* alcanza su valor máximo, *b*) los valores correspondientes del esfuerzo en *A*, *B*, *C* y *D*.

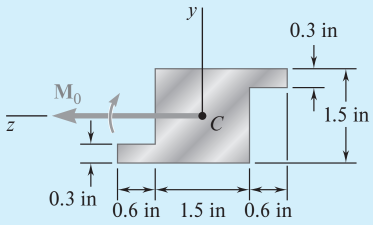


Figura *P4.154*

4.150 Una viga que tiene la sección transversal mostrada se somete a un momento $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el valor máximo permisible del momento M_0 si el esfuerzo máximo en la viga no debe exceder de 12 ksi. *Dados* $I_y = I_z = 11.3 \text{ in}^4$, $A = 4.75 \text{ in}^2$, $k_{\text{mín}} = 0.983$ in. (*Sugerencia:* Por simetría, los ejes principales forman un ángulo de 45° con los ejes de coordenadas. Use las relaciones $I_{\text{mín}} = Ak^2_{\text{mín}}$ e $I_{\text{mín}} + I_{\text{máx}} = I_y + I_z$).

4.151 Resuelva el problema 4.150, suponiendo que el momento $\mathbf{M}_0$ actúa en un plano horizontal.

4.152 La sección *Z* mostrada se somete a un momento $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el valor máximo permisible del momento M_0 si el esfuerzo máximo no debe exceder de 80 MPa. *Dados:* $I_{\text{máx}} = 2.28 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, $I_{\text{mín}} = 0.23 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Ejes principales de 25.7° ⦩ y 64.3° ⦨.

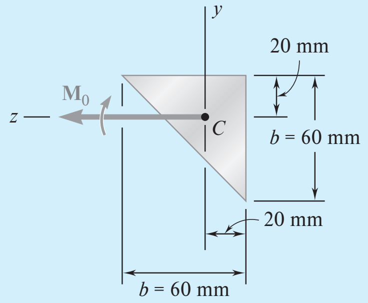


Figura P4.155

4.153 Resuelva el problema 4.152 suponiendo que el momento $\mathbf{M}_0$ actúa en un plano horizontal.

4.154 Un miembro extruido de aluminio que tiene la sección transversal mostrada se somete a un momento que actúa en un plano vertical. Determine el valor máximo permisible del momento M_0 si esfuerzo máximo no debe exceder de 12 ksi. *Dados:* $I_{\text{máx}} = 0.957 \text{ in}^4$, $I_{\text{mín}} = 0.427 \text{ in}^4$, ejes principales de 29.4° ⦨ y 60.6° ⦩.

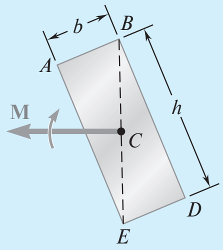


Figura *P4.156*

4.155 Una viga que tiene la sección transversal mostrada se somete a un momento $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el valor máximo permisible del momento M_0 si el esfuerzo máximo no debe exceder de 100 MPa. *Dados:* $I_y = I_z = b^4/36$ e $I_{yz} = b^4/72$.

4.156 Demuestre que, si una viga rectangular sólida se flexiona con un momento aplicado en un plano que contiene una diagonal de la sección transversal, el eje neutro quedará a lo largo de la otra diagonal.

4.157 *a*) Demuestre que el esfuerzo en la esquina *A* del miembro prismático mostrado en la figura *a* será cero si la fuerza vertical **P** se aplica en un punto localizado en la línea.

$$\frac{x}{b/6} + \frac{z}{h/6} = 1$$

b) Demuestre, además que, para que no haya ningún esfuerzo de tensión en el miembro, la fuerza **P** debe aplicarse en un punto situado dentro del área limitada por la línea encontrada en el inciso *a* y tres líneas similares correspondientes a la condición de cero esfuerzo en *B*, *C* y *D*, respectivamente. Esta área mostrada en la figura *b*, se conoce como el *núcleo central* de la sección transversal.

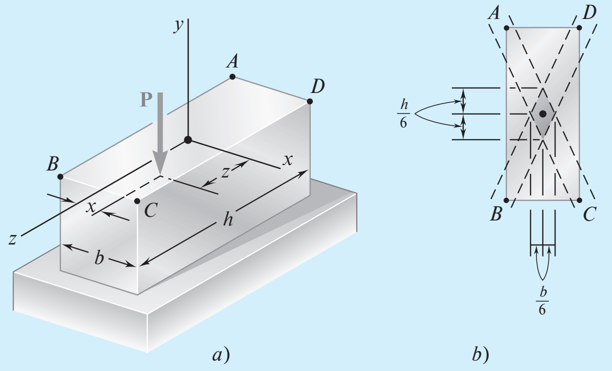


Figura P4.157

4.158 Una viga de sección transversal asimétrica se somete a un momento $\mathbf{M}_0$ que actúa en el plano horizontal *xz*. Demuestre que el esfuerzo en el punto *A* de coordenadas *y* y *z* es

$$\sigma_A = \frac{zI_z - yI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}M_y$$

donde I_y, I_z e I_{yz} denotan los momentos y el producto de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes de coordenadas, y M_y es el momento.

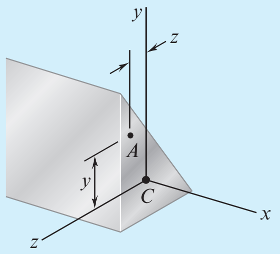


Figura P4.158 y P4.159

4.159 Una viga de sección transversal asimétrica se somete a un momento $\mathbf{M}_0$ que actúa en el plano vertical *xy*. Demuestre que el esfuerzo en el punto *A* de las coordenadas *y* y *z* es

$$\sigma_A = -\frac{yI_y - zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}M_z$$

donde I_y, I_z e I_{yz} denotan los momentos y el producto de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes de coordenadas, y M_z el momento.

4.160 *a*) Demuestre que, si se aplica una fuerza vertical **P** en el punto *A* de la sección mostrada, la ecuación del eje neutro *BD* es

$$\left(\frac{x_A}{r_z^2}\right)x + \left(\frac{z_A}{r_x^2}\right)z = -1$$

donde r_z y r_x denotan el radio de giro de la sección transversal con respecto a los ejes *z* y *x*, respectivamente. *b*) Además, demuestre que, si se aplica una fuerza vertical **Q** en cualquier punto localizado en la línea *BD*, el esfuerzo en el punto *A* será cero.

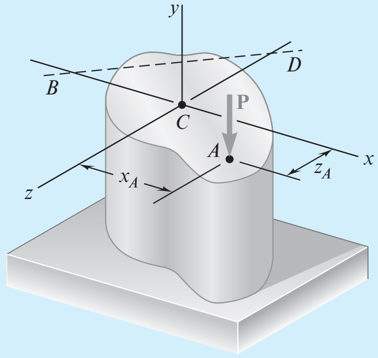


Figura P4.160

*4.10 MIEMBROS CURVOS

El análisis de los esfuerzos producidos por flexión se limitó hasta ahora a miembros rectos. En esta sección, los esfuerzos se producen por la aplicación de momentos iguales y opuestos a miembros inicialmente curvos. El siguiente análisis se limita a miembros curvos con secciones transversales uniformes que poseen un plano de simetría donde se aplican los momentos flectores. Se supone que todos los esfuerzos permanecen por debajo del límite proporcional.

Si la curvatura inicial del miembro es pequeña (es decir, el radio de curvatura es grande comparado con la altura o peralte de su sección transversal) se puede obtener una aproximación de la distribución de esfuerzos suponiendo que el miembro es recto y utilizando las fórmulas derivadas en las secciones 4.1B y 4.2.†

Sin embargo, cuando el radio de curvatura y las dimensiones de la sección transversal son del mismo orden de magnitud, se tiene que utilizar un método de análisis diferente, el cual fue presentado por primera vez por el ingeniero alemán E. Winkler (1835-1888).

Considere el miembro curvo de sección transversal uniforme mostrado en la figura. 4.58. Su sección transversal es simétrica con respecto al eje y (figura 4.58*b*) y, en su estado libre de esfuerzo, sus superficies superior e inferior intersecan el plano vertical xy a lo largo de los arcos del círculo AB y FG con centro en C (figura 4.58*a*). Ahora se aplican dos momentos iguales y opuestos **M** y **M**′ en el plano de simetría del miembro (figura 4.58*c*). Un razonamiento como el de la sección 4.1B demostraría que cualquier sección plana transversal que contiene C permanece plana, y que los varios arcos de círculo indicados en la figura 4.58*a* se transforman en arcos circulares y concéntricos con centro C' diferente de C. Si los momentos **M** y **M**′ actúan en la dirección mostrada, la curvatura de los arcos de círculo se incrementa; esto es $A'C' < AC$. Además, los momentos **M** y **M**′ hacen que la longitud de la superficie superior del miembro se reduzca ($A'B' < AB$) y que la longitud de la superficie inferior se incremente ($F'G' > FG$). Por consiguiente, se concluye que debe existir una *superficie neutra* en el miembro, la longitud de la cual permanece constante. La intersección de la superficie neutra con el plano xy se muestra en la figura 4.58*a* por arco DE de radio R, y en la figura 4.58*c* por el arco $D'E'$ de radio R'. Los ángulos centrales θ y θ' correspondientes respectivamente a DE y $D'E'$ expresan el hecho de que la longitud de la superficie neutra permanece constante mediante la ecuación

$$R\theta = R'\theta' \tag{4.59}$$

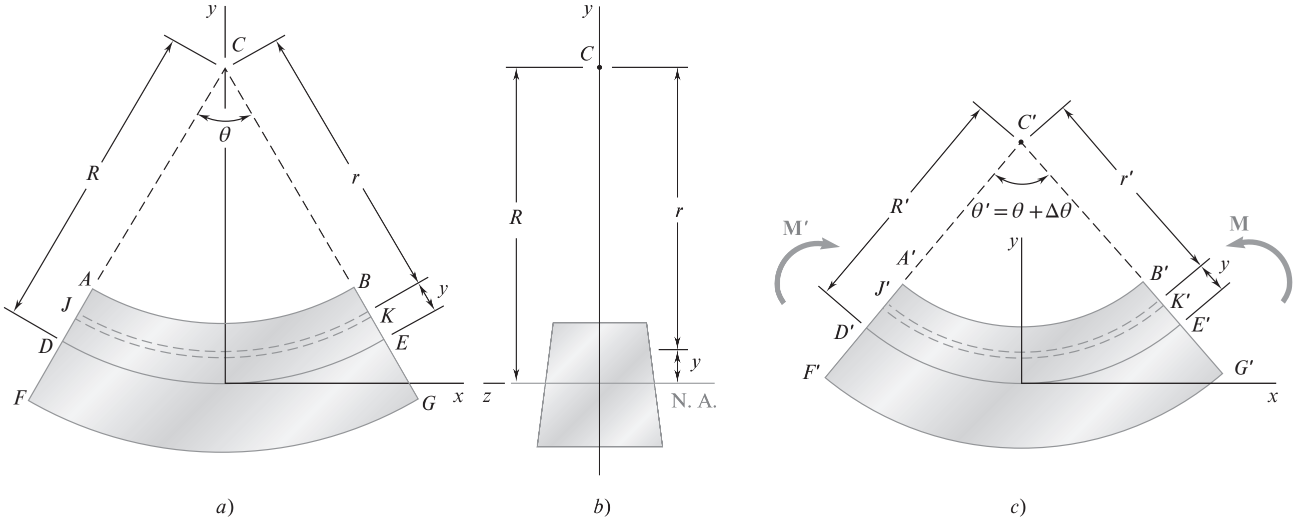


Figura 4.58 Miembro curvo sometido a flexión pura: *a*) no deformado, *b*) sección transversal y c) deformado.

† Vea el problema 4.166.

Al considerar el arco de círculo JK localizado a una distancia y sobre la superficie neutra y denotar respectivamente por r y r' el radio de este arco antes y después de la aplicación de los momentos flectores, la deformación de JK es

$$\delta = r'\theta' - r\theta \tag{4.60}$$

Se observa en la figura 4.58 que

$$r = R - y \qquad r' = R' - y \tag{4.61}$$

y al sustituir estas expresiones en la ecuación (4.60),

$$\delta = (R' - y)\theta' - (R - y)\theta$$

o al recordar la ecuación (4.59) y con $\theta' - \theta = \Delta\theta$,

$$\delta = -y\ \Delta\theta \tag{4.62}$$

La deformación normal ϵ_x en los elementos JK se obtiene dividiendo la deformación δ entre la longitud original $r\theta$ del arco JK:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = -\frac{y\,\Delta\theta}{r\theta}$$

Al recordar la primera de las relaciones en la ecuación (4.61)

$$\epsilon_x = -\frac{\Delta\theta}{\theta}\frac{y}{R - y} \tag{4.63}$$

Esta relación muestra que, mientras cada sección transversal permanezca plana, la deformación normal ϵ_x *no varía linealmente* con la distancia y a la superficie neutra.

Los esfuerzos normales σ_x se obtienen con la ley de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$, al sustituir ϵ_x de la ecuación (4.63):

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{y}{R - y} \tag{4.64}$$

o alternativamente, al recordar la primera de las ecuaciones (4.61),

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{R - r}{r} \tag{4.65}$$

La ecuación (4.64) demuestra que, al igual que ϵ_x, el esfuerzo normal σ_x *no varía linealmente* con la distancia y a la superficie neutra. Si se traza σ_x contra y, se obtiene un arco de una hipérbola (figura 4.59).

Para localizar la superficie neutra en el miembro y para determinar el valor del coeficiente $E\,\Delta\theta/\theta$ utilizado en las ecuaciones (4.64) y (4.65), hay que recordar que las fuerzas elementales que actúan en cualquier sección transversal deben ser estáticamente equivalentes al momento flector **M**. Al expresar que la suma de las fuerzas elemen-

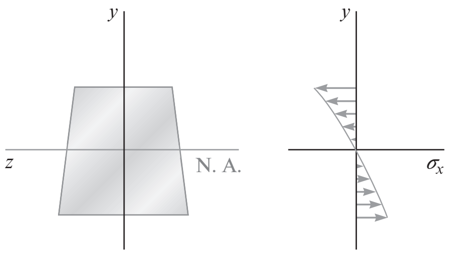


Figura 4.59 Distribución de esfuerzos en una viga curva.

tales que actúan en la sección debe ser cero y que la suma de sus momentos con respecto al eje transversal z debe ser igual a momento flector M, se escriben las ecuaciones

$$\int \sigma_x \, dA = 0 \tag{4.1}$$

y

$$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Al sustituir σ_x de la ecuación (4.65) en la ecuación (4.1), se escribe

$$-\int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{R-r}{r}dA = 0$$

$$\int \frac{R-r}{r}dA = 0$$

$$R\int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

de las que se deduce que la distancia R del centro de curvatura C a la superficie neutra se define como sigue

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int \frac{dA}{r}} \tag{4.66}$$

Observe que el valor obtenido de R no es igual a la distancia $\bar{r}$ de C al centroide de la sección transversal, ya que $\bar{r}$ se define por una diferente relación, es decir,

$$\bar{r} = \frac{1}{A}\int r\,dA \tag{4.67}$$

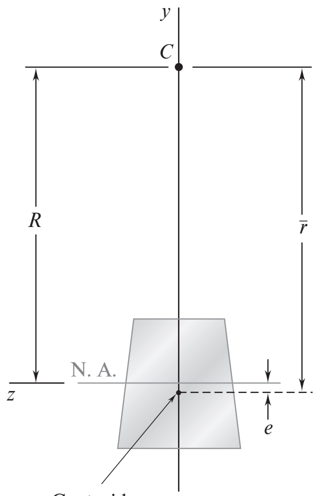


Figura 4.60 El parámetro e localiza el eje neutro con respecto al centroide de una sección de miembro curvo.

Por lo tanto, en un miembro curvo *el eje neutro de una sección transversal no pasa por el centroide de dicha sección* (figura 4.60).† Se derivarán expresiones para el radio R de la superficie neutra para algunas formas específicas de sección transversal en la aplicación de conceptos 4.10 y en los problemas 4.187 a 4.189. Estas expresiones se muestran en la figura 4.61.

Al sustituir ahora σ_x de la ecuación (4.65) en la ecuación (4.3), se escribe

$$\int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{R-r}{r}y\,dA = M$$

y como $y = R - r$,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\int \frac{(R-r)^2}{r}dA = M$$

† Sin embargo, se observa una propiedad interesante de la superficie neutra si la ecuación (4.66) se escribe en la forma alternativa

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A}\int \frac{1}{r}dA \tag{4.66a}$$

La ecuación (4.66*a*) indica que, si el miembro se divide en un gran número de fibras de área de sección transversal dA, la curvatura $1/R$ de la superficie neutra es igual al valor promedio de la curvatura $1/r$ de las varias fibras.

Expandiendo el cuadrado en el integrando, después de las reducciones se obtiene

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\left[R^2\int\frac{dA}{r} - 2RA + \int r\,dA\right] = M$$

Al recordar las ecuaciones (4.66) y (4.67), se observa que el primer término entre los paréntesis angulares es igual a RA, mientras que el último término es igual a $\bar{r}A$. Por consiguiente,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}(RA - 2RA + \bar{r}A) = M$$

y al resolver $E\,\Delta\theta/\theta$,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A(\bar{r} - R)} \tag{4.68}$$

Al recurrir a la figura 4.58, $\Delta\theta > 0$ para $M > 0$. Se deduce que $\bar{r} - R > 0$, o $R < \bar{r}$, haciendo caso omiso de la forma de la sección. Así, el eje neutro de una sección transversal siempre está situada entre el centroide de la sección y el centro de curvatura del miembro (figura 4.60). Con $\bar{r} - R = e$, la ecuación (4.68) se escribe como sigue

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{Ae} \tag{4.69}$$

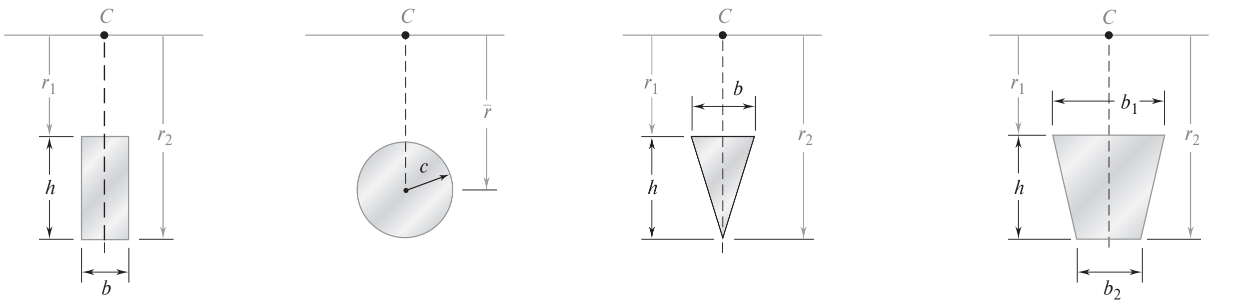
Al sustituir $E\,\Delta\theta/\theta$ de la ecuación (4.69) en las ecuaciones (4.64) y (4.65), las expresiones alternativas para el esfuerzo normal σ_x en una viga curva son

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R - y)} \tag{4.70}$$

y

$$\sigma_x = \frac{M(r - R)}{Aer} \tag{4.71}$$

Se observa que el parámetro e en las ecuaciones anteriores es una pequeña cantidad obtenida restando dos longitudes de tamaño comparable, R y $\bar{r}$. Para determinar σ_x con un grado razonable de precisión, hay que calcular R y $\bar{r}$ con precisión, en particular cuando estas dos cantidades son grandes (es decir, cuando la curvatura del miembro es pequeña). Sin embargo, en ese caso se puede obtener una buena aproximación de σ_x con la fórmula $\sigma_x = -My/I$ desarrollada para miembros rectos.



Rectángulo: $R = \dfrac{h}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}$

Círculo: $R = \frac{1}{2}\left(\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$

Triángulo: $R = \dfrac{\frac{1}{2}h}{\dfrac{r_2}{h}\ln\dfrac{r_2}{r_1} - 1}$

Trapezoide: $R = \dfrac{\frac{1}{2}h^2(b_1 + b_2)}{(b_1 r_2 - b_2 r_1)\ \ln\dfrac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$

Figura 4.61 Radio de la superficie neutra de varias formas de sección transversal.

Ahora se determinará el cambio de curvatura de la superficie neutra ocasionado por el momento flector M. Al resolver la ecuación (4.59) para la curvatura $1/R'$ de la superficie neutra en el miembro deformado,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\frac{\theta'}{\theta}$$

o al establecer $\theta' = \theta + \Delta\theta$ y al recordar de la ecuación 4.69,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\Delta\theta}{\theta}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{M}{EAe}\right)$$

el cambio de curvatura de la superficie neutra es

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR} \tag{4.72}$$

Aplicación de conceptos 4.10

Una barra rectangular curva tiene un radio medio $\bar{r} = 6$ in, una sección transversal de ancho $b = 2.5$ in y altura $h = 1.5$ in (figura 4.62*a*). Determine la distancia e entre el centroide y el eje neutro de la sección transversal.

Primero se deriva las expresiones para el radio R de la superficie neutra. Al denotar por r_1 y r_2, respectivamente, los radios interno y externo de la barrra (figura 4.62*b*), use la ecuación (4.66) para escribir

$$R = \frac{A}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{b\,dr}{r}} = \frac{h}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}}$$

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{4.73}$$

Con los datos dados,

$$r_1 = \bar{r} - \tfrac{1}{2}h = 6 - 0.75 = 5.25 \text{ in}$$

$$r_2 = \bar{r} + \tfrac{1}{2}h = 6 + 0.75 = 6.75 \text{ in}$$

Al sustituir h, r_1 y r_2 en la ecuación (4.73),

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{1.5 \text{ in}}{\ln \frac{6.75}{5.25}} = 5.9686 \text{ in}$$

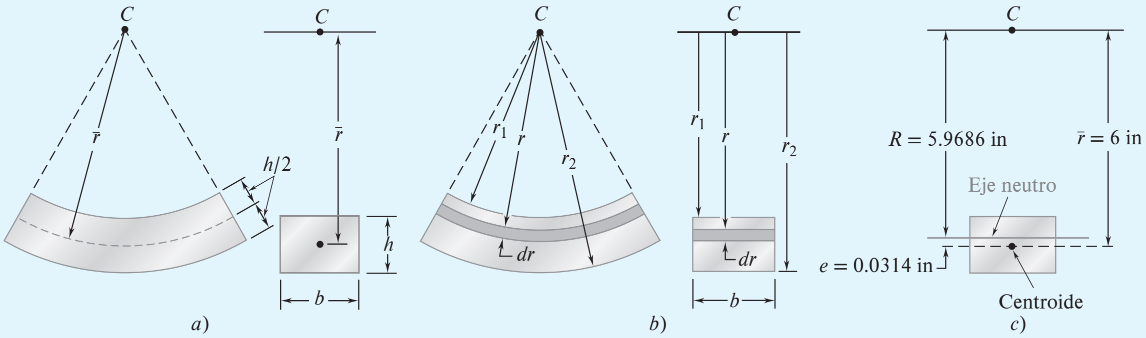


Figura 4.62 *a*) Barra rectangular curva. *b*) Dimensiones de una barra curva. *c*) Ubicación del eje neutro.

La distancia entre el centroide y el eje neutro de la sección transversal (figura 4.62*c*) es por consiguiente

$$e = \bar{r} - R = 6 - 5.9686 = 0.0314 \text{ in}$$

Observe que se tuvo que calcular R con cinco cifras significativas para obtener e con el grado usual de precisión.

Aplicación de conceptos 4.11

Para la barra de la Aplicación de conceptos 4.10, determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión, si se sabe que el momento flector en la barra es $M = 8$ kip · in.

Use la ecuación (4.71) con los datos dados

$$M = 8 \text{ kip} \cdot \text{in} \qquad A = bh = (2.5 \text{ in})(1.5 \text{ in}) = 3.75 \text{ in}^2$$

y los valores obtenidos en la aplicación de conceptos 4.10 para R y e:

$$R = 5.9669 \qquad e = 0.0314 \text{ in}$$

Primero utilizando $r = r_2 = 6.75$ in en la ecuación (4.71), se escribe

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M(r_2 - R)}{Aer_2}$$

$$= \frac{(8 \text{ kip} \cdot \text{in})(6.75 \text{ in} - 5.969 \text{ in})}{(3.75 \text{ in}^2)(0.0314 \text{ in})(6.75 \text{ in})}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 7.86 \text{ ksi}$$

Ahora con $r = r_1 = 5.25$ in en la ecuación (4.71),

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{M(r_1 - R)}{Aer_1}$$

$$= \frac{(8 \text{ kip} \cdot \text{in})(5.25 \text{ in} - 5.969 \text{ in})}{(3.75 \text{ in}^2)(0.0314 \text{ in})(5.25 \text{ in})}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = -9.30 \text{ ksi}$$

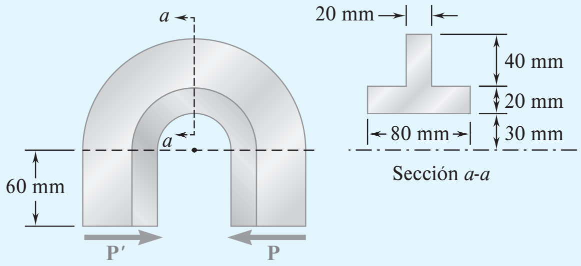
Observación. Compare los valores obtenidos para $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ con el resultado para una barra recta. Empleando la ecuación (4.15) de la sección 4.2

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \pm \frac{Mc}{I}$$

$$= \pm \frac{(8 \text{ kip} \cdot \text{in})(0.75 \text{ in})}{\frac{1}{12}(2.5 \text{ in})(1.5 \text{ in})^3} = \pm 8.53 \text{ ksi}$$

Problema modelo 4.11

Una componente de máquina tiene una sección transversal en forma de T y se carga como se muestra. Si se sabe que el esfuerzo de compresión permisible es de 50 MPa, determine la fuerza **P** máxima que se puede aplicar a la componente.



ESTRATEGIA: Primero se determinan las propiedades para la sección transversal de simetría única. La fuerza y el momento en la sección crítica se utilizan para calcular el esfuerzo máximo de compresión, el cual se obtiene superponiendo el esfuerzo axial y el esfuerzo por flexión determinados con las ecuaciones (4.66) y (4.71). Este esfuerzo luego es igual al esfuerzo máximo de compresión para determinar la fuerza **P**.

MODELAR y ANALIZAR:

Centroide de la sección transversal. Localice el centroide D de la sección transversal (figura 1).

	A_i, mm²	$\bar{r}_i$, mm	$\bar{r}_i A_i$, mm³
1	$(20)(80) = 1\,600$	40	64×10^3
2	$(40)(20) = 800$	70	56×10^3
	$\Sigma A_i = 2\,400$		$\Sigma \bar{r}_i A_i = 114 \times 10^3$

$\bar{r}\Sigma A_i = \Sigma \bar{r}_i A_i$

$\bar{r}(2\,400) = 120 \times 10^3$

$\bar{r} = 50 \text{ mm} = 0.050 \text{ mm}$

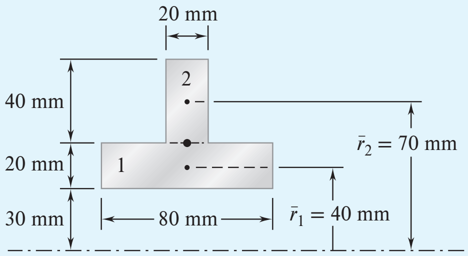


Figura 1 Áreas compuestas para localizar el centroide.

Fuerza y momento en *D*. Las fuerzas internas en la sección *a-a* equivalen a una fuerza **P** que actúa en D y un momento **M** (figura 2)

$$M = P\,(50 \text{ mm} + 60 \text{ mm} = (0.110 \text{ m})P$$

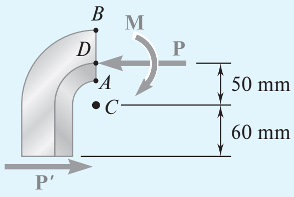


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del lado izquierdo.

Superposición. La fuerza céntrica **P** produce un esfuerzo de compresión uniforme en la sección *a-a*, mostrada en la figura 3*a*. El momento flector **M** ocasiona una distribución de esfuerzos variable [ecuación (4.71)], mostrada en la figura 3*b*. Se observa que el momento **M** tiende a incrementar la curvatura del miembro y por

consiguiente es positivo (vea la figura 4.58). El esfuerzo total en un punto de la sección *a-a* ubicado a una distancia *r* del centro de curvatura *C* es

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M(r - R)}{Aer} \qquad \textbf{(1)}$$

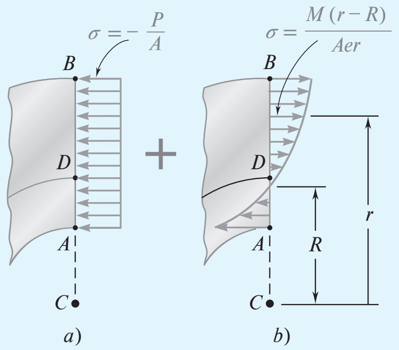


Figura 3 La distribución de esfuerzos es la superposición de *a*) el esfuerzo axial y *b*) el esfuerzo por flexión.

Radio de la superficie neutra. Utilizando la figura 4, ahora se determina el radio *R* de la superficie neutra utilizando la ecuación (4.66).

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int \frac{dA}{r}} = \frac{2\,400 \text{ mm}^2}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{(80 \text{ mm})\,dr}{r} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{(20 \text{ mm})\,dr}{r}}$$

$$= \frac{2\,400}{80 \ln \frac{50}{30} + 20 \ln \frac{90}{50}} = \frac{2\,400}{40.866 + 11.756} = 45.61 \text{ mm}$$

$$= 0.04561 \text{ m}$$

También se calcula: $e = \bar{r} - R = 0.05000 \text{ m} - 0.04561 \text{ m} = 0.00439 \text{ m}$

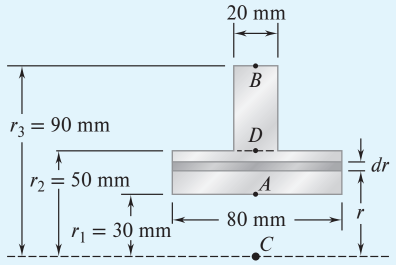


Figura 4 Geometría de la sección transversal.

Carga permisible. Se observa que el esfuerzo máximo de compresión ocurrirá en el punto *A* donde $r = 0.030$ m. Al recordar que $\sigma_{\text{todos}} = 50$ MPa y utilizando la ecuación (1), se escribe

$$-50 \times 10^6 \text{ Pa} = -\frac{P}{2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(0.110\text{ P})(0.030 \text{ m} - 0.04561 \text{ m})}{(2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(0.00439 \text{ m})(0.030 \text{ m})}$$

$$-50 \times 10^6 = -417P - 5\,432P \qquad P = 8.55 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

Problemas

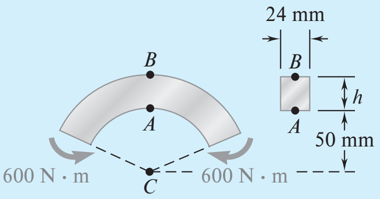


Figura P4.161 y P4.162

4.161 Para la barra curva mostrada, determine el esfuerzo en el punto A cuando *a*) $h = 50$ mm, *b*) $h = 60$ mm.

4.162 Para la barra curva mostrada, determine el esfuerzo en los puntos A y B cuando $h = 55$ mm.

4.163 Para la componente de máquina y carga mostradas, determine el esfuerzo en el punto A cuando *a*) $h = 2$ in, *b*) $h = 2.6$ in.

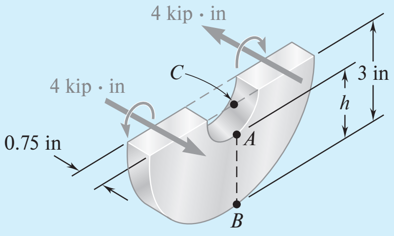


Figura P4.163 y P4.164

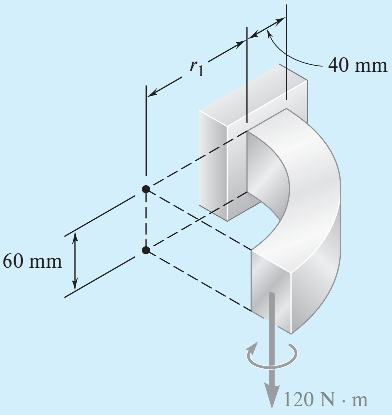


Figura *P4.165* y *P4.166*

4.164 Para la componente de máquina y carga mostradas, determine el esfuerzo en los puntos A y B cuando $h = 2.5$ in.

4.165 La barra curva mostrada tiene una sección transversal de 40×60 mm y un radio interno $r_1 = 15$ mm. Para la carga mostrada, determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión.

4.166 Para la barra curva y carga mostradas, determine el porcentaje de error introducido en el cálculo del esfuerzo máximo suponiendo que la barra es recta. Considere el caso cuando *a*) $r_1 = 20$ mm, *b*) $r_1 = 200$ mm, *c*) $r_1 = 2$ m.

4.167 Están disponibles eslabones de acero que tienen la sección transversal mostrada con diferentes ángulos centrales β. Si se sabe que el esfuerzo permisible es de 12 ksi, determine la fuerza máxima **P** que se puede aplicar a un eslabón para el cual $\beta = 90°$.

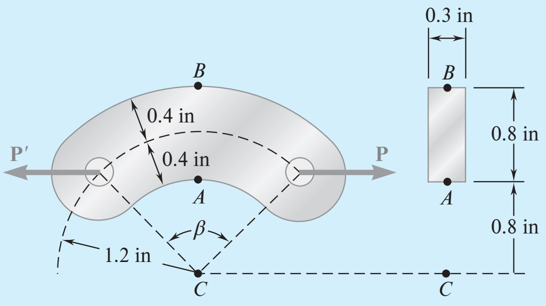


Figura P4.167

4.168 Resuelva el problema 4.167 suponiendo que $\beta = 60°$.

4.169 La barra curva mostrada tiene una sección transversal de 30 × 30 mm. Si se sabe que el esfuerzo de compresión permisible es de 175 MPa, determine la distancia máxima permisible a.

4.170 Para el anillo partido mostrado, determine el esfuerzo en *a*) el punto A, *b*) el punto B.

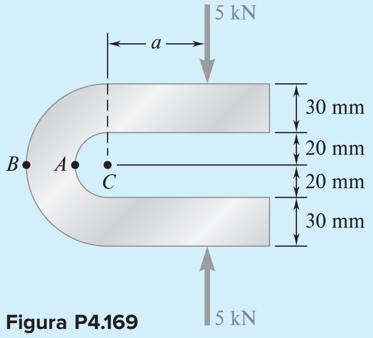


Figura P4.169

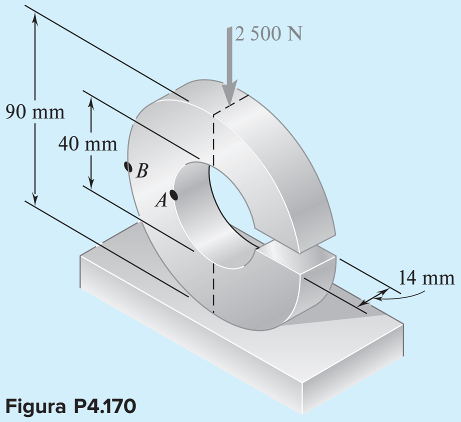


Figura P4.170

4.171 Se sueldan tres placas para formar la viga curva mostrada. Para $M = 8$ kip · in, determine el esfuerzo en *a*) el punto A, *b*) el punto B, *c*) el centroide de la sección transversal.

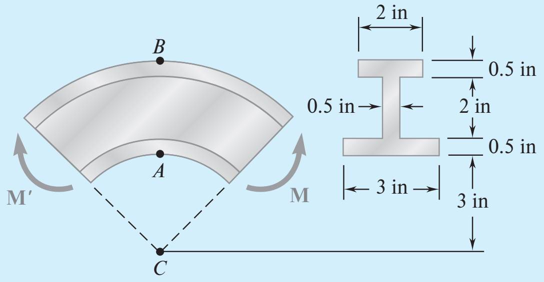


Figura P4.171 y *P4.172*

4.172 Se sueldan tres placas para formar la viga curva mostrada. Para la carga dada, determine la distancia e entre el eje neutro y el centroide de la sección transversal.

4.173 y 4.174 Si se sabe que el esfuerzo máximo permisible es de 45 MPa, determine la magnitud del momento máximo M que se puede aplicar a las componentes mostradas.

4.175 El anillo abierto mostrado tiene un radio interno $r_1 = 0.8$ in y una sección transversal *circular* de diámetro $d = 0.6$ in. Si se sabe que cada una de las

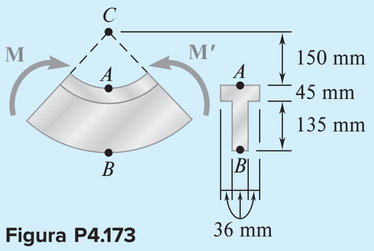


Figura P4.173

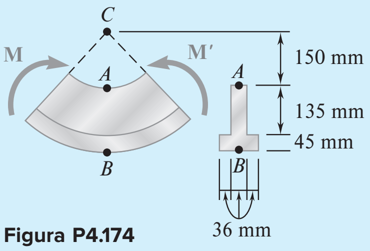


Figura P4.174

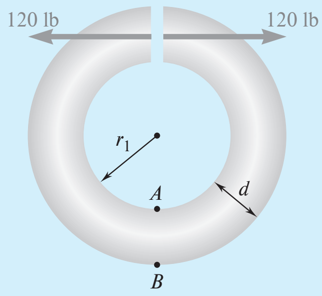


Figura P4.175

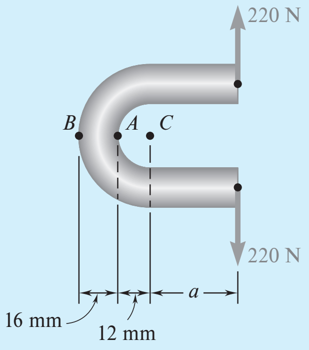


Figura P4.177 y P4.178

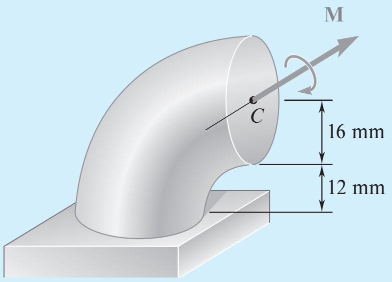


Figura P4.179

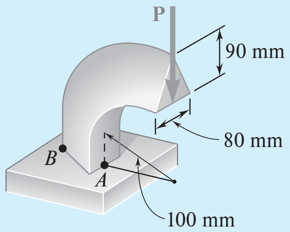


Figura P4.180

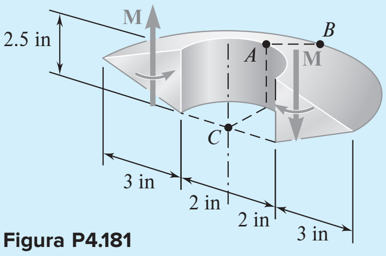


Figura P4.181

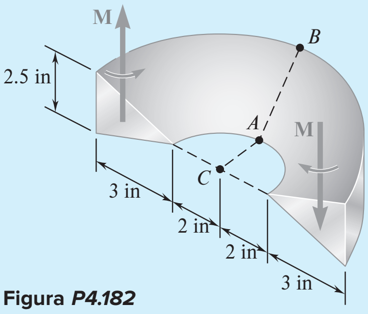


Figura *P4.182*

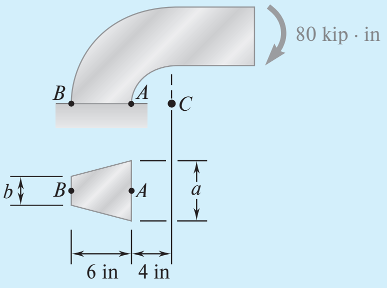


Figura P4.183 y P4.184

fuerzas de 120 lb se aplica en el centroide de la sección transversal, determine el esfuerzo *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto *B*.

4.176 Resuelva el problema 4.175, suponiendo que el anillo tiene un radio interno $r_1 = 0.6$ in y un diámetro de sección transversal $d = 0.8$ in.

4.177 La barra mostrada tiene una sección transversal circular de 14 mm de diámetro. Si se sabe que $a = 32$ mm, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.178 La barra mostrada tiene una sección transversal circular de 14 mm de diámetro. Si se sabe que el esfuerzo permisible es de 38 MPa, determine la distancia máxima permisible *a* de la línea de acción de las fuerzas de 220 N al plano que contiene el centro de curvatura de la barra.

4.179 La barra curva mostrada tiene una sección transversal circular de 32 mm de diámetro. Determine el momento máximo **M** que se puede aplicar a la barra con respecto a un eje horizontal si el esfuerzo máximo no debe ser de más de 60 MPa.

4.180 Si se sabe que $P = 10$ kN, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.181 y *4.182* Si se sabe que $M = 5$ kip · in, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.183 Si se sabe que la componente de máquina mostrada tiene una sección transversal trapezoidal con $a = 3.5$ in y $b = 2.5$ in, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.184 Si se sabe que la componente de máquina mostrada tiene una sección transversal trapezoidal con $a = 2.5$ in y $b = 3.5$ in, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.185 Para la viga curva y la carga mostradas, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

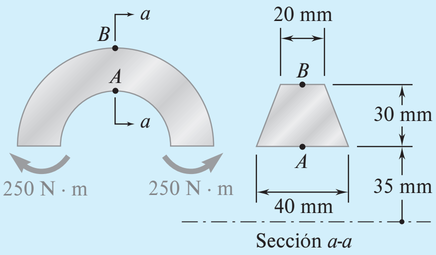


Figura P4.185

4.186 Para el gancho de grúa mostrado, determine el esfuerzo máximo de tensión en la sección *a-a*.

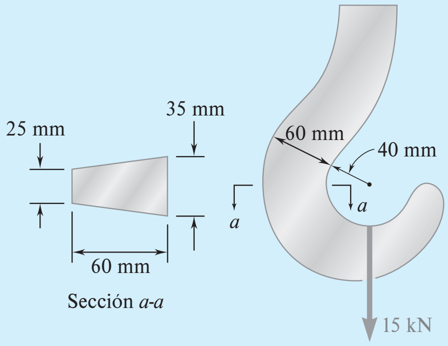


Figura P4.186

***4.187 a 4.189.** Utilizando la ecuación (4.66), derive la expresión para R dada en la figura para

***4.187** Una sección transversal circular.

4.188 Una sección transversal trapezoidal.

4.189 Una sección transversal triangular.

4.190 Demuestre que si la sección transversal de una viga curva se compone de dos o más rectángulos, el radio R de la superficie neutra se puede expresar como

$$R = \frac{A}{\ln\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{b_1}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{b_2}\left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{b_3}\right]}$$

donde A es el área total de la sección transversal.

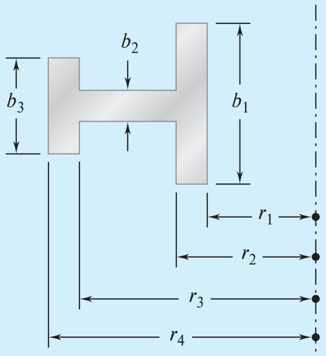


Figura P4.190

***4.191** Para una barra curva de sección transversal rectangular sometida a un momento flector **M**, demuestre que el esfuerzo radial en la superficie neutra es

$$\sigma_r = \frac{M}{Ae}\left(1 - \frac{r_1}{R} - \ln\frac{R}{r_1}\right)$$

y calcule el valor de σ_r para la barra curva de las Aplicaciones de conceptos 4.10 y 4.11. (*Sugerencia:* Considere el diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga situada arriba de la superficie neutra).

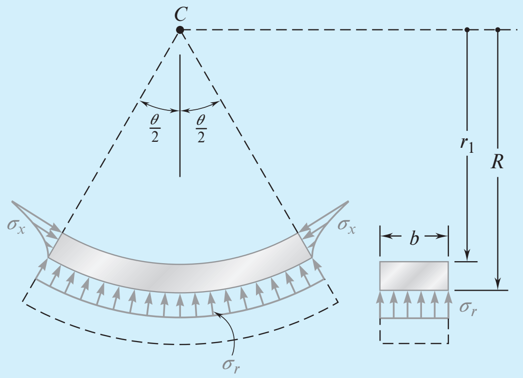


Figura P4.191

Repaso y resumen

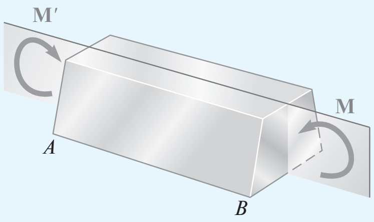


Figura 4.63 Miembro sometido a flexión pura.

Este capítulo se dedicó al análisis de miembros sometidos a *flexión pura.* Se estudiaron los esfuerzos y deformaciones en miembros sometidos a momentos iguales y opuestos **M** y **M**′ que actúan en el mismo plano longitudinal (figura 4.63).

Deformación normal a flexión

En miembros que poseen un plano de simetría y se someten a momentos que actúan en dicho plano se demostró que las *secciones transversales permanecen planas* a medida que un miembro se deforma. Un miembro sometido a flexión pura también tiene una *superficie neutra* a lo largo de la cual las deformaciones normales y esfuerzos son cero. La *deformación normal* ϵ_x *longitudinal varía linealmente* con la distancia y a la superficie neutra.

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \qquad (4.8)$$

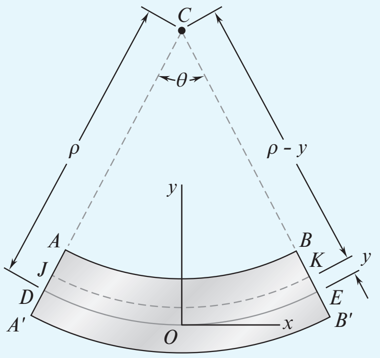


Figura 4.64 Deformación con respecto al eje neutro.

donde ρ es el *radio de curvatura* de la superficie neutra (figura 4.64). La intersección de la superficie neutra con una sección transversal se conoce como el *eje neutro* de la sección.

Esfuerzo normal en el rango elástico

Para miembros hechos de un material que sigue la ley de Hooke, la *deformación normal* σ_x *varía linealmente* con la distancia al eje neutro (figura 4.65). Utilizando el esfuerzo máximo σ_m, el esfuerzo normal es

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \qquad (4.12)$$

donde c es la distancia máxima del eje neutro al punto en la sección.

Fórmula de flexión elástica

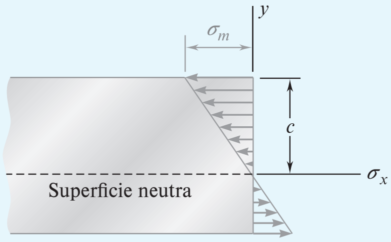


Figura 4.65 Distribución de esfuerzos para la fórmula de flexión elástica.

Si se iguala la suma de las fuerzas elementales $\sigma_x dA$ a cero, se demuestra que el *eje neutro pasa por el centroide* de la sección transversal de un miembro en flexión pura. Si se iguala la suma de los momentos de las fuerzas elementales al momento flector, la *fórmula de flexión elástica* es

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \qquad (4.15)$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro. El esfuerzo normal a cualquier distancia y del eje neutro es

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad (4.16)$$

Módulo de sección elástico

Al observar que I y c dependen solo de la geometría de la sección transversal se introduce el *módulo de sección elástico*.

$$S = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

Use el módulo de sección para escribir una expresión alternativa para el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \tag{4.18}$$

Curvatura de un miembro

La *curvatura* de un miembro es el recíproco de su radio de curvatura, y se puede determinar con

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

Curvatura anticlástica

En la flexión de miembros homogéneos que poseen un plano de simetría, las deformaciones ocurren en el plano de una sección transversal y producen una *curvatura anticlástica* de los miembros.

Miembros hechos de varios materiales

Considere la flexión de miembros hechos de varios materiales con *diferentes módulos de elasticidad.* Mientras las secciones permanecen planas, el *eje neutro no pasa por el centroide* de la sección transversal compuesta (figura 4.66). Utilizando la relación de los módulos de elasticidad de los materiales, se obtuvo una *sección transformada* correspondiente a un miembro equivalente hecho enteramente de un material. Los métodos previamente desarrollados se utilizan para determinar los esfuerzos en este miembro homogéneo equivalente (figura 4.67), y la relación de los módulos de elasticidad se utiliza para determinar los esfuerzos en la viga compuesta.

Concentraciones de esfuerzo

En miembros sometidos a flexión ocurren *concentraciones de esfuerzo,* las cuales se analizaron; en las figuras 4.24 y 4.25 también se presentaron gráficas que dan factores de concentración de esfuerzo para barras planas con filetes y ranuras.

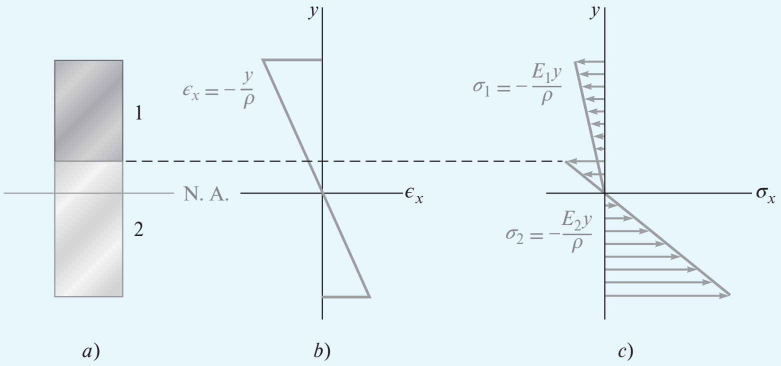


Figura 4.66 *a*) Sección compuesta. *b*) Distribución de la deformación. *c*) Distribución del esfuerzo.

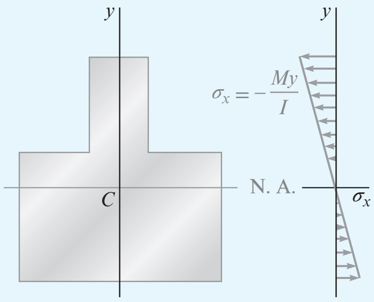


Figura 4.67 Sección transformada.

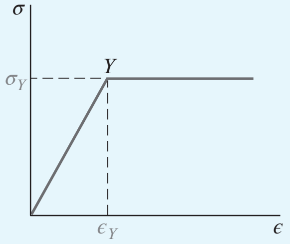


Figura 4.68 Diagrama de esfuerzo-deformación elastoplástico.

Deformaciones plásticas

Se analizó una viga rectangular hecha de un *material elastoplástico* (figura 4.68) cuando la magnitud del momento flector se incrementó (figura 4.69). El *momento elástico máximo* M_Y ocurre cuando se inicia la cedencia o fluencia en la viga (figura 4.69*b*). Conforme el momento de flexión se incrementa, se desarrollan zonas plásticas (figura 4.69*c*), y el tamaño del núcleo elástico del miembro se reduce. Cuando la viga se vuelve totalmente plástica (figura 4.69*d*), se obtiene el *momento máximo* o plástico M_p. Después de que se retiran las cargas que produjeron la cedencia, en un miembro permanecen *deformaciones permanentes* y *esfuerzos residuales*.

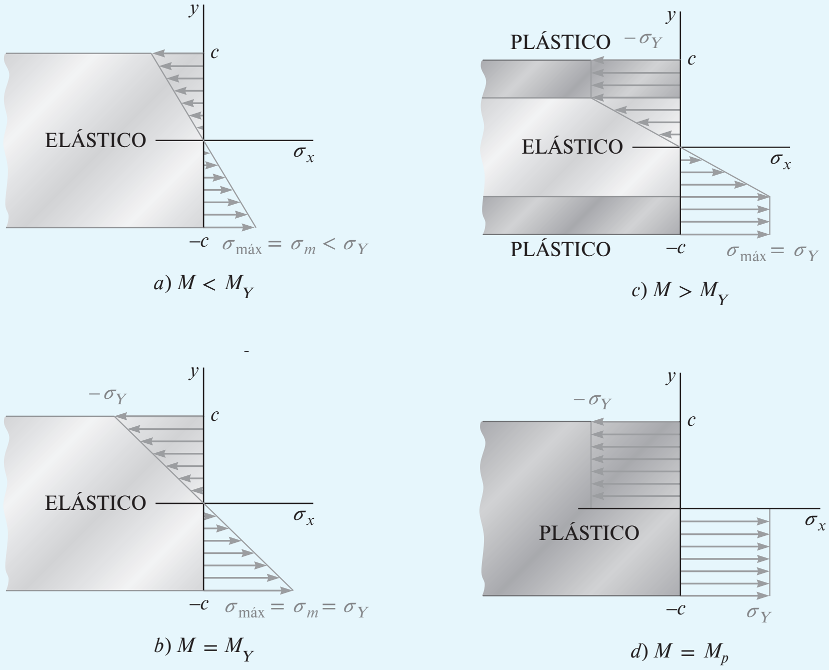


Figura 4.69 Distribución del esfuerzo por flexión en un miembro para *a*) elástica, $M < M_Y$, *b*) cedencia inminente $M = M_Y$, *c*) cedencia parcial, $M > M_Y$ y *d*) totalmente plástica, $M = M_p$.

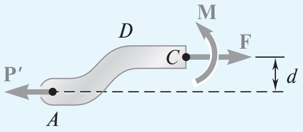


Figura 4.70 Sección de un miembro excéntricamente cargado.

Carga axial excéntrica

Cuando un miembro se carga *excéntricamente en un plano de simetría*, la *carga excéntrica* se reemplaza con sistema de fuerza-momento localizado en el centroide de la sección transversal (figura 4.70). Los esfuerzos producidos por la carga céntrica y el momento flector se superponen (figura 4.71):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \tag{4.50}$$

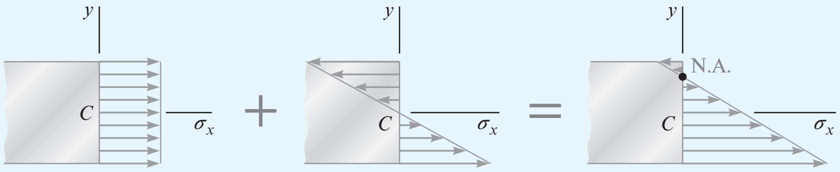


Figura 4.71 La distribución del esfuerzo en un miembro excéntricamente cargado se obtiene superponiendo las distribuciones de flexión axial y pura.

Flexión asimétrica

Para flexión de miembros de *sección transversal asimétrica*, se puede usar la fórmula de flexión, siempre que el vector del momento **M** esté dirigido a lo largo de uno de los ejes centroidales principales de la sección transversal. Cuando se requiera, **M** se puede descomponer en componentes a lo largo de los ejes principales, y los esfuerzos superpuestos producidos por las componentes de los momentos (figuras 4.72 y 4.73).

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad (4.55)$$

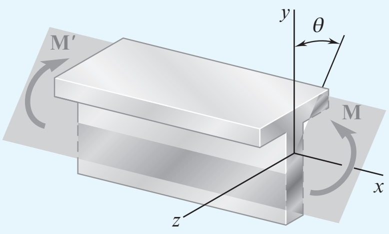


Figura 4.72 Flexión asimétrica con momento flector no en un plano de simetría.

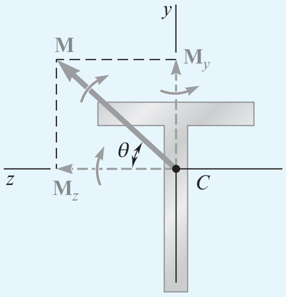


Figura 4.73 Momento aplicado descompuesto en componentes *y* y *z*.

Para el momento **M** mostrado en la figura 4.74, la orientación del eje neutro se define como sigue

$$\tan\phi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \qquad (4.57)$$

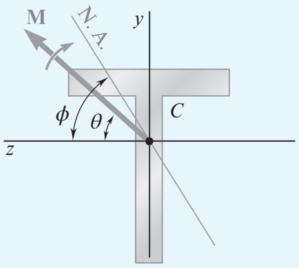


Figura 4.74 Eje neutro para flexión asimétrica.

Carga axial excéntrica general

En el caso general de *carga axial excéntrica*, la carga se reemplaza con un sistema de fuerza-momento localizado en el centroide. Los esfuerzos producidos por la carga céntrica y las dos componentes de los momentos dirigidos a lo largo de los ejes principales se superponen.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad (4.58)$$

Miembros curvos

En el análisis de esfuerzos en *miembros curvos* (figura 4.75), las secciones transversales permanecen planas cuando el miembro se somete a flexión. Los *esfuerzos no varían linealmente*, y la superficie neutra no pasa por el centroide de la sección. La distancia R del centro de curvatura del miembro a la superficie neutra es

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int \frac{dA}{r}} \qquad (4.66)$$

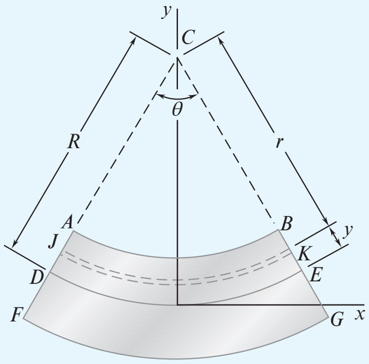


Figura 4.75 Geometría de un miembro curvo.

donde A es el área de la sección transversal. El esfuerzo normal a una distancia y de la superficie neutra es

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R-y)} \qquad (4.70)$$

donde M es el momento flector y e es la distancia del centroide de la sección a la superficie neutra.

Problemas de repaso

4.192 Se aplican dos fuerzas verticales a una viga de la sección transversal mostrada. Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la parte *BC* de la viga.

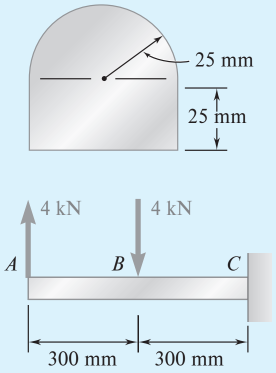


Figura P4.192

4.193 Una hoja de una sierra de banda de acero que originalmente era recta se hace pasar sobre poleas de 8 in de diámetro cuando se monta en una sierra de banda. Determine el esfuerzo máximo en la hoja, si se sabe que es de 0.018 in de espesor y de 0.625 in de ancho. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

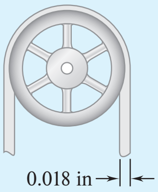


Figura *P4.193*

4.194 Se aplica un momento de magnitud *M* a una barra cuadrada de *a* por lado. Para cada una de las orientaciones mostradas, determine el esfuerzo máximo y la curvatura de la barra.

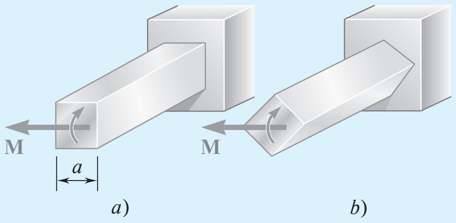


Figura P4.194

4.195 Determine el momento plástico M_p de una viga de acero de la sección transversal mostrada, suponiendo que el acero es elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 240 MPa.

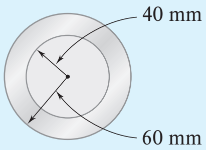


Figura *P4.195*

4.196 Para incrementar la resistencia a la corrosión, se agrega un revestimiento de aluminio de 2 mm de espesor a una barra de acero como se muestra. El módulo de elasticidad es de 200 GPa para el acero y de 70 GPa para el aluminio. Para un momento flector de 300 N·m, determine *a*) el esfuerzo máximo en el acero, *b*) el esfuerzo máximo en el aluminio, *c*) el radio de curvatura de la barra.

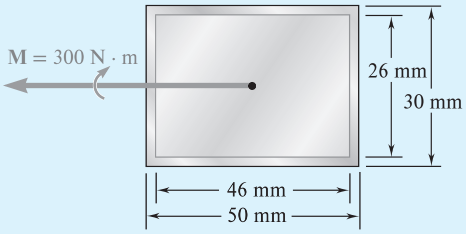


Figura P4.196

4.197 La parte vertical de la prensa mostrada se compone de un tubo rectangular con espesor de pared $t = 10$ mm. Si se sabe que la prensa se apretó sobre tablones de acero para pegarlos hasta que $P = 20$ kN, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

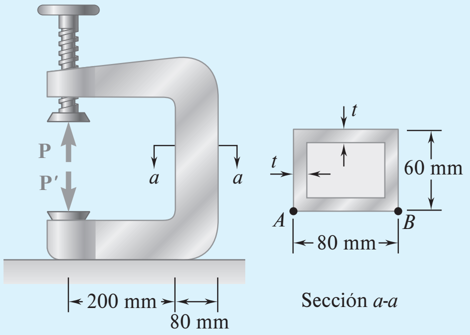


Figura P4.197

4.198 Se aplican las cuatro fuerzas mostradas a una placa rígida soportada por un poste de acero sólido de radio *a*. Si se sabe que $P = 24$ kips y $a = 1.6$ in, determine el esfuerzo máximo en el poste cuando *a*) se retira la fuerza que actúa en *D*, *b*) se retiran las fuerzas que actúan en *C* y *D*.

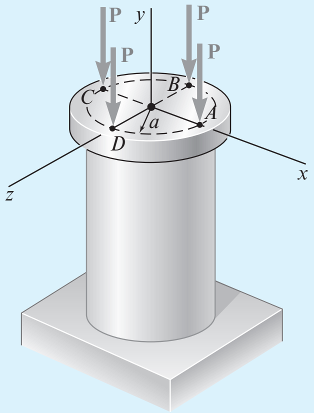


Figura P4.198

4.199 El radio interno de la parte curva de la barra mostrada es de 20 mm. Si se sabe que el esfuerzo permisible en la barra es de 150 MPa, determine la distancia *a* máxima permisible de la línea de acción de la fuerza de 3 kN al plano vertical que contiene el centro de curvatura de la barra.

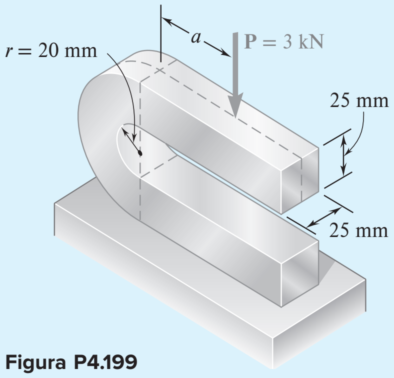


Figura P4.199

4.200 Determine el esfuerzo máximo en cada uno de los dos elementos de máquina mostrados.

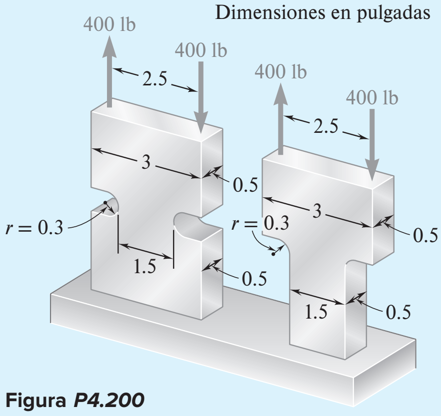


Figura P4.200

4.201 Se sueldan tres placas de acero de 120 × 10 mm para formar la viga mostrada. Suponiendo que el acero es elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 300$ MPa, determine *a*) el momento flector con el cual las zonas plásticas en las caras superior e inferior de la viga son de 40 mm de espesor, *b*) el radio de curvatura correspondiente de la viga.

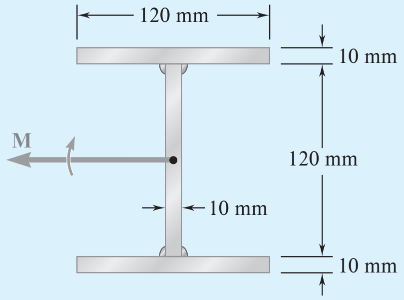


Figura P4.201

4.202 Un perfil W8 × 31 de corta longitud de acero laminado soporta una placa rígida en la cual se aplican dos cargas **P** y **Q** como se muestra. Las deformaciones medidas en los puntos *A* y *B* en la línea de centros de las caras externas de las alas son

$$\epsilon_A = -550 \times 10^{-6} \text{ in/in} \qquad \epsilon_B = -680 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la magnitud de cada carga.

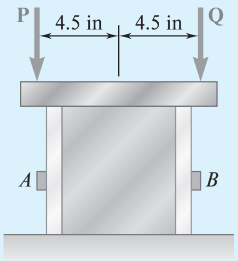


Figura P4.202

4.203 Se pegan dos delgadas tiras del mismo material y la misma sección transversal y se flexionan por la acción de dos momentos de la misma magnitud. Después de que las dos superficies de contacto quedan firmemente adheridas, los momentos se retiran. Denote por σ_1 el esfuerzo máximo y por ρ_1 el radio de curvatura de cada tira mientras los momentos estuvieron aplicados, determine *a*) los esfuerzos finales en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, *b*) el radio final de curvatura.

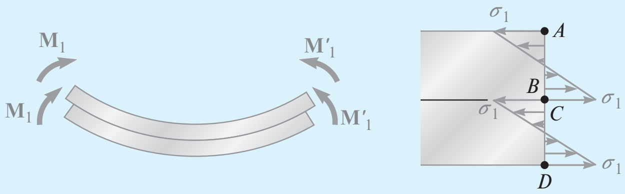


Figura P4.203

Problemas de computadora

Los siguientes problemas se diseñaron para ser resueltos con una computadora.

4.C1 Dos tiras de aluminio y una tira se acero se pegan para formar un miembro compuesto de ancho $b = 60$ mm y altura $h = 40$ mm. El módulo de elasticidad es de 200 GPa para el acero y de 75 GPa para el aluminio. Si se sabe que $M = 1\,500$ N · m, escriba un programa de computadora para calcular el esfuerzo máximo en el aluminio y en el acero para valores de a de 0 a 30 mm con incrementos de 2 mm. Utilizando incrementos pequeños apropiados, determine *a*) el esfuerzo máximo que puede ocurrir en el acero y *b*) el valor correspondiente de a.

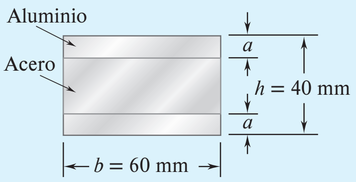


Figura P4.C1

4.C2 Una viga con la sección transversal mostrada, hecha de un acero que se supone es elastoplástico con una resistencia a la cedencia σ_Y y un módulo de elasticidad E se flexiona con respecto al eje x. *a*) Denote por y_Y la mitad del espesor del núcleo elástico y escriba un programa de computadora para calcular el momento flector M y el radio de curvatura ρ para valores de y_Y de $\frac{1}{2}d$ a $\frac{1}{6}d$ con decrementos de $\frac{1}{2}t_f$. Ignore los efectos de los filetes. *b*) Use este programa para resolver el problema 4.201.

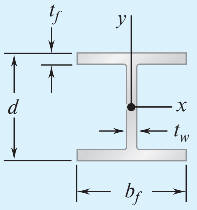


Figura P4.C2

4.C3 Se aplica un momento **M** de 8 kip · in a una viga de la sección transversal mostrada en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Observe que el centro de la sección transversal se encuentra en C y que los ejes y y z son ejes principales; escriba un programa de computadora para calcular el esfuerzo en A, B, C y D para valores de β de 0 a 180° con incrementos de 10°. (*Dados:* $I_y = 6.23$ in^4 e $Iz = 1.481$ in^4).

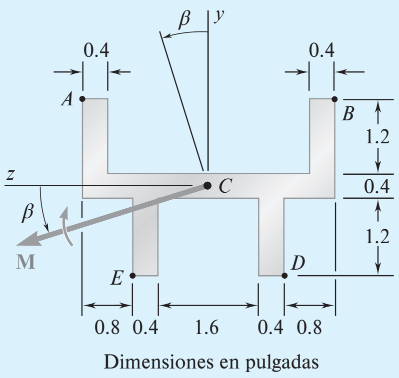


Figura P4.C3

4.C4 Se aplican momentos $M = 2$ kN · m a una barra curva de sección transversal rectangular con $h = 100$ mm y $b = 25$ mm. Escriba un programa de computadora y utilícelo para calcular los esfuerzos en los puntos A y B para valores de la relación r_1/h de 10 a 1 con decrementos de 1, y de 1 a 0.1 con decrementos de 0.1. Utilizando incrementos pequeños apropiados, determine la relación r_1/h para la cual el esfuerzo máximo en la barra curva es 50% mayor que el esfuerzo máximo en una barra recta de la misma sección transversal.

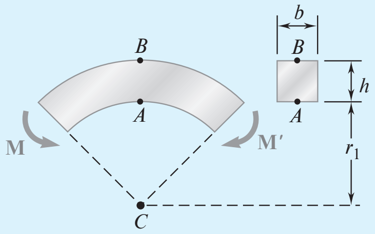


Figura P4.C4

4.C5 Se aplica el momento **M** a una viga de la sección transversal mostrada. *a*) Escriba un programa de computadora que, para cargas expresadas en unidades SI o en unidades U.S. usuales, se pueda usar para calcular los esfuerzos máximo de tensión y compresión en la viga. *b*) Use este programa para resolver los problemas 4.9, 4.10 y 4.11.

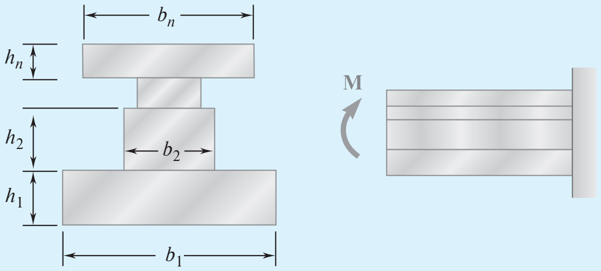


Figura P4.C5

4.C6 Una varilla sólida de radio $c = 1.2$ in es de acero que se supone es elastoplástico con $E = 29\,000$ ksi y $\sigma_Y = 42$ ksi. La varilla se somete a un momento M que se incrementa desde cero hasta el momento elástico máximo M_Y y luego hasta el momento plástico M_p. Denote por y_Y la mitad del espesor del núcleo elástico, escriba un programa de computadora y úselo para calcular el momento flector M y el radio de curvatura ρ para valores de y_Y de 1.2 in a 0 con decrementos de 0.2 in. (*Sugerencia:* Divida la sección transversal en 80 elementos horizontales de 0.03 in de altura).

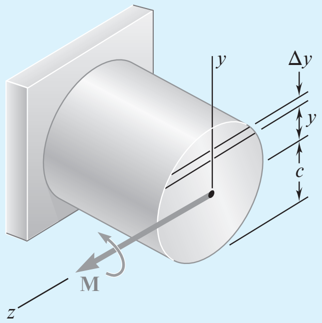


Figura P4.C6

4.C7 El elemento de máquina del problema 4.182 se tiene que rediseñar quitando una parte de la sección transversal triangular. Se cree que la supresión de una pequeña área triangular de ancho a reducirá el esfuerzo máximo en el elemento. Para comprobar este concepto de diseño, escriba un programa de computadora para calcular el esfuerzo máximo en el elemento para valores de a de 0 a 1 in con incrementos de 0.1 in. Con incrementos pequeños apropiados, determine la distancia a para la cual el esfuerzo es el más pequeño posible y el valor correspondiente del esfuerzo máximo.

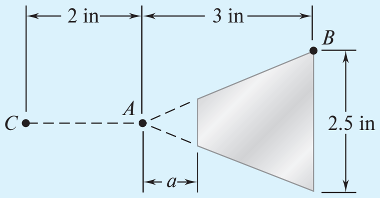
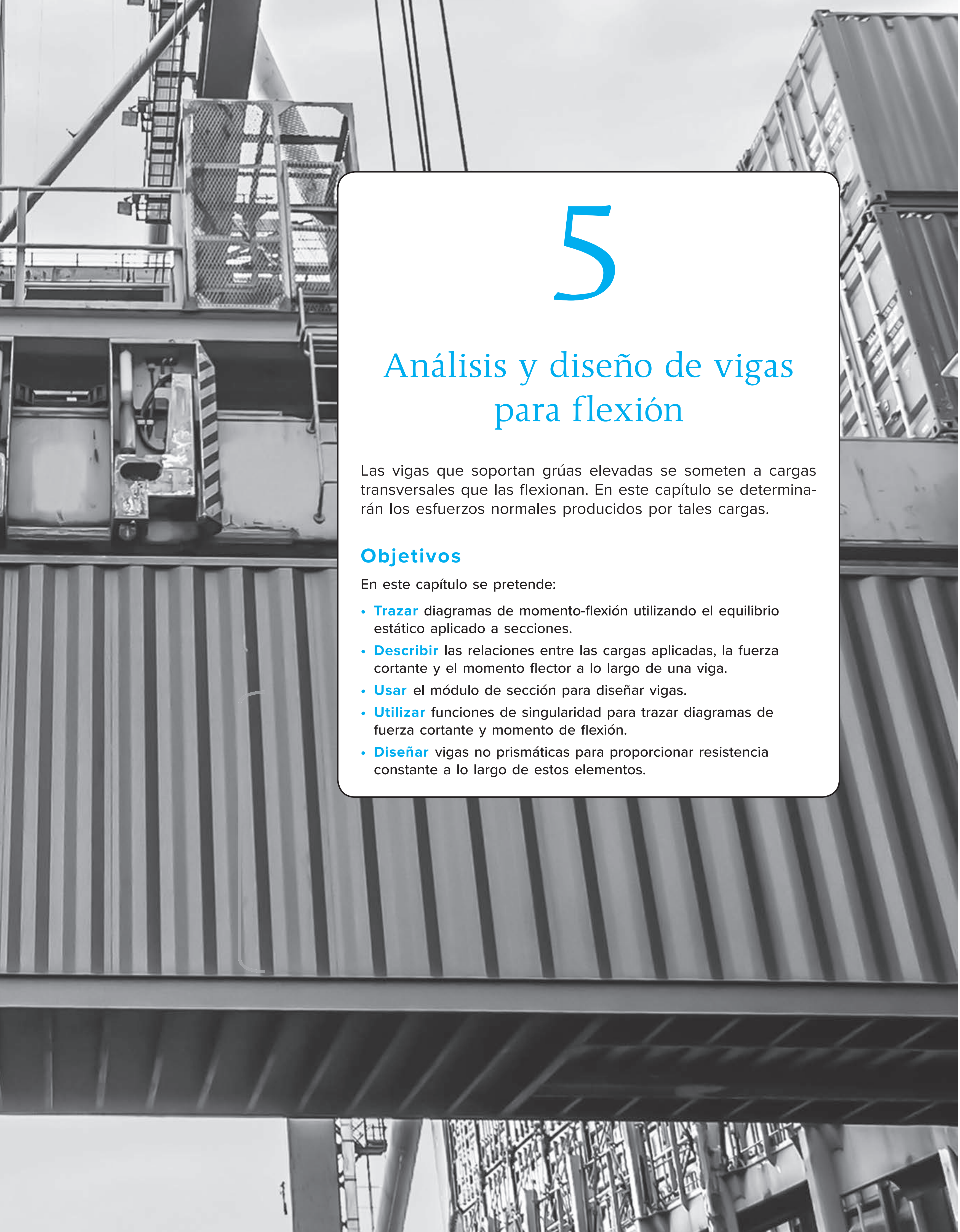


Figura P4.C7



5

Análisis y diseño de vigas para flexión

Las vigas que soportan grúas elevadas se someten a cargas transversales que las flexionan. En este capítulo se determinarán los esfuerzos normales producidos por tales cargas.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Trazar** diagramas de momento-flexión utilizando el equilibrio estático aplicado a secciones.
- **Describir** las relaciones entre las cargas aplicadas, la fuerza cortante y el momento flector a lo largo de una viga.
- **Usar** el módulo de sección para diseñar vigas.
- **Utilizar** funciones de singularidad para trazar diagramas de fuerza cortante y momento de flexión.
- **Diseñar** vigas no prismáticas para proporcionar resistencia constante a lo largo de estos elementos.

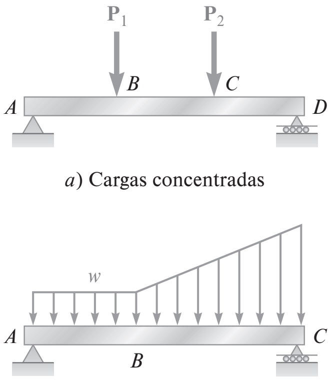
Introducción

5.1 Diagramas de fuerza cortante y momento flector
5.2 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector
5.3 Diseño de vigas prismáticas para flexión
*5.4 Funciones de singularidad utilizadas para determinar la fuerza cortante y el momento flector
*5.5 Vigas no prismáticas

Introducción

Este capítulo y la mayor parte del siguiente se dedican al análisis y al diseño de *vigas*, las cuales son elementos estructurales que soportan cargas aplicadas en varios puntos a lo largo de ellos. Las vigas en general son elementos largos, rectos prismáticos. Las vigas de acero y aluminio desempeñan un rol importante tanto en la ingeniería estructural como mecánica. Las vigas de madera son de uso común en la construcción de casas (fotografía 5.1). En la mayoría de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga. Esta *carga transversal* produce solo flexión y fuerza cortante en la viga. Cuando las cargas no son perpendiculares a la viga, también producen fuerzas axiales en ella.

Fotografía 5.1 Vigas de madera utilizadas en viviendas residenciales.



a) Cargas concentradas

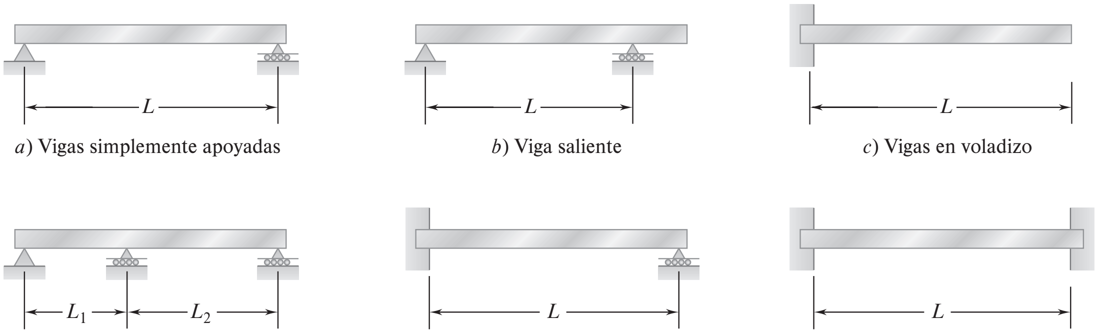
b) Cargas distribuidas

Figura 5.1 Vigas con cargas transversales.

La carga transversal de una viga puede consistir en *cargas concentradas* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,... expresadas en newtons, libras o en sus múltiplos de kilonewtons y kips (figura 5.1*a*); de una *carga distribuida* w expresada en N/m, kN/m, lb/ft o kip/ft (figura 5.1*b*), o de una combinación de ambas. Cuando la carga w por unidad de longitud tiene un valor constante en una parte de la viga (como entre A y B en la figura 5.1*b*), la carga está *uniformemente distribuida*.

Las vigas se clasifican según como estén apoyadas, como se muestra en la figura 5.2. La distancia L se llama *claro*. Observe que las reacciones en los segmentos de las vigas en la figura 5.2*a*, *b* y *c* implican un total de sólo dos incógnitas y se pueden determinar mediante métodos de estática. Se dice que las vigas como esas son *estáticamente determinadas*. Por otra parte, las reacciones en los apoyos de las vigas en la figura 5.2 *d*, *e* y *f* implican más de tres incógnitas y no se pueden determinar sólo mediante métodos de estática. Las propiedades de las vigas con respecto a su resistencia a las deformaciones deben tomarse en consideración. Se dice que las vigas como esas son *estáticamente indeterminadas*, y su análisis se abordará en el capítulo 9.

En ocasiones dos o más vigas se conectan mediante articulaciones para formar una sola estructura continua. En la figura 5.3 se muestran dos ejemplos de vigas conectadas



a) Vigas simplemente apoyadas

b) Viga saliente

c) Vigas en voladizo

d) Viga continua

e) Viga con apoyo fijo o empotrado en un extremo y simplemente apoyada en el otro

f) Doblemente apoyada empotrada

Figura 5.2 Configuraciones comunes de apoyos de vigas.

por una articulación en el punto H. Observe que las reacciones en los apoyos implican cuatro incógnitas y no se pueden determinar con el diagrama de cuerpo libre del sistema de dos vigas. Se pueden determinar reconociendo que el momento interno en la articulación es cero. Entonces, después de considerar el diagrama de cuerpo libre de cada viga por separado, se tienen seis incógnitas (incluyendo dos componentes de fuerza en la articulación), y se dispone de seis ecuaciones.

Cuando una viga se somete a cargas transversales, las fuerzas internas en cualquier sección de la viga se componen de una fuerza cortante **V** y un momento flector **M**. Por ejemplo, una viga simplemente apoyada AB soporta dos cargas concentradas y una carga uniformemente distribuida (figura 5.4*a*). Para determinar las fuerzas internas en una sección a través de C, se traza el diagrama de cuerpo libre de toda la viga para obtener las reacciones en los apoyos (figura 5.4*b*). Se secciona la viga en C y luego se traza el diagrama de cuerpo libre de AC (figura 5.4*c*) para determinar la fuerza cortante **V** y el momento flector **M**.

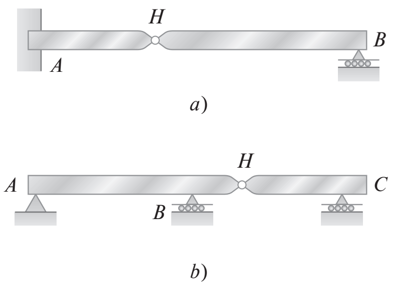


Figura 5.3 Vigas conectadas por articulaciones.

El momento flector **M** crea *esfuerzos normales* en la sección transversal mientras que la fuerza cortante **V** crea *esfuerzos cortantes*. En la mayoría de los casos, el criterio dominante en el diseño de una viga para resistencia es el valor máximo del esfuerzo normal en ella. Los esfuerzos normales en una viga son el tema de este capítulo, mientras que los esfuerzos cortantes se analizan en el capítulo 6.

Dado que la distribución de los esfuerzos normales en una sección dada depende sólo del momento flector M y de la geometría de la sección,† las fórmulas de flexión elástica derivadas en la sección 4.2 se utilizan para determinar el esfuerzo máximo, y también el esfuerzo máximo en cualquier punto dado;‡

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} \tag{5.1}$$

y

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{5.2}$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano del momento, y es la distancia de la superficie neutra, y c es el valor máximo de dicha distancia (figura 4.11). También recuerde de la sección 4.2 que el valor máximo σ_m del esfuerzo normal se puede expresar en función del módulo de sección S. Así pues

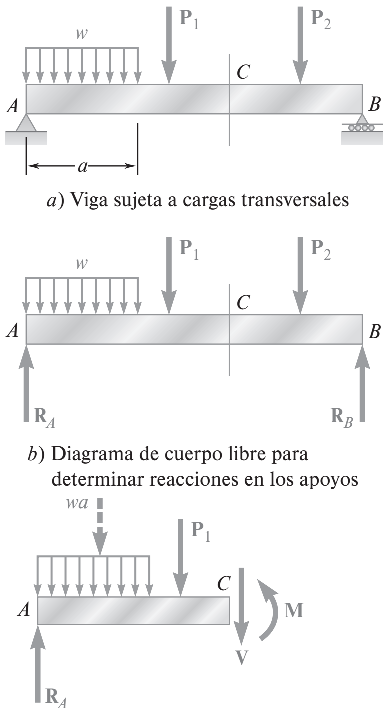
$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} \tag{5.3}$$

El hecho de que σ_m es inversamente proporcional a S subraya la importancia de seleccionar la viga con un módulo de sección grande. En el apéndice C se muestran los módulos de sección de varios perfiles de acero laminado, en tanto que el módulo de sección de un perfil rectangular es

$$S = \tfrac{1}{6}bh^2 \tag{5.4}$$

donde b y h son, respectivamente, el ancho y la altura o peralte de la sección transversal.

La ecuación (5.3) también muestra que para una viga de sección transversal uniforme, σ_m es proporcional a $|M|$. Así pues, el valor máximo del esfuerzo normal en la viga ocurre en la sección donde $|M|$ es máximo. Una de las partes más importantes



a) Viga sujeta a cargas transversales

b) Diagrama de cuerpo libre para determinar reacciones en los apoyos

c) Diagrama de cuerpo libre para determinar fuerzas internas en$C$

Figura 5.4 Análisis de una viga simplemente apoyada.

† Se supone que la distribución de los esfuerzos normales en una sección dada no se ve afectada por las deformaciones producidas por los esfuerzos cortantes. Esta suposición se comprobará en la sección 6.2.

‡ Recuerde de la sección 4.1 que M puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la concavidad de la viga en el punto considerado es hacia arriba o hacia abajo. Así pues, en una carga transversal el signo de M puede variar a lo largo de la viga. Por otra parte, como σ_m es una cantidad positiva, en la ecuación (5.1) se utiliza el valor absoluto de M.

del diseño de una viga para una condición de carga dada es la determinación de la ubicación y magnitud del momento flector máximo.

Esta tarea se facilita si se traza un *diagrama de momento flector*, donde el momento flector M se determina en varios puntos de la viga y se traza contra la distancia x medida desde un extremo. También se facilita, si se traza un *diagrama de fuerza cortante* V contra x. En la sección 5.1 se analiza la convención de signos utilizada para registrar los valores de la fuerza cortante y el momento flector.

En la sección 5.2 se derivan y utilizan relaciones entre carga, fuerza cortante y momentos flectores para obtener diagramas de fuerza cortante y momento flector. Este método facilita la determinación del valor absoluto máximo del momento flector y del esfuerzo normal máximo en la viga.

En la sección 5.3 se diseñan vigas para flexión de tal modo que el esfuerzo normal máximo en ellas no exceda sus valores permisibles.

Otro método para determinar los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flector se basa en expresar V y M en términos de *funciones de singularidad*. Esto se analiza en la sección 5.4. Este método se presta muy bien para el uso de computadoras y se ampliará en el capítulo 9 para la determinación de la pendiente y deflexión de vigas.

Por último, en la sección 5.5 se analiza el diseño de *vigas no prismáticas* (es decir, vigas con una sección transversal variable). Al seleccionar el perfil y tamaño de la sección transversal variable de modo que el módulo de sección elástico $S = I/c$ varíe a lo largo de la viga del mismo modo que $|M|$, es posible diseñar vigas en las que el esfuerzo normal en cada sección es igual al esfuerzo permisible del material. Se dice que tales vigas son de *resistencia constante*.

5.1 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y el momento flector son fáciles de determinar si V y M se trazan contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Además, como se verá en el capítulo 9, el conocimiento de M como una función de x es esencial para determinar la deflexión de una viga.

En esta sección, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flector determinando los valores de V y M en puntos seleccionados de la viga. Estos valores se hallan seccionando la viga en el punto que se va a determinar (figura 5.5a) y conside-

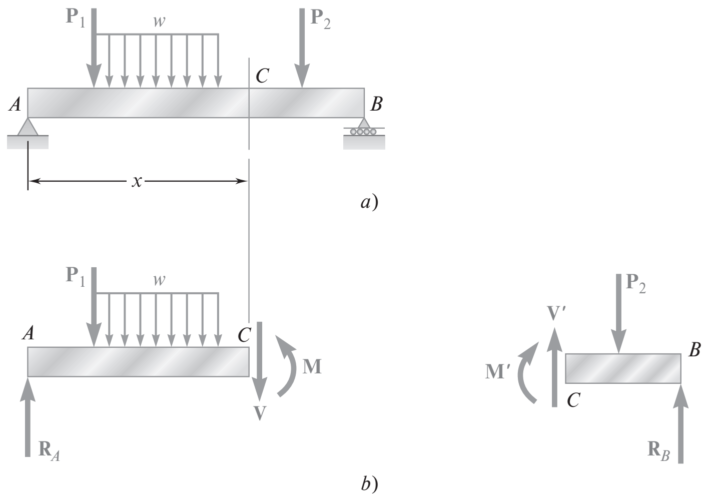


Figura 5.5 Determinación de la fuerza cortante V, y el momento flector M, en una sección dada. *a*) Viga cargada con una sección indicada en un punto arbitrario x. *b*) Diagramas de cuerpo libre trazados a la izquierda y derecha de la sección en C.

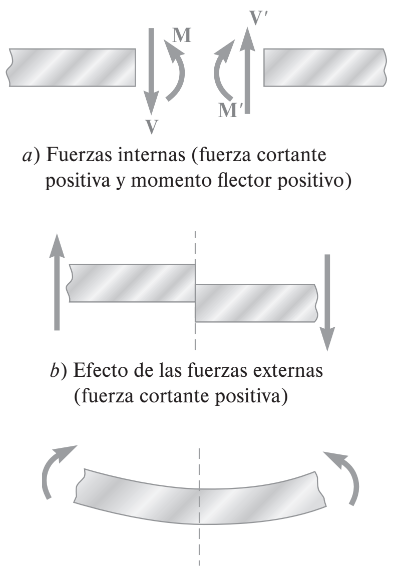
rando el equilibrio de la parte de la viga situado a uno u otro lado de la sección (figura 5.5*b*). Como las fuerzas cortantes **V** y **V**′ tienen sentidos opuestos, no tiene sentido indicar el cortante en el punto *C* con una flecha dirigida hacia arriba o hacia abajo, a menos que se indique al mismo tiempo cuál de los diagramas de cuerpo libre *AC* y *CB* se está considerando. Por eso, la fuerza cortante *V* se indica con un *signo más* si las fuerzas cortantes tienen la dirección mostrada en la figura 5.5*b* y con un *signo menos* en caso contrario. Se aplica una convención similar para el momento flector *M*.† Resumiendo las convenciones de signos:

La fuerza cortante V y el momento flector M en un punto dado de una viga son positivos cuando las fuerzas internas y los momentos que actúan en cada parte de la viga tienen la dirección mostrada en la figura 5.6a.

1. *La fuerza cortante V en cualquier punto dado de una viga es positivo cuando las fuerzas* **externas** *(cargas y reacciones) que actúan en la viga tienden a partir la viga en ese punto como se indica en la figura 5.6b.*
2. *El momento flector en cualquier punto dado de una viga es positivo cuando las fuerzas* **externas** *que actúan en la viga tienden a flexionarla en ese punto como se indica en la figura 5.6c.*

Es útil señalar que los valores de la fuerza cortante y el momento flector son positivos en la mitad izquierda de una viga simplemente apoyada que soporta una sola carga concentrada en su punto medio, como se plantea en la siguiente Aplicación de conceptos.

En la Aplicación de conceptos previa se observa que cuando una viga se somete sólo a cargas concentradas, el cortante es constante entre las cargas y el momento flector varía



a) Fuerzas internas (fuerza cortante positiva y momento flector positivo)

b) Efecto de las fuerzas externas (fuerza cortante positiva)

c) Efecto de las fuerzas externas (momento flector positivo)

Figura 5.6 Convención de signos para fuerza cortante y momento flector.

Aplicación de conceptos 5.1

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector de una viga simplemente apoyada *AB* de claro *L* sometida a una sola carga concentrada **P** en su punto medio *C* (figura 5.7*a*).

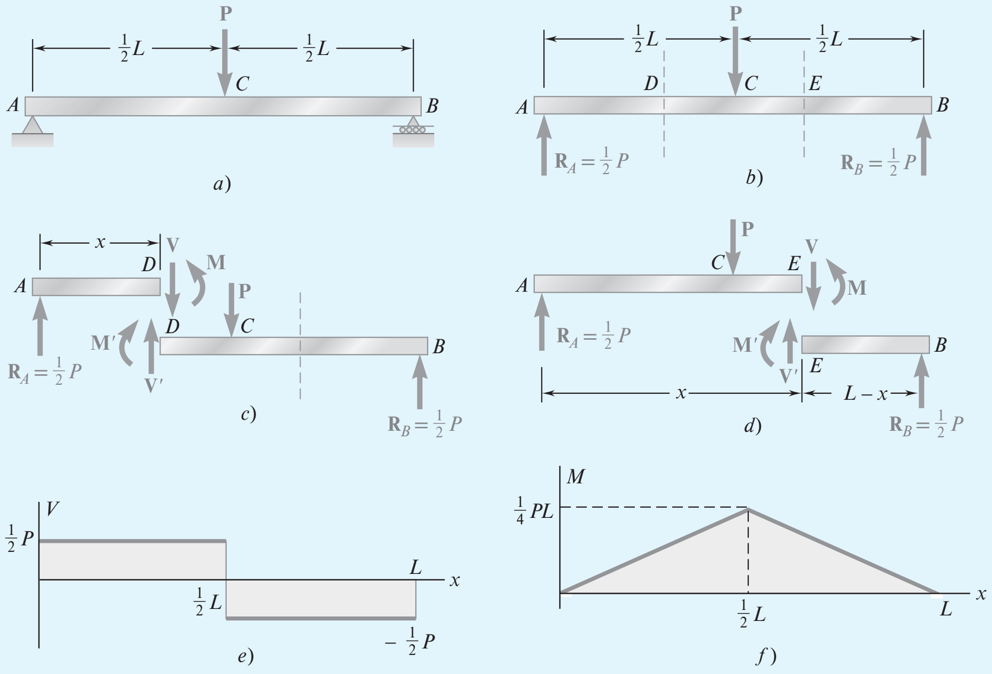


Figura 5.7 *a*) Viga simplemente apoyada con una carga **P** en su punto medio. *b*) Diagrama de cuerpo libre de toda la viga. *c*) Diagramas de cuerpo libre con una sección tomada a la izquierda de la carga **P**. *d*) Diagramas de cuerpo libre con una sección tomada a la derecha de la carga **P**. *e*) Diagrama de fuerza cortante. *f*) Diagrama de momento flector.

† Esta convención es la misma que se utilizó en la sección 4.1.

Determine las reacciones en los apoyos con el diagrama de cuerpo libre de toda la viga (figura 5.7*b*). La magnitud de cada reacción es igual a $P/2$.

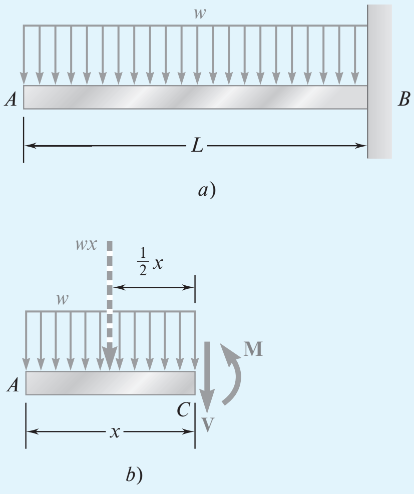
A continuación corte la viga en un punto *D* entre *A* y *C* y trace los diagramas de cuerpo libre de *AD* y *DB* (figura 5.7*c*). *Suponiendo que la fuerza cortante y el momento flector son positivos*, coloque las fuerzas internas **V** y **V**′ y los momentos internos **M** y **M**′ como se indica en la figura 5.6*a*. Considere el diagrama de cuerpo libre *AD*. La suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a *D* de las fuerzas que actúan en el cuerpo libre son cero, así que $V = +P/2$ y $M = +Px/2$. Tanto el cortante como el momento flector son positivos. Esto se comprueba observando que la reacción en *A* tiende a partir y a flexionar la viga en *D* como se indica en las figuras 5.6*b* y *c*. Se traza *V* y *M* entre *A* y *C* (figuras 5.8*d* y *e*). El cortante tiene un valor constante $V = P/2$, en tanto que el momento flector se incrementa linealmente desde $M = 0$ en $x = 0$ hasta $M = PL/4$ en $x = L/2$.

Si se corta la viga en un punto *E* entre *C* y *B* y se considera el cuerpo libre *EB* (figura 5.7*d*), la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a *E* de las fuerzas que actúan en el cuerpo libre son cero. Obtenga $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. Por lo tanto, la fuerza cortante es negativa, y el momento flector es positivo. Esto se comprueba observando que la reacción en *B* flexiona la viga en *E* como en la figura 5.6*c* pero tiende a cortarla de una manera opuesta a la mostrada en la figura 5.6*b*. Los diagramas de fuerza cortante y momento flector de las figuras 5.7*e* y *f* se completan al mostrar el cortante con un valor constante $V = -P/2$ entre *C* y *B*, mientras que el momento flector se reduce linealmente desde $M = PL/4$ en $x = L/2$ hasta $M = 0$ en $x = L$.

linealmente entre las cargas. En tales situaciones, los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector se puede trazar con facilidad una vez que se obtienen los valores de *V* y *M* en secciones seleccionadas justo a la izquierda y justo a la derecha de los puntos donde las cargas y reacciones se aplican (vea el problema modelo 5.1).

Aplicación de conceptos 5.2

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para una viga en voladizo *AB* de claro *L* que soporta una carga uniformemente distribuida *w* (figura 5.8*a*).



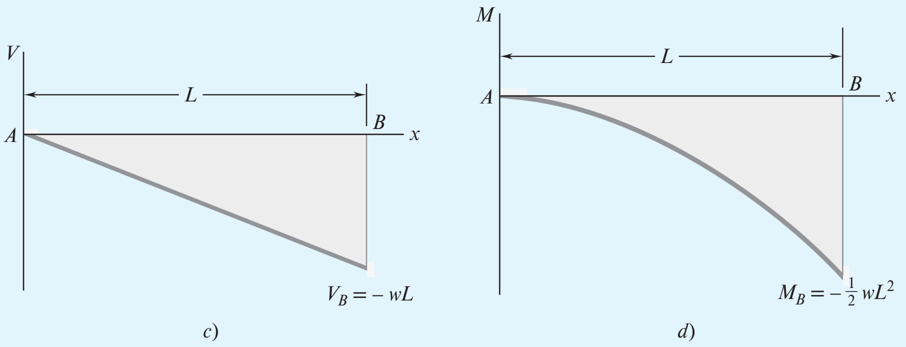


Figura 5.8 *a*) Viga en voladizo que soporta una carga uniformemente distribuida. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la sección *AC*. *c*) Diagrama de esfuerzo cortante. *d*) Diagrama de momento flector.

Corte la viga en un punto C, localizado entre A y B, y trace el diagrama de cuerpo libre de AC (figura 5.8b) con **V** y **M** dirigidos como en la figura 5.6a. Utilizando la distancia x de A a C y reemplazando la carga distribuida sobre AC por su resultante wx aplicada en el punto medio de AC, escriba

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -wx - V = 0 \qquad V = -wx$$

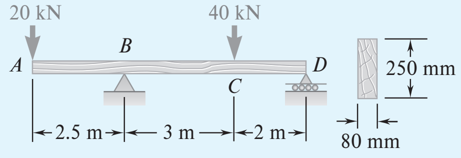
$$+\uparrow\Sigma M_C = 0: \qquad wx\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \qquad M = -\frac{1}{2}wx^2$$

Observe que una línea oblicua representa el diagrama de fuerza cortante (figura 5.8c) y una parábola el momento flector (figura 5.8d). Los valores máximos de V y M ocurren en B, donde

$$V_B = -wL \qquad M_B = -\tfrac{1}{2}wL^2$$

Problema modelo 5.1

Para la viga de madera y la carga mostradas, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.



ESTRATEGIA: Después de usar estática para determinar las fuerzas de reacción, identifique las secciones que se analizarán. Debe cortar la viga en puntos inmediatamente a la izquierda y derecha de cada fuerza concentrada para determinar los valores de V y M en estos puntos.

MODELAR y ANALIZAR:

Reacciones. Considerando que toda la viga es un diagrama de cuerpo libre (figura 1),

$$\mathbf{R}_B = 40\text{ kN}\uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14\text{ kN}\uparrow$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flector. Determine las fuerzas internas justo a la derecha de la carga de 20 kN en A. Considerando el segmento de viga a la izquierda de la sección *1* como un cuerpo libre y suponiendo que V y M son positivos (de acuerdo con la convención estándar), escriba

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -20\text{ kN} - V_1 = 0 \qquad V_1 = -20\text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \qquad (20\text{ kN})(0\text{ m}) + M_1 = 0 \qquad M_1 = 0$$

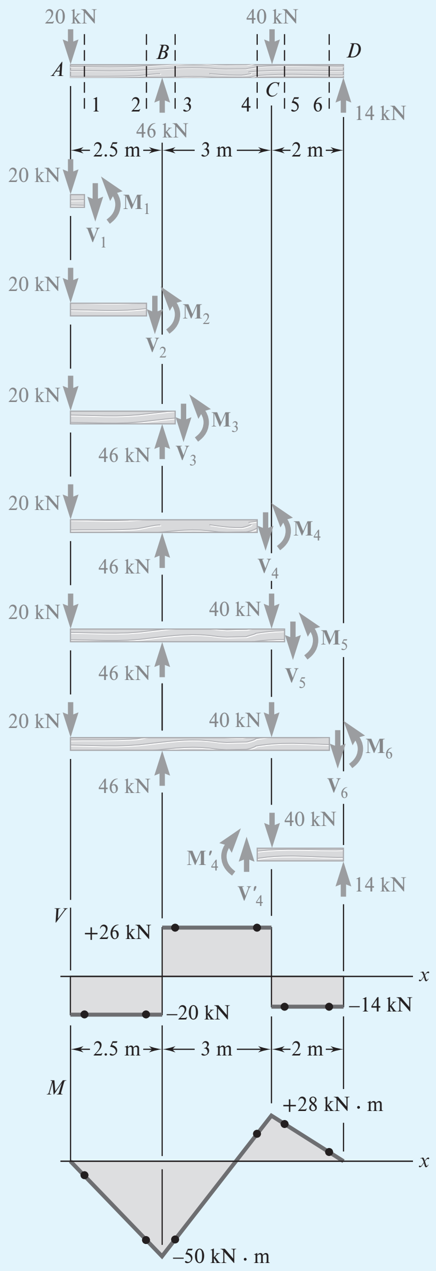


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de una viga, diagrama de cuerpo libre de secciones a la izquierda del corte, diagrama de esfuerzo cortante, diagrama de momento flector.

A continuación considere que la parte a la izquierda de la sección *2* es un cuerpo libre y escriba

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\text{ kN} - V_2 = 0 \qquad V_2 = -20\text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad (20\text{ kN})(2.5\text{ m}) + M_2 = 0 \qquad M_2 = -50\text{ kN}\cdot\text{m}$$

El cortante y el momento flector en las secciones *3*, *4*, *5* y *6* se determinan del mismo modo con los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 1:

$$V_3 = +26\text{ kN} \qquad M_3 = -50\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_4 = +26\text{ kN} \qquad M_4 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_5 = +14\text{ kN} \qquad M_5 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_6 = -14\text{ kN} \qquad M_6 = 0$$

En varias de las últimas secciones, los resultados se pueden obtener más fácilmente considerando que la parte a la derecha de la sección es un cuerpo libre. Por ejemplo, para la parte de la viga a la derecha de la sección *4*,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V_4 - 40\text{ kN} + 14\text{ kN} = 0 \qquad V_4 = +26\text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_4 = 0: \quad -M_4 + (14\text{ kN})(2\text{ m}) = 0 \qquad M_4 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ahora se marcan los seis puntos mostrados en los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Como previamente se indicó, el cortante es de valor constante entre cargas concentradas, y el momento flector varía linealmente.

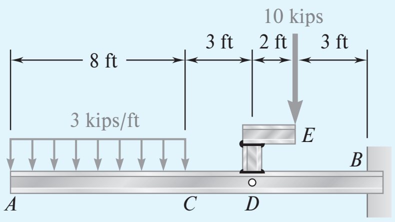
Esfuerzo normal máximo. Este ocurre en B, donde $|M|$ es máximo. Use la ecuación (5.4) para determinar el módulo de sección de la viga:

$$S = \tfrac{1}{6}bh^2 = \tfrac{1}{6}(0.080\text{ m})(0.250\text{ m})^2 = 833.33 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

Al sustituir este valor y $|M| = |M_B| = 50 \times 10^3$ N·m en la ecuación (5.3) se obtiene

$$\sigma_m = \frac{|M_B|}{S} = \frac{(50 \times 10^3\text{ N}\cdot\text{m})}{833.33 \times 10^{-6}} = 60.00 \times 10^6\text{ Pa}$$

Esfuerzo normal máximo en la viga **= 60.0 MPa** ◀



Problema modelo 5.2

La estructura mostrada se compone de una viga W10 × 112 de acero laminado *AB* y dos elementos cortos soldados a la viga. *a*) Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y la carga dadas. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo en secciones justo a la izquierda y justo a la derecha del punto *D*.

ESTRATEGIA: Primero debe reemplazar la carga de 10 kips con un sistema equivalente de fuerza-momento en *D*. Puede cortar la viga en cada región de carga (incluyendo las regiones sin carga) y determinar las ecuaciones para el cortante y el momento flector.

MODELAR y ANALIZAR:

Carga equivalente de una viga. La carga de 10 kips se reemplaza con un sistema equivalente de fuerza-momento en *D*. La reacción en *B* se determina considerando que la viga es un cuerpo libre (figura 1).

a) Diagramas de fuerza cortante y momento flector

De A a C. Determine las fuerzas internas a una distancia *x* desde el punto *A* al considerar la parte de la viga a la izquierda de la sección *1*. La parte de la carga distribuida que actúa en el cuerpo libre es reemplazada por su resultante, y

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -3x - V = 0 \qquad V = -3x \text{ kips}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \qquad 3x(\tfrac{1}{2}x) + M = 0 \qquad M = -1.5x^2 \text{ kip}\cdot\text{ft}$$

Como el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 1 se puede usar con todos los valores de *x* menores que 8 ft, las expresiones obtenidas para *V* y *M* son válidas en la región $0 < x < 8$ ft.

De C a D. Considerando la parte de la viga a la izquierda de la sección 2 y nuevamente reemplazando la carga distribuida por su resultante,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -24 - V = 0 \qquad V = -24 \text{ kips}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \qquad 24(x-4) + M = 0 \qquad M = 96 - 24x \quad \text{kip}\cdot\text{ft}$$

Estas expresiones son válidas en la región 8 ft $< x <$ 11 ft.

De D a B. Utilizando la posición de la viga a la izquierda de la sección *3*, la región 11 ft $< x <$ 16 ft es

$$V = -34 \text{ kips} \qquad M = 226 - 34x \qquad \text{kip}\cdot\text{ft}$$

Ahora se pueden trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para toda la viga. Observe que el momento de 20 kip · ft aplicado en el punto *D* introduce una discontinuidad en el diagrama de momento flector.

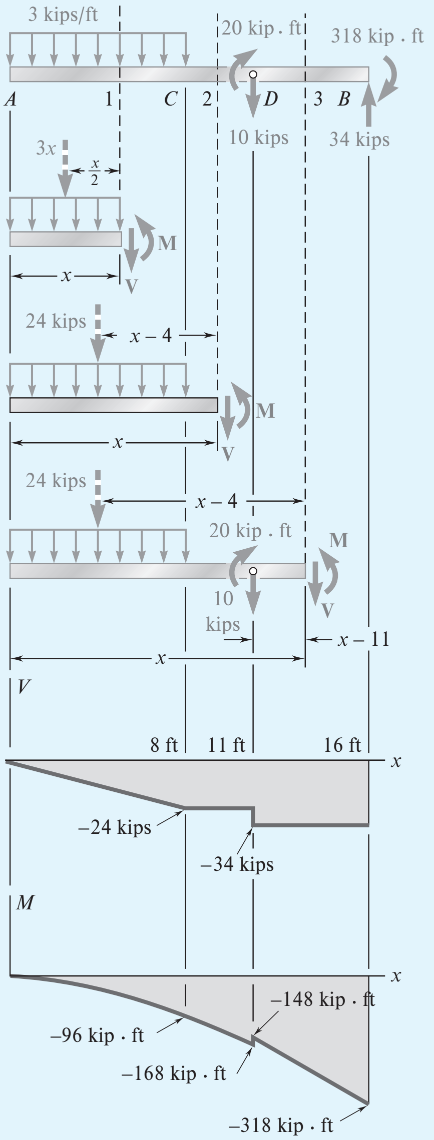


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga, diagrama de cuerpo libre de secciones a la izquierda del corte, diagrama del esfuerzo cortante, diagrama del momento flector.

b) Esfuerzo normal máximo a la izquierda y derecha del punto *D*.

Del apéndice C para el perfil W10 × 112 de acero laminado, $S = 126 \text{ in}^3$ con respecto al eje *X-X*.

A la izquierda de D: $|M| = 168$ kip · ft = 2 016 kip · in. Al sustituir $|M|$ y *S* en la ecuación (5.3), escriba

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{2\,016 \text{ kip}\cdot\text{in}}{126 \text{ in}^3} = 16.00 \text{ ksi} \qquad \sigma_m = 16.00 \text{ ksi}$$

A la derecha de D: $|M| = 148$ kip · ft = 1 776 kip · in. Al sustituir $|M|$ y *S* en la ecuación (5.3), escriba

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{1\,776 \text{ kip}\cdot\text{in}}{126 \text{ in}^3} = 14.10 \text{ ksi} \qquad \sigma_m = 14.10 \text{ ksi}$$

REVISAR y PENSAR: No fue necesario determinar las reacciones en el extremo derecho para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Sin embargo, como estas se determinaron al principio de la solución se pueden usar como comprobaciones de los valores en el extremo derecho de los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

Problemas

5.1 a 5.6 Para la viga y carga mostradas, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector, *b*) determine las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector.

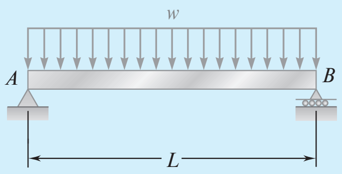


Figura P5.1

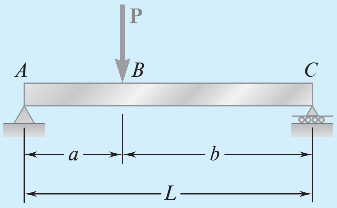


Figura P5.2

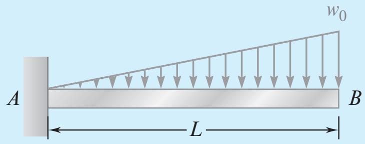


Figura P5.3

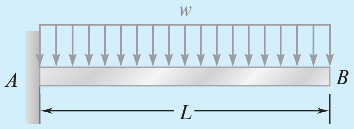


Figura P5.4

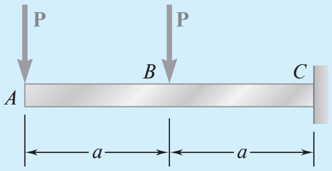


Figura P5.5

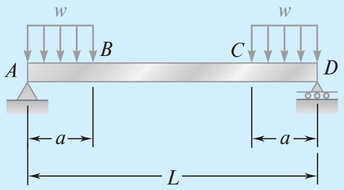


Figura P5.6

5.7 y 5.8 Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas, y determine el valor máximo absoluto *a*) de la fuerza cortante, *b*) del momento flector.

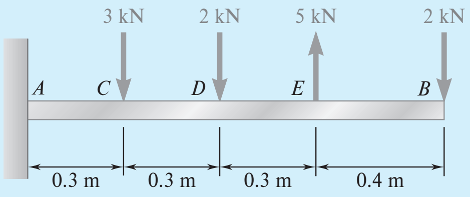


Figura P5.7

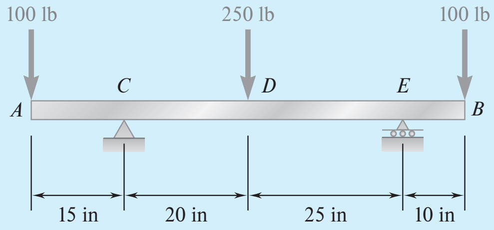


Figura P5.8

5.9 y *5.10* Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas, y determine el valor máximo absoluto *a*) de la fuerza cortante, *b*) del momento flector.

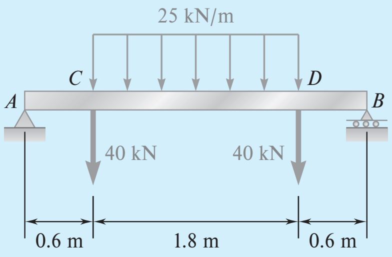


Figura P5.9

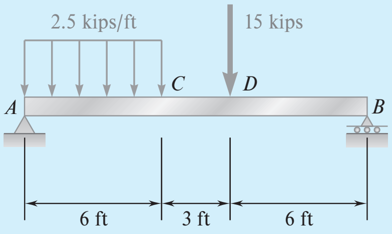


Figura *P5.10*

5.11 y 5.12 Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas, y determine el valor máximo absoluto *a*) de la fuerza cortante, *b*) del momento flector.

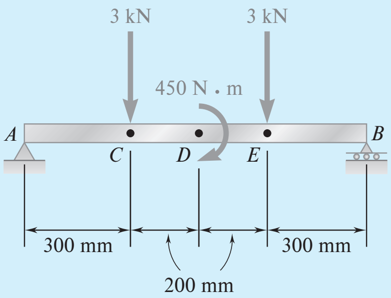


Figura P5.11

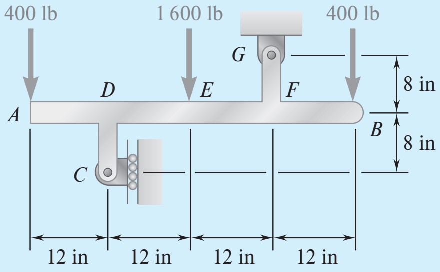


Figura P5.12

5.13 y *5.14* Suponiendo que la reacción del suelo es uniformemente distribuida, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga *AB* y determine el valor máximo absoluto *a*) de la fuerza cortante, *b*) del momento flector.

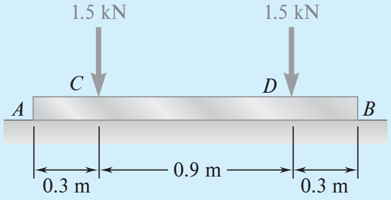


Figura P5.13

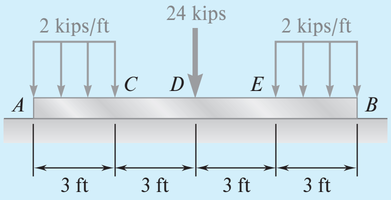


Figura *P5.14*

5.15 y 5.16 Para la viga y carga mostradas, determine el esfuerzo normal máximo producido por flexión en una sección transversal en *C*.

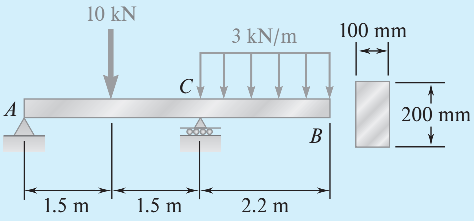


Figura P5.15

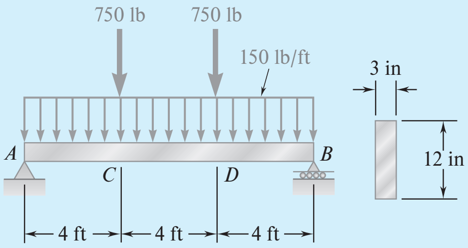


Figura P5.16

5.17 Para la viga y carga mostradas, determine el esfuerzo normal máximo producido por flexión en una sección transversal en *C*.

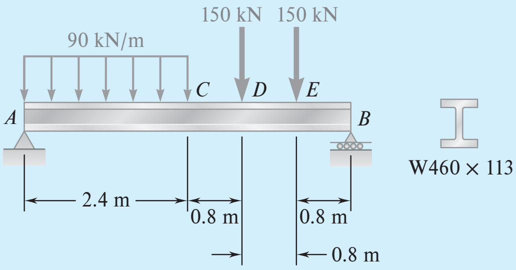


Figura *P5.17*

5.18 Para la viga y carga mostradas, determine el esfuerzo normal máximo producido por flexión en la sección *a-a*.

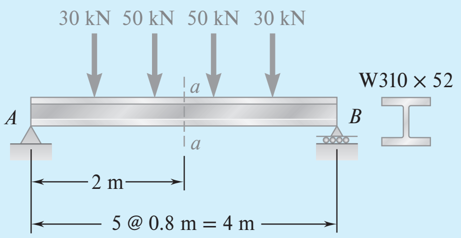


Figura P5.18

***5.19* y 5.20** Para la viga y carga mostradas, determine el esfuerzo normal máximo producido por flexión en una sección transversal en *C*.

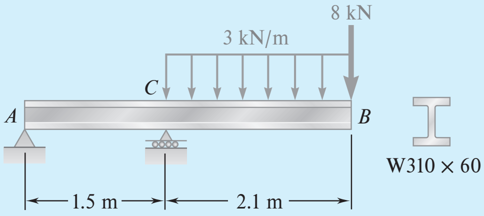


Figura *P5.19*

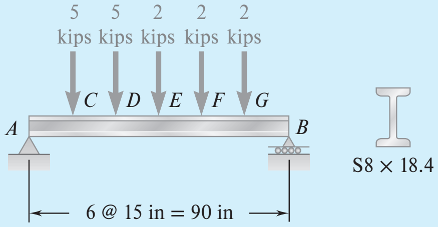


Figura P5.20

5.21 Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas y determine el esfuerzo normal máximo producido por flexión.

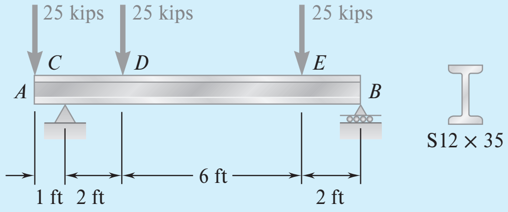


Figura P5.21

***5.22* y 5.23** Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas y determine el esfuerzo normal máximo producido por flexión.

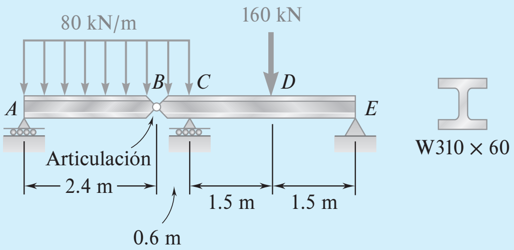


Figura *P5.22*

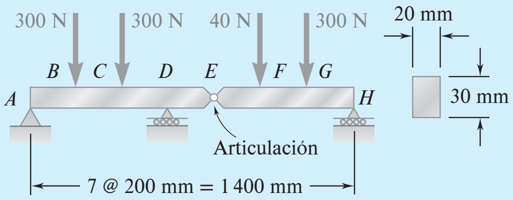


Figura P5.23

5.24 y 5.25 Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas y determine el esfuerzo normal máximo producido por flexión.

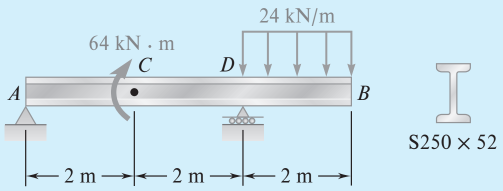


Figura *P5.24*

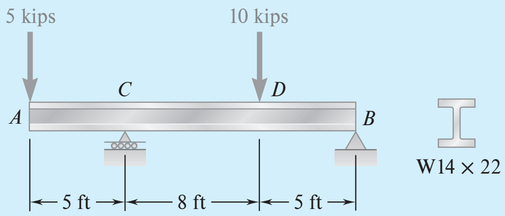


Figura P5.25

5.26 Si se sabe que $W = 12$ kN, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga *AB* y determine el esfuerzo normal máximo producido por flexión.

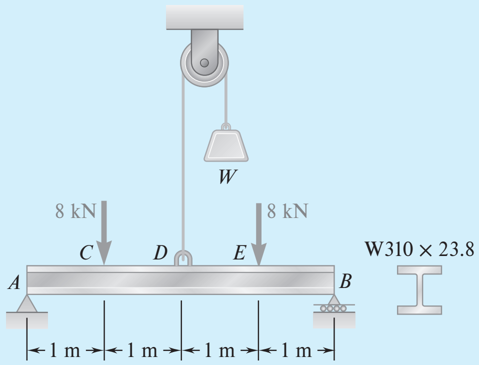


Figura P5.26 y P5.27

5.27 Determine *a*) la magnitud del contrapeso *W* para el cual el valor máximo absoluto del momento flector en la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente producido por flexión (*Sugerencia:* Trace el diagrama del momento flector y compare los valores absolutos de los momentos flectores máximos positivos y negativos obtenidos).

5.28 Determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto del momento flector en la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente producido por flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27.)

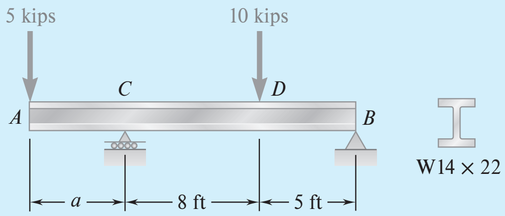


Figura *P5.28*

5.29 Si se sabe que **P** = **Q** = 480 N, determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto del momento flector en la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente producido por flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27).

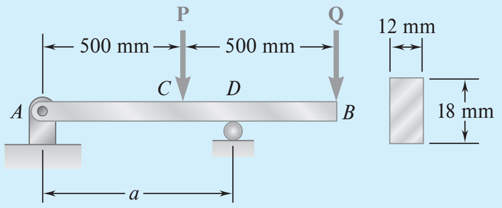


Figura P5.29

5.30 Resuelva el problema 5.29, suponiendo que **P** = 480 N y **Q** = 320 N.

5.31 Determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto del momento flector en la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente producido por flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27).

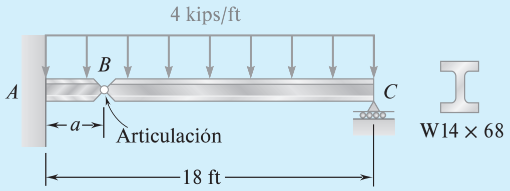


Figura P5.31

5.32 Una varilla de acero sólida de diámetro *d* está apoyada como se muestra. Si se sabe que para acero $\gamma = 490$ lb/ft^3, determine el diámetro *d* más pequeño que se puede usar si el esfuerzo normal producido por flexión no debe exceder de 4 ksi.

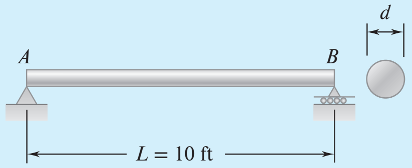


Figura P5.32

5.33 Una barra sólida de acero tiene una sección transversal cuadrada de *b* por lado y está apoyada como se muestra. Si se sabe que para acero $\rho = 7\,860$ kg/m^3, determine la dimensión *b* para la cual el esfuerzo normal máximo producido por flexión es *a*) 10 MPa, *b*) 50 MPa.

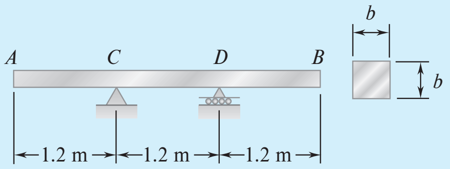


Figura P5.33

5.2 RELACIONES ENTRE CARGA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Cuando una viga soporta más de dos o tres cargas concentradas, o cuando soporta cargas distribuidas, el método descrito en la sección 5.1 para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector puede ser bastante tedioso. La construcción del diagrama de la fuerza cortante y, en especial, la del diagrama del momento flector se facilitarán en gran medida si ciertas relaciones que existen entre carga, fuerza cortante y momento flector se toman en cuenta.

Por ejemplo, una viga AB simplemente apoyada está soportando una carga distribuida w por unidad de longitud (figura 5.9*a*), donde C y C' son dos puntos de la viga a una distancia Δx uno de otro. La fuerza cortante y momento flector en C se denotan por V y M, respectivamente, y se supone que son positivos. $V + \Delta V$ y $M + \Delta M$ denotan, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flector en C'.

Desprenda la porción CC' de la viga y trace su diagrama de cuerpo libre (figura 5.9*b*). Las fuerzas ejercidas en el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud $w\,\Delta x$ y fuerzas internas y momentos en C y C'. Como se supone que la fuerza cortante y el momento flector son positivos, las fuerzas y momentos actúan en la dirección mostrada.

Relaciones entre cargas y fuerza cortante. La suma de los componentes verticales de la fuerza que actúan en el cuerpo libre CC' es cero, por lo tanto

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad V - (V + \Delta V) - w\Delta x = 0$$
$$\Delta V = -w\Delta x$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación entre Δx y luego dejando que Δx se aproxime a cero,

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{5.5}$$

La ecuación (5.5) indica que, para una viga cargada como se muestra en la figura 5.9*a*, la pendiente dV/dx de la curva de la fuerza cortante es negativa. La magnitud de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en ese punto.

Al integrar la ecuación (5.5) entre los puntos C y D,

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx \tag{5.6a}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de la carga entre } C \text{ y } D) \tag{5.6b}$$

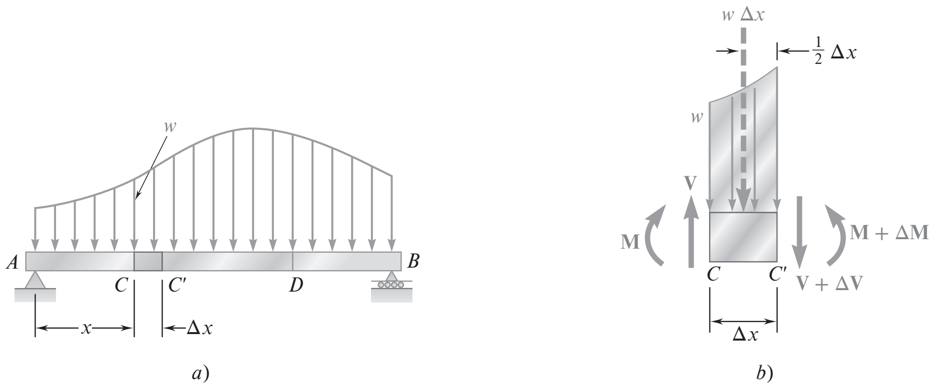


Figura 5.9 *a*) Viga simplemente apoyada sometida a una carga distribuida, con un pequeño elemento entre *C* y *C*′, *b*) diagrama de cuerpo libre del elemento.

En la figura 5.10*b* se ilustra este resultado. Note que este resultado se podría obtener considerando el equilibrio de la porción *CD* de la viga, ya que el área bajo la curva de la carga representa la carga total aplicada entre *C* y *D*.

Además, la ecuación (5.5) no es válida en un punto donde se aplica una carga concentrada; la curva es discontinua en dicho punto, como se ve en la sección 5.1. Asimismo, las ecuaciones (5.6*a*) y (5.6*b*) no son válidas cuando se aplican cargas concentradas entre *C* y *D*, ya no que toman en cuenta el cambio repentino de la fuerza cortante provocado por una carga concentrada. Las ecuaciones (5.6*a*) y (5.6*b*) deben aplicarse solo entre cargas concentradas sucesivas.

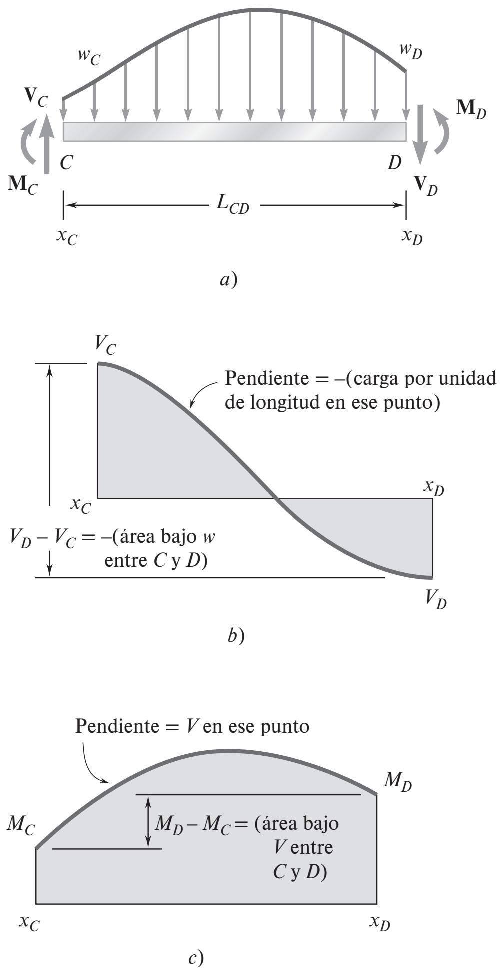


Figura 5.10 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector. *a*) Sección de la viga cargada. *b*) Curva de la fuerza cortante en esa sección. *c*) Curva del momento flector en la sección.

Relaciones entre fuerza cortante y momento flector. Al regresar al diagrama de cuerpo libre de la figura 5.9*b* y escribir que la suma del momento con respecto *C′* es cero, se tiene

$$+\uparrow\Sigma M_{C'} = 0: \qquad (M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\,\Delta x\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \frac{1}{2}w\,(\Delta x)^2$$

Al dividir ambos miembros entre Δx y considerar que Δx tiende a cero,

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad (5.7)$$

La ecuación 5.7 indica que la pendiente dM/dx de la curva del momento flector es igual al valor de la fuerza cortante. Esto se cumple en cualquier punto donde la fuerza cortante tiene un valor bien definido (es decir, no hay ninguna carga concentrada aplicada). La ecuación (5.7) también indica que $V = 0$ en puntos donde M es máximo. Esta propiedad facilita la determinación de los puntos donde es probable que la viga falle a causa de la flexión.

Al integrar la ecuación (5.7) entre los puntos *C* y *D*,

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \qquad (5.8a)$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de la fuerza cortante entre } C \text{ y } D \qquad (5.8b)$$

Este resultado se ilustra en la figura 5.10*c*. Note que el área bajo la curva de la fuerza cortante es positiva cuando ésta es positiva y negativa cuando es negativa. Las ecuaciones (5.8*a*) y (5.8*b*) son válidas aun cuando se apliquen cargas concentradas entre *C* y *D*, en tanto la curva de fuerza cortante se haya trazado correctamente. Las ecuaciones no son válidas si se aplica un momento en un punto entre *C* y *D*, ya que no contemplan el cambio repentino del momento flector provocado por un momento (vea el problema modelo 5.6).

En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, se requiere conocer el valor del momento flector en solo algunos puntos específicos. Una vez que el diagrama de la fuerza cortante se ha trazado y después de que *M* se ha determinado en uno de los extremos de la viga, se puede obtener el valor del momento flector en cualquier punto dado calculando el área bajo la curva de la fuerza cortante y utilizando la ecuación (5.8*b*). Por ejemplo, como $M_A = 0$ para la viga de la Aplicación de conceptos 5.3, el valor máximo del momento flector para esa viga se obtiene con tan solo medir el área del triángulo sombreado de la porción positiva del diagrama de la fuerza cortante de la figura 5.11*c*, Por lo tanto,

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

Note que la curva de la carga es una línea horizontal, que la curva de la fuerza cortante es una línea recta oblicua y que la curva del momento flector es una parábola.

Si la curva de la carga hubiera sido una línea recta oblicua (primer grado), la curva de la fuerza cortante habría sido una parábola (segundo grado), y la curva del momento flector función cúbica (tercer grado). Las curvas de la fuerza cortante y el momento flector siempre son uno y dos grados mayores que la curva de la carga, respectivamente. Con esto en mente, los diagramas de fuerza cortante y momento flector se pueden trazar sin que se tengan que determinar las funciones $V(x)$ y $M(x)$. Los diagramas serán más precisos si se usa el hecho de que en cualquier punto donde las curvas son continuas, la pendiente de la curva de la fuerza cortante es igual a $-w$ y la pendiente de la curva del momento flector es igual a V.

Aplicación de conceptos 5.3

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 5.11*a* y determine el valor máximo del momento flector.

Con el diagrama de cuerpo libre de toda la viga, se determina la magnitud de las reacciones en los apoyos:

$$R_A = R_B = \tfrac{1}{2}wL$$

A continuación, se traza el diagrama de la fuerza cortante. Cerca del extremo A de la viga, la fuerza cortante es igual a R_A (esto es, a $\frac{1}{2}wL$), lo cual puede comprobarse considerando como cuerpo libre una muy pequeña porción de la viga. Utilizando la ecuación (5.6*a*), la fuerza cortante V a cualquier distancia x de A es

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \tfrac{1}{2}wL - wx = w(\tfrac{1}{2}L - x)$$

Así pues, la curva de la fuerza cortante es una línea recta oblicua que cruza el eje x en $x = L/2$ (figura 5.11*c*). Considerando el momento flector, se observa que $M_A = 0$. El valor M del momento flector a cualquier distancia x de A se obtiene con la ecuación (5.8*a*):

$$M - M_A = \int_0^x V\,dx$$

$$M = \int_0^x w(\tfrac{1}{2}L - x)\,dx = \tfrac{1}{2}w(Lx - x^2)$$

La curva del momento flector es una parábola. El valor máximo del momento flector ocurre cuando $x = L/2$, ya que V (y por lo tanto dM/dx) es cero para este valor de x. Al sustituir $x = L/2$ en la última ecuación, $M_{máx} = wL^2/8$ (figura 5.11*d*).

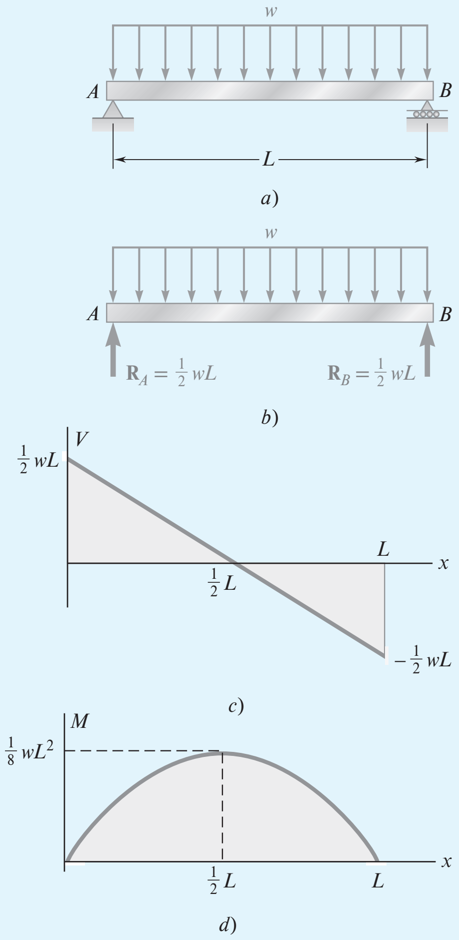
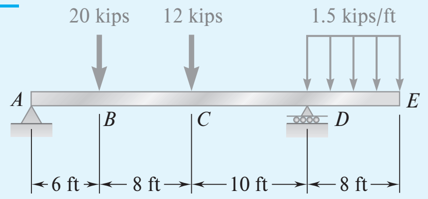


Figura 5.11 *a*) Viga simplemente apoyada con una carga uniformemente distribuida. *b*) Diagrama de cuerpo libre. *c*) Diagrama de la fuerza cortante. *d*) Diagrama del momento flector.

Problema modelo 5.3

Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga y carga mostradas.



ESTRATEGIA: La viga soporta dos cargas concentradas y una carga distribuida. Puede emplear las ecuaciones dadas en esta sección entre estas cargas y bajo la carga distribuida, pero debe anticipar cambios en los diagramas en los puntos de la carga concentrada.

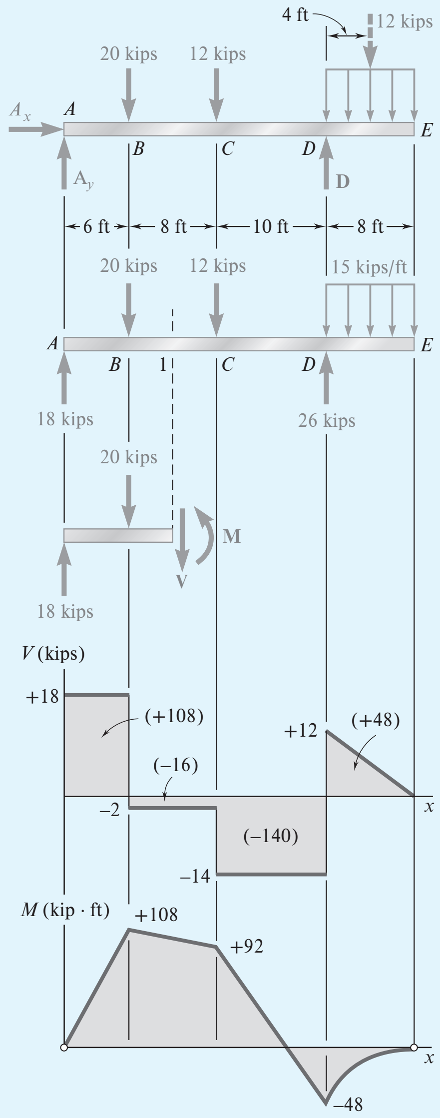


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre de la viga, diagrama de cuerpo libre de la sección a la izquierda del corte, diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.

MODELAR y ANALIZAR:

Reacciones. Considere toda la viga como un cuerpo libre como se muestra en la figura 1.

$$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0:$$
$$D(24\text{ ft}) - (20\text{ kips})(6\text{ ft}) - (12\text{ kips})(14\text{ ft}) - (12\text{ kips})(28\text{ ft}) = 0$$
$$D = +26\text{ kips} \qquad \mathbf{D} = 26\text{ kips}\uparrow$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 20\text{ kips} - 12\text{ kips} + 26\text{ kips} - 12\text{ kips} = 0$$
$$A_y = +18\text{ kips} \qquad \mathbf{A}_y = 18\text{ kips}\uparrow$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0 \qquad \mathbf{A}_x = 0$$

Note que tanto en A como en E el momento flector es cero. Así, se obtienen dos puntos (indicados por puntos) en el diagrama del momento flector.

Diagrama de la fuerza cortante. Dado que $dV/dx = -w$, entre las cargas concentradas y las reacciones la pendiente del diagrama de la fuerza cortante es cero (es decir, la fuerza cortante es constante). La fuerza cortante en cualquier punto se determina dividiendo la vida en dos partes y considerando que cualquiera de ellas es un cuerpo libre. Por ejemplo, utilizando la parte de la viga a la izquierda de la sección *1*, la fuerza cortante entre B y C es

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad +18\text{ kips} - 20\text{ kips} - V = 0 \qquad V = -2\text{ kips}$$

Además, la fuerza cortante es de +12 kips justo a la derecha de D y cero en el extremo E. Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre D y E, el diagrama de la fuerza cortante entre estos puntos es una línea recta.

Diagrama del momento flector. Recuerde que el área bajo la curva de la fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flector entre los mismos dos puntos. Por conveniencia, el área de cada porción del diagrama de la fuerza cortante se calcula e indica entre paréntesis en el diagrama de la figura 1. Como se sabe que el momento flector M_A en el extremo izquierdo es cero,

$$M_B - M_A = +108 \qquad M_B = +108\text{ kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_C - M_B = -16 \qquad M_C = +92\text{ kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_D - M_C = -140 \qquad M_D = -48\text{ kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_E - M_D = +48 \qquad M_E = 0$$

Como se sabe que M_B es cero, los cálculos se comprueban.

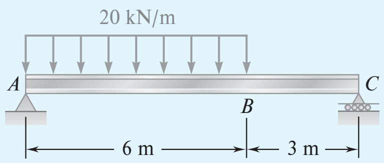
Entre las cargas concentradas y las reacciones, la fuerza cortante es constante. Por lo tanto, la pendiente dM/dx es constante, y el diagrama del momento flector se traza conectando los puntos conocidos con líneas rectas. Entre D y E donde el diagrama de la fuerza cortante es una línea recta oblicua, el diagrama del momento flector es una parábola.

En los diagramas V y M se ve que $V_{\text{máx}} = 18$ kips y $M_{\text{máx}} = 108$ kip · ft

REVISAR y PENSAR: Como se esperaba, los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector muestran cambios abruptos en los puntos donde actúan las cargas concentradas.

Problema modelo 5.4

La viga *AC* de acero laminado W360 × 79 está simplemente apoyada y soporta la carga uniformemente distribuida mostrada. Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector y determine la ubicación y magnitud del esfuerzo normal máximo producido por la flexión.



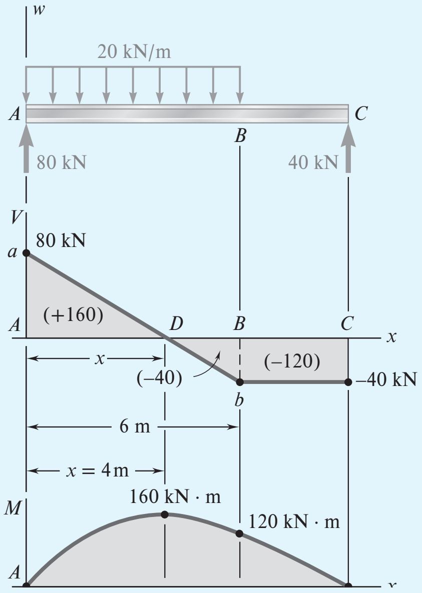


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre, diagrama de la fuerza cortante, diagrama del momento flector.

ESTRATEGIA: La carga se distribuye sobre una parte de la viga. Puede utilizar las ecuaciones dadas en esta sección en dos partes: para la carga y para las regiones sin carga. Con base en el análisis realizado en esta sección, puede esperar que el diagrama de la fuerza cortante mostrará una línea oblicua bajo la carga, seguida por una línea horizontal. El diagrama del momento flector debe mostrar una parábola bajo la carga y una línea oblicua bajo el resto de la viga.

MODELAR y ANALIZAR:

Reacciones. Considerando toda la viga como un cuerpo libre (figura 1)

$$\mathbf{R}_A = 80 \text{ kN}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 40 \text{ kN}\uparrow$$

Diagrama de la fuerza cortante. La fuerza cortante justo a la derecha de *A* es $V_A = +80$ kN. Como el cambio de la fuerza cortante entre los dos puntos es igual a *menos* el área bajo la curva de la carga entre los mismos dos puntos, V_B es

$$V_B - V_A = -(20 \text{ kN/m})(6 \text{ m}) = -120 \text{ kN}$$
$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40 \text{ kN}$$

La pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre *A* y *B*, y el diagrama de la fuerza cortante entre estos dos puntos está representado por una línea recta. Entre *B* y *C*, el área bajo la curva de la carga es cero; por consiguiente,

$$V_C - V_B = 0 \qquad V_C = V_B = -40 \text{ kN}$$

y la fuerza cortante es constante entre *B* y *C*.

Diagrama del momento flector. Note que el momento flector en cada extremo es cero. Para determinar el momento flector máximo, localice la sección *D* de la viga donde $V = 0$.

$$V_D - V_A = -wx$$

$$0 - 80 \text{ kN} = -(20 \text{ kN/m})$$

Al resolver *x*, **$x = 4$ m** ◀

El momento flector máximo ocurre en el punto *D*, donde $dM/dx = V = 0$. Las áreas de las varias porciones del diagrama de la fuerza cortante se calculan y dan (entre

paréntesis). El área del diagrama de la fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flector entre los mismos dos puntos, y se tiene

$$M_D - M_A = +160 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_D = +160 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B - M_D = -40 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_B = +120 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C - M_B = -120 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_C = 0$$

El diagrama del momento flector consiste en un arco de parábola seguido por un segmento de línea recta. La pendiente de la parábola en A es igual al valor de V en ese punto.

Esfuerzo normal máximo. Este ocurre en D, donde $|M|$ es máximo. Según el apéndice C, para un perfil W360 × 79 de acero laminado, $S = 1\,270 \text{ mm}^3$ con respecto al eje horizontal. Al sustituir este valor y $|M| = |M_D| = 160 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}$ en la ecuación (5.3),

$$\sigma_m = \frac{|M_D|}{S} = \frac{160 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}}{1\,270 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 126.0 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Esfuerzo normal máximo en la viga = **126.0 MPa** ◀

Problema modelo 5.5

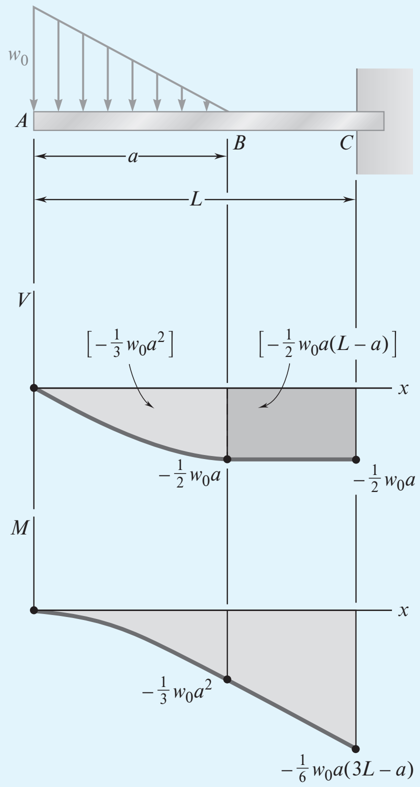


Figura 1 Viga con carga, diagrama de fuerza cortante y diagrama de momento flector.

Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga en voladizo mostrada en la figura 1.

ESTRATEGIA: Dado que no hay reacciones de apoyo hasta el extremo derecho de la viga, puede depender únicamente de las ecuaciones de esta sección sin necesidad de usar diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio. Debido a la carga no uniforme distribuida, se debe esperar que los resultados involucren ecuaciones de mayor grado, con una curva parabólica en el diagrama de fuerza cortante y una curva cúbica en el diagrama de momento flector.

MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama de fuerza cortante. En el extremo libre de la viga, $V_A = 0$. Entre A y B, el área bajo la curva de la carga es $\frac{1}{2}w_0a$. Así pues,

$$V_B - V_A = -\tfrac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\tfrac{1}{2}w_0a$$

Entre B y C, la viga no está cargada, así que $V_C = V_B$. En A, $w = w_0$. De acuerdo con la ecuación (5.5), la pendiente de la curva de la carga es $dV/dx = -w_0$, mientras que en B la pendiente es $dV/dx = 0$. Entre A y B, la carga disminuye linealmente, y el diagrama de la fuerza cortante es parabólico. Entre B y C, $w = 0$, y el diagrama de la fuerza cortante es una línea horizontal.

Diagrama del momento flector. El momento flector M_A en el extremo libre de la viga es cero. Calcule el área bajo la curva de la fuerza cortante para obtener

$$M_B - M_A = -\tfrac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\tfrac{1}{3}w_0a^2$$

$$M_C - M_B = -\tfrac{1}{2}w_0a(L - a)$$

$$M_C = -\tfrac{1}{6}w_0a(3L - a)$$

El trazo del diagrama del momento flector se completa al recordar que $dM/dx = V$. Entre A y B, el diagrama está representado por una curva cúbica con una pendiente cero en A y entre B y C por medio de una línea recta.

REVISAR y PENSAR: Aunque estrictamente no se requiere para la solución de este problema, la determinación de las reacciones en el apoyo serviría como una excelente comprobación de los valores finales de los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector.

Problema modelo 5.6

La viga simple AC en la figura 1 soporta un momento T aplicado en el punto B. Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector de la viga.

ESTRATEGIA: La carga soportada por la viga es un momento concentrado. Como las únicas fuerzas verticales son las que están asociadas con las reacciones de apoyo, es de esperarse que el diagrama de la fuerza cortante sea de un valor constante. Sin embargo, el diagrama del momento flector tendrá una discontinuidad en B debido al momento.

MODELAR y ANALIZAR:

Toda la viga se considera como un cuerpo libre.

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L}\downarrow$$

La fuerza cortante en cualquier sección es constante e igual a T/L. Como en B actúa un momento, el diagrama del momento flector es discontinuo en B. Está representado por dos líneas rectas oblicuas y decrece de manera repentina en B en una cantidad igual a T. Esta discontinuidad se puede comprobar mediante un análisis de equilibrio. Por ejemplo, considerando el diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga desde A hasta un poco más allá a la derecha de B como se muestra en la figura 1, M es

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -\frac{T}{L}a + T + M = 0 \qquad M = -T\left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

REVISAR y PENSAR: Observe que el momento aplicado provoca un cambio repentino en el diagrama del momento en el punto de aplicación de la misma manera en que una fuerza concentrada produce un cambio repentino en el diagrama de la fuerza cortante.

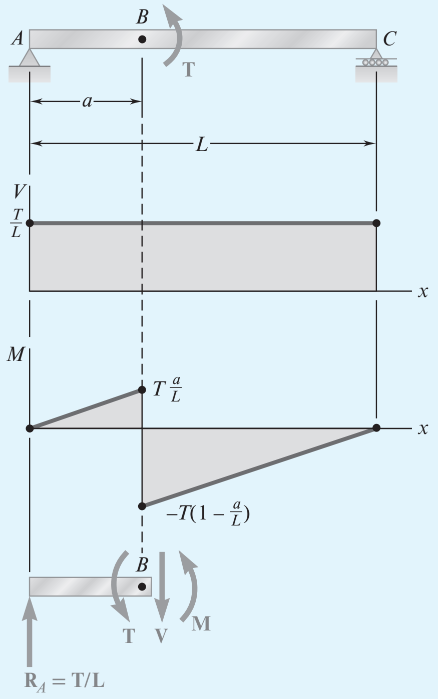


Figura 1 Viga con carga, diagrama de fuerza cortante, diagrama de momento flector, diagrama de cuerpo libre de la sección a la izquierda de B.

Problemas

5.34 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.1*a*.

5.35 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.2*a*.

5.36 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.3*a*.

5.37 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.4*a*.

5.38 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.5*a*.

5.39 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.6*a*.

5.40 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.7.

5.41 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.8.

5.42 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.9.

5.43 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.10.

5.44* y *5.45 Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga y la carga mostradas y determine el valor máximo absoluto *a*) de la fuerza cortante, *b*) del momento flector.

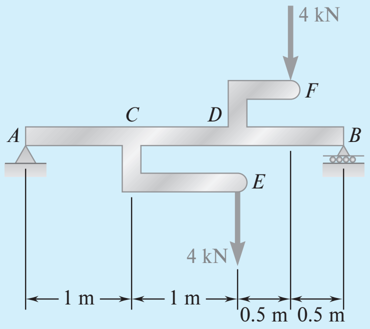


Figura *P5.44*

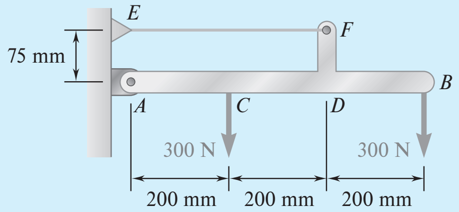


Figura *P5.45*

5.46 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.15.

5.47 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.16.

5.48 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.18.

5.49 Utilizando el método de la sección 5.2, resuelva el problema 5.20.

5.50* y *5.51 Determine *a*) las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga y carga mostradas, *b*) el valor máximo absoluto del momento flector en la viga.

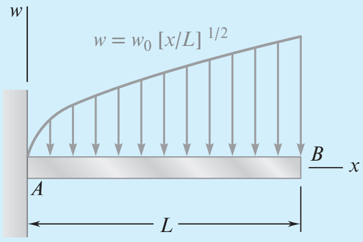


Figura *P5.50*

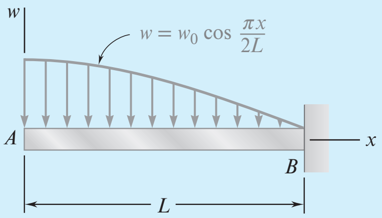


Figura *P5.51*

5.52 y 5.53 Determine *a*) las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga y carga mostradas, *b*) el valor máximo absoluto del momento flector en la viga.

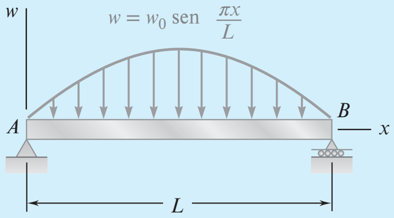


Figura P5.52

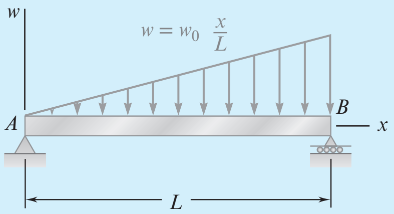


Figura P5.53

5.54 y 5.55 Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga y carga mostradas y determine el esfuerzo máximo normal debido a la flexión.

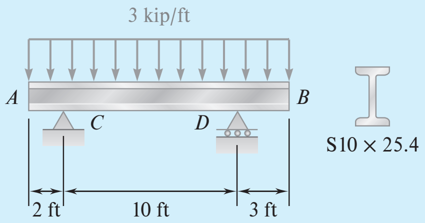


Figura P5.54

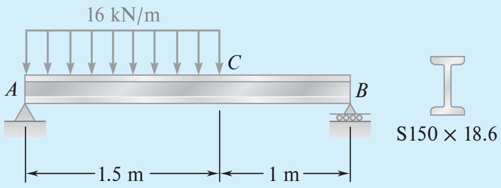


Figura P5.55

5.56 y *5.57* Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga y carga mostradas y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

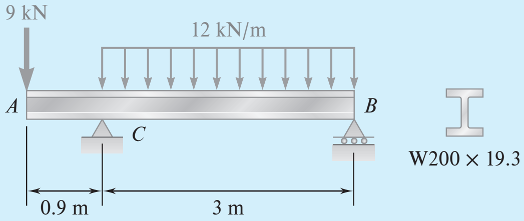


Figura P5.56

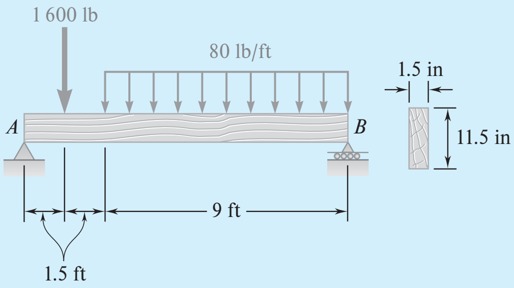


Figura *P5.57*

***5.58* y 5.59** Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga y la carga mostradas y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

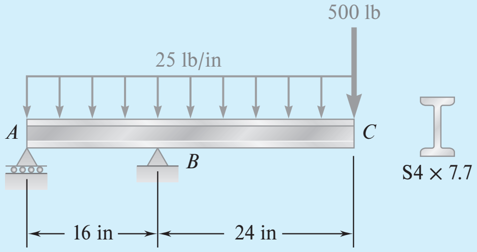


Figura *P5.58*

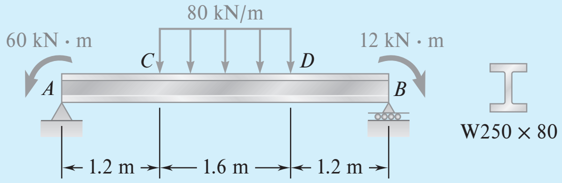


Figura P5.59

5.60 Si se sabe que la viga *AB* está en equilibrio bajo la carga mostrada, trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

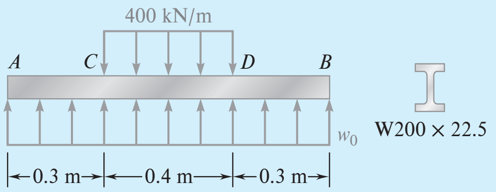


Figura P5.60

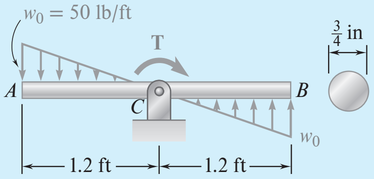


Figura P5.61

5.61 Si se sabe que la viga *AB* está en equilibrio bajo la carga mostrada, trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

***5.62** La viga *AB* soporta dos cargas concentradas **P** y **Q**. El esfuerzo normal producido por la flexión en la cara inferior de la viga es de +55 MPa en *D* y de +37.5 MPa en *F*. *a*) Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión que se desarrolla en la viga.

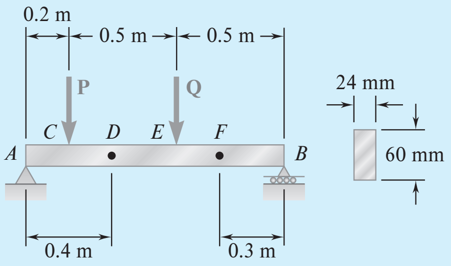


Figura *P5.62*

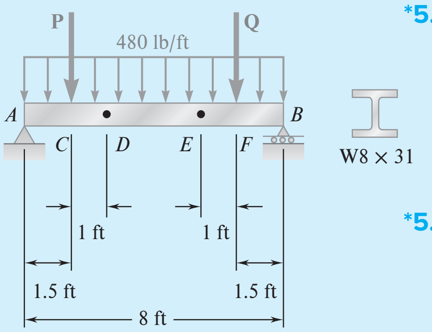


Figura P5.63

***5.63** La viga *AB* soporta una carga uniformemente distribuida de 480 lb/ft y dos cargas concentradas **P** y **Q**. El esfuerzo normal producido por la flexión en la cara inferior de la aleta inferior es de +14.85 ksi en *D* y de +10.65 ksi en *E*. *a*) Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión que se genera en la viga.

***5.64** La viga *AB* soporta una carga uniformemente distribuida de 2kN/m y dos cargas concentradas **P** y **Q**. Experimentalmente se ha determinado que el esfuerzo normal producido por la flexión en la cara inferior de la aleta inferior es de –56.9 MPa en *A* y de –29.9 MPa en *C*. Trace los diagramas de la fuerza cortante y el momento flector para la viga y determine las magnitudes de las cargas **P** y **Q**.

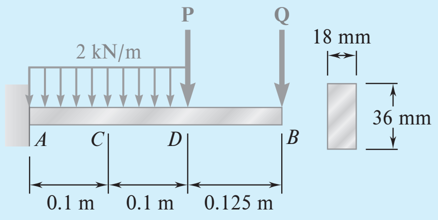


Figura P5.64

5.3 DISEÑO DE VIGAS PRISMÁTICAS PARA FLEXIÓN

El diseño de una viga normalmente se controla con el valor absoluto máximo $|M|_{\text{máx}}$ del momento flector que se presenta en la viga. El esfuerzo normal máximo σ_m en la viga se determina en su superficie en la sección crítica donde $|M|_{\text{máx}}$ ocurre y se obtiene al sustituir $|M|_{\text{máx}}$ en lugar de $|M|$ en la ecuación (5.1) o en la ecuación (5.3).[†]

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}}\, c}{I} \tag{5.1a}$$

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}}}{S} \tag{5.3a}$$

Un diseño seguro requiere que $\sigma_m \leq \sigma_{\text{perm}}$, donde σ_{perm} es el esfuerzo permisible para el material utilizado. Al sustituir σ_{perm} en lugar de σ_m en la ecuación (5.3*a*) y al resolver S se obtiene el valor mínimo permisible del módulo de sección para la viga que se está diseñando.

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.9}$$

En esta sección se analiza el diseño de tipos comunes de vigas, como las de madera y sección transversal rectangular y de elementos de acero laminado de varios perfiles de sección transversal. Un procedimiento apropiado debe llevar al diseño más económico. Esto quiere decir que entre vigas del mismo tipo y del mismo material, y con todo lo demás igual, debe seleccionarse la viga con el menor peso por unidad de longitud, y, por lo tanto, con la menor área de sección transversal, ya que esta viga será la más económica.

El procedimiento de diseño en general incluye los siguientes pasos:[‡]

Paso 1. Primero determine el valor de σ_{perm} para el material seleccionado en una tabla de propiedades de materiales o en especificaciones de diseño. También puede calcular este valor dividiendo la resistencia última σ_U del material entre un factor de seguridad apropiado (secc. 1.5C). Suponiendo que el valor de σ_{perm} es el mismo a tensión y a compresión, prosiga de esta manera.

Paso 2. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector correspondientes a las condiciones de carga especificadas, y determine el valor máximo absoluto $|M|_{\text{máx}}$ del momento flector en la viga.

Paso 3. Determine el valor mínimo permisible $S_{\text{mín}}$ del módulo de sección de la viga con la ecuación (5.9).

Paso 4. Para una viga de madera, el peralte h de la viga, su ancho b, o la relación $\frac{1}{6}\, h/b$ que caracteriza el perfil de su sección transversal probablemente se habrán especificado. Las dimensiones desconocidas se pueden seleccionar empleando la ecuación (4.19), de modo que b y h satisfagan la relación $\frac{1}{6}\, bh^2 = S \geq S_{\text{mín}}$.

Paso 5. Para una viga de acero laminado, consulte la tabla apropiada en el apéndice C. De las secciones de viga disponibles, considere solo las del módulo de la sección $S \geq S_{\text{mín}}$ y seleccione la sección con el menor peso por unidad de longitud. Esta es la más económica de las secciones para las cuales $S \geq S_{\text{mín}}$ (vea la Aplicación de conceptos 5.4). En algunos casos, la selección de una sección puede limitarse por consideraciones como el peralte permisible de la sección transversal o la deflexión permisible de la viga (vea el capítulo 9).

[†] Para vigas que no son simétricas con respecto a su superficie neutra, debe usarse la distancia máxima de la superficie neutra a la superficie de la viga para c en la ecuación (5.1) y en el cálculo del módulo de sección $S = I/c$.

[‡] Se supone que todas las vigas consideradas en este capítulo están sujetas o apuntaladas adecuadamente para impedir el pandeo lateral y se utilizan placas de apoyo bajo cargas concentradas en vigas de acero laminado para evitar el pandeo local (desgarre) del alma.

El análisis anterior se limitó a materiales para los cuales σ_{perm} es el mismo a tensión y a compresión. Si σ_{perm} es diferente, asegúrese de seleccionar la sección de viga donde $\sigma_m \leq \sigma_{perm}$ tanto para esfuerzos de tensión como de compresión. Si la sección transversal no es simétrica con respecto a su eje neutro, los esfuerzos máximos de tensión y compresión no necesariamente se presentan en la sección donde $|M|$ es máximo (uno puede ocurrir donde M es máximo y el otro donde M es mínimo). Por lo tanto, el paso debe incluir la determinación tanto de $M_{máx}$ como de $M_{mín}$ y el paso 3 debe tomar en cuenta tanto los esfuerzos de tensión como de compresión.

Por último, el procedimiento de diseño descrito en esta sección toma en cuenta solo los esfuerzos normales que ocurren en la superficie de la viga. Las vigas cortas, en especial las de madera, pueden fallar a fuerza cortante bajo una carga transversal. La determinación de esfuerzos cortantes en vigas se estudiará en el capítulo 6. Además, en vigas de acero laminado se pueden presentar esfuerzos normales mayores que los aquí considerados en la unión del alma con las aletas. Esto se abordará en el capítulo 8.

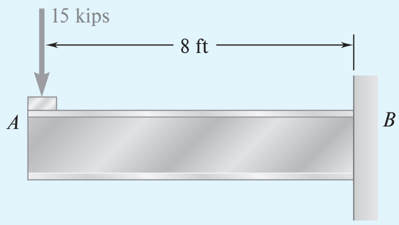


Figura 5.12 Viga en voladizo de aleta ancha con carga en el extremo.

Aplicación de conceptos 5.4

Seleccione una viga de aleta ancha para soportar la carga de 15 kips como se muestra en la figura 5.12. El esfuerzo normal permisible para el acero empleado es de 24 ksi.

1. Se da el esfuerzo normal permisible: $\sigma_{perm} = 24$ ksi.
2. La fuerza cortante es constante e igual a 15 kips. El momento flector es máximo es B.

$$|M|_{máx} = (15 \text{ kips})(8 \text{ ft}) = 120 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 1\,440 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

3. El módulo de sección mínimo permisible es

$$S_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{1\,440 \text{ kip} \cdot \text{in}}{24 \text{ ksi}} = 60.0 \text{ in}^3$$

4. Consulte la tabla de *Propiedades de perfiles de acero laminado* en el apéndice C y observe que los perfiles están acomodados en grupos del mismo peralte y aparecen en una lista ordenados por peso descendente. Elija la viga más ligera en cada grupo que tenga un módulo de sección $S = I/c$ al menos tan grande como $S_{mín}$ y anote los resultados en la siguiente tabla.

Perfil	S, in^3
W21 × 44	81.6
W18 × 50	88.9
W16 × 40	64.7
W14 × 43	62.6
W12 × 50	64.2
W10 × 54	60.0

El más económico es el perfil W16 × 40 ya que pesa solo 40 lb/ft, aun cuando su módulo de sección es mayor que el de dos de los otros perfiles. El peso total de la viga será (8 ft) × (40 lb) = 320 lb. Este peso es pequeños comparado con la carga de 15 000 lb y por lo tanto se puede omitir en este análisis.

***Diseño por factores de carga y resistencia.** Este método alternativo de diseño se aplicó a elementos sometidos a carga axial en la sección 1.5D. También se puede

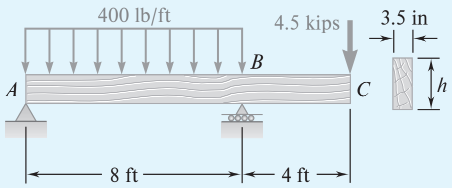
aplicar al diseño de vigas sometidas a flexión. Reemplace las cargas P_D, P_L y P_U en la ecuación (1.27) por los momentos flectores M_D, M_L y M_U:

$$\gamma_D M_D + \gamma_L M_L \leq \phi M_U \quad (5.10)$$

Los coeficientes γ_D y γ_L son los *factores de carga*, y el coeficiente ϕ es el *factor de resistencia*. Los momentos M_D y M_L son los momentos flectores producidos por las cargas muerta y viva respectivamente. M_U es igual al producto de la resistencia última σ_U del material y el módulo de sección S de la viga: $M_U = S\sigma_U$.

Problema modelo 5.7

Se va a diseñar una viga *AC* saliente de madera de 12 ft de largo con un claro de 8 ft para que soporte las cargas distribuida y concentrada mostradas. Si se sabe que se va a emplear una viga de madera de 4 in. de ancho nominal (3.5 in de ancho real) con un esfuerzo permisible de 1.75 ksi, determine el peralte *h* mínimo requerido de la viga.



ESTRATEGIA: Trace el diagrama de momento flector para determinar el momento flector máximo absoluto. Luego, utilizando este momento flector, puede determinar las propiedades de la sección requerida que satisfagan el esfuerzo permisible dado.

MODELAR y ANALIZAR:

Reacciones. Considere que toda la viga es un cuerpo libre (figura 1).

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: B(8 \text{ ft}) - (3.2 \text{ kips})(4 \text{ ft}) - (4.5 \text{ kips})(12 \text{ ft}) = 0$$

$$B = 8.35 \text{ kips} \qquad \mathbf{B} = 8.35 \text{ kips}\uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: A_y + 8.35 \text{ kips} - 3.2 \text{ kips} - 4.5 \text{ kips} = 0$$

$$A_y = -0.65 \text{ kips} \qquad \mathbf{A} = 0.65 \text{ kips}\downarrow$$

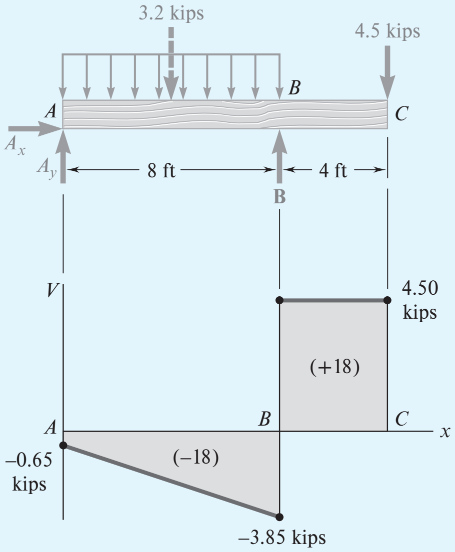


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga y su diagrama de fuerza cortante.

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante justo a la derecha de A es $V_A = A_y = -0.65$ kips. Como el cambio del cortarte entre A y B es igual a *menos* el área bajo la curva de la carga entre estos dos puntos, V_B se obtiene como sigue

$$V_B - V_A = -(400 \text{ lb/ft})(8 \text{ ft}) = -3\,200 \text{ lb} = -3.20 \text{ kips}$$
$$V_B = V_A - 3.20 \text{ kips} = -0.65 \text{ kips} - 3.20 \text{ kips} = -3.85 \text{ kips}$$

La reacción en B produce un incremento súbito de 8.35 kips en V, y el resultado es una fuerza cortante de 4.50 kips a la derecha de B. Dado que no hay ninguna carga aplicada entre B y C, la fuerza cortante permanece constante entre estos dos puntos.

Determinación de $|M|_{máx}$. Observe que el momento flector es igual a cero en ambos extremos de la viga: $M_A = M_C = 0$. Entre A y B, el momento flector se reduce en una cantidad igual al área bajo la curva de fuerza cortante, y entre B y C se incrementa en una cantidad correspondiente. Así, el valor máximo absoluto del momento flector es $|M|_{máx} = 18.00$ kip · ft.

Módulo de sección mínimo permisible. Al sustituir los valores de σ_{perm} y $|M|_{máx}$ en la ecuación (5.9) se tiene

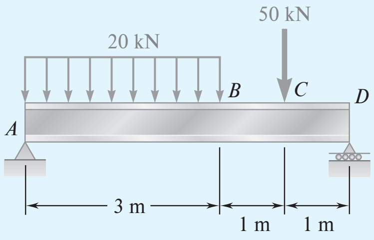
$$S_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{(18 \text{ kip} \cdot \text{ft})(12 \text{ in/ft})}{1.75 \text{ ksi}} = 123.43 \text{ in}^3$$

Peralte mínimo requerido de una viga. A recordar las fórmulas del paso 4 del procedimiento de diseño y al sustituir los valores de b de $S_{mín}$, se tiene

$$\tfrac{1}{6}bh^2 \geq S_{mín} \qquad \tfrac{1}{6}(3.5 \text{ in})h^2 \geq 123.43 \text{ in}^3 \qquad h \geq 14.546 \text{ in}$$

El peralte mínimo requerido de la viga es **$h = 14.55$ in** ◀

REVISAR y PENSAR: En la práctica, los perfiles de madera estándar se especifican por dimensiones nominales que son un poco más grandes que las reales. En este caso, especifique un elemento de 4 in × 16 in con las dimensiones reales de 3.5 in × 15.25 in.



Problema modelo 5.8

Una viga AD de acero de 5 m de largo simplemente apoyada debe soportar las cargas distribuida y concentrada mostradas. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el grado de acero es de 160 MPa, seleccione el perfil con el patín más ancho que se pueda utilizar.

ESTRATEGIA: Trace el diagrama de momento flector para determinar el momento flector máximo absoluto. En seguida, utilizando este momento, puede determinar el módulo de sección requerido que satisfaga el esfuerzo permisible dado.

MODELAR y ANALIZAR:

Reacciones. Considere el diagrama de cuerpo libre de toda la viga (figura 1).

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: D(5 \text{ m}) - (60 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) - (50 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 0$$
$$D = 58.0 \text{ kN} \qquad \mathbf{D} = 58.0 \text{ kN}\uparrow$$
$$\underset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: A_y + 58.0 \text{ kN} - 60 \text{ kN} - 50 \text{ kN} = 0$$
$$A_y = 52.0 \text{ kN} \qquad \mathbf{A} = 52.0 \text{ kN}\uparrow$$

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante justo a la derecha de A es $V_A = A_y = +52.0$ kN. Puesto que el cambio de la fuerza cortante entre A y B es igual a *menos* el área bajo la curva de la carga entre estos dos puntos,

$$V_B = 52.0 \text{ kN} - 60 \text{ kN} = -8 \text{ kN}$$

La fuerza cortante permanece constante entre B y C, donde se reduce a –58 kN, y conserva este valor entre C y D. Localice la sección E de la viga donde $V = 0$ como sigue

$$V_E - V_A = -wx$$
$$0 - 52.0 \text{ kN} = -(20 \text{ kN/m})x$$

Por lo tanto, $x = 2.60$ m.

Determinación de $|M|_{\text{máx}}$. El momento flector es máximo en E, donde $V = 0$. Como M es cero en el apoyo A, su valor máximo en E es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre A y E. Por consiguiente, $|M|_{\text{máx}} = M_E = 67.6$ kN · m.

Módulo de sección mínimo permisible. Al sustituir estos valores de σ_{perm} y $|M|_{\text{máx}}$ en la ecuación (5.9) da

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{67.6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{160 \text{ MPa}} = 422.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 422.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

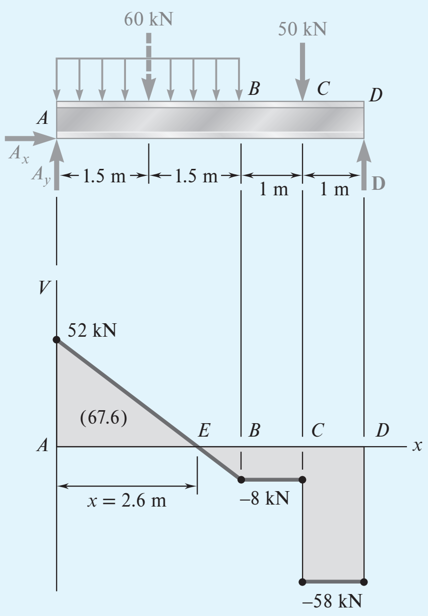


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga y su diagrama de fuerza cortante.

Selección del perfil de aleta ancha. Del apéndice C, elabore una lista de perfiles que tienen un módulo de sección mayor que S_{min} y que también son los más livianos en un grupo de peraltes dado (figura 2).

Perfil	S, mm³
W410 × 38.8	629
W360 × 32.9	475
W310 × 38.7	547
W250 × 44.8	531
W200 × 46.1	451

Figura 2 Perfiles más ligeros para cada grupo de peralte que proporcionan el módulo de sección requerido.

El perfil más ligero disponible es **W360 × 32.9** ◀

REVISAR y PENSAR: Cuando un esfuerzo normal permisible específico es el único criterio de diseño para vigas, los perfiles más ligeros y aceptables tienden a ser las secciones de mayor peralte. En la práctica, habrá otros criterios a considerar que pueden modificar la selección final del perfil.

Problemas

5.65 y *5.66* Para la viga y carga mostradas, diseñe la sección transversal de la viga, si se sabe que el grado de la madera utilizada tiene un esfuerzo normal permisible de 12 MPa.

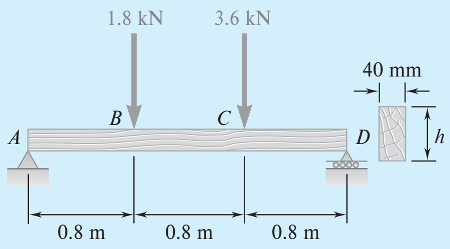


Figura P5.65

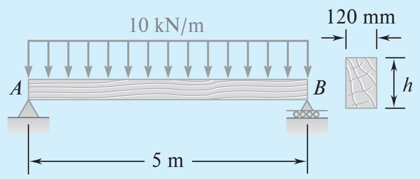


Figura *P5.66*

***5.67* y 5.68** Para la viga y carga mostradas, diseñe la sección transversal de la viga, si se sabe que el tipo de madera utilizada tiene un esfuerzo normal permisible de 1 750 psi.

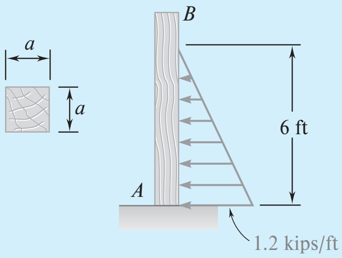


Figura *P5.67*

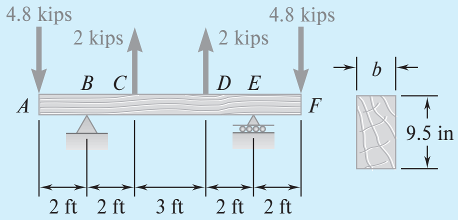


Figura P5.68

5.69 y 5.70 Para la viga y carga mostradas, diseñe la sección transversal de la viga, si se sabe que el grado de la madera utilizada tiene un esfuerzo normal permisible de 12 MPa.

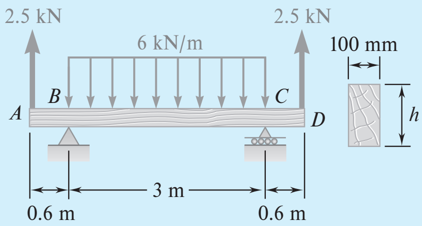


Figura P5.69

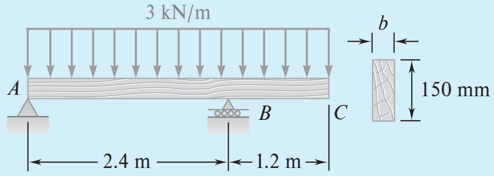


Figura P5.70

5.71 y 5.72 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero es de 24 ksi, seleccione la viga con el patín más ancho y más económica para soportar la carga mostrada.

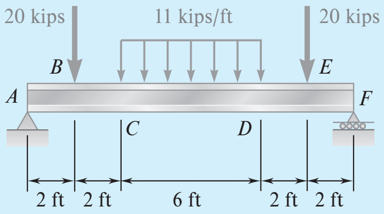


Figura P5.71

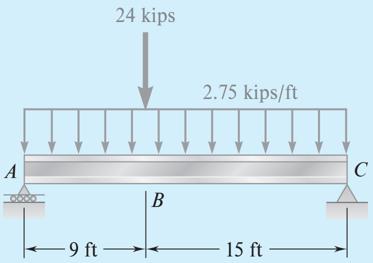


Figura P5.72

5.73 y 5.74 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero es de 160 MPa, seleccione la viga de aleta ancha más económica para soportar la carga mostrada.

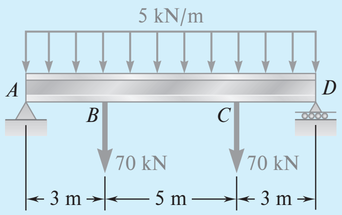


Figura P5.73

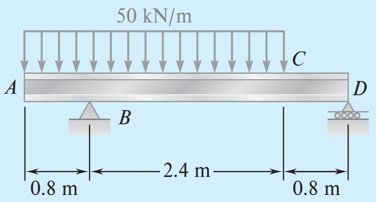


Figura P5.74

5.75 y 5.76 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero es de 24 ksi, seleccione la viga de perfil *S* más económica para soportar la carga mostrada.

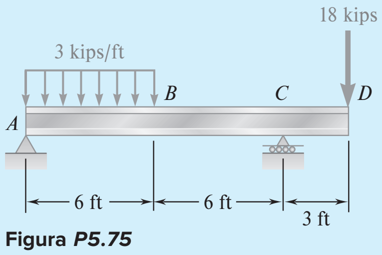


Figura *P5.75*

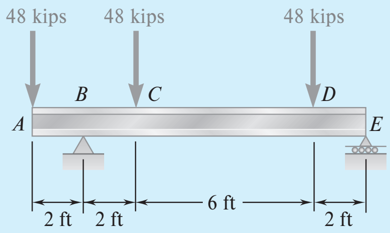


Figura P5.76

5.77 y 5.78 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero es de 160 MPa, seleccione la viga de perfil *S* más económica para soportar la carga mostrada.

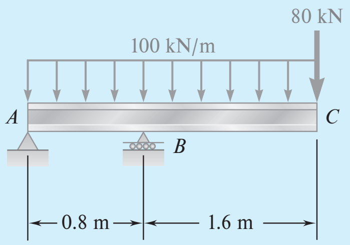


Figura P5.77

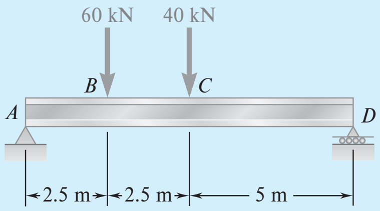


Figura *P5.78*

5.79 Un tubo de acero de 100 mm de diámetro tiene que soportar la carga mostrada. Si se sabe que los tubos disponibles tienen espesores que varían de 6 mm a 24 mm en incrementos de 3 mm, y que el esfuerzo normal permisible para el acero empleado es de 150 MPa, determine el espesor de pared mínimo t que se puede usar.

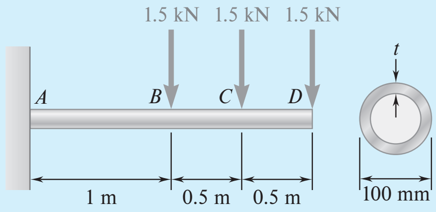


Figura P5.79

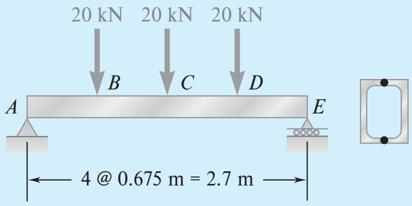


Figura P5.80

5.80 Se tienen que soldar dos canales métricos de acero laminado a lo largo de sus bordes para soportar la carga mostrada. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 150 MPa, determine los canales más económicos que se pueden usar.

5.81 Se tienen que soldar dos canales de acero laminado a tope y usarlos para soportar la carga mostrada. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero usado es de 30 ksi, determine los canales más económicos que se pueden usar.

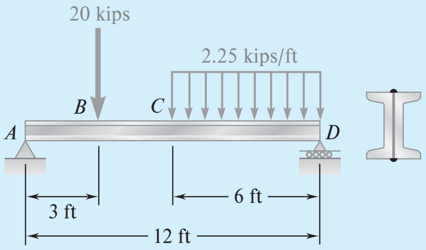


Figura P5.81

5.82 Dos ángulos de 4 × 3 de acero laminado se atornillan entre sí y se utilizan para soportar la carga mostrada. Si se sabe que el esfuerzo normal para el acero utilizado es de 24 ksi, determine el espesor mínimo de los ángulos que se puede utilizar.

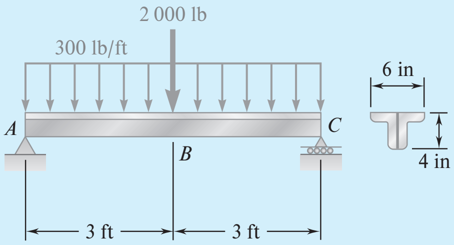


Figura P5.82

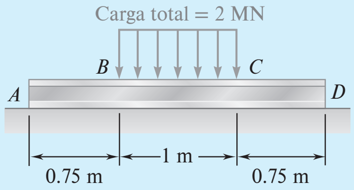


Figura P5.83

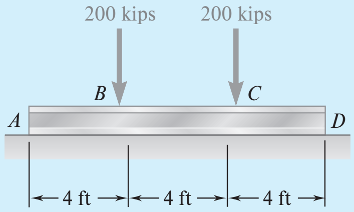


Figura P5.84

5.83 Suponiendo que la reacción dirigida hacia arriba del suelo es uniformemente distribuida y si se sabe que el esfuerzo normal para el acero empleado es de 170 MPa, seleccione la viga con el patín más ancho y más económica para soportar la carga mostrada.

5.84 Suponiendo que la reacción dirigida hacia arriba del suelo es uniformemente distribuida y si se sabe que el esfuerzo normal para el acero empleado es de 24 ksi, seleccione la viga de aleta ancha más económica para soportar la carga mostrada.

5.85 Determine la carga distribuida w más grande permisible para la viga mostrada, si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +80 MPa a tensión y de –130 MPa a compresión.

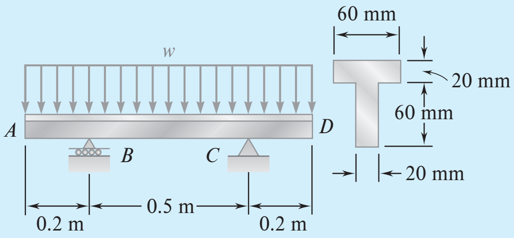


Figura P5.85

5.86 Resuelva el problema 5.85, suponiendo que la sección transversal de la viga se invierte, con el patín de la viga descansando en los apoyos B y C.

5.87 Determine el valor más grande permisible de **P** para la viga y carga mostradas, si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +8 ksi a tensión de –18 ksi a compresión.

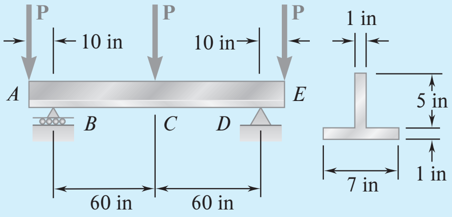


Figura *P5.87*

5.88 Resuelva el problema 5.87 suponiendo que la viga en T se invierte.

5.89 Las vigas AB, BC y CD tienen la sección transversal mostrada y están conectadas por pasadores en B y C. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +110 MPa a tensión y de –150 MPa a compresión, determine *a*) el valor más grande permisible de w si la viga BC no debe sobreesforzarse, *b*) la distancia máxima correspondiente a para la cual las vigas en voladizo AB y CD no se sobreesfuerzan.

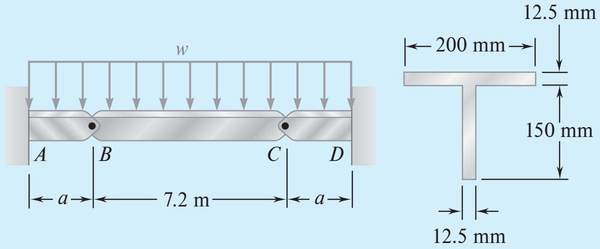


Figura P5.89

5.90 Las vigas AB, BC y CD tienen la sección transversal mostrada y están conectadas por pasadores en B y C. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +110 MPa a tensión y de –150 MPa a compresión, determine *a*) el valor más grande permisible de **P** si la viga BC no debe sobreesforzarse, *b*) la distancia máxima correspondiente a para la cual las vigas en voladizo AB y CD no se sobreesfuerzan.

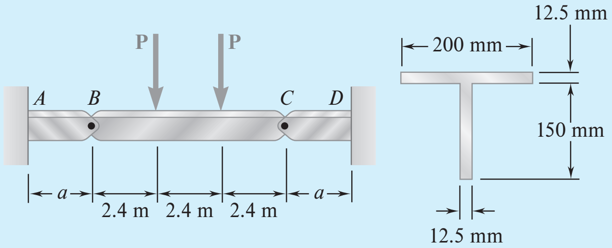


Figura *P5.90*

5.91 Cada una de las tres vigas de acero laminado mostradas (numeradas 1, 2, 3) debe soportar una carga uniformemente distribuida de 64 kips. Cada una de estas vigas tiene un claro de 12 ft y tiene que ser soportado por las dos trabes de acero laminado de 24 ft *AC* y *BD*. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, seleccione *a*) el perfil *S* más económico para las tres vigas, *b*) el perfil W más económico para las trabes.

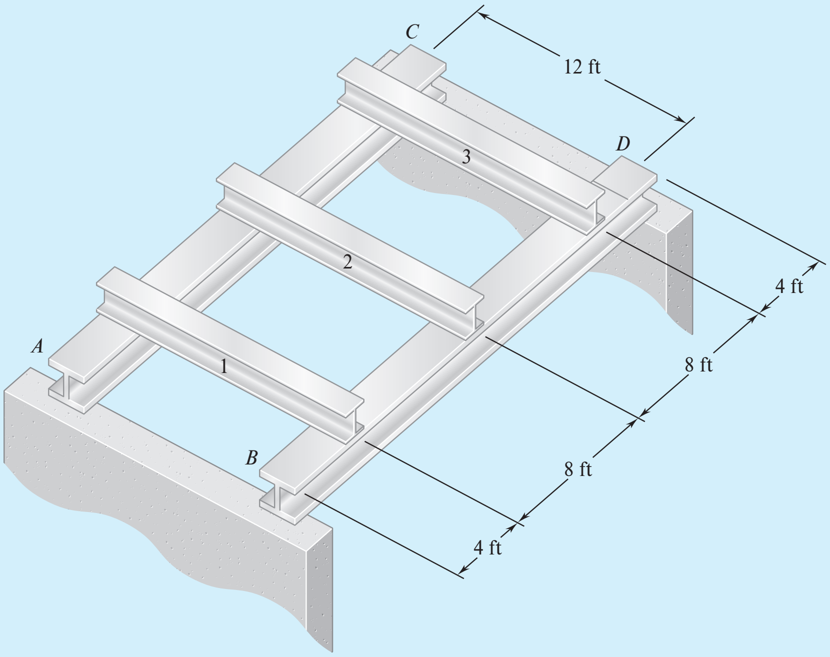


Figura P5.91

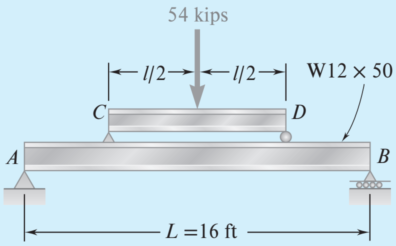


Figura P5.92

5.92 El centro del claro de 16 ft debe soportar una carga de 54 kips. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, determine *a*) la longitud *l* más pequeña permisible de la viga *CD* para que la viga *AB* W12 × 50 no esté sobreesforzada, *b*) el perfil W más económico que se puede usar para la viga *CD*. Ignore el peso de ambas vigas.

5.93 El claro de 6 m mostrado debe soportar una carga uniformemente distribuida de 66 kN/m. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 140 MPa, determine *a*) la longitud *l* más pequeña permisible de la viga *CD* para que la viga *AB* W460 × 74 no se sobreesfuerce, *b*) el perfil W más económico que se puede usar para la viga *CD*. Ignore el peso de ambas vigas.

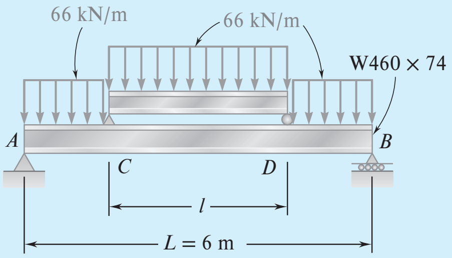


Figura *P5.93*

***5.94** Una estructura de techo se compone de madera contrachapada y material de cubierta soportada por varias vigas de madera de longitud $L = 16$ m. La carga muerta soportada por cada viga, incluyendo el peso estimado de la viga, puede ser representada por una carga uniformemente distribuida $w_D = 350$ N/m. La carga viva consiste en una carga de nieve representada por una carga uniformemente distribuida $w_L = 600$ N/m, y una carga concentrada **P** de 6 kN aplicada en el punto medio C de cada viga. Si se sabe que la resistencia última para la madera utilizada es $\sigma_U = 50$ MPa y que el ancho de la viga es $b = 75$ mm, determine el peralte h mínimo permisible de las vigas, utilizando DCFR con los factores de carga $\gamma_D = 1.2$, $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia $\phi = 0.9$.

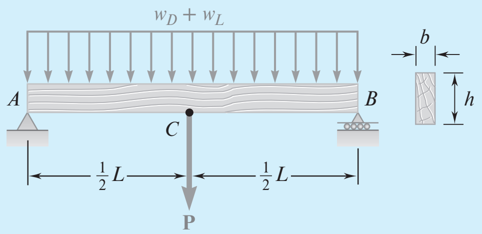


Figura P5.94

***5.95** Resuelva el problema 5.94, suponiendo que la carga concentrada **P** de 6 kN aplicada a cada viga es reemplazada por cargas concentradas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de 3 kN aplicadas a una distancia de 4 m de cada extremo de las vigas.

***5.96** Se va a construir un puente de longitud $L = 48$ ft sobre una carretera secundaria cuyo acceso a camiones está limitado a vehículos de dos ejes de peso mediano. Se compondrá de una losa de concreto y de vigas de acero simplemente apoyadas con una resistencia última $\sigma_U = 60$ ksi. El peso combinado de la losa y las vigas puede ser aproximado por medio de una carga uniformemente distribuida $w = 0.75$ kip/ft en cada viga. Por lo que atañe al diseño, se supone que un camión con ejes situados a una distancia $a = 14$ ft uno de otro será conducido a través del puente y que las cargas concentradas resultantes $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ ejercidas sobre cada viga podrían ser tan grandes como 24 kips y 6 kips, respectivamente. Determine el perfil con el patín más ancho y más económico para las vigas, utilizando DCFR con los factores de carga $\gamma_D = 1.25$, $\gamma_L = 1.75$ y el factor de resistencia $\phi = 0.9$ [*Sugerencia:* Se puede demostrar que el valor máximo de $|M_L|$ ocurre bajo la carga más grande cuando dicha carga se localiza a la izquierda del centro de la viga a una distancia igual a $aP_2/2(P_1 + P_2)$].

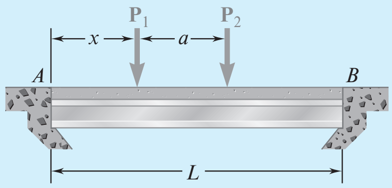


Figura P5.96

***5.97** Suponiendo que las cargas sobre los ejes delantero y trasero conservan la misma relación que para el camión del problema 5.96, determine un camión cuánto más pesado podría cruzar con seguridad el puente diseñado en ese problema.

*5.4 FUNCIONES DE SINGULARIDAD UTILIZADAS PARA DETERMINAR LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR

Observe que la fuerza cortante y el momento flector rara vez se pueden describir mediante solo funciones analíticas. En la viga en voladizo de la Aplicación de conceptos 5.2 (figura 5.8) que soportaba una carga uniformemente distribuida w, la fuerza cortante y el momento flector *se pudieron* representar mediante solo funciones analíticas de $V = -wx$ y $M = -\frac{1}{2}wx^2$. Esto se debió al hecho de que *no había discontinuidades* en la carga de la viga. Por otra parte, en la viga simplemente apoyada de la Aplicación de conceptos 5.1, la cual soportaba una carga solo en su punto medio C, la carga **P** aplicada en C representaba una *singularidad* en la carga de la viga. Esta singularidad produjo discontinuidades en la fuerza cortante y en el momento flector y se tuvieron que utilizar diferentes funciones analíticas para V y M en las partes de la viga a la izquierda y derecha del punto C. En el problema modelo 5.2, la viga se tuvo que dividir en tres partes, donde se utilizaron diferentes funciones para representar la fuerza cortante y el momento flector. Esto condujo a la representación gráfica de las funciones V y M provistas por los diagramas de fuerza cortante y momento flector, y más adelante en la sección 5.2, a un método de integración gráfico para determinar V y M a partir de la carga distribuida w.

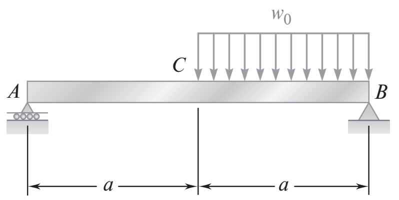


Figura 5.13 Viga simplemente apoyada.

En esta sección se demuestra cómo el uso de las *funciones de singularidad* hace posible representar la fuerza cortantes V y el momento flector M con solo expresiones matemáticas.

Considere la viga simplemente apoyada AB, con longitud de $2a$, que soporta una carga uniformemente distribuida w_0 que se extiende desde su punto medio C hasta su apoyo derecho B (figura 5.13). Primero, trace el diagrama de cuerpo libre de toda la viga (figura 5.14a). Al reemplazar la carga distribuida con una carga concentrada equivalente y realizando suma de momentos con respecto a B,

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (w_0 a)(\tfrac{1}{2}a) - R_A(2a) = 0 \qquad R_A = \tfrac{1}{4}w$$

A continuación, corte la viga en un punto D entre A y C. Según el diagrama de cuerpo libre de AD (figura 5.14b) y en el intervalo $0 < x < a$, la fuerza cortante y el momento flector son

$$V_1(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a \qquad \text{y} \qquad M_1(x) = \tfrac{1}{4}w_0 ax$$

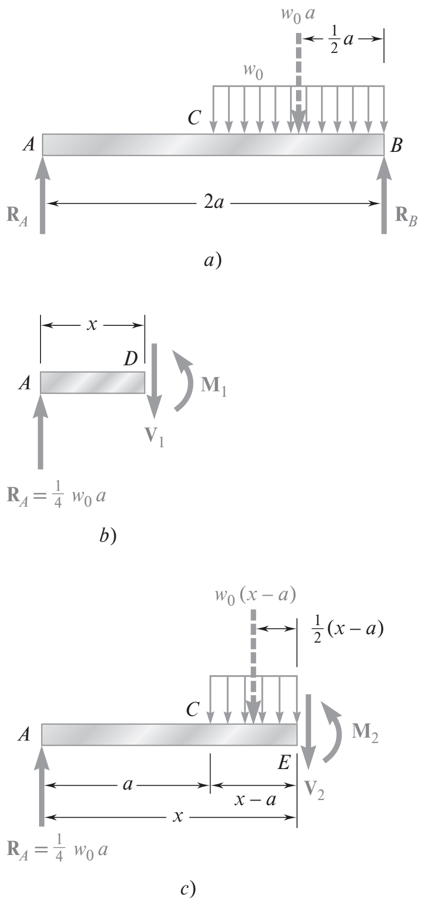


Figura 5.14 Diagramas de cuerpo libre en dos secciones requeridos para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

Al cortar la viga en un punto E entre C y B, trace el diagrama de cuerpo libre de la parte AE (figura 5.14c). Al reemplazar la carga distribuida con una carga concentrada equivalente,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0(x - a) - V_2 = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \qquad -\tfrac{1}{4}w_0 ax + w_0(x - a)[\tfrac{1}{2}(x - a)] + M_2 = 0$$

En el intervalo $a < x < 2a$, la fuerza cortante y el momento flector son

$$V_2(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0(x - a) \qquad \text{y} \qquad M_2(x) = \tfrac{1}{4}w_0 ax - \tfrac{1}{2}w_0(x - a)^2$$

El hecho de que la fuerza cortante y el momento flector estén representados por diferentes intervalos de x se debe a la discontinuidad en la carga de la viga. Sin embargo, $V_1(x)$ y $V_x(x)$ pueden ser representados por una sola función

$$V(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0\langle x - a\rangle \qquad \textbf{(5.11)}$$

Si se incluye el segundo término en los cálculos cuando $x \geq a$ y se omite cuando $x < a$). Por consiguiente, *los paréntesis angulares* $\langle\ \rangle$ *deben ser reemplazados por paréntesis ordinarios* () *cuando* $x \geq a$ *y por cero cuando* $x < a$. Utilizando esta convención, el momento flector se puede representar en cualquier punto de la viga como sigue

$$M(x) = \tfrac{1}{4}w_0 ax - \tfrac{1}{2}w_0\langle x - a\rangle^2 \qquad \textbf{(5.12)}$$

La función entre los paréntesis angulares $\langle\ \rangle$ se puede diferenciar o integrar como si los paréntesis angulares se reemplazaran con paréntesis ordinarios. En lugar de calcular el momento flector con diagramas de cuerpo libre, se podría utilizar el método indicado en la sección 5.2, donde la expresión obtenida para $V(x)$ se integra para obtener

$$M(x) - M(0) = \int_0^x V(x)\,dx = \int_0^x \tfrac{1}{4}w_0 a\,dx - \int_0^x w_0\langle x - a\rangle dx$$

Después de la integración y observando que $M(0) = 0$,

$$M(x) = \tfrac{1}{4}w_0 ax - \tfrac{1}{2}w_0\langle x - a\rangle^2$$

Además, utilizando la misma convención, la carga distribuida en cualquier punto de la viga se puede expresar como

$$w(x) = w_0\langle x - a\rangle^0 \qquad \textbf{(5.13)}$$

De hecho, los paréntesis angulares deben ser reemplazados por cero cuando $x < a$ y por paréntesis ordinarios cuando $x \geq a$. Así, $w(x) = 0$ para $x < a$ y mediante la definición de la potencia de cero de cualquier número como unidad $\langle x - a\rangle^0 = (x - a)^0 = 1$ y $w(x) = w_0$ para $x \geq a$. Recuerde que la fuerza cortante se podría haber obtenido integrando la función $-w(x)$. Al observar que $V = \tfrac{1}{4}w_0 a$ con $x = 0$,

$$V(x) - V(0) = -\int_0^x w(x)\,dx = -\int_0^x w_0\langle x - a\rangle^0\,dx$$

$$V(x) - \tfrac{1}{4}w_0 a = -\,w_0\langle x - a\rangle^1$$

Al resolver $V(x)$ y cancelando el exponente 1,

$$V(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0\langle x - a\rangle$$

Las expresiones $\langle x - a\rangle^0$, $\langle x - a\rangle$, $\langle x - a\rangle^2$ se llaman *funciones de singularidad*. Para $n \geq 0$,

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \qquad \textbf{(5.14)}$$

También observe que siempre que la cantidad entre paréntesis angulares es positivo o cero, los paréntesis deben reemplazarse con paréntesis comunes. Siempre que esa cantidad es negativa, los paréntesis angulares son cero.

Las tres funciones de singularidad correspondientes a $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$ se trazaron en la figura 5.15. Observe que la función $\langle x - a\rangle^0$ es discontinua en $x = a$ y tiene la forma de un "escalón". Por eso, se llama *función escalón*. De acuerdo con la ecuación (5.14) y utilizando la potencia cero de cualquier número como la unidad.[†]

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \qquad \textbf{(5.15)}$$

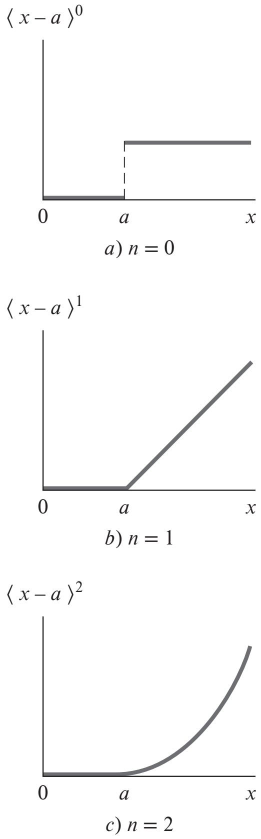


Figura 5.15 Funciones de singularidad.

[†] Dado que $\langle x - a\rangle^0$ es discontinua en $x - a$, se puede argumentar que esta función debe dejarse indefinida para $x = a$ o que se le deben asignar los valores 0 y 1 para $x = a$. Sin embargo, si se define $\langle x - a\rangle^0$ como igual a 1 cuando $x = a$, como se establece en la ecuación (5.15), tiene la ventaja de ser clara de expresión. Por lo tanto es fácil de aplicar a programación de computadora (vea la pág. 388).

De la definición de funciones de singularidad se concluye que

$$\int \langle x - a\rangle^n \, dx = \frac{1}{n+1}\langle x - a\rangle^{n+1} \quad \text{para } n \geq 0 \tag{5.16}$$

y

$$\frac{d}{dx}\langle x - a\rangle^n = n\langle x - a\rangle^{n-1} \quad \text{para } n \geq 1 \tag{5.17}$$

La mayoría de las cargas de viga encontradas en la práctica de ingeniería se pueden dividir en las cargas básicas mostradas en la figura 5.16. Cuando sea aplicable, las funciones correspondientes $w(x)$, $V(x)$ y $M(x)$ se expresan en términos de funciones de singularidad y se trazan con un fondo de color. Se utiliza un fondo de color más oscu-

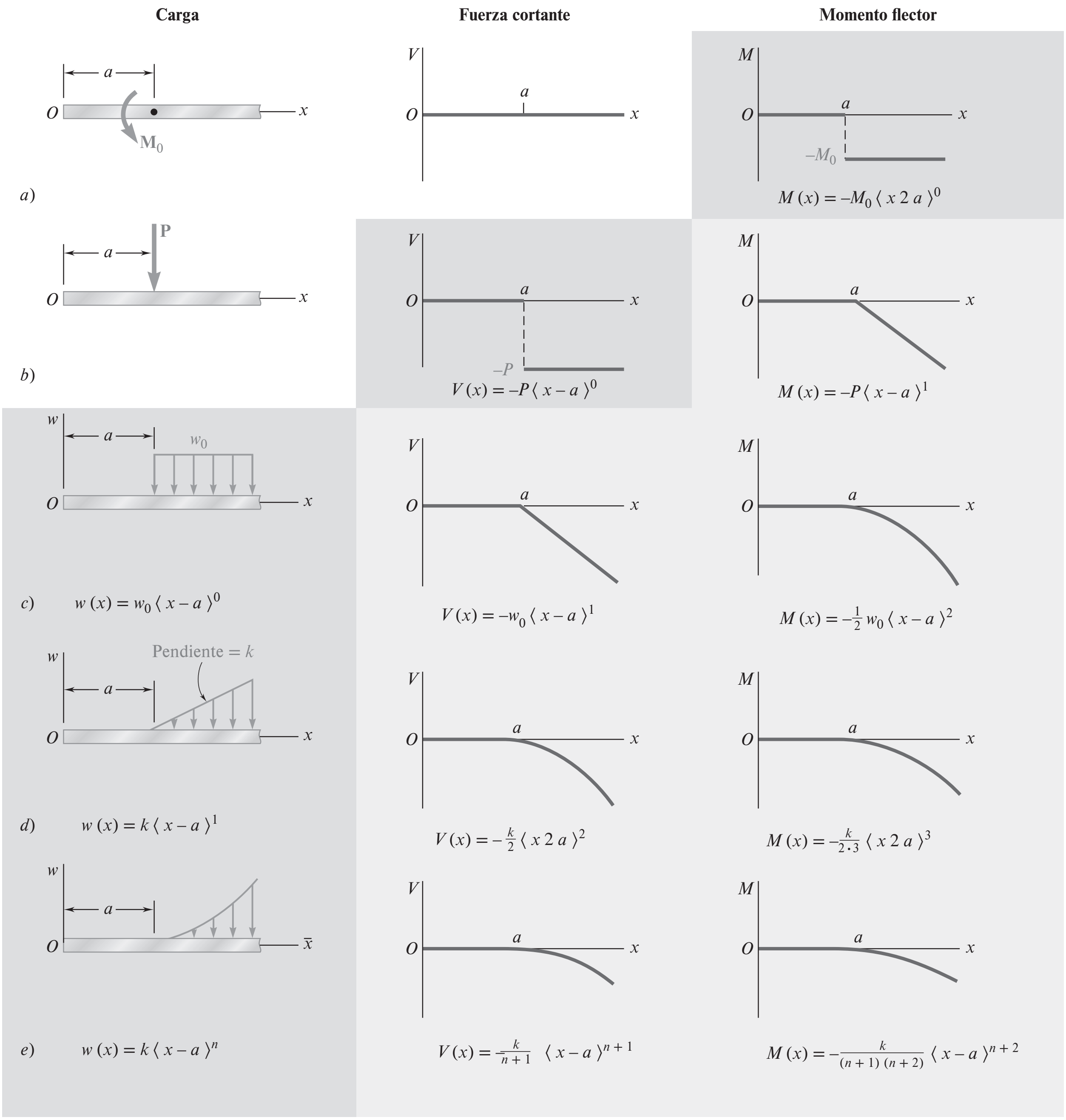


Figura 5.16 Cargas básicas, fuerzas cortantes y momentos flectores expresados en términos de funciones de singularidad.

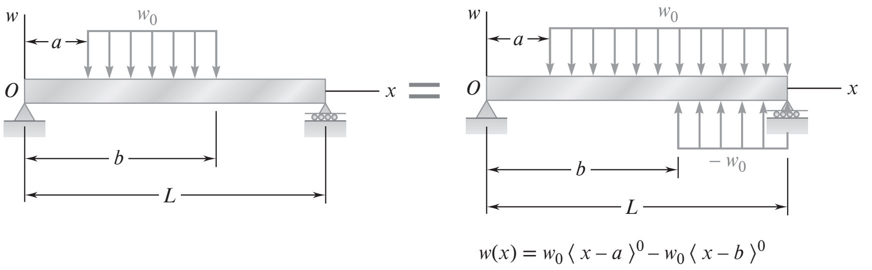


Figura 5.17 Uso de cargas de extremo abierto para crear una carga de extremo cerrado.

ro para indicar la expresión para cada carga, ya que es más fácil de obtener o recordar y a partir de la cual se pueden obtener otras funciones por integración.

Luego que una carga de viga dada se ha dividido en las cargas básicas de la figura 5.16, las funciones $V(x)$ y $M(x)$ que representan la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga se pueden obtener sumando las funciones correspondientes asociadas con cada una de las cargas básicas y reacciones. Como todas las cargas distribuidas mostradas en la figura 5.16 se abren hacia el extremo derecho, una carga distribuida que no se extienda hasta el extremo derecho de la viga o que es discontinua debe reemplazarse como se muestra en la figura 5.17 por una combinación equivalente de cargas de extremo abierto (vea también la Aplicación de conceptos 5.5 y el Problema modelo 5.9).

Como se verá en el capítulo 9, el uso de funciones de singularidad también simplifica la determinación de deflexiones de vigas. Fue en conexión con ese problema que el método empleado en esta sección fue sugerido por primera vez en 1862 por el matemático alemán A. Clebsch (1833-1872). Sin embargo, es al matemático e ingeniero británico W. H. Macaulay (1853-1936) a quien por lo general se le otorga el crédito por introducir las funciones de singularidad en la forma que aquí se emplea, y los corchetes se llaman *corchetes de Macaulay*.†

Aplicación de conceptos 5.5

Para la viga y carga mostradas (figura 5.18*a*) y utilizando funciones de singularidad, exprese la fuerza cortante y el momento flector como funciones de la distancia x desde el apoyo en A.

Determine la reacción en A trazando el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 5.18*b*) y escriba

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -A_y(3.6\text{ m}) + (1.2\text{ kN})(3\text{ m}) + (1.8\text{ kN})(2.4\text{ m}) + 1.44\text{ kN}\cdot\text{m} = 0$$

$$A_y = 2.60\text{ kN}$$

A continuación, reemplace la carga distribuida dada por dos cargas de extremo abierto equivalentes (figura 5.18*c*) y exprese la carga distribuida $w(x)$ como la suma de las funciones escalón correspondientes:

$$w(x) = +w_0\langle x-0.6\rangle^0 - w_0\langle x-1.8\rangle^0$$

La función $V(x)$ se obtiene integrando $w(x)$, invirtiendo los signos + y los signos –, y sumando al resultado las constantes A_y y $-P\langle x-0.6\rangle^0$, la cual representa las contribuciones respectivas a la fuerza cortante de la reacción en A y de la carga concentrada. (No se requiere ninguna otra constante de integra-

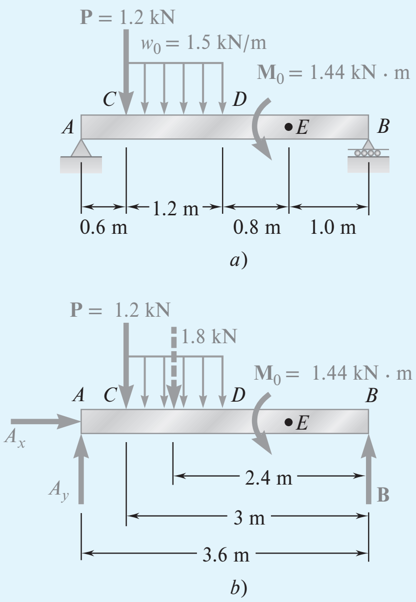
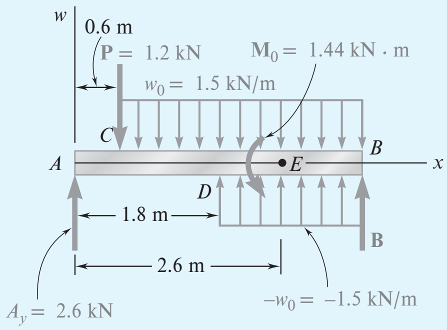


Figura 5.18 *a*) Viga simplemente apoyada con múltiples cargas. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

† W. H. Macaulay, "Note on the Deflection of Beams", *Messenger of Mathematics*, vol. 48, págs. 129-130, 1919.



c)

Figura 5.18 (*cont.*) c) Superposición de cargas distribuidas.

ción). Como el momento concentrado no afecta directamente a la fuerza cortante, se debe omitir en este cálculo.

$$V(x) = -w_0\langle x - 0.6\rangle^1 + w_0\langle x - 1.8\rangle^1 + A_y - P\langle x - 0.6\rangle^0$$

Asimismo, se obtiene la función $M(x)$ integrando $V(x)$ y sumando el resultado a la constante $-M_0\langle x - 2.6\rangle^0$, la cual representa la contribución del momento concentrado en el momento flector. Tenemos

$$M(x) = -\tfrac{1}{2}w_0\langle x - 0.6\rangle^2 + \tfrac{1}{2}w_0\langle x - 1.8\rangle^2$$
$$+ A_y x - P\langle x - 0.6\rangle^1 - M_0\langle x - 2.6\rangle^0$$

Al sustituir los valores numéricos de la reacción y las cargas en las expresiones para $V(x)$ y $M(x)$ y teniendo cuidado de *no* calcular cualquier producto o expandir cualquier cuadrado que implique un corchete, las expresiones para la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga son

$$V(x) = -1.5\langle x - 0.6\rangle^1 + 1.5\langle x - 1.8\rangle^1 + 2.6 - 1.2\langle x - 0.6\rangle^0$$
$$(x) = -0.75\langle x - 0.6\rangle^2 + 0.75\langle x - 1.8\rangle^2$$
$$2.6x - 1.2\langle x - 0.6\rangle^1 - 1.44\langle x - 2.6\rangle^0$$

Aplicación de conceptos 5.6

Para la viga y la carga de la sección Aplicación de conceptos 5.5, determine los valores numéricos de la fuerza cortante y el momento flector en el punto central *D*.

Al hacer $x = 1.8$ m en las ecuaciones encontradas para $V(x)$ y $M(x)$ en la Aplicación de conceptos 5.5,

$$V(1.8) = -1.5\langle 1.2\rangle^1 + 1.5\langle 0\rangle^1 + 2.6 - 1.2\langle 1.2\rangle^0$$
$$M(1.8) = -0.75\langle 1.2\rangle^2 + 0.75\langle 0\rangle^2 + 2.6(1.8) - 1.2\langle 1.2\rangle^1 - 1.44\langle 2\ 0.8\rangle^0$$

Recuerde que siempre que una cantidad entre corchetes angulares es positiva o cero, los corchetes deben reemplazarse por paréntesis ordinarios, y siempre que la cantidad es negativa, el corchete es igual a cero, así que

$$V(1.8) = -1.5(1.2)^1 + 1.5(0)^1 + 2.6 - 1.2(1.2)^0$$
$$= -1.5(1.2) + 1.5(0) + 2.6 - 1.2(1)$$
$$= -1.8 + 0 + 2.6 - 1.2$$
$$V(1.8) = -0.4 \text{ kN}$$

y

$$M(1.8) = -0.75(1.2)^2 + 0.75(0)^2 + 2.6(1.8) - 1.2(1.2)^1 - 1.44(0)$$
$$= -1.08 + 0 + 4.68 - 1.44 - 0$$
$$M(1.8) = +2.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Aplicación a programación por computadora. Las funciones de singularidad se adecuan particularmente bien al uso de las computadoras. Primero, observe que la función escalón $\langle x - a\rangle^0$, la cual se representará con el símbolo STP, se puede definir mediante una instrucción IF/THEN/ELSE como igual a 1 para $X \geq$ A y a 0 de lo contrario. Cualquier otra función de singularidad $\langle x - a\rangle^n$, con $n \geq 1$, se puede expresar con el producto de la función algebraica ordinaria $(x - a)^n$ por la función escalón $\langle x - a\rangle^0$.

Cuando k diferentes funciones de singularidad están involucradas (tales como $\langle x - a_i \rangle^n$, donde $i = 1, 2,..., k$) las funciones escalón correspondientes (STP(I), donde I = 1, 2,..., K) se pueden definir mediante un lazo que contenga una instrucción IF/THEN/ELSE única.

Problema modelo 5.9

Para la viga y la carga mostradas determine *a*) las ecuaciones que definan la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto y *b*) la fuerza cortante y el momento flector en los puntos C, D y E.

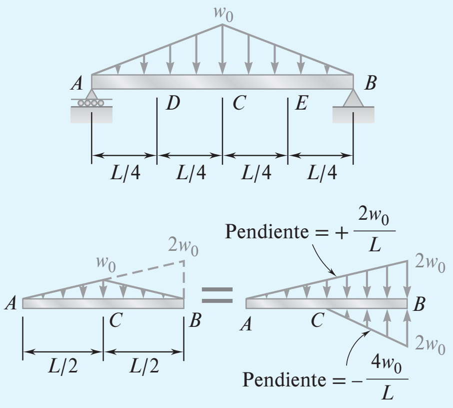


Figura 1 Representación de la carga distribuida como la superposición de dos cargas distribuidas.

ESTRATEGIA: Después de determinar las reacciones en los apoyos, puede escribir las ecuaciones para w, V y M, comenzando a partir del extremo izquierdo de la viga. Cualquier cambio súbito en estos parámetros después del extremo izquierdo se puede acomodar sumando las funciones de singularidad apropiadas.

MODELAR y ANALIZAR:

Reacciones. La carga total es $\frac{1}{2}w_0L$. Debido a la simetría, cada reacción es igual a la mitad de ese valor, esto es, $\frac{1}{4}w_0L$.

Carga distribuida. La carga distribuida dada es reemplazada por dos cargas distribuidas equivalentes como se muestra en las figuras 1 y 2. Utilizando una función de singularidad para expresar la segunda carga,

$$w(x) = k_1 x + k_2\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle = \frac{2w_0}{L}x - \frac{4w_0}{L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle \qquad (1)$$

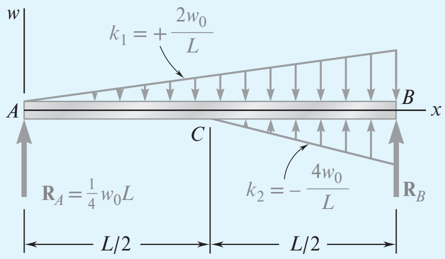


Figura 2 Cuerpo libre de la viga con una carga distribuida equivalente.

***a*) Ecuaciones para la fuerza cortante y el momento flector.** $V(x)$ se obtiene integrando la ecuación (1), cambiando los signos y sumando una constante igual a R_A:

$$V(x) = -\frac{w_0}{L}x^2 + \frac{2w_0}{L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad (2)$$

$M(x)$ se obtiene integrando la ecuación (2). Como no hay momento concentrado, no se requiere una constante de integración, por lo tanto

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx \qquad (3)$$

***b*) Fuerza cortante y momento flector en *C*, *D* y *E* (figura 3)**

En el punto C: Con $x = \frac{1}{2}L$ en las ecuaciones (2) y (3) y recordando que siempre que una cantidad entre paréntesis angulares es positiva o cero, los corchetes pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios:

$$V_C = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{1}{2}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle 0\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_C = 0$$

$$M_C = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{1}{2}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle 0\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{1}{2}L) \qquad M_C = \frac{1}{12}w_0L^2$$

En el punto D: Con $x = \frac{1}{4}L$ en las ecuaciones (2) y (3) y al recordar que un corchete que contiene una cantidad negativa es igual a cero se obtiene

$$V_D = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{1}{4}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle 2\ \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_D = \frac{3}{16}w_0L$$

$$M_D = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{1}{4}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle 2\ \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{1}{4}L) \qquad M_D = \frac{11}{192}w_0L^2$$

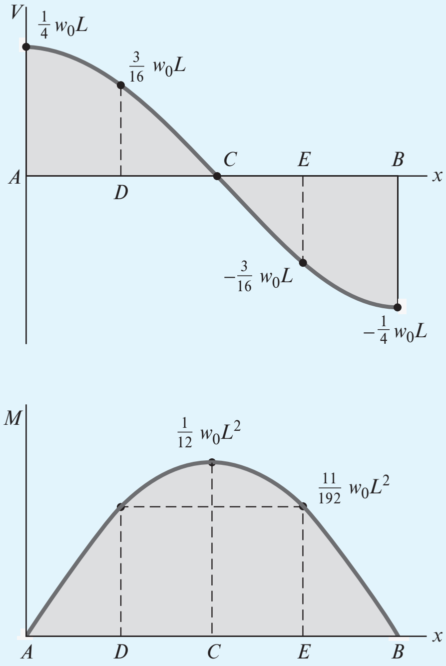


Figura 3 Diagramas de fuerza cortante y momento flector.

En el punto E: Con $x = \frac{3}{4}L$ en las ecuaciones (2) y (3) se obtiene

$$V_E = -\frac{w_0}{L}\left(\tfrac{3}{4}L\right)^2 + \frac{2w_0}{L}\left\langle\tfrac{1}{4}L\right\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_E = -\frac{3}{16}w_0L$$

$$M_E = -\frac{w_0}{3L}\left(\tfrac{3}{4}L\right)^3 + \frac{2w_0}{3L}\left\langle\tfrac{1}{4}L\right\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L\left(\tfrac{3}{4}L\right) \qquad M_E = \frac{11}{192}w_0L^2$$

Problema modelo 5.10

La barra rígida *DEF* se suelda en el punto *D* a la viga de acero *AB*. Para la carga mostrada, determine *a*) las ecuaciones que definen la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga, *b*) la ubicación y magnitud de momento flector máximo.

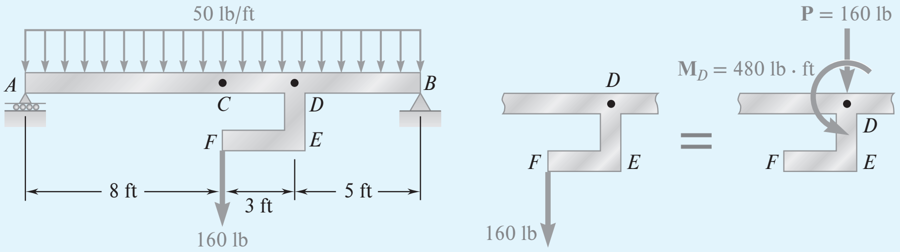


Figura 1 Modelado de la fuerza en *F* como un sistema de fuerza-momento equivalente en *D*.

ESTRATEGIA: Puede comenzar determinando primero las reacciones en los apoyos y reemplazando la carga que actúa en el apéndice *DEF* con un sistema de fuerza-momento equivalente. Entonces puede escribir ecuaciones para *w*, *V* y *M*, comenzando a partir del extremo izquierdo de la viga. Cualquier cambio repentino en estos parámetros después del extremo izquierdo se puede incluir sumando las funciones de singularidad adecuadas.

MODELAR y ANALIZAR:

Reacciones. Considere la viga y la barra como un cuerpo libre y observe que la carga total es de 960 lb. Debido a la simetría, cada reacción es igual a 480 lb.

Diagrama de carga modificado. Reemplace la carga de 160 lb aplicada en *F* por un sistema de fuerza-momento equivalente en *D* (figuras 1 y 2). Así, se obtiene un diagrama de carga integrado por un momento concentrado y tres cargas concentradas (incluyendo dos reacciones), y una carga uniformemente distribuida

$$w(x) = 50 \text{ lb/ft} \tag{1}$$

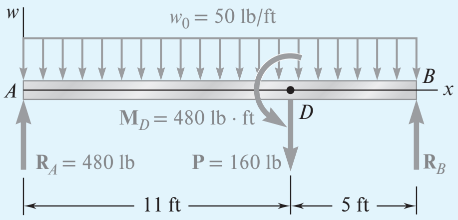


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la viga, con un sistema de fuerza-momento en *D*.

***a*) Ecuaciones para la fuerza cortante y el momento flector.** $V(x)$ se obtiene integrando la ecuación (1), cambiando el signo y sumando constantes que representen las contribuciones respectivas de $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{P}$ la fuerza cortante. Como $\mathbf{P}$ afecta a $V(x)$ cuando x es mayor que 11 ft, use una función escalón para expresar su contribución.

$$V(x) = -50x + 480 - 160\langle x - 11\rangle^0 \tag{2}$$

Obtenga $M(x)$ integrando la ecuación (2) y utilizando una función escalonada para representar la contribución del momento concentrado M_D:

$$M(x) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \qquad (3)$$

***b)* Momento flector máximo.** Como M es máximo o mínimo cuando $V = 0$, haga $V = 0$ en la ecuación (2) y resuélvala para x para localizar el momento flector máximo. Considerando primero valores de x menores que 11 ft, y observando que para esos valores los paréntesis angulares son iguales a cero:

$$-50x + 480 = 0 \qquad x = 9.60 \text{ ft}$$

Considerando valores de x mayores que 11 ft, para los cuales el corchete es igual a 1:

$$-50x + 480 - 160 = 0 \qquad x = 6.40 \text{ ft}$$

Como este valor *no* es mayor que 11 ft, debe rechazarse. Por lo tanto, el valor de x correspondiente al momento flector máximo es

$$x_m = 9.60 \text{ ft}$$

Al sustituir este valor de x en la ecuación (3),

$$M_{\text{máx}} = -25(9.60)^2 + 480(9.60) - 160\langle -1.40\rangle^1 - 480\langle -1.40\rangle^0$$

y al recordar que los corchetes que contienen una cantidad negativa son iguales a cero,

$$M_{\text{máx}} = -25(9.60)^2 + 480(9.60) \qquad M_{\text{máx}} = 2\,304 \text{ lb·ft}$$

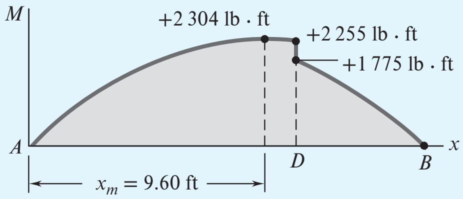


Figura 3 Diagrama de momento flector.

El diagrama de momento flector se trazó en la figura 3. Observe que la discontinuidad en el punto D se debe al momento concentrado aplicado en ese punto. Los valores de M justo a la izquierda y justo a la derecha de D se obtienen con $x = 11$ en la ecuación (3) y reemplazando la función escalón $\langle x - 11\rangle^0$ por 0 y 1, respectivamente.

Problemas

5.98 a 5.100 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen la fuerza cortante y el momento flector para la viga y carga mostradas. *b*) Use la ecuación obtenida para M y determine el momento flector en el punto C, y compruebe su respuesta con el diagrama libre de toda la viga.

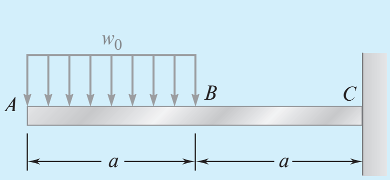


Figura P5.98

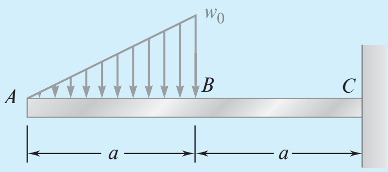


Figura *P5.99*

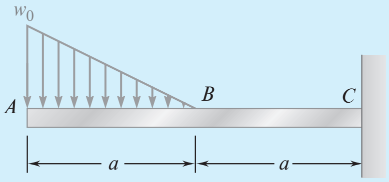


Figura P5.100

***5.101* a 5.103** *a*) Use funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el momento flector para la viga y carga mostradas. *b*) Utilice la ecuación obtenida para M y determine el momento flector en el punto E, y compruebe su respuesta al trazar el diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga a la derecha de E.

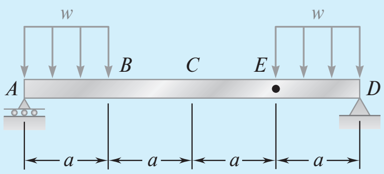


Figura *P5.101*

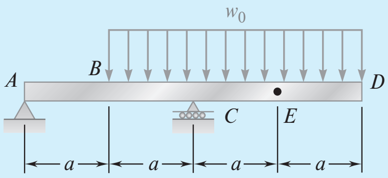


Figura P5.102

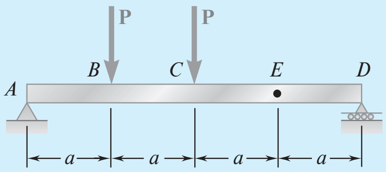


Figura P5.103

5.104 y 5.105 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen la fuerza cortante y el momento flector para la viga ABC sometida a la carga mostrada. *b*) Use la ecuación obtenida para M para determinar el momento flector justo a la derecha del punto B.

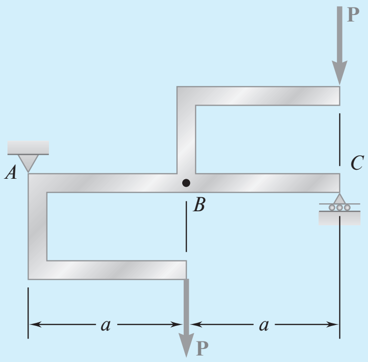


Figura P5.104

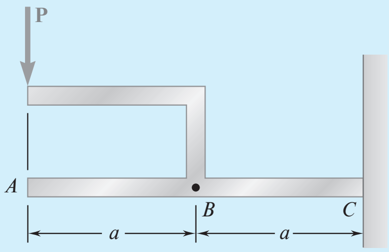


Figura P5.105

5.106 A 5.109 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir ecuaciones para la fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas. *b*) Determine el valor máximo del momento flector en la viga.

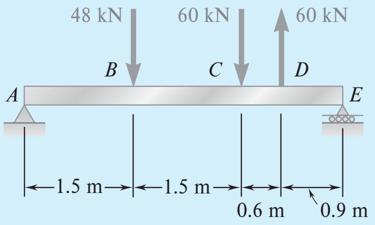


Figura P5.106

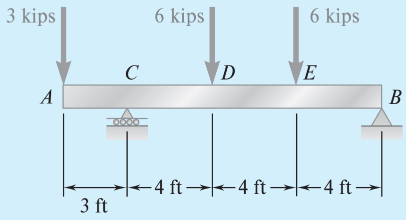


Figura P5.107

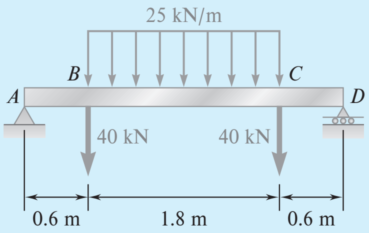


Figura P5.108

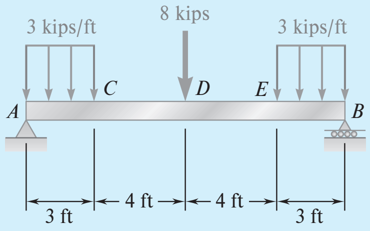


Figura P5.109

5.110 y *5.111* *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones para la fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

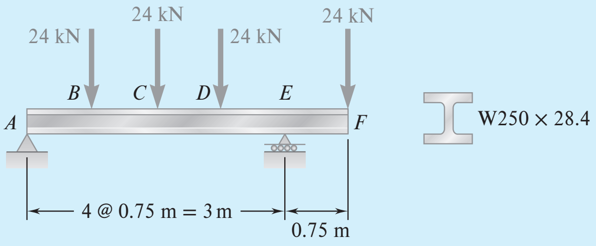


Figura P5.110

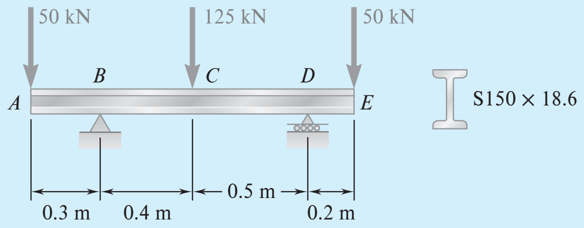


Figura *P5.111*

5.112* y *5.113 *a*) Utilice funciones de singularidad para determinar la magnitud y ubicación del momento flector máximo para la viga y carga mostradas. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo producido por la flexión.

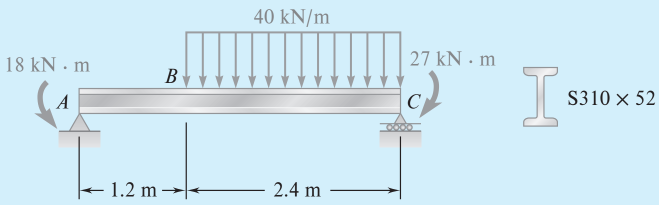


Figura *P5.112*

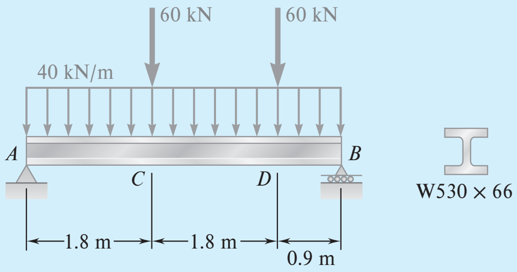


Figura *P5.113*

5.114 y 5.115 Se va a diseñar una viga con los apoyos y carga mostrados. *a*) Utilice funciones de singularidad para determinar la magnitud y localización del momento flector máximo en la viga. *b*) Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero que se va utilizar es de 24 ksi, determine el perfil de aleta ancha más económico que se puede usar.

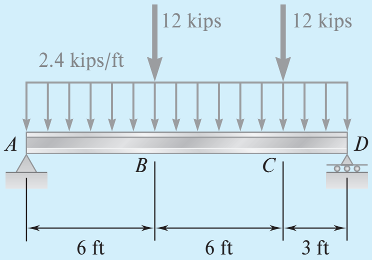


Figura P5.114

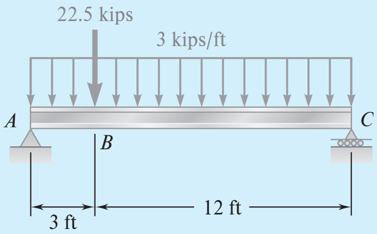


Figura P5.115

***5.116* y 5.117** Se va a diseñar una viga de madera con los apoyos y carga mostrados. *a*) Utilice funciones de singularidad para determinar la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en la viga. *b*) Si el material disponible consiste en una viga con esfuerzo normal permisible de 12 MPa y una sección transversal rectangular de 30 mm de ancho y peralte h que varía de 80 mm a 160 mm en incrementos de 10 mm, determine la sección transversal más económica que se puede usar.

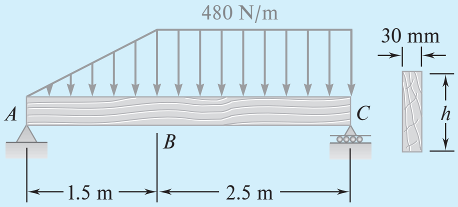


Figura *P5.116*

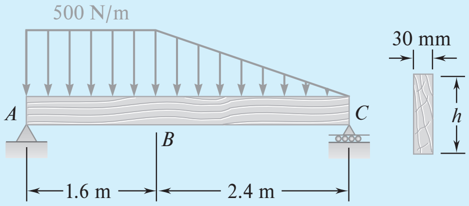


Figura P5.117

5.118 a *5.121* Utilice una computadora y funciones escalón para calcular la fuerza cortante y el momento flector para la viga y carga mostradas. Use el incremento especificado ΔL, iniciando en el punto A y terminando en el apoyo derecho.

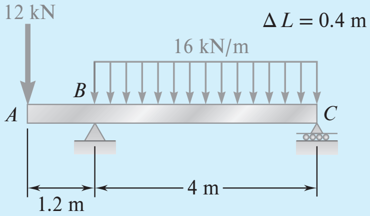


Figura P5.118

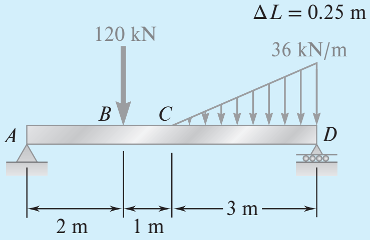


Figura P5.119

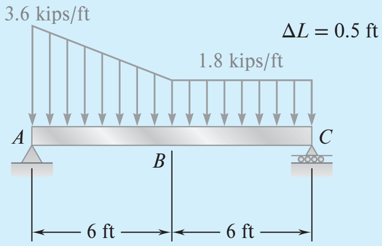


Figura P5.120

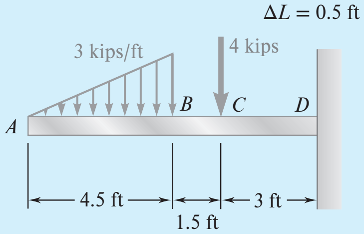


Figura *P5.121*

5.122 y 5.123 Para la viga con la carga mostrada, y utilizando una computadora y funciones escalón, *a*) tabule la fuerza cortante, el momento flector y el esfuerzo normal máximo en secciones de la viga desde $x = 0$ hasta $x = L$, utilizando los incrementos ΔL indicados, *b*) utilizando incrementos más pequeños si es necesario, determine con una precisión de 2% el esfuerzo normal máximo en la viga. Coloque el origen del eje x en el extremo A de la viga.

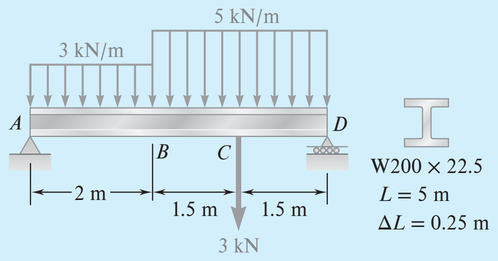


Figura P5.122

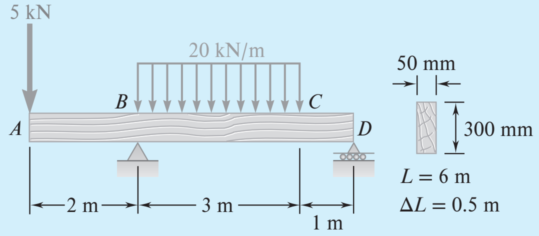


Figura P5.123

5.124 y *5.125* Para la viga con la carga mostrada, y utilizando una computadora y funciones escalón, *a*) tabule la fuerza cortante, el momento flector y el esfuerzo normal máximo en secciones de la viga desde $x = 0$ hasta $x = L$, utilizando los incrementos ΔL indicados, *b*) utilizando incrementos más pequeños si es necesario, determine con una precisión de 2% el esfuerzo normal máximo en la viga. Coloque el origen del eje x en el extremo A de la viga.

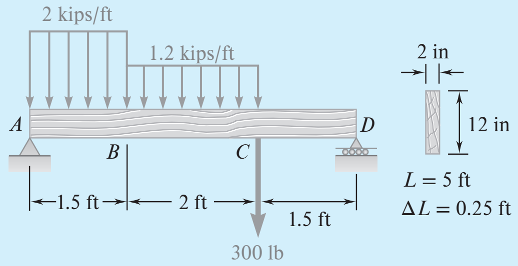


Figura P5.124

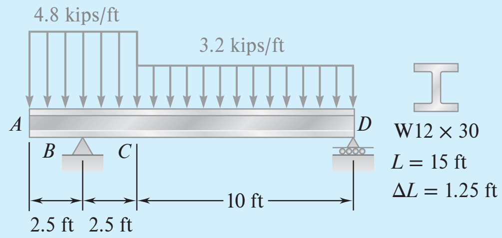


Figura *P5.125*

*5.5 VIGAS NO PRISMÁTICAS

Las vigas prismáticas, es decir, las de sección transversal uniforme, se diseñan de modo que los esfuerzos normales en sus secciones críticas sean como máximo iguales al valor permisible del esfuerzo normal para el material que se está utilizando. En todas las demás secciones, los esfuerzos normales serán más pequeños (posiblemente mucho más pequeños) que su valor permisible. Por lo tanto, una viga prismática casi siempre se sobrediseña, y utilizando vigas no prismáticas se logran ahorros considerables. Los claros continuos mostrados en la fotografía 5.2 son ejemplos de vigas no prismáticas.

Por lo general los esfuerzos máximos σ_m controlan el diseño de una viga, el diseño de una viga no prismática es óptimo si el módulo de sección $S = I/c$ de cada sección transversal satisface la ecuación (5.3). Al resolver esta ecuación para S,

$$S = \frac{|M|}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.18}$$

Una viga diseñada de esta manera es una *viga de resistencia constante*.

Para un componente de máquina o estructural forjado o fundido, es posible variar la sección transversal de la componente a lo largo de su longitud y eliminar la mayor parte del material innecesario (vea la Aplicación de conceptos 5.7). Para una viga de madera o de acero laminado, no es posible variar la sección transversal de la viga. Pero se logran ahorros considerables de material pegando tablones de madera de longitudes apropiadas a una viga de madera (vea el Problema modelo 5.11) y utilizando cubreplacas en las partes de una viga de acero laminado donde el momento flector es grande (vea el Problema modelo 5.12).

Fotografía 5.2 Puente soportado por vigas no prismáticas.

Aplicación de conceptos 5.7

Una placa de aluminio fundido de espesor uniforme b debe soportar una carga uniformemente distribuida w como se muestra en la figura 5.19. *a*) Determine el perfil de la placa que permitirá el diseño más económico. *b*) Si el esfuerzo normal permisible para el aluminio utilizado es de 72 MPa y $b = 40$ mm, $L = 800$ mm y $w = 135$ kN/m, determine el peralte máximo h_0 de la placa.

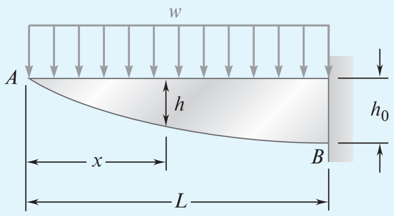


Figura 5.19 Viga en voladizo no prismática que soporta una carga uniformemente distribuida.

Momento flector. Mida la distancia x desde A y observe que $V_A = M_A = 0$; use las ecuaciones (5.6) y (5.8) para determinar

$$V(x) = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$M(x) = \int_0^x V(x)\,dx = -\int_0^x wx\,dx = -\tfrac{1}{2}wx^2$$

a) Perfil de la placa. Recuerde que el módulo S de una sección transversal rectangular de ancho b y peralte h es $S = \frac{1}{6}bh^2$. Introduciendo este valor en la ecuación (5.18) y resolviendo h^2,

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{\text{perm}}} \qquad \textbf{(5.19)}$$

y después de sustituir $|M| = \frac{1}{2}wx^2$,

$$h^2 = \frac{3wx^2}{b\sigma_{\text{perm}}} \quad \text{o} \quad h = \left(\frac{3w}{b\sigma_{\text{perm}}}\right)^{1/2} x \qquad \textbf{(5.20)}$$

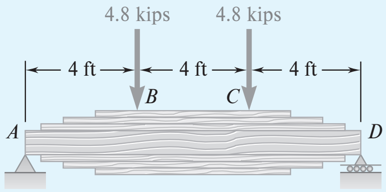
Dado que la relación entre h y x es lineal, el borde inferior de la placa es una línea recta. Así, la placa que proporciona el diseño más económico es el de *forma triangular*.

b) Peralte máximo h_0. Con $x = L$ en la ecuación (5.20) y al sustituir los datos dados,

$$h_0 = \left[\frac{3(135\text{ kN/m})}{(0.040\text{ m})(72\text{ MPa})}\right]^{1/2}(800\text{ mm}) = 300\text{ mm}$$

Problema modelo 5.11

Una viga de madera de 12 ft de largo con un esfuerzo normal permisible de 2.40 ksi y un esfuerzo cortante permisible de 0.40 ksi debe soportar dos cargas de 4.8 kips localizadas en sus terceros puntos. Como se demostrará en el capítulo 6, esta viga de sección transversal rectangular uniforme, de 4 in de ancho y 4.5 in de peralte, satisface el requisito de esfuerzo cortante permisible. Dado que una viga como esa no satisfaría el requisito de esfuerzo normal permisible, se reforzará pegándole tablones de la misma madera de 4 in de ancho y 1.25 in de espesor, en las caras superior e inferior de la viga de una manera simétrica. Determine *a*) el número requerido de pares de tablones y *b*) la longitud de los tablones en cada par que darán el diseño más económico.



ESTRATEGIA: Dado que el momento es máximo y constante entre las dos cargas concentradas (debido a la simetría), se puede analizar esta región para determinar el número total de tablones requerido. También es posible determinar los puntos de corte para cada par de tablones considerando el rango para el cual cada par de refuerzos, combinado con el resto de la sección, satisface el esfuerzo normal permisible especificado.

MODELAR y ANALIZAR:

Momento flector. Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 1) y determine las expresiones para el momento flector.

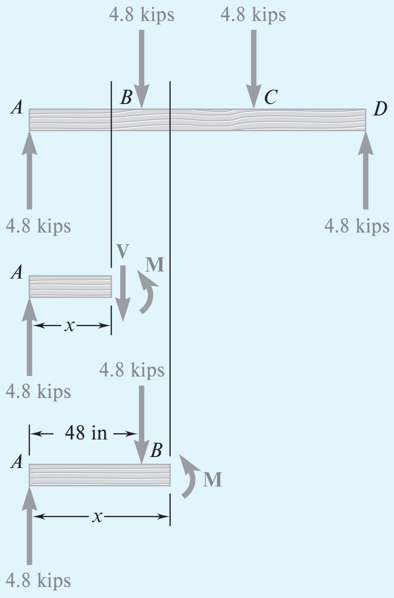


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre de toda la viga y secciones.

De A a B ($0 \leq x \leq 48$ in): $M = (4.80 \text{ kips})x$
De B a C (48 in $\leq x \leq 96$ in):

$$M = (4.80 \text{ kips})x - (4.80 \text{ kips})(x - 48 \text{ in}) = 230.4 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

***a)* Número de pares de tablones.** Determine el peralte total de la viga reforzada entre B y C. Recuerde de la sección 5.3 que $S = \frac{1}{6}bh^2$ para una viga de sección transversal rectangular de ancho b y peralte h. Al sustituir este valor en la ecuación (5.19),

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{\text{perm}}} \qquad (1)$$

Al sustituir el valor obtenido para M de B a C y los valores dados de b y σ_{perm},

$$h^2 = \frac{6(230.4 \text{ kip} \cdot \text{in})}{(4 \text{ in})(2.40 \text{ ksi})} = 144 \text{ in}^2 \qquad h = 12.00 \text{ in}$$

Como el peralte de la viga original es de 4.50 in, los tablones deben proporcionar un peralte adicional de 7.50 in. Al recordar que el espesor de cada par de tablones es de 2.50 in,

Número de pares de tablones requerido = 3 ◀

***b)* Longitud de los tablones.** El momento flector determinado en la parte AB de la viga fue $M = (4.80 \text{ kips})$. Al sustituir esta expresión y los valores dados de b y σ_{perm} en la ecuación (1) y luego resolviendo x, se obtiene

$$x = \frac{(4 \text{ in})(2.40 \text{ ksi})}{6\,(4.80 \text{ kips})}h^2 \qquad x = \frac{h^2}{3 \text{ in}} \qquad (2)$$

La ecuación (2) define la distancia máxima x desde el extremo A en el cual un peralte dado h de la sección transversal es aceptable (figura 2). Como $h = 4.50$ in, puede determinar la distancia x_1 desde A en la cual la viga prismática original es segura: $x_1 = 6.75$ in. Desde ese punto en adelante, la viga original debe reforzarse con el primer par de tablones. Como $h = 4.50 \text{ in} + 2.50 \text{ in} = 7.00$ in se obtiene la distancia $x_2 = 16.33$ in a partir del cual el segundo par de tablones debe usarse, y al hacer $h = 9.50$ in se obtiene la distancia $x_3 = 30.08$ a partir del cual el tercer par de tablones debe usarse. La longitud l_i de los tablones del par i, donde $i = 1, 2, 3$, se obtiene restando $2x_i$ de la longitud de 144 in de la viga.

$l_1 = 130.5$ in, $l_2 = 111.3$ in, $l_3 = 83.8$ in ◀

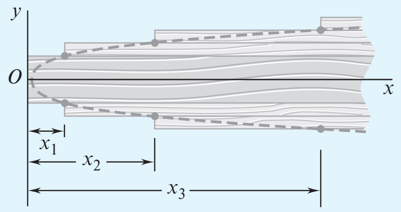
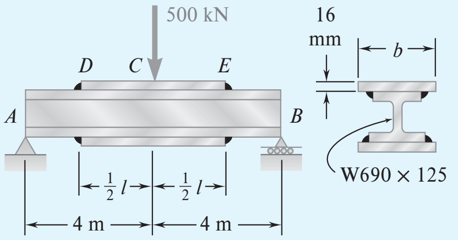


Figura 2 Posiciones donde los tablones deben agregarse.

Las esquinas de los tablones quedan en la parábola definida por la ecuación (2).

Problema modelo 5.12

Dos placas de acero, cada una de 16 in de espesor, se sueldan como se muestra a una viga W690 × 125 para reforzarla. Si σ_{perm} = 160 MPa para la viga y las placas, determine el valor requerido de *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.



ESTRATEGIA: Para determinar la longitud requerida de las placas de refuerzo, se puede determinar la extensión de la viga que no está sobreesforzada para no reforzarla. Considerando el punto de momento máximo, se puede entonces dimensionar las placas de refuerzo.

MODELAR y ANALIZAR:

Momento flector. Determine las reacciones. Con el diagrama de cuerpo libre de la figura 1 y utilizando una parte de la viga de longitud $x \leq 4$ m, M se determina entre A y C como

$$M = (250 \text{ kN})x \tag{1}$$

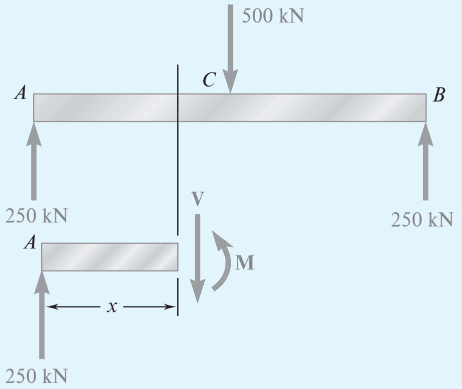


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre de la viga y la sección requerida para determinar la fuerza cortante interna y el momento flector.

***a*) Longitud requerida de las placas.** Determine la longitud máxima permisible x_m de la parte AD de la viga sin reforzar. Según el apéndice C, el módulo de sección de una viga W690 × 125 es $S = 3\,490 \times 10^6$ mm^3 o $S = 3.49 \times 10^{-3}$ m^3. Al sustituir S y σ_{perm} en la ecuación (5.17) y resolver M:

$$M = S\sigma_{perm} = (3.49 \times 10^{-3} \text{ m}^3)(160 \times 10^3 \text{ kN/m}^2) = 558.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Al sustituir M en la ecuación (1),

$$558.4 \text{ kN} \cdot \text{m} = (250 \text{ kN})x_m \qquad x_m = 2.234 \text{ m}$$

La longitud requerida de las placas se obtiene al sustituir $2x_m$ de la longitud de la viga:

$$l = 8 \text{ m} - 2(2.234 \text{ m}) = 3.532 \text{ m} \qquad l = 3.53 \text{ m} \blacktriangleleft$$

***b)* Ancho requerido de las placas.** El momento flector máximo ocurre en el centro C de la viga. Con $x = 4$ en la ecuación (1), el momento flector en esa sección es

$$M = (250 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 1\,000 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para utilizar la ecuación (5.1), determine el momento de inercia de la sección transversal de la viga reforzado con respecto a un eje centroidal y la distancia c desde el eje hasta las superficies externas de las placas (figura 2). En el apéndice C, se encuentra que el momento de inercia de una viga W690 × 125 es $I_b = 1\,190 \times 10^6 \text{ mm}^4$, y que su altura es $d = 678$ mm. Utilizando t como el espesor de una placa, b como su ancho y $\bar{y}$ como la distancia de su centroide desde el eje neutro, el momento de inercia I_p de las dos placas con respecto al eje neutro es

$$I_p = 2(\tfrac{1}{12}bt^3 + A\bar{y}^2) = (\tfrac{1}{6}t^3)b + 2\,bt(\tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}t)^2$$

Al sustituir $t = 16$ mm y $d = 678$ mm, se obtiene $I_p = (3.854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b$. El momento de inercia I de la viga y las placas es

$$I = I_b + I_p = 1\,190 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b \qquad \textbf{(2)}$$

y la distancia del eje neutro a la superficie es $c = \frac{1}{2}d + t = 355$ mm. Al resolver I en la ecuación (5.1) y al sustituir los valores de M, σ_{perm} y c.

$$I = \frac{|M|c}{\sigma_{perm}} = \frac{(1\,000 \text{ kN} \cdot \text{m})(355 \text{ mm})}{160 \text{ MPa}} = 2.219 \times 10^{-3} \text{ m}^4 = 2\,219 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Al reemplazar I por su valor en la ecuación (2) y al resolver b,

$$2\,219 \times 10 \text{ mm}^4 = 1\,190 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.854 \times 10 \text{ mm})b$$

$$b = 267 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

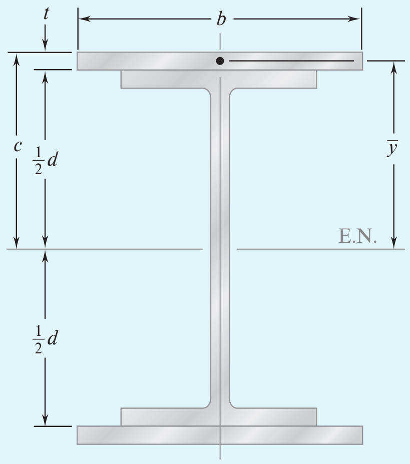


Figura 2 Sección transversal de la viga con placas de refuerzo.

Problemas

5.126 y 5.127 La viga AB, que consiste en una placa de hierro colado de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga mostrada. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en función de x, L y h_0. *b*) Determine la carga máxima permisible si $L = 36$ in, $h_0 = 12$ in, $b = 1.25$ in y $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

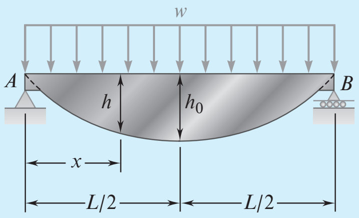


Figura P5.126

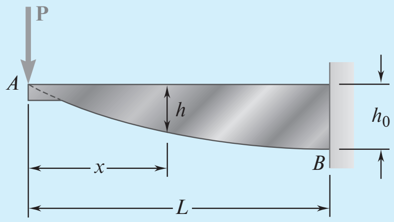


Figura P5.127

5.128 y *5.129* La viga AB, que consiste en una placa de hierro colado de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga distribuida $w(x)$ mostrada. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en función de x, L y h_0. *b*) Determine el valor mínimo de h si $L = 750$ mm, $b = 300$ mm. $w_0 = 300$ kN/m y $\sigma_{perm} = 200$ MPa.

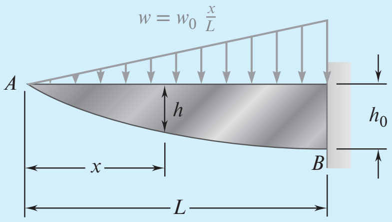


Figura P5.128

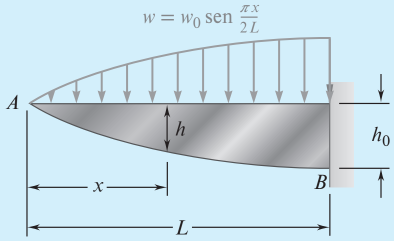


Figura *P5.129*

5.130 y *5.131* La viga AB, que consiste en una placa de aluminio de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga mostrada. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en función de x, L y h_0 para la parte AC de la viga. *b*) Determine la carga máxima permisible si $L = 800$ mm, $h_0 = 200$ mm, $b = 25$ mm y $\sigma_{perm} = 72$ MPa.

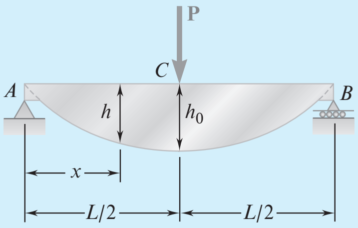


Figura P5.130

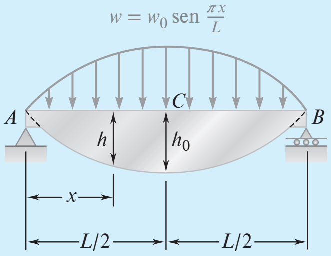


Figura *P5.131*

5.132 y *5.133* Un diseño preliminar que contempla el uso de una viga de madera prismática en voladizo indicó que se requeriría una viga de sección transversal rectangular de 2 in de ancho y 10 in de peralte para que soporte con seguridad la carga mostrada en el inciso *a* de la figura. Luego se decidió reemplazar la viga con una viga compuesta obtenida pegando, como se muestra en el inciso *b* de la figura, cinco piezas de la misma madera que la viga original y de sección transversal de 2 × 2 in. Determine las longitudes respectivas l_1 y l_2 de las dos piezas de madera interna y externa que proporcionarán el mismo factor de seguridad que el diseño original.

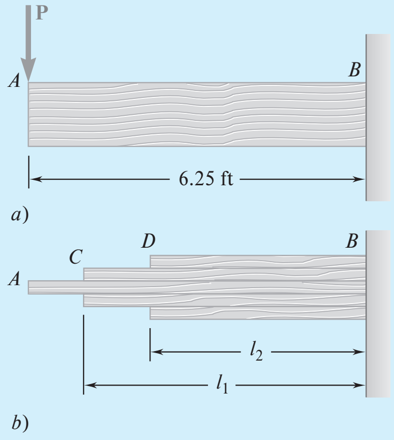


Figura P5.132

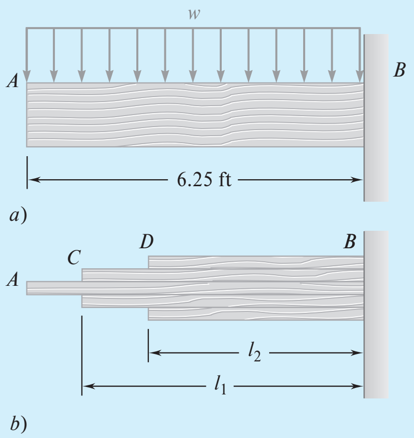


Figura *P5.133*

5.134 y 5.135 Un diseño preliminar que contempla el uso de una viga de madera prismática simplemente apoyada mostró que se requeriría una viga de sección transversal rectangular de 50 mm de ancho y 200 mm de peralte para que soporte con seguridad la carga mostrada en el inciso *a* de la figura. A continuación se decidió reemplazar la viga con una viga compuesta obtenida pegándole piezas de madera, como se muestra en el inciso *b* de la figura, cinco piezas de la misma madera que la viga original y de sección transversal de 50 × 50 mm. Determine la longitud *l* de las dos piezas de madera externas que proporcionarán el mismo factor de seguridad que el diseño original.

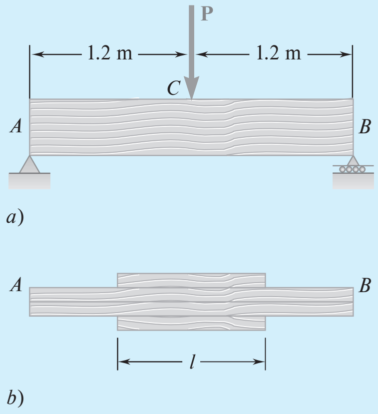


Figura P5.134

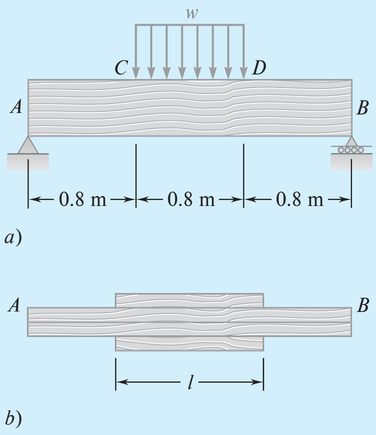


Figura P5.135

5.136 y *5.137* Se va a diseñar un elemento de máquina de aluminio colado que tiene la forma de un sólido de revolución de diámetro variable d para soportar la carga mostrada. Si se sabe que el elemento debe ser de resistencia constante, exprese d en función de x, L y d_0.

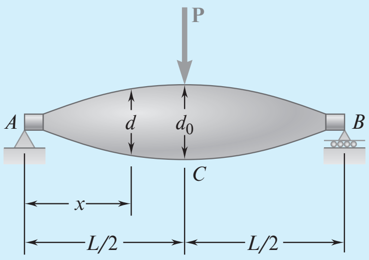


Figura P5.136

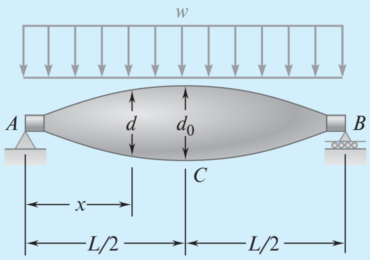


Figura *P5.137*

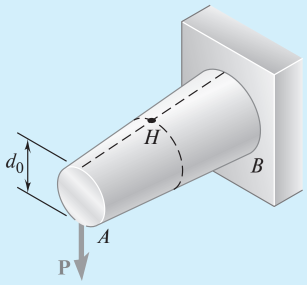


Figura P5.138

5.138 Se aplica una fuerza transversal **P** como se muestra en el extremo A de la pieza cónica AB. Llamando a d_0 como el diámetro de la pieza cónica en A, demuestre que el esfuerzo normal máximo ocurre en el punto H, el cual se encuentra en una sección transversal de diámetro $d = 1.5\ d_0$.

5.139 Una viga AB en voladizo que consiste en una placa de acero de peralte uniforme h y ancho variable b debe soportar la carga distribuida w a lo largo de la línea de centros AB. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese b en función de x, L y b_0. *b*) Determine el valor máximo permisible de w si L = 15 in, b_0 = 8 in, h = 0.75 in y σ_{perm} = 24 ksi.

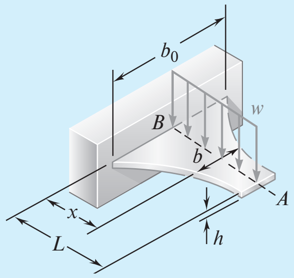


Figura P5.139

5.140 Suponiendo que la longitud y ancho de las cubreplacas utilizadas en la viga del problema modelo 5.12 son, respectivamente, l = 4 m y b = 285 mm, y recordando que el espesor de cada placa es de 16 mm, determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de D.

5.141 Se sueldan dos cubreplacas, cada una de $\frac{1}{2}$ in de espesor, a una viga W27 × 84 como se muestra. Si l = 10 ft y b = 10.5 in, determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de D.

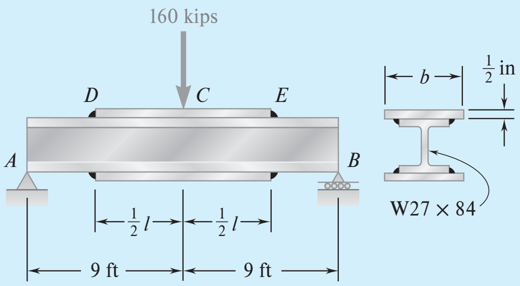


Figura P5.141 y *P5.142*

5.142 Se sueldan dos cubreplacas, cada una de $\frac{1}{2}$ in de espesor, a una viga W27 × 84 como se muestra. Si σ_{perm} = 24 ksi tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido de *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

5.143 Si $\sigma_{perm} = 150$ MPa, determine la carga concentrada máxima **P** que se puede aplicar en el extremo E de la viga mostrada.

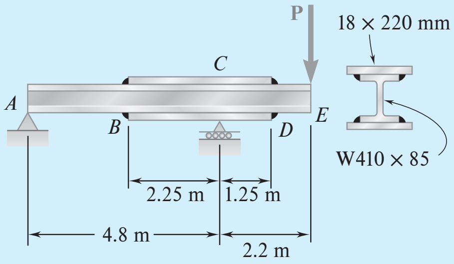


Figura P5.143

5.144 Dos cubreplacas, cada una de 7.5 mm de espesor, se sueldan a una viga W460 × 74 como se muestra. Si $l = 5$ m y $b = 200$ mm, determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de D.

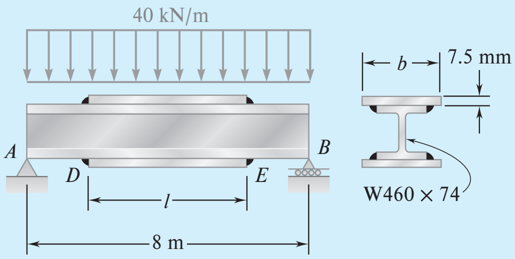


Figura P5.144 y P5.145

5.145 Dos cubreplacas, cada una de 7.5 mm de espesor, se sueldan a una viga W460 × 74 como se muestra. Si $\sigma_{perm} = 150$ MPa tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido de *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

5.146 Se sueldan dos cubreplacas, cada una de $\frac{5}{8}$ in de espesor, a una viga W30 × 99 como se muestra. Si $l = 9$ ft y $b = 12$ in, determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de D.

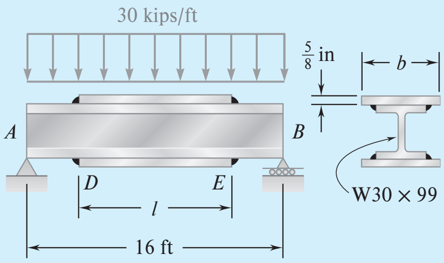


Figura *P5.146* y P5.147

5.147 Dos cubreplacas, cada una de $\frac{5}{8}$ in de espesor, se sueldan a una viga W30 × 99 como se muestra. Si $\sigma_{perm} = 22$ ksi tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido de *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

5.148 Para la viga ahusada mostrada, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la carga máxima distribuida *w* que se puede aplicar, si $\sigma_{perm} = 140$ MPa.

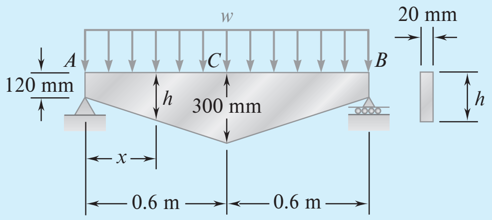


Figura *P5.148* y P5.149

5.149 Para la viga ahusada mostrada, si $w = 160$ kN/m, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) el valor correspondiente del esfuerzo normal.

5.150 Para la viga ahusada mostrada, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la carga distribuida máxima *w* que se puede aplicar, si $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

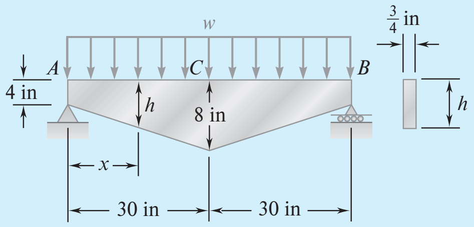


Figura P5.150

5.151 Para la viga ahusada mostrada, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la carga concentrada máxima **P** que se puede aplicar, si $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

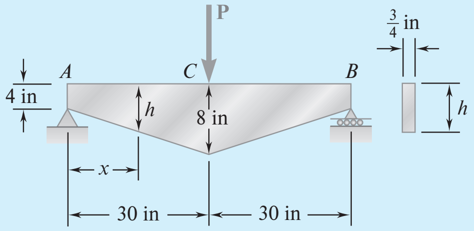


Figura P5.151

Repaso y resumen

Diseño de vigas prismáticas

Este capítulo se dedicó al análisis y diseño de vigas sometidas a cargas transversales que consisten en cargas concentradas o distribuidas. Las vigas se clasifican de acuerdo con la forma en que están apoyadas (figura 5.20). Se consideraron solo vigas *estáticamente determinadas*, donde todas las reacciones de apoyo pueden determinarse mediante estática.

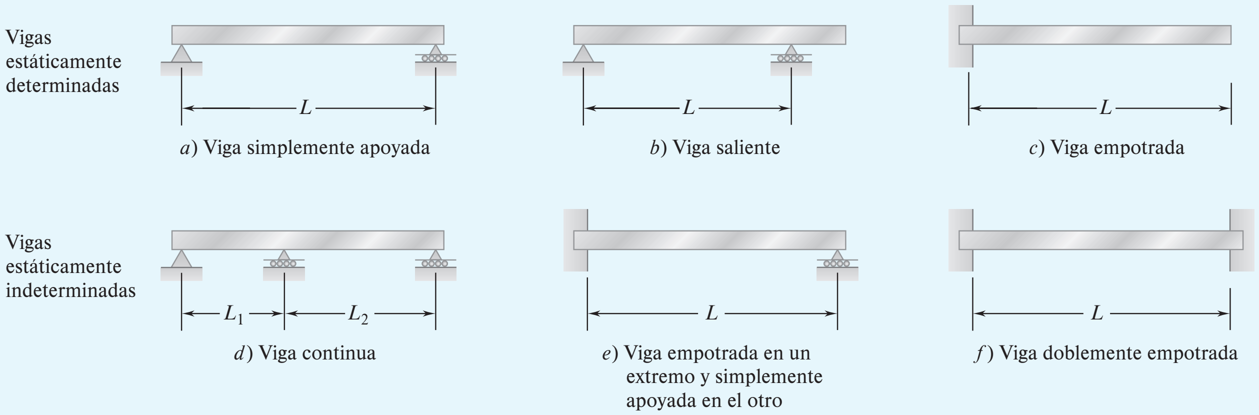


Figura 5.20 Configuraciones de vigas comunes apoyadas.

Esfuerzos normales producidos por flexión

Aun cuando las cargas transversales producen flexión y fuerza cortante en una viga, los esfuerzos normales producidos por flexión son el criterio dominante en el diseño de una viga para resistencia [secc. 5.1]. Por lo tanto, este capítulo se ocupó únicamente de la determinación de los esfuerzos normales en una viga, y el efecto de los esfuerzos cortantes se examina en el siguiente.

La fórmula de flexión para la determinación del valor máximo de σ_m del esfuerzo normal en una sección dada de la viga es

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} \qquad (5.1)$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano del momento flector **M** y c es la distancia máxima desde la superficie neutra (figura 5.21). Si se considera el módulo de sección elástico $S = I/c$ de la viga, el valor máximo σ_m del esfuerzo normal en la sección se puede expresar como

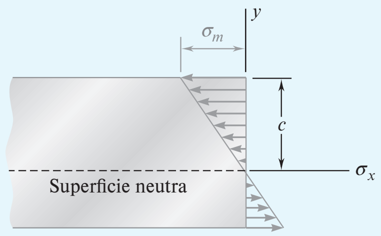
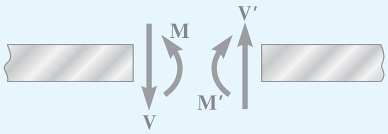


Figura 5.21 Distribución del esfuerzo normal lineal para flexión.

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} \qquad (5.3)$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flector

Según la ecuación (5.1) el esfuerzo normal máximo ocurre en la sección donde $|M|$ es máximo y en el punto más alejado del eje neutro. La determinación del valor



a) Fuerzas internas (cortante positivo y momento flector positivo)

Figura 5.22 Convención de signo positivo para cortante interno y momento flector.

máximo de $|M|$ y de la sección crítica de la viga en la que ocurre, se simplifica si se trazan los *diagramas de fuerza cortante* y de *momento flector.* Estos diagramas representan la variación de la fuerza cortante y del momento flector a lo largo de la viga y se obtienen determinando los valores de V y M en puntos seleccionado de la viga. Estos valores se determinan realizando un corte a través del punto y trazando el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de las partes de la viga. Para evitar cualquier confusión con respecto al sentido de la fuerza cortante **V** y del momento flector **M** (los cuales actúan en sentido opuesto en las dos partes de la viga) se sigue la convención de signos previamente adoptada, como se ilustra en la figura 5.22.

Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector

La construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flector se facilita si se toman en cuenta las siguientes relaciones. Al denotar con w la carga distribuida por unidad de longitud (supuesta positiva si se dirige hacia abajo)

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{5.5}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{5.7}$$

o en forma integrada,

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de la carga entre } C \text{ y } D) \tag{5.6b}$$
$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de la fuerza cortante entre } C \text{ y } D \tag{5.8b}$$

La ecuación (5.6*b*) permite trazar el diagrama de fuerza cortante de una viga a partir de la curva que representa la carga distribuida en la viga y V en un extremo de la viga. Asimismo, la ecuación (5.8*b*) permite trazar el diagrama de momento flector a partir del diagrama de fuerza cortante y M en un extremo de la viga. Sin embargo, las cargas concentradas introducen discontinuidades en el diagrama de fuerza cortante y los momentos concentrados en el diagrama de momento flector, ninguno de los cuales se toma en cuenta en estas ecuaciones. Los puntos de la viga donde el momento flector es máximo o mínimo también son los puntos donde la fuerza cortante es cero (Ec. 5.7).

Diseño de vigas prismáticas

Al determinar σ_{perm} para el material empleado y suponiendo que el esfuerzo normal máximo en la viga controla su diseño, el valor mínimo permisible del módulo de sección es

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.9}$$

Para una viga de madera de sección transversal rectangular, $S = \frac{1}{6}bh^2$, donde b es el ancho de la viga y h su peralte. Las dimensiones de la sección, por lo tanto, deben seleccionarse de modo que $\frac{1}{6}bh^2 \geq S_{\text{mín}}$.

Para una viga de acero laminado, consulte la tabla apropiada en el apéndice C. De las secciones de viga disponibles, considere solo las de módulo de sección $S \geq S_{\text{mín}}$. De este grupo normalmente se selecciona la sección con el peso mínimo por unidad de longitud.

Funciones de singularidad

Un método alternativo para determinar los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flector se basa en las *funciones de singularidad* $\langle x - a \rangle^n$. Con $n \geq 0$,

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \qquad \textbf{(5.14)}$$

Función escalón

Siempre que la cantidad entre paréntesis angulares es positiva o cero, los corchetes deben reemplazarse por paréntesis ordinarios, y siempre que esa cantidad es negativa, el corchete es igual a cero. Además, las funciones de singularidad se pueden integrar y diferenciar como binomios ordinarios. La función de singularidad correspondiente a $n = 0$ es discontinua en $x = a$ (figura 5.23). Esta función se llama *función escalón*.

$$\langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \qquad \textbf{(5.15)}$$

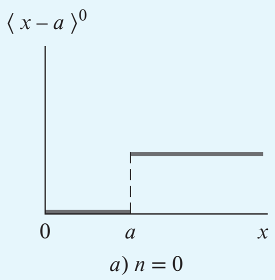


Figura 5.23 Función escalón singular.

Utilización de funciones de singularidad para expresar la fuerza cortante y el momento flector

El uso de funciones de singularidad hace posible representar la fuerza cortante o el momento flector en viga mediante una sola expresión. Esto es válido en cualquier punto de la viga, por ejemplo, la contribución a la fuerza cortante de la carga concentrada **P** aplicada en el centro C de una viga simplemente apoyada (figura 5.24) se puede representar mediante $-P\langle x - \frac{1}{2}L \rangle^0$, ya que esta expresión es igual a cero a la izquierda de C y a $-P$ a la derecha de C. Sumando la reacción $R_A = \frac{1}{2}P$ en A, la fuerza cortante en cualquier punto es

$$V(x) = \tfrac{1}{2}P - P\langle x - \tfrac{1}{2}L \rangle^0$$

El momento flector, obtenido después de integrar, es

$$M(x) = \tfrac{1}{2}Px - P\langle x - \tfrac{1}{2}L \rangle^1$$

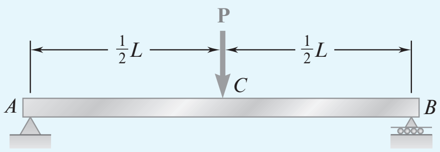


Figura 5.24 Viga simplemente apoyada con una carga concentrada en su centro C.

Cargas distibuidas equivalentes

Las funciones de singularidad que representan la carga, la fuerza cortante y el momento flector correspondientes a cargas básicas se mostraron en la figura 5.16. Una carga distribuida que no se extiende hasta el extremo derecho de la viga o que es discontinua debe reemplazarse por una combinación de cargas equivalentes distribuidas. Por ejemplo, una carga uniformemente distribuida que se extiende desde $x = a$ hasta $x = b$ (figura 5.25) es

$$w(x) = w_0\langle x - a\rangle^0 - w_0\langle x - b\rangle^0$$

La contribución de esta carga a la fuerza cortante y el momento flector se obtiene por medio de dos integraciones sucesivas. Debe tenerse cuidado de incluir para $V(x)$ la contribución de las cargas concentradas y las reacciones, y para $M(x)$ la contribución de los momentos concentrados.

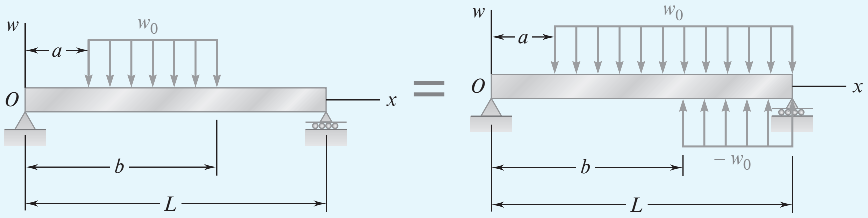


Figura 5.25 Uso de cargas distribuidas equivalentes para crear una carga en equilibrio.

Vigas no prismáticas

Las vigas no prismáticas son vigas de sección transversal variable. Seleccionando el perfil y el tamaño de la sección transversal de modo que su módulo elástico $S = I/c$ varíe a lo largo de la viga del mismo modo que el momento flector M, se pueden diseñar vigas donde σ_m en cada sección es igual a σ_{perm}. Estas vigas se conocen como *vigas de resistencia constante* y permiten un uso más eficaz del material que las vigas prismáticas. El módulo de sección en cualquier sección a lo largo de la viga es

$$S = \frac{|M|}{\sigma_{perm}} \tag{5.18}$$

Problemas de repaso

5.152 Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas y determine el valor máximo absoluto *a*) de la fuerza cortante, *b*) del momento flector.

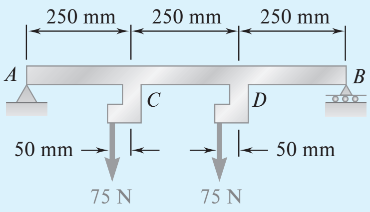


Figura P5.152

5.153 Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas y determine el esfuerzo normal máximo a causa de la flexión.

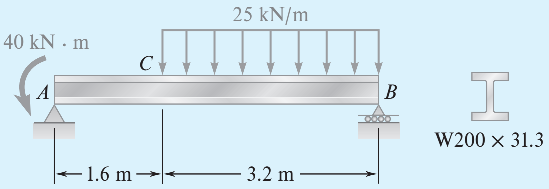


Figura *P5.153*

5.154 Determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto del momento flector en la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27).

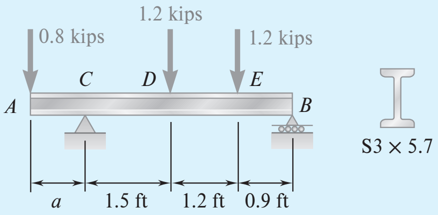


Figura P5.154

5.155 Para la viga y carga mostradas, determine las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector y el valor absoluto máximo del momento flector en la viga, si se sabe que *a*) $k = 1$, *b*) $k = 0.5$.

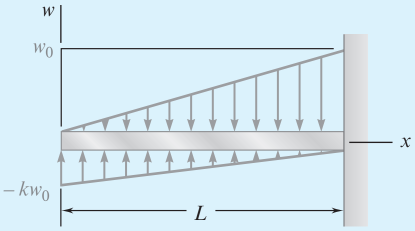


Figura *P5.155*

5.156 Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y la carga mostradas y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

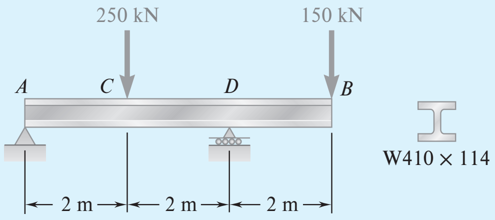


Figura P5.156

5.157 La viga AB, de longitud L y sección transversal cuadrada de a por lado está soportada por un pivote en C y cargada como se muestra. *a*) Verifique que la viga esté en equilibrio. *b*) Demuestre que el esfuerzo normal máximo debido a la flexión ocurre en C y es igual a $w_0L^2(1.5a)^3$.

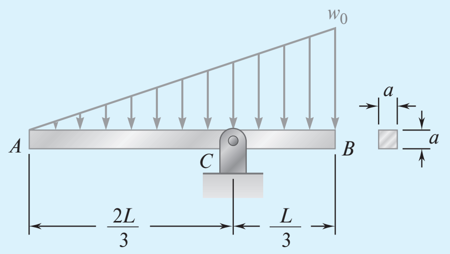


Figura P5.157

5.158 Para la viga y carga mostradas, diseñe la sección transversal de la viga, si se sabe que el grado de la madera utilizada tiene un esfuerzo normal permisible de 1 750 psi.

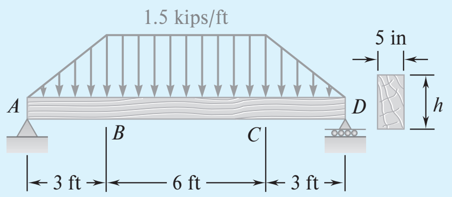


Figura P5.158

5.159 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar la carga mostrada.

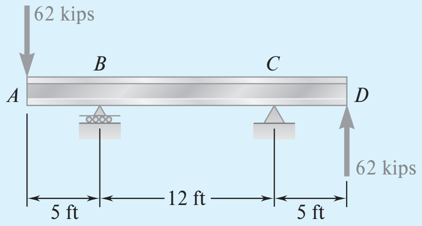


Figura P5.159

5.160 Se sueldan tres placas juntas para formar la viga mostrada. Si el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, determine el ancho mínimo b del patín que se puede usar.

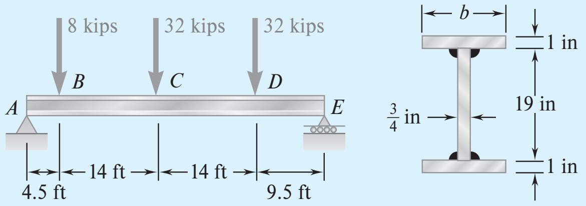


Figura *P5.160*

5.161 *a*) Utilizando funciones de singularidad, determine la magnitud y localización del momento flector máximo para la viga y carga mostradas. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

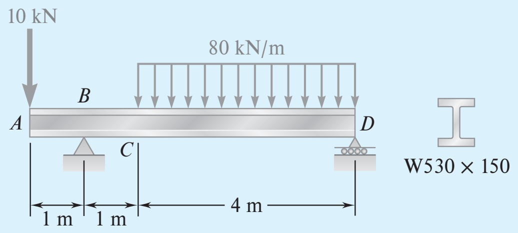


Figura P5.161

5.162 La viga *AB* que consiste en una placa de aluminio de espesor uniforme y longitud *L*, debe soportar la carga mostrada. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese *h* en función de *x*, *L* y h_0 para la parte *AC* de la viga. *b*) Determine la carga máxima permisible si $L = 800$ mm, $h_0 = 200$ mm, $b = 25$ mm y $\sigma_{perm} = 72$ MPa.

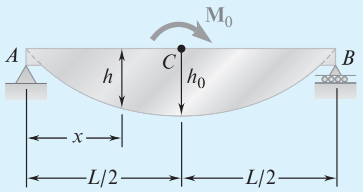


Figura *P5.162*

5.163 Una viga en voladizo *AB* que consiste en una placa de acero de peralte *h* uniforme y ancho variable *b* debe soportar la carga concentrada **P** en el punto *A*. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese *b* en función de *x*, *L* y b_0. *b*) Determine el valor mínimo permisible de *h* si $L = 300$ mm, $b_0 = 375$ mm, $P = 14.4$ kN y $\sigma_{perm} = 160$ MPa.

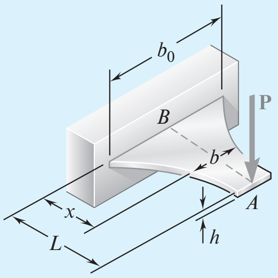


Figura P5.163

Problemas de computadora

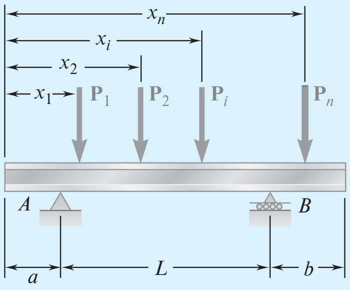


Figura P5.C1

Los siguientes problemas se diseñaron para resolverlos con computadora.

5.C1 Se pueden aplic ar varias cargas concentradas P_i ($i = 1, 2,..., n$) a una viga como se muestra. Escriba un programa de computadora que se pueda usar para calcular la fuerza cortante, el momento flector y el esfuerzo normal en cualquier punto de la viga para una carga dada de la viga y un valor dado de su módulo de sección. Use este programa para resolver los problemas 5.18, 5.21 y 5.25. (*Sugerencia:* Los valores máximos ocurrirán en un apoyo bajo una carga).

5.C2 Se tiene que diseñar una viga de madera para que soporte una carga distribuida y hasta dos cargas concentradas como se muestra. Una de las dimensiones de su sección transversal uniforme se ha especificado y se tiene que determinar la otra de modo que el esfuerzo normal máximo en la viga no exceda un valor permisible dado σ_{perm}. Escriba un programa de computadora que se pueda usar para calcular a intervalos dados ΔL la fuerza cortante, el momento flector y el valor mínimo aceptable de la dimensión desconocida. Aplique este programa para resolver los siguientes problemas, utilizando los intervalos ΔL indicados: *a*) problema 5.65 (ΔL = 0.1 m), *b*) problema 5.69 (ΔL = 0.3 m) y *c*) problema 5.70 (ΔL = 0.2 m).

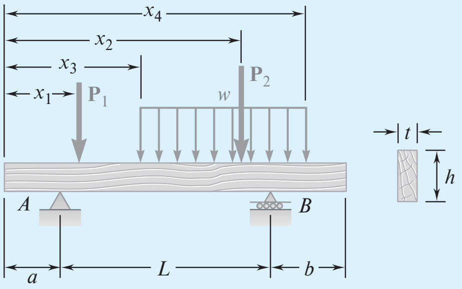


Figura P5.C2

5.C3 Se tienen que soldar dos cubreplacas, cada una de espesor t a una viga de patín ancho de longitud L que debe soportar una carga uniformemente distribuida w. Si σ_{perm} es el esfuerzo normal permisible en la viga y en las placas, y d es el peralte de la viga, e I_b y S_b son, respectivamente, el momento de inercia y el módulo de sección de la sección transversal de la viga no reforzada con respecto a un eje centroidal horizontal, escriba un programa de computadora que se pueda usar para calcular el valor requerido de *a*) la longitud a de las placas, *b*) el ancho b de las placas. Use este programa para resolver el problema 5.145.

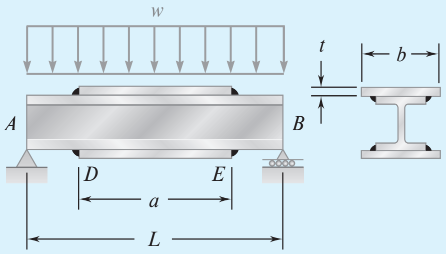


Figura P5.C3

5.C4 Dos cargas de 25 kips se mantienen a 6 ft una de otra a medida que se desplazan lentamente a través de la viga AB de 18 ft. Escriba un programa de computadora y úselo para calcular el momento flector bajo cada carga y en el centro C de la viga para valores de x de 0 a 24 ft a intervalos $\Delta x = 1.5$ ft.

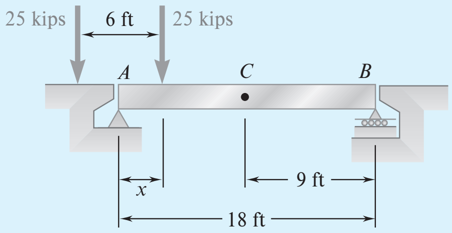


Figura P5.C4

5.C5 Escriba un programa de computadora que se pueda usar para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas. Aplique este programa con un intervalo de trazo $\Delta L = 0.2$ ft a la viga y la carga del *a*) problema 5.72, *b*) problema 5.115.

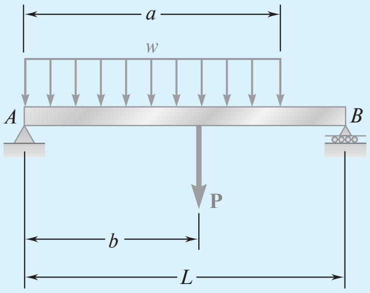


Figura P5.C5

5.C6 Escriba un programa de computadora que se pueda usar para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y carga mostradas. Aplique este programa con un intervalo de trazo $\Delta L = 0.025$ m a la viga y carga del problema 5.112.

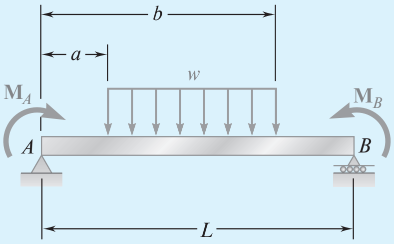
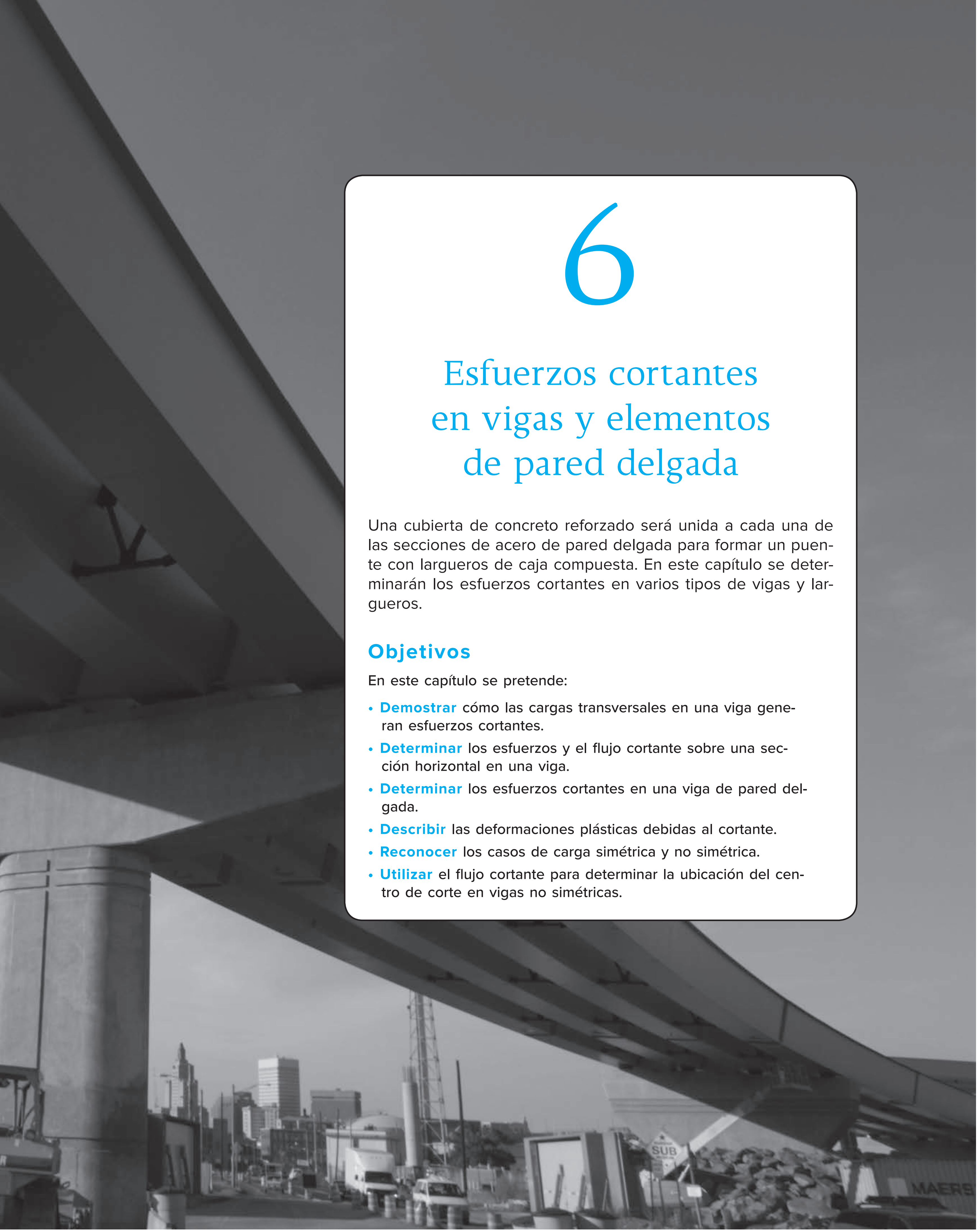


Figura P5.C6

CATERPILLAR



6

Esfuerzos cortantes en vigas y elementos de pared delgada

Una cubierta de concreto reforzado será unida a cada una de las secciones de acero de pared delgada para formar un puente con largueros de caja compuesta. En este capítulo se determinarán los esfuerzos cortantes en varios tipos de vigas y largueros.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Demostrar** cómo las cargas transversales en una viga generan esfuerzos cortantes.
- **Determinar** los esfuerzos y el flujo cortante sobre una sección horizontal en una viga.
- **Determinar** los esfuerzos cortantes en una viga de pared delgada.
- **Describir** las deformaciones plásticas debidas al cortante.
- **Reconocer** los casos de carga simétrica y no simétrica.
- **Utilizar** el flujo cortante para determinar la ubicación del centro de corte en vigas no simétricas.

Introducción

6.1 Esfuerzo cortante horizontal en vigas

6.1A Cortante sobre la cara horizontal de un elemento de viga

6.1B Esfuerzos cortantes en una viga

6.1C Esfuerzos cortantes τ_{xy} en tipos comunes de vigas

***6.2 Distribución de esfuerzos en una viga rectangular delgada**

6.3 Cortante longitudinal sobre un elemento de viga de forma arbitraria

6.4 Esfuerzos cortantes en elementos de pared delgada

***6.5 Deformaciones plásticas**

***6.6 Carga asimétrica de elementos con pared delgada y centro de cortante**

Introducción

Los esfuerzos cortantes son importantes, en particular para el diseño de vigas cortas y gruesas. Su análisis será el tema de la primera parte de este capítulo.

La figura 6.1 expresa gráficamente que las fuerzas elementales normales y cortantes ejercidas en una sección transversal de una viga prismática con un plano vertical de simetría son equivalentes al momento flector **M** y a la fuerza cortante **V**. Pueden escribirse seis ecuaciones para expresar esto. Tres de estas ecuaciones involucran solo a las fuerzas normales $\sigma_x dA$ y ya han sido analizadas en la sección 4.2; son las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), que expresan que la suma de las fuerzas normales es cero y que la suma de sus momentos alrededor de los ejes y y z son iguales a cero y a M, respectivamente. Ahora pueden escribirse tres ecuaciones más que involucran las fuerzas de cortante $\tau_{xy}dA$ y $\tau_{xz}dA$. Una de ellas expresa que la suma de los momentos de las fuerzas cortantes alrededor del eje x es cero y puede descartarse, por trivial, debido a la simetría de la viga con respecto al plano xy. Las otras dos involucran las componentes y y z de las fuerzas elementales y son

$$\text{componentes } y: \qquad \int \tau_{xy}dA = -V \qquad \textbf{(6.1)}$$

$$\text{componentes } z: \qquad \int \tau_{xz}dA = 0 \qquad \textbf{(6.2)}$$

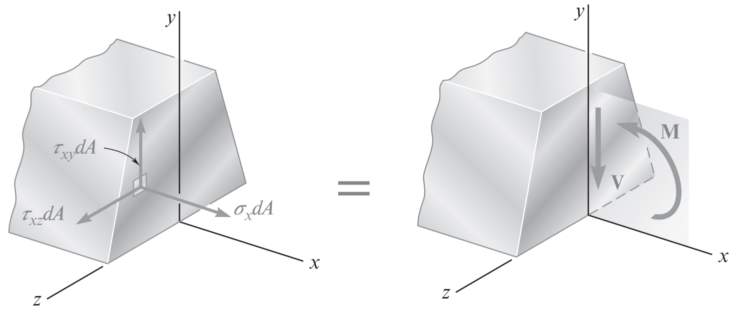


Figura 6.1 Se suman todos los esfuerzos sobre las áreas elementales (izquierda) para obtener la cortante resultante V y el momento flector M.

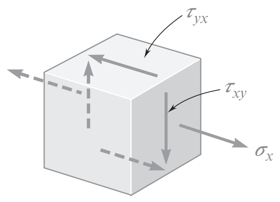


Figura 6.2 Elemento esforzado de la sección de una viga cargada transversalmente.

La ecuación (6.1) muestra que los esfuerzos cortantes verticales deben existir en cualquier sección transversal de la viga sometida a carga transversal. La ecuación (6.2) indica que el esfuerzo cortante medio lateral es cero en cualquier sección. No obstante, como se verá luego, esto no significa que el esfuerzo cortante τ_{xz} sea cero en todas partes.

Considere ahora un pequeño elemento cúbico localizado en el plano vertical de simetría de la viga (donde τ_{xz} debe ser cero) y examine los esfuerzos ejercidos sobre sus caras (figura 6.2). Sobre cada una de las caras perpendiculares al eje x se ejercen un esfuerzo normal σ_x y uno cortante τ_{xy}. Pero se sabe del capítulo 1 que cuando se ejercen esfuerzos cortantes τ_{xy} sobre la cara vertical de un elemento, se deben ejercer esfuerzos iguales sobre las caras horizontales del mismo elemento. Se concluye así que deben existir esfuerzos cortantes longitudinales en todo elemento sometido a carga transversal. Esto puede verificarse considerando una viga en voladizo hecha de tablas separadas que se sujetan en un extremo (figura 6.3*a*). Cuando se aplica una carga transversal **P** en el extremo libre de esta viga compuesta, se observa que las tablas resbalan unas con respecto de las otras (figura 6.3*b*). Por otra parte, si la misma viga compuesta se somete a un momento de flexión **M** en su extremo libre (figura 6.3*c*), las diversas tablas se flexionarán y formarán arcos de círculos concéntricos y no resbalarán con respecto a cada una de las otras, verificando así que no ocurre esfuerzo cortante en una viga sujeta a flexión pura (vea la sección 4.3).

Aunque este deslizamiento no se produce realmente cuando se aplica una fuerza transversal **P** a una viga hecha de un material homogéneo y cohesivo como el acero, la tendencia al deslizamiento existe, lo cual muestra que los esfuerzos se presentan tanto en los planos longitudinales como en los planos transversales verticales. En el caso de vigas de madera, cuya resistencia al corte es más débil entre las fibras, la falla debida

al corte ocurrirá a lo largo de un plano longitudinal y no en uno transversal (fotografía 6.1).

En la sección 6.1A se considera un elemento de viga de longitud Δx limitado por dos planos transversales y uno horizontal. La fuerza cortante $\Delta \mathbf{H}$ ejercida sobre su cara horizontal se determinará, así como el cortante por unidad de longitud q, también conocido como *flujo cortante.* Una fórmula para el esfuerzo cortante en una viga con un plano vertical de simetría se deducirá en la sección 6.1B y se utilizará en la sección 6.1C para determinar los esfuerzos cortantes en tipos comunes de vigas. La distribución de esfuerzos en una viga rectangular delgada se estudiará con mayor detalle en la sección 6.2.

El método de la sección 6.1 se extenderá en la sección 6.3 para cubrir el caso de un elemento de viga limitado por dos planos transversales y una superficie curva. Esto permitirá determinar, en la sección 6.4, los esfuerzos cortantes en cualquier punto de un elemento simétrico de pared delgada, como las bridas de las vigas de patín ancho y las vigas de caja. El efecto de las deformaciones plásticas sobre la magnitud y la distribución de los esfuerzos cortantes se analizará en la sección 6.5.

En la sección 6.6 se considerará la carga asimétrica de elementos de pared delgada y se introducirá el concepto de *centro de cortante* para determinar la distribución de esfuerzos cortantes en dichos elementos.

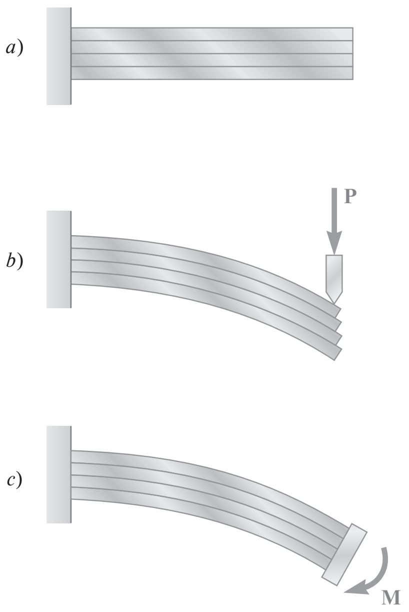
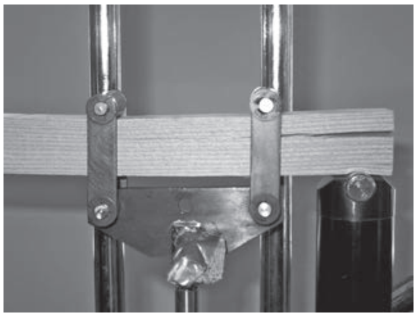


Figura 6.3 *a*) Viga hecha de tablas para ilustrar el efecto de los esfuerzos cortantes. *b*) Las tablas de la viga se deslizan relativamente entre sí cuando se cargan transversalmente. *c*) Un momento flector causa deflexión sin deslizamiento.

6.1 ESFUERZO CORTANTE HORIZONTAL EN VIGAS

6.1A Cortante sobre la cara horizontal de un elemento de viga

Considere una viga prismática *AB* con un plano vertical de simetría que soporta varias cargas concentradas y distribuidas (figura 6.4). A una distancia x del extremo *A* se desprende de la viga un elemento *CDD'C'* con longitud Δx que se extiende a través del ancho de la viga desde la superficie superior hasta un plano horizontal localizado a una distancia y_1 del eje neutro (figura 6.5). Las fuerzas ejercidas sobre este elemento consisten de las fuerzas cortantes verticales $\mathbf{V}'_C$ y $\mathbf{V}'_D$, una fuerza cortante horizontal $\Delta \mathbf{H}$ ejercida sobre la cara inferior del elemento, las fuerzas normales elementales horizontales $\sigma_C dA$ y $\sigma_D dA$, y posiblemente una carga $w\,\Delta x$ (figura 6.6). La ecuación de equilibrio para las fuerzas horizontales es



Fotografía 6.1 Falla por cortante longitudinal en una viga de madera cargada en el laboratorio.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_{@} (\sigma_C - \sigma_D)\, dA = 0$$

donde la integral se extiende por el área sombreada @ de la sección localizada por encima de la línea $y = y_1$. Al despejar ΔH de esta ecuación y utilizando la ecuación (5.2), $\sigma = My/I$, para expresar los esfuerzos normales en términos de los momentos flectores en *C* y *D*, se tiene

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_{@} y\, dA \tag{6.3}$$

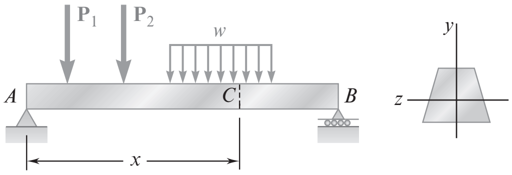


Figura 6.4 Viga cargada transversalmente con plano de simetría vertical.

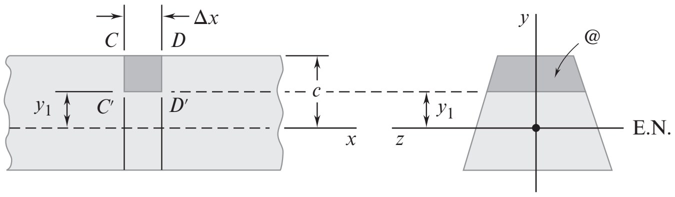


Figura 6.5 Segmento corto de una viga con el elemento esforzado *CDD'C'* definido.

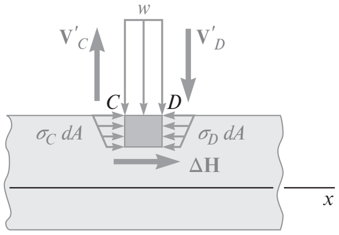


Figura 6.6 Fuerzas ejercidas sobre el elemento *CCD'C'*.

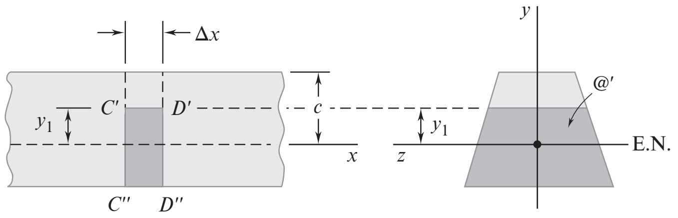


Figura 6.7 Segmento corto de viga con la definición del elemento esforzado *C'D'D''C''*.

La integral de la ecuación (6.3) representa el *primer momento* con respecto al eje neutro de la porción @ de la sección transversal de la viga que se localiza por encima de la línea $y = y_1$ y se denotará por Q. Por otra parte, al recordar la ecuación (5.7), se puede expresar el incremento $M_D - M_C$ del momento flector como

$$M_D - M_C = \Delta M = (dM/dx)\Delta x = V\,\Delta x$$

Al sustituir en la ecuación (6.3), el cortante horizontal ejercido sobre el elemento de viga es

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \qquad \textbf{(6.4)}$$

El mismo resultado se habría obtenido si se hubiera utilizado como cuerpo libre el elemento inferior *C'D'D''C''*, en lugar del elemento superior *CDD'C'* (figura 6.7), ya que las fuerzas cortantes **ΔH** y **ΔH'** ejercidas por los dos elementos uno sobre el otro son iguales y opuestas. Esto conduce a observar que el primer momento Q de la porción @' de la sección transversal localizada bajo la línea $y = y_1$ (figura 6.7) es igual en magnitud y opuesto en signo al primer momento de la porción @ localizada por encima de dicha línea (figura 6.5). De hecho, la suma de estos momentos es igual al momento del área de toda la sección transversal con respecto a su eje centroidal y, por lo tanto, debe ser cero. Esta propiedad puede en ocasiones utilizarse para simplificar el cálculo de Q. Se advierte también que Q es máximo para $y_1 = 0$, ya que los elementos de la sección transversal localizada por encima del eje neutro contribuyen positivamente a la integral en la ecuación (6.3) que define a Q, mientras que los elementos localizados por debajo de dicho eje contribuyen negativamente.

El *cortante horizontal por unidad de longitud*, que se denotará con la letra q, se obtiene de dividir ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \qquad \textbf{(6.5)}$$

Recuerde que Q es el primer momento con respecto al eje neutro de la porción de la sección transversal localizada bien por encima o bien por debajo del punto en el que se calcula q, y que I es el momento centroidal de inercia de *toda* el área de la sección transversal. El corte horizontal por unidad de longitud q también se conoce como *flujo cortante* y se estudiará en la sección 6.4.

Aplicación de conceptos 6.1

Una viga está hecha de tres tablones de 20 por 100 mm de sección transversal, asegurados con clavos (figura 6.8*a*). Si entre los clavos hay una separación de 25 mm y la fuerza cortante vertical en la viga es $V = 500$ N, determine la fuerza cortante en cada clavo.

Determine primero la fuerza horizontal por unidad de longitud, q, ejercida sobre la cara inferior del tablón superior. Utilice la ecuación (6.5), donde Q representa el primer momento con respecto al eje neutro del área sombreada A de la figura 6.8*b*, e I es el momento de inercia con respecto al mismo eje de toda la sección transversal (figura 6.8*c*). Al recordar que el primer momento de un área respecto de un eje dado es igual al producto del área por la distancia de su centroide al eje,†

$$Q = A\bar{y} = (0.020\text{ m} \times 0.100\text{ m})(0.060\text{ m})$$
$$= 120 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$I = \tfrac{1}{12}(0.020\text{ m})(0.100\text{ m})^3$$
$$+ 2[\tfrac{1}{12}(0.100\text{ m})(0.020\text{ m})^3$$
$$+ (0.020\text{ m} \times 0.100\text{ m})(0.060\text{ m})^2]$$
$$= 1.667 \times 10^{-6} + 2(0.0667 + 7.2)10^{-6}$$
$$= 16.20 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

Al sustituir en la ecuación (6.5),

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500\text{ N})(120 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{16.20 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 3\,704\text{ N/m}$$

Como la separación entre los clavos es de 25 mm, la fuerza cortante en cada clavo es

$$F = (0.025\text{ m})q = (0.025\text{ m})(3\,704\text{ N/m}) = 92.6\text{ N}$$

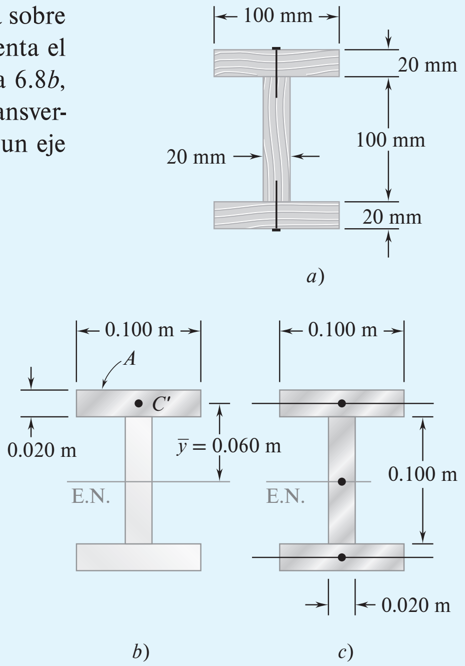


Figura 6.8 *a*) Viga compuesta hecha con tres tablones clavados entre sí. *b*) Sección transversal para calcular *Q*. *c*) Sección transversal para calcular el momento de inercia.

6.1B Esfuerzos cortantes en una viga

Considere de nuevo una viga con un plano de simetría vertical, sometida a varias cargas concentradas o distribuidas que se aplican sobre ese plano. Si por medio de dos cortantes verticales y uno horizontal, se desprende de la viga un elemento de longitud Δx (figura 6.9), la magnitud ΔH de la fuerza cortante ejercida sobre la cara horizontal del elemento puede obtenerse de la ecuación (6.4). El *esfuerzo cortante promedio* τ_{prom} en dicha cara del elemento se obtiene dividiendo ΔH entre el área ΔA de la cara. Al observar que $\Delta A = t\,\Delta x$, donde t es el espesor del elemento en el corte, se escribe

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I}\frac{\Delta x}{t\,\Delta x}$$

o bien

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \qquad \textbf{(6.6)}$$

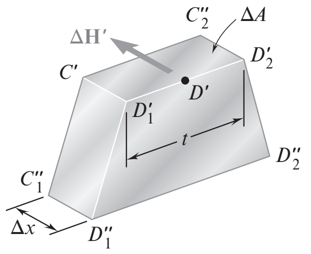


Figura 6.9 Elemento esforzado *C'D'D''C''* que muestra la fuerza cortante sobre un plano horizontal.

Observe que, como los esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} ejercidos respectivamente sobre un plano transversal y en un plano horizontal a través de D' son iguales, la expresión obtenida representa también el valor promedio de τ_{xy} a lo largo de la línea $D'_1D'_2$ (figura 6.10).

Se nota que $\tau_{yx} = 0$ en las caras superior e inferior de la viga, puesto que no se ejercen fuerzas sobre estas caras. Se sigue que $\tau_{xy} = 0$ a lo largo de los bordes superior

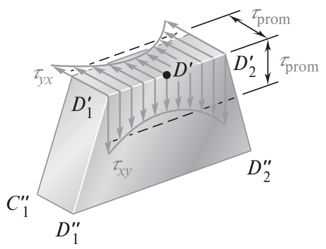


Figura 6.10 Elemento esforzado *C'D'D''C''* que muestra la distribución del esfuerzo a lo largo de $D'_1D'_2$.

† Vea el apéndice A.

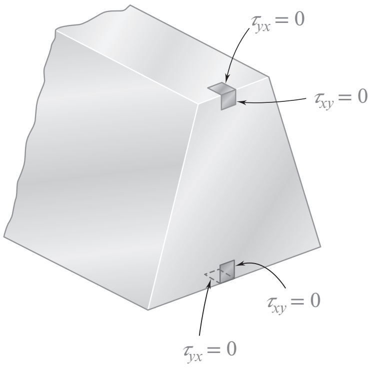


Figura 6.11 Sección transversal de una viga, que muestra que el esfuerzo cortante es cero en las partes superior e inferior de la viga.

e inferior de la sección transversal (figura 6.11). También se nota que, aunque Q es máximo para $y = 0$ (vea la sección 6.1A), τ_{prom} puede no ser máximo a lo largo del eje neutro, ya que depende tanto del ancho t de la sección, así como de Q.

Siempre que el ancho de la viga permanezca pequeño comparado con la altura, el esfuerzo cortante solo varía suavemente a lo largo de la línea $D'_1D'_2$ (figura 6.10), y puede usarse la ecuación (6.6) para calcular τ_{xy} en cualquier punto a lo largo de $D'_1D'_2$. En realidad τ_{xy} es mayor en los puntos D'_1 y D'_2 que en D', pero la teoría de la elasticidad muestra† que, para una viga de sección rectangular, de ancho b y altura h, y siempre que $b \leq h/4$, el valor del esfuerzo cortante en los puntos C_1 y C_2 (figura 6.12) no excede de más de 0.8% el valor promedio del esfuerzo calculado a lo largo del eje neutro.

Por otra parte, para valores grandes de b/h, el valor $\tau_{máx}$ de los esfuerzos C_1 y C_2 puede ser muchas veces mayor que el valor promedio τ_{prom} calculado a lo largo del eje neutro, como se muestra en la siguiente tabla:

b/h	0.25	0.5	1	2	4	6	10	20	50
$\tau_{máx}/\tau_{prom}$	1.008	1.033	1.126	1.396	1.988	2.582	3.770	6.740	15.65
$\tau_{mín}/\tau_{prom}$	0.996	0.983	0.940	0.856	0.805	0.800	0.800	0.800	0.800

6.1C Esfuerzos cortantes τ_{xy} en tipos comunes de vigas

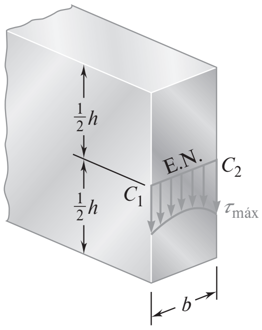


Figura 6.12 Distribución del esfuerzo cortante a lo largo del eje neutro de una viga de sección transversal rectangular.

En la sección anterior se vio que, para una *viga rectangular delgada* (es decir, para una viga de sección rectangular de ancho b y altura h con $b \leq \frac{1}{4}h$), la variación del esfuerzo cortante τ_{xy} a través del ancho de la viga es menor que 0.8% de τ_{prom}. Entonces, es posible usar la ecuación (6.6) en aplicaciones prácticas para determinar el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal de una viga rectangular delgada y

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \tag{6.7}$$

donde t es igual al ancho b de la viga y Q es el primer momento del área sombreada A con respecto al eje neutro (figura 6.13).

Al observar que la distancia desde el eje neutro al centroide C' de A es $\bar{y} = \frac{1}{2}(c + y)$, y al recordar que, $Q = A\bar{y}$,

$$Q = A\bar{y} = b(c - y)\tfrac{1}{2}(c + y) = \tfrac{1}{2}b(c^2 - y^2) \tag{6.8}$$

Al recordar, por otra parte, que $I = bh^3/12 = \frac{2}{3}bc^3$,

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4}\frac{c^2 - y^2}{bc^3}V$$

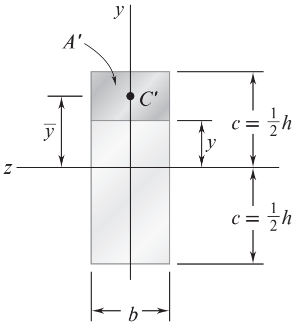


Figura 6.13 Términos geométricos de una sección rectangular usados para calcular el esfuerzo cortante.

o, al notar que el área transversal de la viga es $A = 2bc$,

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{6.9}$$

La ecuación (6.9) muestra que la distribución de esfuerzos cortantes en una sección transversal de una viga rectangular es *parabólica* (figura 6.14). Como ya se observó en la sección anterior, los esfuerzos cortantes son cero en la parte superior y en la base de la sección ($y = \pm c$). Como $y = 0$ en la ecuación (6.9), el valor del esfuerzo cortante máximo en una sección dada de una *viga rectangular delgada* es

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{6.10}$$

† Vea S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Nueva York, 3a. ed., 1970, sec. 124.

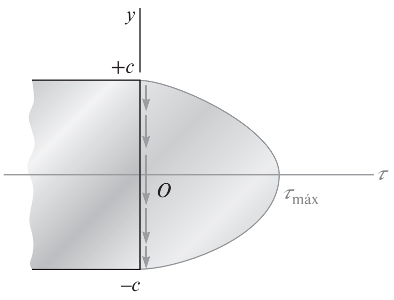


Figura 6.14 Distribución del esfuerzo cortante en la sección transversal de una viga rectangular.

Esta relación muestra que el valor máximo del esfuerzo cortante en una viga de sección rectangular es un 50% mayor que el valor V/A que se hubiera obtenido suponiendo, erróneamente, una distribución uniforme a través de toda la sección transversal.

En el caso de una *viga estándar estadounidense* (viga S) o una *viga de patín ancho* (viga W), la ecuación (6.6) puede usarse para calcular el valor promedio del esfuerzo cortante τ_{xy} ejercido sobre una sección aa' o bb' de la sección transversal de la viga (figuras 6.15*a* y *b*). Entonces,

$$\tau_{prom} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

donde V es la fuerza cortante vertical, t el ancho de la sección a la elevación considerada, Q el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro cc' e I el momento de inercia de toda la sección transversal con respecto a cc'. Al graficar τ_{prom} contra la distancia vertical y, se obtiene la curva de la figura 6.15*c*. Se notan las discontinuidades existentes en esta curva, que reflejan la diferencia entre los valores de t correspondientes, respectivamente, a los patines $ABGD$ y $A'B'G'D'$ y al alma $EFF'E'$.

En el alma, el esfuerzo cortante τ_{xy} varía solo muy ligeramente a través de la sección bb' y puede suponerse igual al promedio τ_{prom}. Por otra parte, esto no es cierto para los patines. Por ejemplo, considerando la línea horizontal $DEFG$ se nota que τ_{xy} es cero entre D y E y entre F y G, ya que esos dos segmentos son parte de la superficie libre de la viga. Sin embargo, el valor de τ_{xy} entre E y F no es de cero y puede obtenerse haciendo $t = EF$ en la ecuación (6.6). En la práctica generalmente se supone que toda la carga cortante la soporta el alma y que una buena aproximación del valor máximo del esfuerzo cortante en la sección se obtiene dividiendo V entre el área de la sección transversal del alma.

$$\tau_{máx} = \frac{V}{A_{alma}} \tag{6.11}$$

No obstante, mientras la componente vertical τ_{xy} del esfuerzo cortante en los patines puede despreciarse, su componente horizontal τ_{xz} tiene un valor significativo, que se determinará en la sección 6.4.

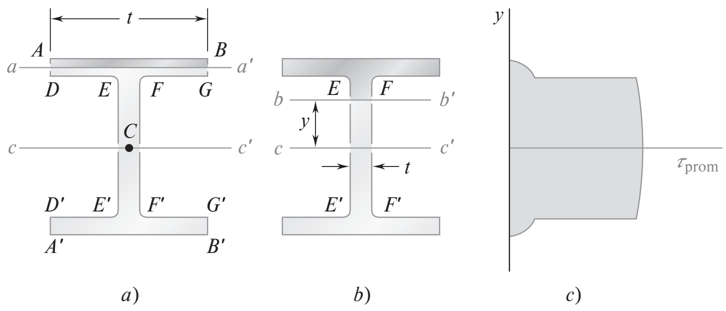


Figura 6.15 Viga de patín ancho. *a*) Área para encontrar el primer momento de área en el patín. *b*) Área para encontrar el primer momento de área en el alma. *c*) Distribución del esfuerzo cortante.

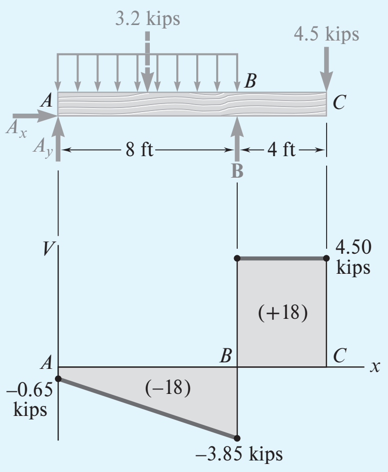


Figura 5.19 *(repetida)*

Aplicación de conceptos 6.2

Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible para la viga de madera del problema modelo 5.7 es $\tau_{perm} = 0.250$ ksi, verifique que el diseño obtenido de tal problema modelo es aceptable desde el punto de vista de los esfuerzos cortantes.

Recuerde del diagrama de cortante del problema modelo 5.7 que $V_{máx} = 4.50$ kips. El ancho real de la viga se dio como $b = 3.5$ in y el valor obtenido para su peralte fue $h = 14.55$ in. Utilizando la ecuación (6.10) para el máximo esfuerzo cortante en una viga rectangular delgada,

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3(4.50 \text{ kips})}{2(3.5 \text{ in})(14.55 \text{ in})} = 0.1325 \text{ ksi}$$

Como $\tau_{máx} < \tau_{perm}$, el diseño obtenido en el problema modelo 5.7 es aceptable.

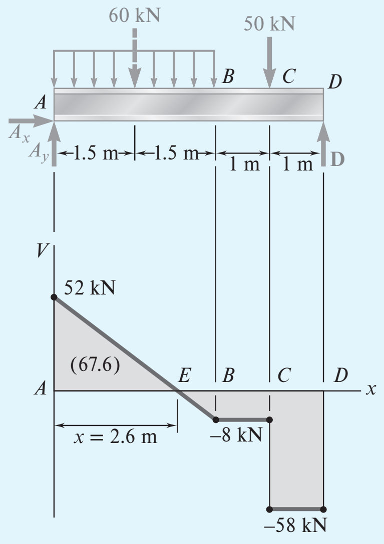


Figura 5.20 *(repetida)*

Aplicación de conceptos 6.3

Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible para la viga de acero del problema modelo 5.8 es $\tau_{perm} = 90$ MPa, verifique que el perfil W360 × 32.9 obtenido en dicho problema modelo es aceptable desde el punto de vista de los esfuerzos cortantes.

Recuerde del diagrama de cortante del problema modelo 5.8 que el máximo valor absoluto del cortante en la viga es $|V|_{máx} = 58$ kN. Puede suponerse que toda la carga cortante la soporta el alma y que el valor del esfuerzo cortante máximo en la viga puede obtenerse de la ecuación (6.11). Del apéndice C se encuentra que para el perfil W360 × 32.9, la profundidad de la viga y el grosor de su alma son, respectivamente, $d = 348$ mm y $t_w = 5.84$ mm. Por lo tanto,

$$A_{alma} = d\, t_w = (348 \text{ mm})(5.84 \text{ mm}) = 2\,032 \text{ mm}^2$$

Al sustituir $|V|_{máx}$ y A_{alma} en la ecuación (6.11),

$$\tau_{máx} = \frac{|V|_{máx}}{A_{alma}} = \frac{58 \text{ kN}}{2\,032 \text{ mm}^2} = 28.5 \text{ MPa}$$

Ya que $\tau_{máx} < \tau_{perm}$, el diseño obtenido en el problema modelo 5.8 es aceptable.

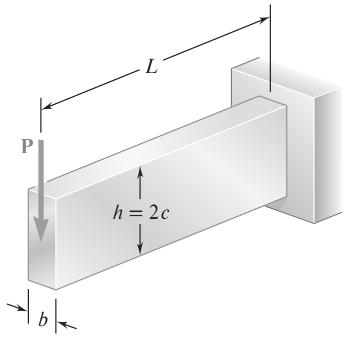


Figura 6.16 Viga en voladizo con sección transversal rectangular.

*6.2 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN UNA VIGA RECTANGULAR DELGADA

Considere una viga delgada en voladizo, de sección transversal rectangular, con ancho b y altura h, sometida a una carga **P** en su extremo libre (figura 6.16). Como la fuerza cortante V en la viga es constante e igual en magnitud a la carga **P**, la ecuación (6.9) produce

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{6.12}$$

En la ecuación (6.12) se nota que los esfuerzos cortantes dependen solo de la distancia y desde la superficie neutra. Son independientes de la distancia desde el punto de aplicación de la carga. Todos los elementos localizados a la misma distancia de la superficie neutra sufren la misma deformación por cortante (figura 6.17). Aunque las secciones planas *no* permanezcan planas, la distancia entre dos puntos correspondientes D y D' localizados en distintas secciones, se mantiene igual. Esto indica que las deformaciones normales ϵ_x y los esfuerzos normales σ_x no se afectan por los esfuerzos cortantes y que la hipótesis formulada en el capítulo 5 se justifica para la condición de carga de la figura 6.16.

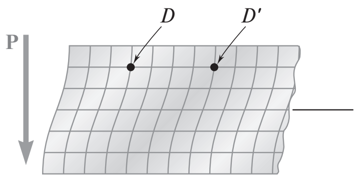


Figura 6.17 Deformación de un segmento de una viga en voladizo.

Por consiguiente, se concluye que el análisis de los esfuerzos en una viga en voladizo de sección transversal rectangular, sometida a una carga concentrada **P** en su extremo libre, es válido. Los valores correctos del esfuerzo cortante en la viga están dados por la ecuación (6.12), y los esfuerzos normales a una distancia x del extremo libre se obtienen haciendo $M = -Px$ en la ecuación (5.2). Entonces,

$$\sigma_x = +\frac{Pxy}{I} \qquad (6.13)$$

La validez de esta proposición depende de las condiciones de extremo. Si la ecuación (6.12) se aplica en todas partes, entonces la carga P debe distribuirse de manera parabólica sobre la sección de extremo libre. Además, el soporte empotrado debe ser tal que permita el tipo de deformación por cortante indicado en la figura 6.17. El modelo resultante (figura 6.18) es muy difícil de encontrar en la práctica. Sin embargo, del principio de Saint-Venant se tiene que, para otros modos de aplicación de la carga y para otros tipos de soportes empotrados, las ecuaciones (6.12) y (6.13) proporcionan la correcta distribución de esfuerzos, excepto cerca de los extremos de la viga.

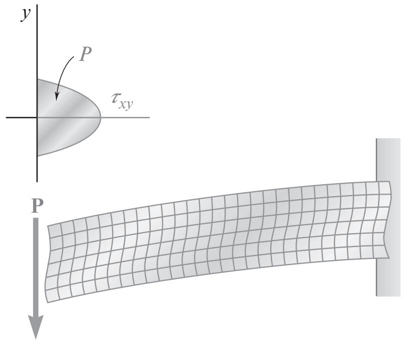


Figura 6.18 Deformación de una viga en voladizo con carga concentrada y una distribución parabólica del esfuerzo cortante.

Cuando una viga de sección transversal rectangular se somete a varias cargas concentradas (figura 6.19), puede usarse el principio de superposición para determinar esfuerzos normales y cortantes en secciones localizadas entre los puntos de aplicación de las cargas. Sin embargo, como las cargas $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, etc., se aplican en la superficie de la viga y no puede suponerse que estén distribuidas parabólicamente a través de la sección transversal, los resultados obtenidos dejan de ser válidos en la vecindad inmediata del punto de aplicación de las cargas.

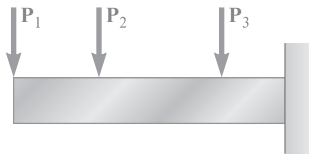


Figura 6.19 Viga en voladizo con cargas múltiples.

Cuando la viga se somete a una carga distribuida (figura 6.20), tanto la fuerza como el esfuerzo cortante a una elevación dada y varían con la distancia desde el extremo de la viga. Las deformaciones por cortante resultantes son tales que la distancia entre dos puntos correspondientes de diferentes secciones transversales, como D_1 y D'_1 o D_2 y D'_2 dependerá de su elevación. Esto indica que la hipótesis de que las secciones planas permanecen planas, bajo la cual se dedujeron las ecuaciones (6.12) y (6.13), debe rechazarse para las condiciones de carga de la figura 6.20. Sin embargo, el error implícito es pequeño para los valores de la relación ancho-profundidad encontrados en la práctica.

Debe notarse también que en porciones de la viga localizadas bajo una carga concentrada o distribuida, los esfuerzos normales σ_y se ejercerán sobre las caras horizontales de un elemento cúbico de material, además de los esfuerzos τ_{xy} mostrados en la figura 6.2.

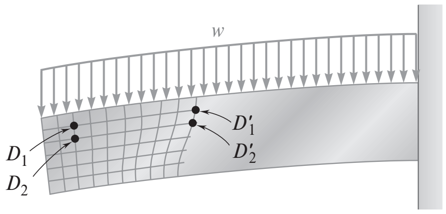
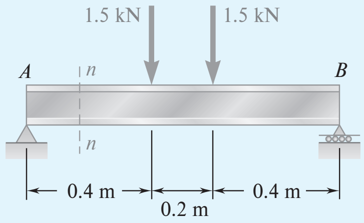


Figura 6.20 Deformación de una viga en voladizo con carga distribuida.

Problema modelo 6.1

La viga AB está hecha de tres placas pegadas y se somete, en su plano de simetría, a la carga mostrada. Considerando que el ancho de cada junta pegada es de 20 mm, determine el esfuerzo cortante promedio en cada junta en la sección n-n de la viga. La ubicación del centroide de la sección se muestra en la figura 1 y se sabe que el momento centroidal de inercia es $I = 8.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$.



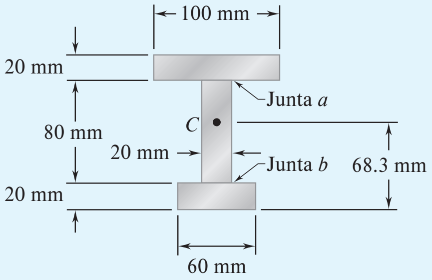


Figura 1 Dimensiones de la sección transversal con la ubicación del centroide.

ESTRATEGIA: Primero se usa un diagrama de cuerpo libre para determinar el cortante en la sección requerida. Enseguida se usa la ecuación (6.7) para calcular el esfuerzo cortante promedio en cada junta.

MODELAR:

Cortante vertical en la sección *n-n*. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2, la viga y la carga son simétricas con respecto al centro de la viga. Entonces se tiene **A** = **B** = 1.5 kN↑.

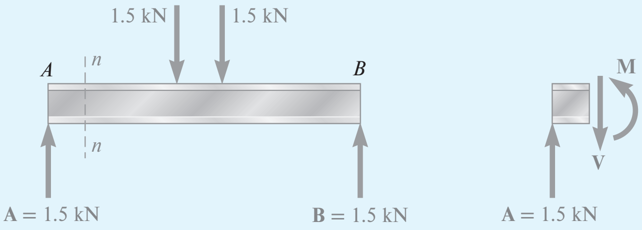


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la viga y del segmento de la viga a la izquierda de la sección *n-n*.

Si se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga a la izquierda de la sección *n-n* (figura 2), se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 1.5 \text{ kN} - V = 0 \qquad V = 1.5 \text{ kN}$$

ANALIZAR:

Esfuerzos cortantes en la junta *a*. A partir de la figura 3, se pasa una sección *a-a* por la junta pegada para separar la sección transversal en dos partes. Se escoge determinar Q calculando el primer momento con respecto al eje neutro del área por encima de *a-a*.

$$Q = A\bar{y}_1 = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})](0.0417) = 83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

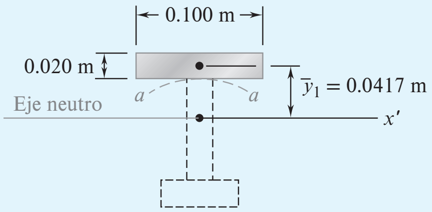


Figura 3 Uso del área por encima de la sección *a-a* para encontrar *Q*.

Al recordar que el ancho de la junta pegada es t = 0.020 m, se utiliza la ecuación (6.7) para hallar el esfuerzo cortante promedio de la junta.

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.020 \text{ m})} \qquad \tau_{\text{prom}} = 725 \text{ kPa} \blacktriangleleft$$

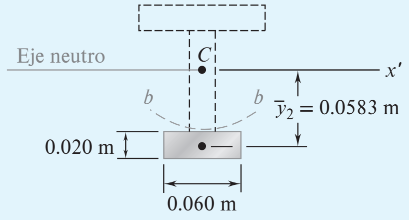


Figura 4 Uso del área debajo de la sección *b-b* para encontrar *Q*.

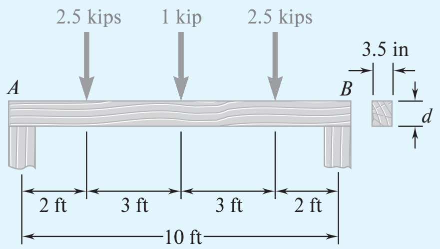
Esfuerzo cortante en la junta *b*. Con base en la figura 4, ahora se pasa a la sección *b-b* y se calcula Q usando el área debajo de la sección.

$$Q = A\bar{y}_2 = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})](0.0583 \text{ m}) = 70.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1\,500 \text{ N})(70.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.020 \text{ m})} \qquad \tau_{\text{prom}} = 608 \text{ kPa} \blacktriangleleft$$

Problema modelo 6.2

Una viga de madera AB con un claro de 10 ft y un ancho nominal de 4 in (ancho real = 3.5 in) debe soportar las tres cargas concentradas que se indican en la figura. Si se sabe que para el tipo de madera utilizado σ_{perm} = 1 800 psi y τ_{perm} = 120 psi, determine el espesor mínimo requerido d de la viga.



ESTRATEGIA: El diagrama de cuerpo libre con los diagramas de fuerza cortante y de momento flector se usan para determinar el cortante y el momento flector máximos. El diseño resultante debe satisfacer los dos esfuerzos permisibles. Comience suponiendo que prevalece un criterio de esfuerzo permisible, y encuentre la profundidad requerida d. Luego use esta profundidad con el otro criterio para determinar si también se satisface. Si este esfuerzo es mayor que el permitido, revise el diseño utilizando el segundo criterio.

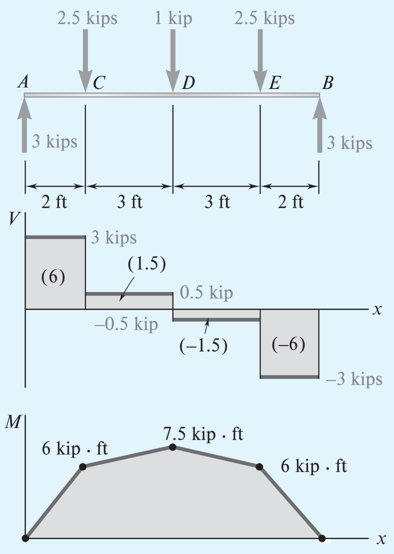


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga con los diagramas de cortante y momento flector.

MODELAR:

Cortante máximo y momento flector. Se usa el diagrama de cuerpo libre para determinar las reacciones y dibujar los diagramas de cortante y momento flector en la figura 1. Se advierte que

$$M_{\text{máx}} = 7.5 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 90 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

$$V_{\text{máx}} = 3 \text{ kips}$$

ANALIZAR:

Diseño basado en el esfuerzo normal permisible. Primero se expresa el módulo de sección elástico S en términos de la profundidad d (figura 2). Se tiene

$$I = \frac{1}{12}bd^3 \qquad S = \frac{I}{c} = \frac{1}{6}bd^2 = \frac{1}{6}(3.5)d^2 = 0.5833d^2$$

Para $M_{\text{máx}} = 90$ kip · in y $\sigma_{\text{perm}} = 1\,800$ psi, se escribe

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{todos}}} \qquad 0.5833d^2 = \frac{90 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in}}{1\,800 \text{ psi}}$$

$$d^2 = 85.7 \qquad d = 9.26 \text{ in}$$

Se ha satisfecho el requisito de que $\sigma_m \leq 1\,800$ psi.

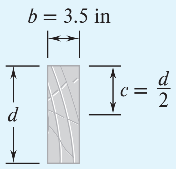


Figura 2 Sección de la viga con una profundidad *d*.

Verificación del esfuerzo cortante. Para $V_{\text{máx}} = 3$ kips y $d = 9.26$ in, se encuentra

$$\tau_m = \frac{3}{2}\frac{V_{\text{máx}}}{A} = \frac{3}{2}\frac{3\,000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in})(9.26 \text{ in})} \qquad \tau_m = 138.8 \text{ psi}$$

Ya que $\tau_{\text{perm}} = 120$ psi, la profundidad $d = 9.26$ in no es aceptable y debe rediseñarse la viga con base en el requisito de que $\tau_m \leq 120$ psi.

Diseño basado en el esfuerzo cortante permisible. Como ahora se sabe que el esfuerzo cortante permisible controla el diseño, se escribe

$$\tau_m = \tau_{\text{todos}} = \frac{3}{2}\frac{V_{\text{máx}}}{A} \qquad 120 \text{ psi} = \frac{3}{2}\frac{3\,000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in})d}$$

$$d = 10.71 \text{ in} \quad \blacktriangleleft$$

El esfuerzo normal es, desde luego, menor que $\sigma_{\text{perm}} = 1\,800$ psi, y la profundidad de 10.71 in es completamente aceptable.

REVISAR y PENSAR: Debido a que la madera se encuentra normalmente disponible en incrementos de 2 in. de profundidad, deberá utilizarse una viga de tamaño estándar 4 × 12 in. La sección transversal real será, entonces, de 3.5 × 11.25 in (figura 3).

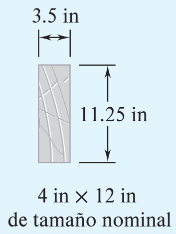


Figura 3 Sección transversal de diseño.

Problemas

6.1 Tres tablas de tamaño completo de 50 × 100 mm se clavan entre sí para formar una viga sometida a un cortante vertical de 1 500 N. Si se sabe que la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 400 N, determine el mayor espaciamiento longitudinal s que puede usarse entre cada par de clavos.

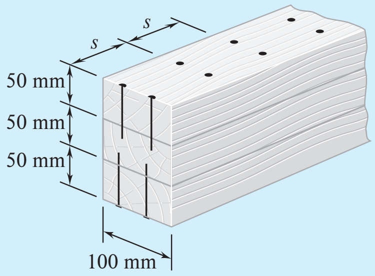


Figura P6.1

6.2 Para la viga preconstruida del problema 6.1, determine el cortante permisible si el espaciamiento entre cada par de clavos es $s = 45$ mm.

6.3 Tres tablas, cada una con 2 in de espesor, se clavan entre sí para formar una viga sometida a un cortante vertical. Considerando que la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 150 lb, determine el cortante permisible si el espaciamiento s entre los clavos es de 3 in.

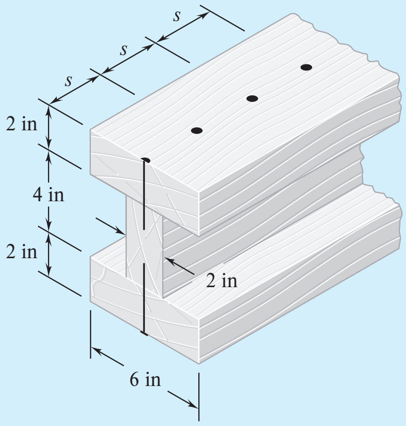


Figura P6.3

6.4 Una viga cuadrada tipo caja se hace con dos tablas de 20 × 80 mm y dos tablas de 20 × 120 mm, las cuales están clavadas entre sí como se muestra. Si se sabe que el espaciamiento entre los clavos es de $s = 30$ mm y que el cortante vertical en la viga es $V = 1\ 200$ N, determine *a*) la fuerza cortante en cada clavo, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga.

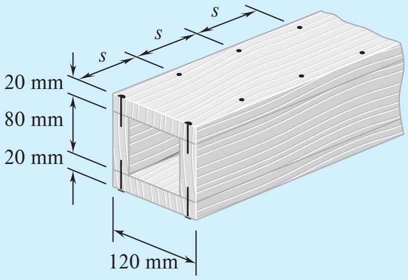


Figura P6.4

6.5 La viga de acero rolado estándar americano que se muestra se ha reforzado al añadirle dos placas de 16 × 200 mm, utilizando pernos de 18 mm de diámetro espaciados en forma longitudinal cada 120 mm. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible en los pernos es de 90 MPa, determine la máxima fuerza cortante vertical permisible.

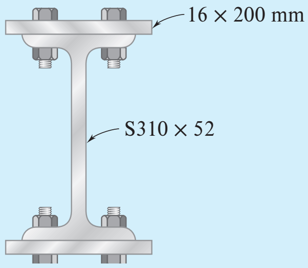


Figura P6.5

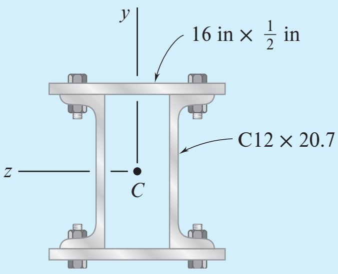


Figura *P6.6*

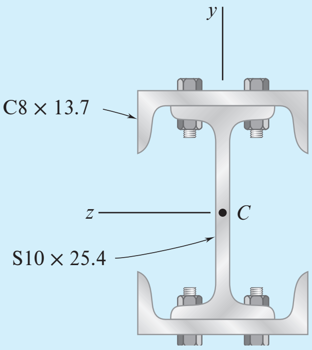


Figura P6.7

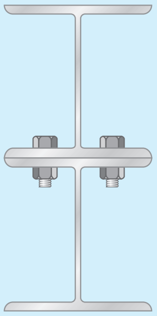


Figura *P6.8*

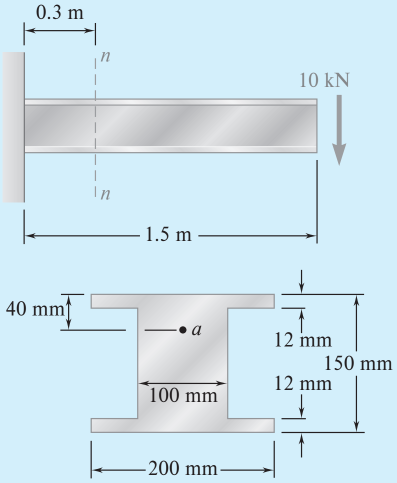


Figura *P6.10*

6.6 La viga mostrada se fabrica al conectar dos perfiles de canal y dos placas, mediante pernos de $\frac{3}{4}$ in de diámetro espaciados longitudinalmente cada 7.5 in. Determine el esfuerzo cortante promedio en los pernos causado por una fuerza cortante de 25 kips paralela al eje *y*.

6.7 Una columna se fabrica al conectar los elementos de acero rolado mostrados mediante pernos de $\frac{3}{4}$ in de diámetro espaciados longitudinalmente cada 5 in. Determine el esfuerzo cortante promedio en los pernos causado por una fuerza cortante de 30 kips paralela al eje *y*.

6.8 La viga compuesta que se muestra se fabricó al conectar dos elementos de acero rolado W6 × 20, usando pernos de $\frac{5}{8}$ in de diámetro espaciados en forma longitudinal cada 6 in. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible en los pernos es de 10.5 ksi, determine el máximo esfuerzo vertical permisible en la viga.

6.9 a 6.12 Para la viga y las cargas que se muestran, considere la sección *n-n* y determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en dicha sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *a*.

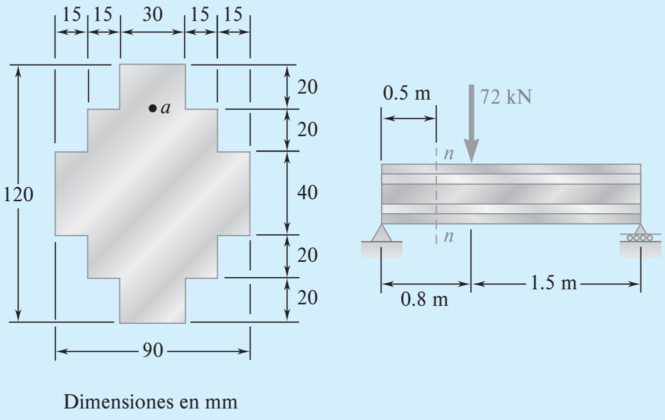


Figura P6.9

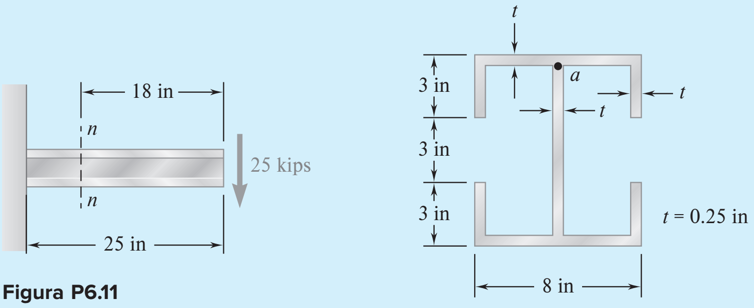


Figura P6.11

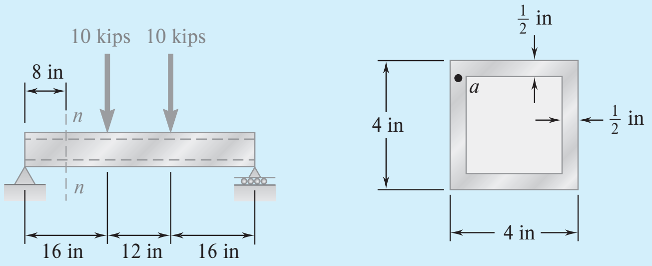


Figura P6.12

6.13 y *6.14* Para una viga que tiene la sección transversal mostrada, determine el cortante vertical máximo permisible si el esfuerzo cortante no debe exceder 60 MPa.

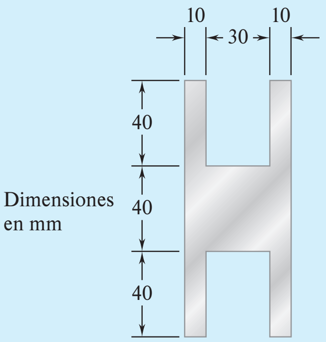


Figura P6.13

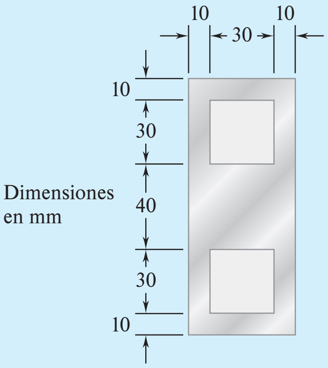


Figura *P6.14*

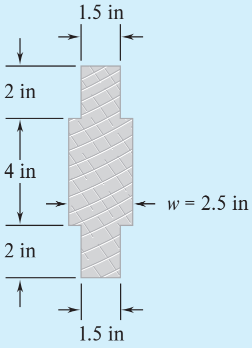


Figura P6.15

6.15 Para una viga de madera que tiene la sección transversal mostrada, determine el cortante vertical máximo permisible si el esfuerzo cortante no debe exceder 150 psi.

6.16 Dos placas de acero con sección transversal rectangular de 12 × 220 mm se sueldan a la viga W250 × 58 como se muestra. Determine el cortante vertical máximo permisible si el esfuerzo cortante en la viga no debe exceder 90 MPa.

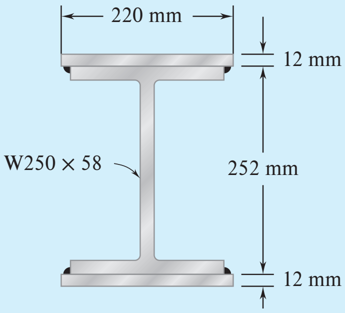


Figura *P6.16*

6.17 Dos secciones roladas W8 × 31 pueden soldarse en *A* y en *B* de cualquiera de las dos formas mostradas, a fin de formar una viga compuesta. Si se sabe que para cada soldadura la fuerza cortante permisible es de 3 000 lb por pulgada de soldadura, determine para cada arreglo el cortante vertical máximo permisible en la viga compuesta.

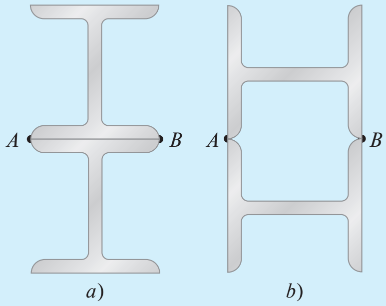


Figura P6.17

6.18 Para la viga y las cargas que se muestran, determine el ancho mínimo requerido *b*, si se sabe que para el grado de madera utilizado $\sigma_{perm} = 12$ MPa y $\tau_{perm} = 825$ kPa.

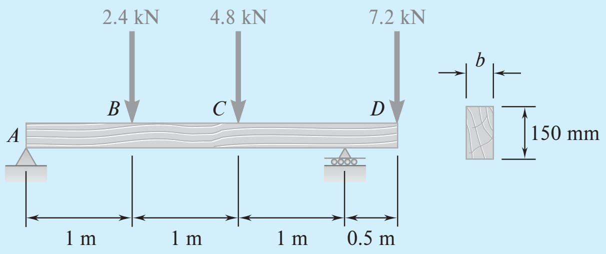


Figura P6.18

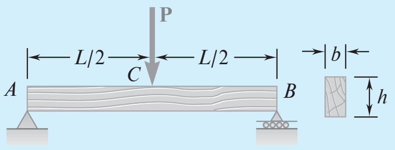


Figura P6.19

6.19 Una viga de madera *AB* de longitud *L* y sección transversal rectangular soporta una sola carga concentrada **P** en su punto medio *C*. *a*) Muestre que la relación τ_m/σ_m de los máximos valores para los esfuerzos cortante y normal en la viga es igual a $h/2L$, donde *h* y *L* son, respectivamente, la altura y la longitud de la viga. *b*) Determine la altura *h* y el ancho *b* de la viga, si se sabe que $L = 2$ m, $P = 40$ kN, $\tau_m = 960$ kPa y $\sigma_m = 12$ MPa.

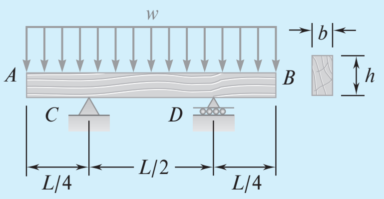


Figura *P6.20*

6.20 Una viga de madera *AB* de longitud *L* y sección transversal rectangular soporta una carga uniformemente distribuida *w* y se apoya como se muestra. *a*) Muestre que la relación τ_m/σ_m de los máximos valores para los esfuerzos cortante y normal en la viga es igual a $2h/L$, donde *h* y *L* son, respectivamente, la altura y la longitud de la viga. *b*) Determine la altura *h* y el ancho *b* de la viga, si se sabe que $L = 5$ m, $w = 8$ kN/m, $\tau_m = 1.08$ MPa y $\sigma_m = 12$ MPa.

6.21 y 6.22 Para la viga y las cargas que se muestran, considere la sección *n-n* y determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

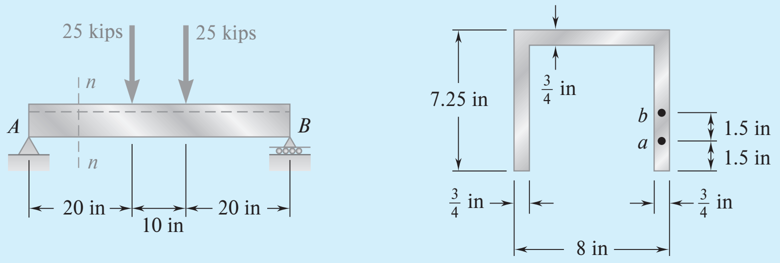


Figura P6.21 y P6.23

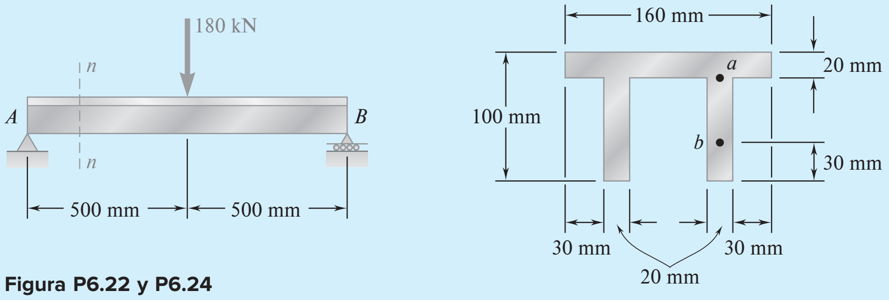


Figura P6.22 y P6.24

6.23 y 6.24 Para la viga y las cargas que se muestran, determine el esfuerzo cortante máximo en la sección *n-n*.

6.25 a 6.28 Una viga con la sección transversal que se muestra se somete a un cortante vertical **V**. Determine *a*) la línea horizontal a lo largo de la cual el esfuerzo cortante es máximo, *b*) la constante *k* en la siguiente expresión para el esfuerzo cortante máximo

$$\tau_{\text{máx}} = k\frac{V}{A}$$

donde *A* es el área de la sección transversal de la viga.

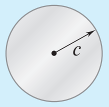


Figura *P6.25*

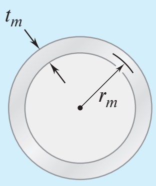


Figura P6.26

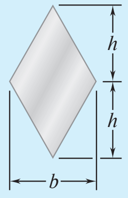


Figura *P6.27*

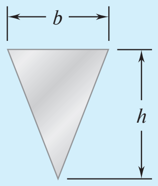


Figura P6.28

6.3 CORTANTE LONGITUDINAL SOBRE UN ELEMENTO DE VIGA DE FORMA ARBITRARIA

Considere una viga de caja obtenida clavando cuatro tablas, como se observa en la figura 6.21*a*. En la sección 6.1A se mostró cómo determinar el cortante por unidad de longitud, q, sobre las superficies horizontales a lo largo de las cuales se unen las tablas. Pero, ¿podría determinarse q si las tablas hubieran sido unidas a lo largo de superficies *verticales*, como se muestra en la figura 6.21*b*? Se examinó en la sección 6.2 la distribución de las componentes verticales τ_{xy} de los esfuerzos sobre la sección transversal de una viga W o S y se encontró que estos esfuerzos tienen un valor casi constante en el alma de la viga y son despreciables en los patines. Pero, ¿qué hay de las componentes *horizontales* τ_{xz} de los esfuerzos en los patines? El procedimiento desarrollado en la sección 6.1A para la determinación del cortante por unidad de longitud, q, es aplicable a los casos recién descritos.

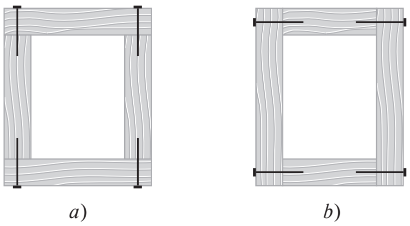


Figura 6.21 Viga de caja formada al clavar tablas entre sí.

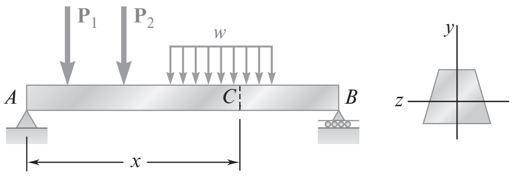


Figura 6.4 (*repetida*) Ejemplo de viga.

Considere la viga prismática AB de la figura 6.4, que tiene un plano vertical de simetría y soporta las cargas que se muestran. A una distancia x desde el extremo A, se desprende nuevamente un elemento $CDD'C'$ con longitud Δx. Este elemento, sin embargo, se extiende ahora desde dos lados de la viga a una superficie curva arbitraria (figura 6.22). Las fuerzas ejercidas sobre el elemento incluyen fuerzas cortantes verticales $\mathbf{V}'_C$ y $\mathbf{V}'_D$, fuerzas normales horizontales elementales $\sigma_C dA$ y $\sigma_D dA$, posiblemente una carga $w\,\Delta x$ y una fuerza cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ que representa la resultante de las fuerzas cortantes elementales longitudinales ejercidas sobre la superficie curva (figura 6.23). La ecuación de equilibrio es

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_{@} (\sigma_C - \sigma_D)\, dA = 0$$

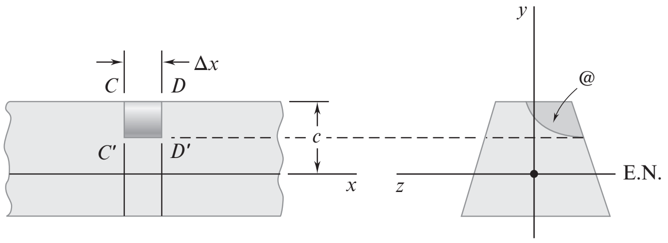


Figura 6.22 Segmento corto de una viga con el elemento *CDD'C'* de longitud Δx.

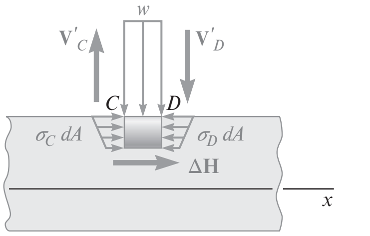


Figura 6.23 Fuerzas ejercidas sobre el elemento *CDD'C'*.

donde la integral se calculará a lo largo del área sombreada @ de la sección de la figura 6.22. Esta ecuación es igual que la de la sección 6.1A, pero el área sombreada @ sobre la que se calcula la integral ahora se extiende hasta la superficie curva.

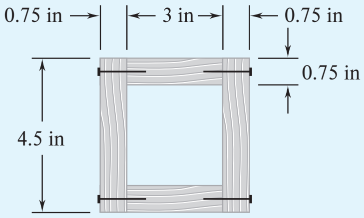
El cortante longitudinal ejercido sobre el elemento de viga es

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \tag{6.4}$$

donde I es el momento centroidal de inercia de toda la sección, Q el primer momento del área sombreada @ con respecto al eje neutro y V el cortante vertical en la sección.

Al dividir ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx, el cortante horizontal por unidad de longitud, o flujo cortante es

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \quad (6.5)$$



a)

Aplicación de conceptos 6.4

Una viga de caja cuadrada está hecha de dos tablas de 0.75 × 3 in, y dos de 0.75 × 4.5 in, clavadas como se muestra (figura 6.24*a*). Si la separación entre los clavos es de 1.75 in y la viga se somete a un cortante vertical de magnitud $V = 600$ lb, determine la fuerza cortante en cada clavo.

Se aísla la tabla superior y se considera la fuerza total por unidad de longitud q, ejercida sobre sus dos bordes. Si se emplea la ecuación (6.5), donde Q es el primer momento con respecto al eje neutro del área sombreada A' de la figura 6.24*b*, y donde I es el momento de inercia con respecto al mismo eje de la sección transversal total de la viga de caja (figura 6.24*c*),

$$Q = A'\bar{y} = (0.75 \text{ in})(3 \text{ in})(1.875 \text{ in}) = 4.22 \text{ in}^3$$

Al recordar que el momento de inercia de un cuadrado de lado a con respecto al eje centroidal es $I = \frac{1}{12}a^4$,

$$I = \tfrac{1}{12}(4.5 \text{ in})^4 - \tfrac{1}{12}(3 \text{ in})^4 = 27.42 \text{ in}^4$$

Al sustituir en la ecuación (6.5),

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(600 \text{ lb})(4.22 \text{ in}^3)}{27.42 \text{ in}^4} = 92.3 \text{ lb/in}$$

Puesto que tanto la viga como la tabla superior son simétricas con respecto al plano vertical de carga, se ejercen fuerzas iguales sobre los dos bordes de la tabla. La fuerza por unidad de longitud en estos bordes es $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}(92.3) = 46.15$ lb/in. Como la separación entre clavos es de 1.75 in, la fuerza cortante en cada clavo es

$$F = (1.75 \text{ in})(46.15 \text{ lb/in}) = 80.8 \text{ lb}$$

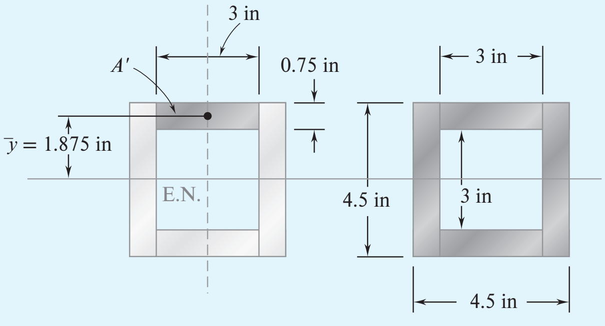


Figura 6.24 *a*) Viga de caja hecha con tablas clavadas entre sí. *b*) Geometría para encontrar el primer momento de área de la tabla superior. *c*) Geometría para encontrar el momento de inercia de toda la sección transversal.

6.4 ESFUERZOS CORTANTES EN ELEMENTOS DE PARED DELGADA

En la sección precedente se vio que la ecuación (6.4) puede utilizarse para determinar el cortante longitudinal **ΔH** ejercido sobre las paredes de un elemento de viga de forma arbitraria y que la ecuación (6.5) puede emplearse para determinar el flujo cortante q correspondiente. Las ecuaciones (6.4) y (6.5) se utilizarán en esta sección para calcular tanto el flujo cortante como el esfuerzo cortante promedio en elementos de pared delgada como los patines de vigas de patín ancho (fotografía 6.2), de vigas de caja, o en las paredes de tubos estructurales (fotografía 6.3).

Considere un segmento de longitud Δx de una viga de patín ancho (figura 6.25*a*) y sea **V** el cortante vertical en la sección transversal mostrada. Se desprende un elemento $ABB'A'$ del patín superior (figura 6.25*b*). El cortante longitudinal **ΔH** ejercido sobre el elemento puede obtenerse de la ecuación (6.4):

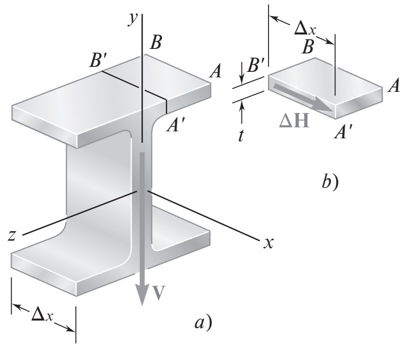


Figura 6.25 *a*) Sección de una viga de patín ancho con cortante vertical *V*. *b*) Segmento del patín con cortante longitudinal Δ*H*.

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\,\Delta x \tag{6.4}$$

Al dividir ΔH entre el área $\Delta A = \tau\,\Delta x$ del corte, se obtiene, para el esfuerzo cortante promedio ejercido sobre el elemento, la misma expresión que se obtuvo en la sección 6.1B para un corte horizontal:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

Se observa que τ_{prom} representa ahora el valor promedio del esfuerzo cortante τ_{zx} ejercido sobre un corte vertical, pero como el espesor τ del patín es pequeño, hay muy poca variación de τ_{zx} a través del corte. Al recordar que $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (figura 6.26), se concluye que la componente horizontal τ_{xz} del esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal del patín puede obtenerse mediante la ecuación (6.6), donde Q es el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro (figura 6.27*a*). Se obtuvo un resultado similar para la componente vertical τ_{xy} del esfuerzo cortante en el alma (figura 6.27*b*). La ecuación (6.6) puede usarse para determinar los esfuerzos cortantes en vigas de caja (figura 6.28) y medias tuberías (figura 6.29), siempre que las cargas se apliquen en un plano de simetría. En cada caso, el corte debe ser perpendicular a la superficie del elemento y la ecuación (6.6) dará la componente del esfuerzo cortante en la dirección de la tangente a esa superficie. (La otra componente puede suponerse igual a cero, dada la proximidad de las dos superficies libres.)

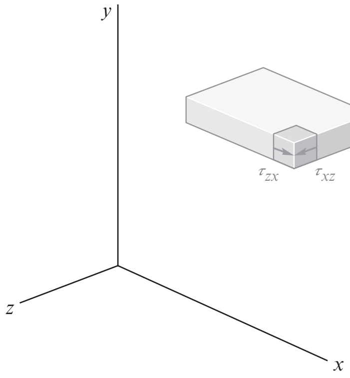


Figura 6.26 Elemento esforzado dentro del segmento del patín.

Al comparar las ecuaciones (6.5) y (6.6), se observa que el producto del esfuerzo cortante τ en un punto dado de la sección y el espesor t en ese punto es igual a q. Como

Fotografía 6.2 Vigas de patín ancho.

Fotografía 6.3 Tubos estructurales.

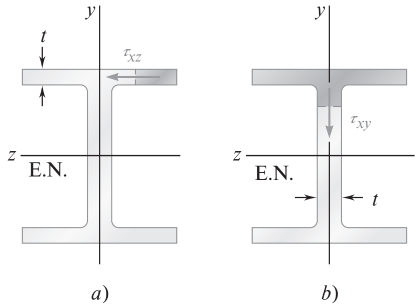


Figura 6.27 Secciones de una viga de patín ancho que muestran esfuerzo cortante *a*) en el patín y *b*) en el alma. El área sombreada se usa para calcular el primer momento de área.

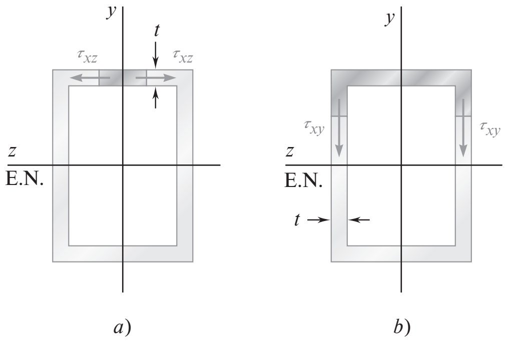


Figura 6.28 Viga de caja que muestra esfuerzo cortante *a*) en el patín y *b*) en el alma. El área sombreada se usa para calcular el primer momento de área.

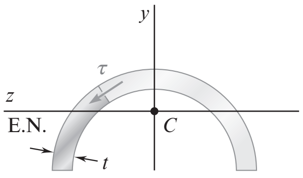


Figura 6.29 Sección de medio tubo que muestra esfuerzo cortante. El área sombreada se usa para calcular el primer momento de área.

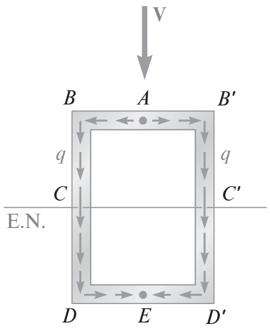


Figura 6.30 Flujo cortante, *q*, en una sección de viga de caja.

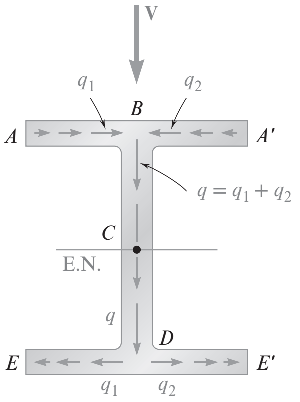


Figura 6.31 Flujo cortante, *q*, en una sección de una viga de patín ancho.

V e I son constantes en una sección dada, q depende solo del primer momento Q y por lo tanto puede esquematizarse fácilmente en la sección. Para una viga de caja (figura 6.30), q aumenta paulatinamente desde cero en A hasta un valor máximo en C y C' en el eje neutro y luego decrece de nuevo hasta cero al alcanzar E. No hay variación repentina en la magnitud de q cuando se pasa una esquina en B, D, B' o D', y el sentido de q en las partes horizontales de la sección puede obtenerse fácilmente a partir del sentido en las porciones verticales (que es el mismo de **V**). En una sección de patín ancho (figura 6.31), los valores de q en las porciones AB y $A'B$ del patín superior se distribuyen simétricamente. Cuando se llega a B en el alma, q corresponde a las dos mitades del patín, los cuales deben combinarse para obtener el valor de q en la parte superior del alma. Después de alcanzar un valor máximo en C en el eje neutro, q decrece y en D se separa en dos partes iguales correspondientes a las dos mitades del patín inferior. El cortante por unidad de longitud q se denomina comúnmente *flujo cortante*, y refleja la semejanza entre las propiedades de q que se acaban de describir y algunas de las características del flujo de fluido a través de un canal abierto o de una tubería.†

Hasta ahora se ha supuesto que todas las cargas actuaban en un plano de simetría del elemento. En el caso de elementos con dos planos de simetría (figura 6.27 o 6.30), cualquier carga aplicada a través del centroide de una sección transversal dada puede descomponerse en componentes a lo largo de los ejes de simetría de la sección. Cada componente provocará que el elemento se flexione en un plano de simetría; los esfuerzos cortantes correspondientes se obtienen mediante la ecuación (6.6). Se puede usar el principio de superposición para determinar los esfuerzos resultantes.

Sin embargo, si el elemento considerado carece de un plano de simetría o si posee uno solo y se le somete a una carga no contenida en ese plano, se observa que el elemento *se flexiona y tuerce* al mismo tiempo, excepto cuando la carga se aplica en un punto específico llamado *centro de cortante*. Observe que el centro de cortante generalmente *no* coincide con el centroide de la sección transversal. La determinación del centro de cortante para varias figuras de pared delgada se estudiará en la sección 6.6.

*6.5 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

Considere una viga en voladizo AB, con una longitud L y una sección transversal rectangular, sometida en su extremo libre A a una carga concentrada **P** (figura 6.32). El valor máximo del momento flector ocurre en el extremo fijo B y es igual a $M = PL$. Mientras este valor no exceda el máximo momento elástico M_Y (es decir, $PL \le M_Y$), el esfuerzo normal σ_x no excederá la resistencia a la cedencia σ_Y en ninguna parte de la

† Recuerde que el concepto de flujo cortante se usó para analizar la distribución de esfuerzos cortantes en ejes huecos de pared delgada (sección 3.10). Sin embargo, mientras el flujo cortante en un eje hueco es constante, en un elemento bajo carga transversal no lo es.

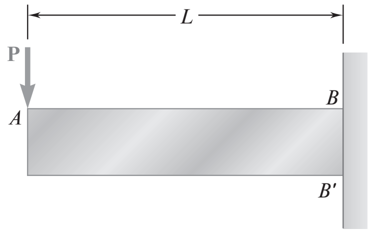


Figura 6.32 Viga en voladizo con momento máximo *PL* en la sección *B-B*′. Siempre que $PL \leq M_Y$, la viga permanecerá elástica.

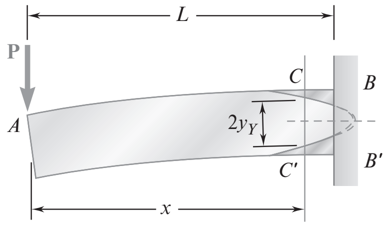


Figura 6.33 Viga en voladizo que exhibe cedencia parcial y el núcleo elástico en la sección *C-C*′.

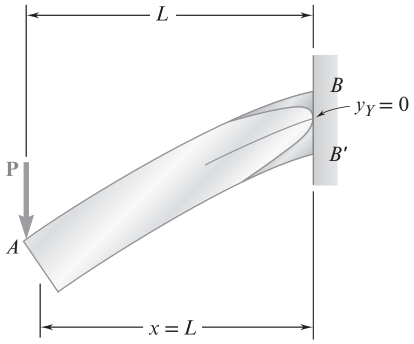


Figura 6.34 Viga en voladizo completamente plástica con $PL = M_p = 1.5\ M_Y$.

viga. Sin embargo, cuando *P* se incrementa más allá de M_Y/L, la cedencia inicia en los puntos *B* y *B*′ y se extiende al extremo libre de la viga. Suponiendo que el material es elastoplástico y considerando una sección *CC*′ localizada a una distancia *x* del extremo libre *A* de la viga (figura 6.33), se obtiene el *semiespesor* y_Y del núcleo elástico en esa sección haciendo $M = Px$ en la ecuación (4.38). Así que

$$Px = \frac{3}{2}M_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \quad \textbf{(6.14)}$$

donde *c* es la mitad de la profundidad de la viga. Al graficar y_Y contra *x*, se obtiene la frontera entre las zonas elástica y plástica.

Mientras $PL < \frac{3}{2}M_Y$, la parábola de la ecuación (6.14) interseca la línea *BB*′, como se muestra en la figura 6.33. Sin embargo, cuando *PL* alcanza el valor $\frac{3}{2}M_Y$ ($PL = M_p$), donde M_p es el momento plástico, la ecuación (6.14) da $y_Y = 0$ para $x = L$, lo cual muestra que el vértice de la parábola está ahora en la sección *BB*′ y que la sección se ha vuelto completamente plástica (figura 6.34). Al recordar la ecuación (4.40), el radio de curvatura ρ de la superficie neutra en ese punto es igual a cero, lo que indica la presencia de una fuerte flexión de la viga en su extremo fijo. Entonces, se ha desarrollado una *articulación plástica* en ese punto. La carga $P = M_p/L$ es la más grande que puede soportar la viga.

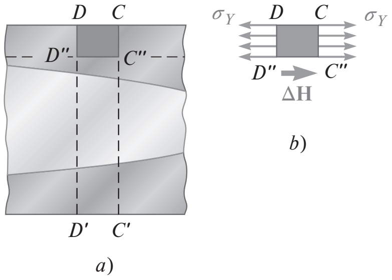


Figura 6.35 *a*) Segmento de viga en un área parcialmente plástica. *b*) El elemento *DCC*″*D*″ es completamente plástico.

El análisis anterior se basó únicamente en el análisis de los esfuerzos normales en la viga. Se examinará ahora la distribución de esfuerzos cortantes en una sección que se ha vuelto parcialmente plástica. Considere la parte de viga *CC*″*D*″*D* localizada entre las secciones transversales *CC*′ y *DD*′, y sobre el plano horizontal *D*″*C*″ (figura 6.35*a*). Si esta porción está enteramente en la zona plástica, los esfuerzos normales ejercidos sobre las caras *CC*″ y *DD*″ estarán distribuidos de manera uniforme y serán iguales a la resistencia a la cedencia σ_y (figura 6.35*b*). El equilibrio del cuerpo libre *CC*″*D*″*D* requiere que la fuerza cortante horizontal **ΔH** ejercida sobre su cara inferior sea igual a cero. Se tiene que el valor promedio del esfuerzo cortante horizontal τ_{yx} a través de la viga en *C*″ también es cero, al igual que el valor promedio del esfuerzo cortante vertical τ_{xy}. Entonces, el cortante vertical $V = P$ en la sección *CC*′ debe distribuirse enteramente sobre la porción *EE*′ de esa sección que está localizada dentro de la zona elástica (figura 6.36). La distribución de esfuerzos cortantes sobre *EE*′ es la misma que la de una viga rectangular elástica del mismo ancho *b* que la viga *AB* y una profundidad igual al espesor $2y_Y$ de la zona elástica.† El área $2by_Y$ de la porción elástica de la sección transversal *A*′ da

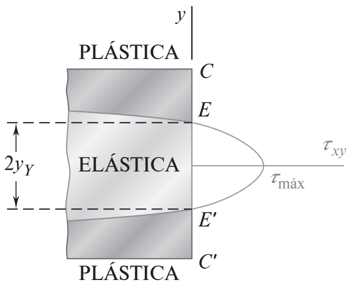


Figura 6.36 Distribución cortante parabólica en el núcleo elástico.

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A'}\left(1 - \frac{y^2}{y_Y^2}\right) \quad \textbf{(6.15)}$$

El máximo valor del esfuerzo cortante ocurre para $y = 0$ y es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{P}{A'} \quad \textbf{(6.16)}$$

† Vea el problema 6.60.

A medida que el área A' de la porción elástica de la sección decrece, $\tau_{máx}$ aumenta hasta alcanzar la resistencia a la cedencia en cortante τ_Y. Así, el cortante contribuye a la falla última de la viga. Un análisis más exacto de este modo de falla debe tener en cuenta el efecto combinado de los esfuerzos normales y cortantes.

Problema modelo 6.3

Si se sabe que el cortante vertical es de 50 kips en una viga de acero rolado W10 × 68, determine el esfuerzo cortante horizontal en el patín superior en un punto *a* localizado a 4.31 in del borde de la viga. Las dimensiones y otros datos geométricos de la viga de acero rolado se dan en el apéndice C.

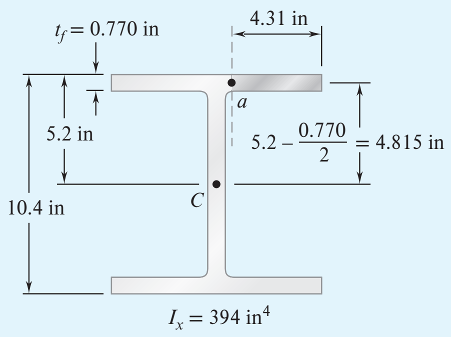


Figura 1 Dimensiones de la sección transversal de una viga de acero W10 × 68.

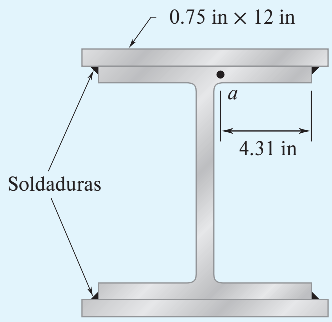
ESTRATEGIA: Determinar el esfuerzo cortante horizontal en la sección requerida.

MODELAR y ANALIZAR:
Como se muestra en la figura 1, se ha aislado la parte sombreada del patín cortando por la línea punteada que pasa a través del punto *a*.

$$Q = (4.31 \text{ in})(0.770 \text{ in})(4.815 \text{ in}) = 15.98 \text{ in}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(50 \text{ kips})(15.98 \text{ in}^3)}{(394 \text{ in}^4)(0.770 \text{ in})} \qquad \tau = 2.63 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

Problema modelo 6.4



Resuelva el problema modelo 6.3 suponiendo que se han unido placas de 0.75 × 12 in. a los patines de la viga W10 × 68 por medio de soldaduras de filete continuas, como se muestra en la figura.

ESTRATEGIA: Calcule las propiedades de la viga compuesta y después determine el esfuerzo cortante en la sección requerida.

MODELAR y ANALIZAR:
Para la viga compuesta que se muestra en la figura 1, el momento centroidal de inercia es

$$I = 394 \text{ in}^4 + 2[\tfrac{1}{12}(12 \text{ in})(0.75 \text{ in})^3 + (12 \text{ in})(0.75 \text{ in})(5.575 \text{ in})^2]$$
$$I = 954 \text{ in}^4$$

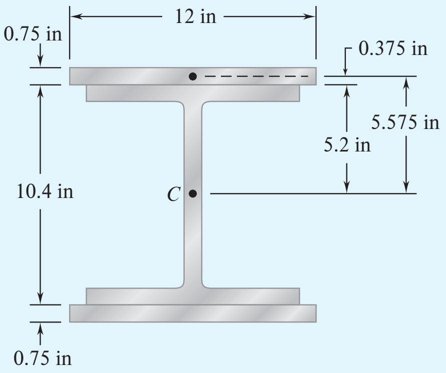


Figura 1 Dimensiones de la sección transversal para calcular el momento de inercia.

Como la placa superior y el patín están conectados solo en las soldaduras, puede encontrarse el esfuerzo cortante en a haciendo un corte en el patín en el punto a, *entre* la placa y el patín, y de nuevo en el patín en el punto simétrico a' (figura 2).

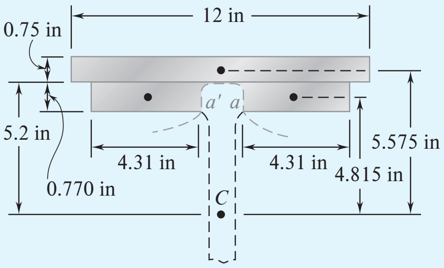


Figura 2 Dimensiones usadas para encontrar el primer momento de área y el esfuerzo cortante en la unión del patín con el alma.

Para el área sombreada,

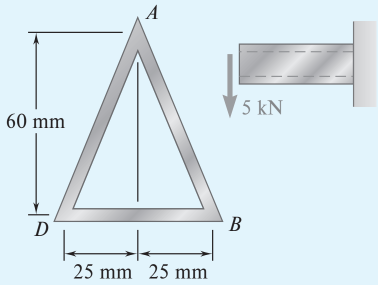
$$t = 2t_f = 2(0.770 \text{ in}) = 1.540 \text{ in}$$

$$Q = 2[(4.31 \text{ in})(0.770 \text{ in})(4.815 \text{ in})] + (12 \text{ in})(0.75 \text{ in})(5.575 \text{ in})$$

$$Q = 82.1 \text{ in}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(50 \text{ kips})(82.1 \text{ in}^3)}{(954 \text{ in}^4)(1.540 \text{ in})} \qquad \tau = 2.79 \text{ ksi}$$

Problema modelo 6.5



La viga extruida de pared delgada que se muestra en la figura está hecha de aluminio y tiene un espesor de pared uniforme de 3 mm. Si se sabe que el cortante en la viga es de 5 kN, determine *a*) el esfuerzo cortante en el punto A, *b*) el máximo esfuerzo cortante en la viga. *Nota:* Las dimensiones dadas van hasta las líneas localizadas en la mitad de las superficies externa e interna de la viga.

ESTRATEGIA: Determine la ubicación del centroide y después calcule el momento de inercia. Calcule los dos esfuerzos requeridos.

MODELAR y ANALIZAR:

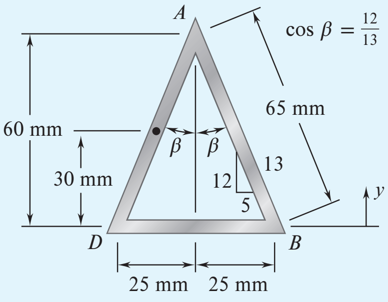


Figura 1 Dimensiones de la sección para encontrar el centroide.

Centroide. En la figura 1, se observa que $AB = AD = 65$ mm.

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y}A}{\Sigma A} = \frac{2[(65 \text{ mm})(3 \text{ mm})(30 \text{ mm})]}{2[(65 \text{ mm})(3 \text{ mm})] + (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})}$$

$$\bar{Y} = 21.67 \text{ mm}$$

Momento de inercia centroidal. Cada lado de la viga de pared delgada puede considerarse como un paralelogramo (figura 2), y se recuerda que para el caso mostrado $I_{nn} = bh^3/12$, donde b se mide paralela al eje nn. Con base en la figura 3, se escribe

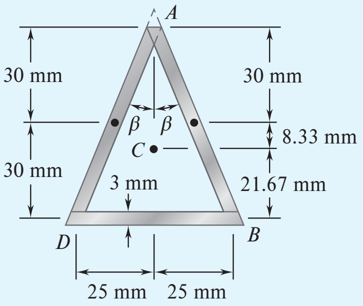


Figura 2 Dimensiones con la ubicación del centroide.

$$b = (3 \text{ mm})/\cos\beta = (3 \text{ mm})/(12/13) = 3.25 \text{ mm}$$

$$I = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = 2[\tfrac{1}{12}(3.25 \text{ mm})(60 \text{ mm})^3$$

$$+ (3.25 \text{ mm})(60 \text{ mm})(8.33 \text{ mm})^2] + [\tfrac{1}{12}(50 \text{ mm})(3 \text{ mm})^3$$

$$+ (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})(21.67 \text{ mm})^2]$$

$$I = 214.6 \times 10^3 \text{ mm}^4 \qquad I = 0.2146 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

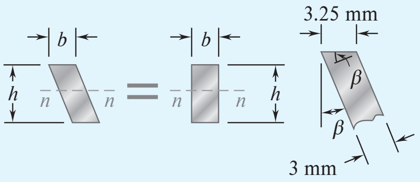


Figura 3 Determinación del ancho horizontal para los elementos laterales.

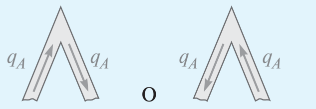


Figura 4 Posibles direcciones para el flujo cortante en *A*.

***a)* Esfuerzos cortantes en *A*.** Si en A ocurre un esfuerzo cortante τ_A, el flujo cortante será $q_A = \tau_A t$ y debe dirigirse en una de las dos formas mostradas en la figura 4. Como la sección transversal y la carga son simétricas con respecto a una línea vertical que pasa por A, entonces el flujo cortante también debe ser simétrico. Puesto que ninguno de los posibles flujos cortante es simétrico, se concluye que

$$\tau_A = 0 \quad \blacktriangleleft$$

***b)* Esfuerzo cortante máximo.** Como el espesor de la pared es constante, el máximo esfuerzo cortante ocurre en el eje neutro donde Q es máximo. Como se sabe que el esfuerzo cortante en A es cero, se corta la sección a lo largo de la línea punteada mostrada en la figura y se aísla la parte sombreada de la viga (figura 5). Para obtener el esfuerzo cortante máximo, el corte en el eje neutro se hace perpendicular a los lados y con una longitud de $t = 3$ mm.

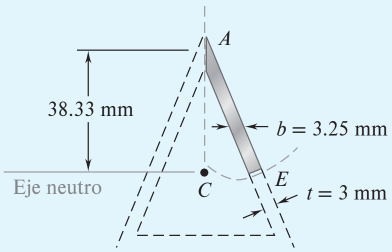


Figura 5 Sección para encontrar el esfuerzo cortante máximo.

$$Q = [(3.25 \text{ mm})(38.33 \text{ mm})]\frac{38.33 \text{ mm}}{2} = 2\,387 \text{ mm}^3$$

$$Q = 2.387 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_E = \frac{VQ}{It} = \frac{(5 \text{ kN})(2.387 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(0.2146 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.003 \text{ m})} \qquad \tau_{\text{máx}} = \tau_E = 18.54 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Problemas

6.29 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura se somete a un cortante vertical de 1 200 lb. Si se sabe que la fuerza cortante permisible en los clavos es de 75 lb, determine el máximo espaciamiento permisible s entre los clavos.

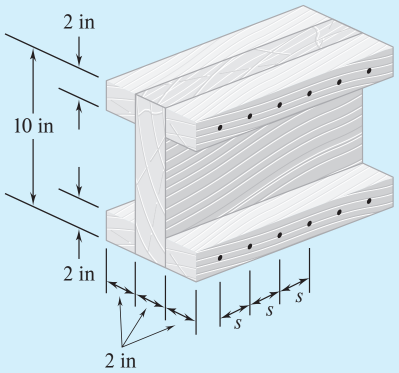


Figura P6.29

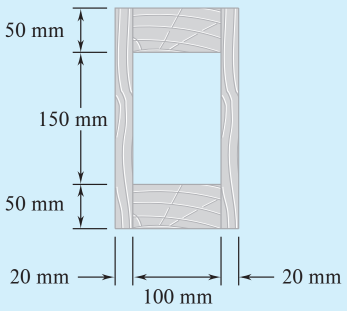


Figura P6.30

6.30 La viga compuesta que se observa en la figura se hizo pegando dos tiras de madera contrachapada de 20 × 250 mm y dos tablas de 50 × 100 mm. Considerando que el esfuerzo cortante promedio permisible en las juntas pegadas es de 350 kPa, determine el cortante vertical máximo permisible en la viga.

6.31 La viga compuesta que se muestra en la figura se fabricó pegando varias tablas de madera. Si se sabe que la viga se somete a un cortante vertical de 1 200 lb, determine el esfuerzo cortante promedio en la unión pegada *a*) en *A*, *b*) en *B*.

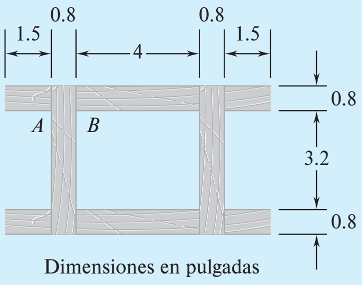


Figura P6.31

6.32 Se pegan varias tablas de madera para formar la viga de caja que se muestra en la figura. Si se sabe que la viga está sujeta a un cortante vertical de 3 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en la junta pegada *a*) en *A*, *b*) en *B*.

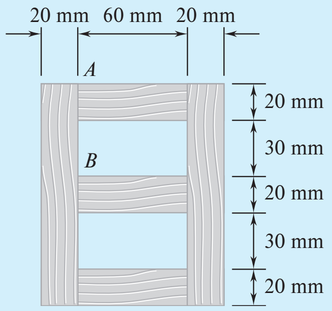


Figura P6.32

6.33 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura está sujeta a un cortante vertical de 8 kN. Si se sabe que los clavos están espaciados longitudinalmente cada 60 mm en *A* y cada 25 mm en *B*, determine la fuerza cortante sobre los clavos *a*) en *A*, *b*) en *B*. (*Datos:* $I_x = 1.504 \times 10^9$ mm^4).

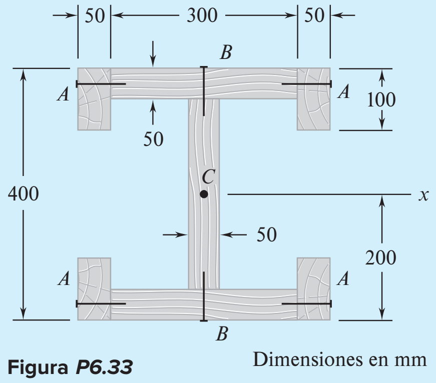


Figura *P6.33*

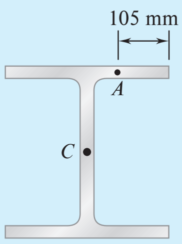


Figura *P6.34*

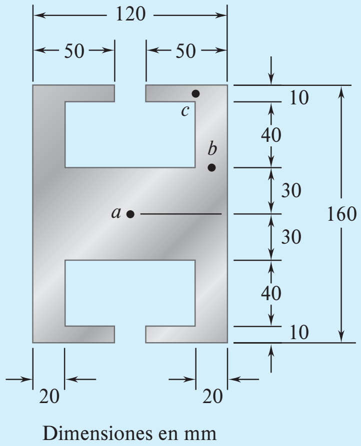


Figura P6.37

6.34 Si se sabe que sobre una viga de acero rolado W360 × 122 se ejerce un cortante vertical de 250 kN, determine el esfuerzo cortante *a*) en el punto *A*, *b*) en el centroide *C* de la sección.

6.35 y 6.36 Una viga extruida de aluminio tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si se sabe que el cortante vertical en la viga es de 150 kN, determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

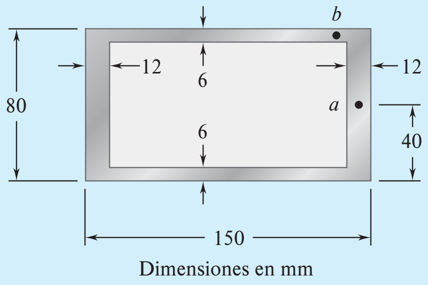


Figura P6.35

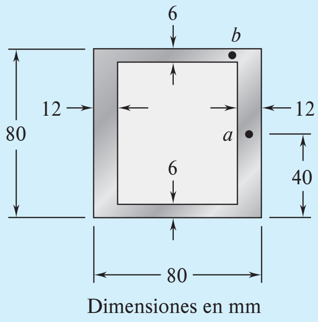


Figura P6.36

6.37 Si se sabe que un cortante vertical dado **V** causa un esfuerzo cortante máximo de 75 MPa en una viga extruida que tiene la sección transversal mostrada, determine el esfuerzo cortante en los tres puntos indicados.

6.38 El cortante vertical es de 1 200 lb en una viga que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si se sabe que $d = 4$ in, determine el esfuerzo cortante *a*) en el punto *a*, *b*) en el punto *b*.

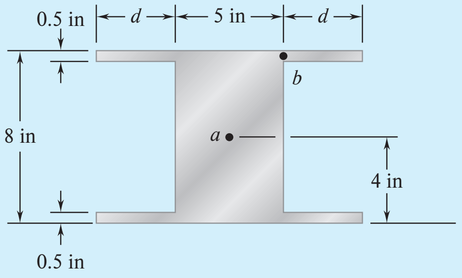


Figura P6.38 y *P6.39*

6.39 El cortante vertical es de 1 200 lb en una viga que tiene la sección transversal mostrada. Determine *a*) la distancia *d* para la que $\tau_a = \tau_b$, *b*) el esfuerzo cortante correspondiente en los puntos *a* y *b*.

6.40 y *6.41* La viga extruida de aluminio que se muestra en la figura tiene un espesor de pared uniforme de $\frac{1}{8}$ in. Si se sabe que el cortante vertical en la viga es de 2 kips, determine el esfuerzo cortante correspondiente en cada uno de los cinco puntos indicados.

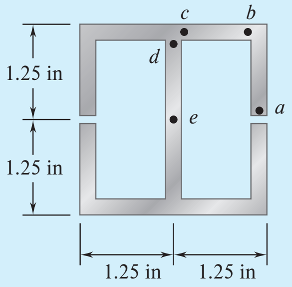


Figura P6.40

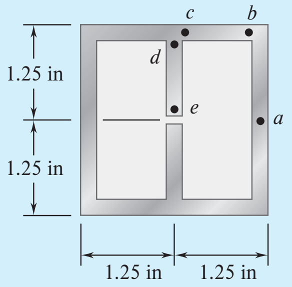


Figura *P6.41*

6.42 Si se sabe que un cortante vertical dado **V** causa un esfuerzo cortante máximo de 50 MPa en un elemento de pared delgada que tiene la sección transversal mostrada, determine el esfuerzo cortante correspondiente en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

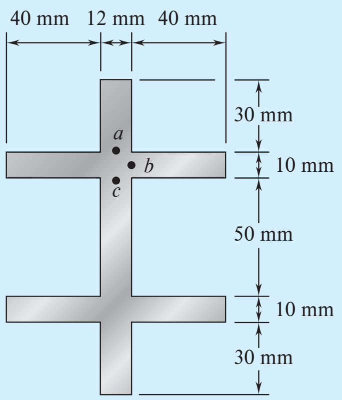


Figura P6.42

6.43 Tres tablas están conectadas como se muestra en la figura, mediante pernos de $\frac{3}{8}$ in de diámetro, espaciados cada 6 in a lo largo del eje longitudinal de la viga. Determine el esfuerzo cortante promedio en los pernos, para un cortante vertical de 2.5 kips.

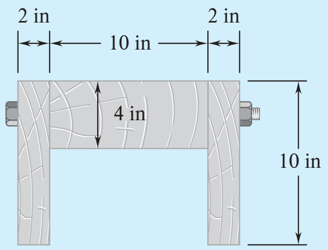


Figura P6.43

6.44 Una viga consiste en tres tablas conectadas mediante pernos de acero con un espaciamiento longitudinal de 225 mm, como se muestra en la figura. Si se sabe que el cortante en la viga es vertical e igual a 6 kN y que el esfuerzo cortante promedio permisible en cada perno es de 60 MPa, determine el menor diámetro permisible que puede utilizarse para los pernos.

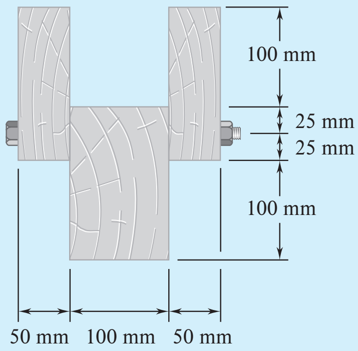


Figura P6.44

6.45 Una viga consiste en cinco tablas con sección transversal de 1.5 × 6 in conectadas mediante pernos de acero con un espaciamiento longitudinal de 9 in. Si se sabe que el cortante en la viga es vertical e igual a 2 000 lb, y que el esfuerzo cortante promedio permisible en cada perno es de 7 500 psi, determine el menor diámetro permisible que puede utilizarse para los pernos.

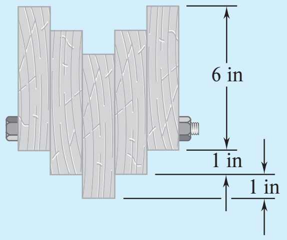


Figura P6.45

6.46 Cuatro ángulos de acero L102 × 102 × 9.5 y una placa de acero de 12 × 400 mm se unen con pernos para formar una viga con la sección transversal que se muestra en la figura. Los pernos tienen un diámetro de 22 mm y están espaciados longitudinalmente cada 120 mm. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 240 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en cada perno.

6.47 Una placa de $\frac{1}{4}$ in de espesor se dobla de la forma mostrada en la figura y después se emplea como viga. Para un cortante vertical de 1.2 kips, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en la sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *B*. También bosqueje el flujo cortante en la sección transversal.

6.48 Una placa de 2 mm de espesor se dobla de la forma mostrada en la figura y después se emplea como viga. Para un cortante vertical de 5 kN, determine

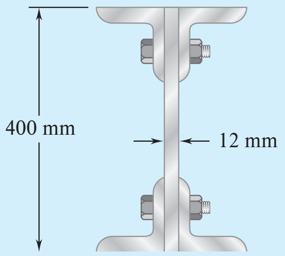


Figura P6.46

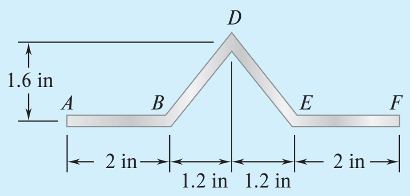


Figura *P6.47*

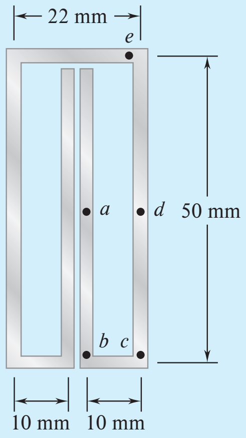


Figura P6.48

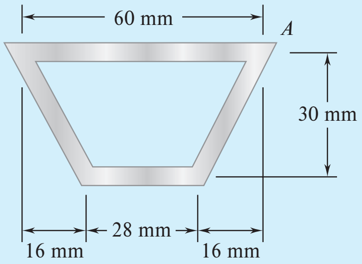


Figura P6.49

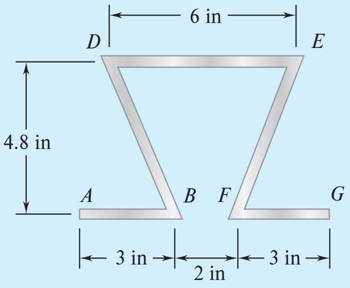


Figura *P6.50*

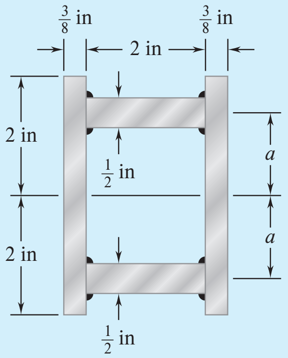


Figura P6.51

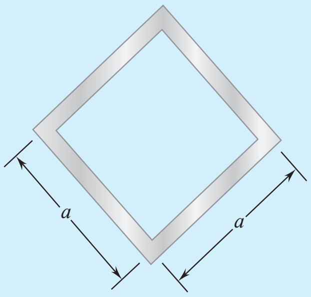


Figura P6.52

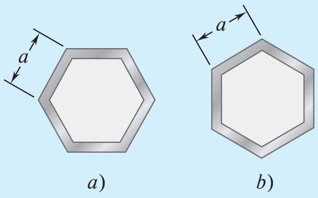


Figura *P6.53*

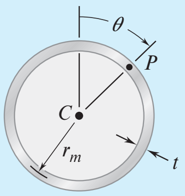


Figura *P6.54*

el esfuerzo cortante en los cinco puntos indicados y elabore un esquema del flujo de cortante en la sección transversal.

6.49 Una viga extruida tiene la sección transversal mostrada en la figura y un espesor de pared uniforme de 3 mm. Para un cortante vertical de 10 kN, determine *a*) el esfuerzo cortante en el punto *A*, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. También, elabore un esquema del flujo de cortante en la sección transversal.

6.50 Una placa de espesor *t* se dobla como lo muestra la figura y después se usa como viga. Para un cortante vertical de 600 lb, determine *a*) el espesor *t* para el cual el máximo esfuerzo cortante es de 300 psi, *b*) el esfuerzo cortante correspondiente en el punto *E*. También elabore un esquema del flujo de cortante en la sección transversal.

6.51 El diseño de una viga requiere conectar dos placas rectangulares verticales de $\frac{3}{8} \times 4$ in, al soldarlas a dos placas horizontales de $\frac{1}{2} \times 2$ in, como se muestra en la figura. Para un cortante vertical **V**, determine la dimensión *a* para la que el flujo de cortante a través de las superficies soldadas es máximo.

6.52 La sección transversal de una viga extruida es un cuadrado hueco de lado $a = 3$ in y espesor $t = 0.25$ in. Para un cortante vertical de 15 kips, determine el esfuerzo cortante máximo en la viga y elabore un diagrama del flujo de cortante en la sección transversal.

6.53 Una viga extruida tiene un espesor uniforme de pared *t*. Si se denota con **V** el cortante vertical y con *A* el área transversal de la viga, exprese el esfuerzo cortante máximo como $\tau_{\text{máx}} = k(V/A)$ y determine la constante *k* para cada una de las dos orientaciones mostradas.

6.54 *a*) Determine el esfuerzo cortante en el punto *P* de un tubo de pared delgada, con la sección transversal que se muestra en la figura, causado por un cortante vertical **V**. *b*) Muestre que el máximo esfuerzo cortante ocurre para $\theta = 90°$ y que es igual a $2V/A$, donde *A* es el área de la sección transversal del tubo.

6.55 Para una viga hecha de dos o más materiales con diferentes módulos de elasticidad, muestre que la ecuación (6.6)

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It}$$

permanece válida si tanto *Q* como *I* se calculan utilizando la sección transformada de la viga (vea la sección 4.4) y además si *t* es el ancho real de la viga donde se calcula τ_{prom}.

6.56 y 6.57 Una viga compuesta se fabrica al unir las porciones de madera y de acero que se muestran en la figura, con pernos de 12 mm de diámetro espaciados longitudinalmente cada 200 mm. El módulo de elasticidad es de 10 GPa para la madera y de 200 GPa para el acero. Para un cortante vertical de 4 kN, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en los pernos, *b*) el esfuerzo cortante en el centro de la sección transversal. (*Sugerencia:* Utilice el método indicado en el problema 6.55).

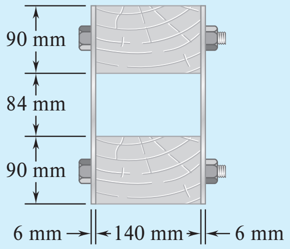


Figura P6.56

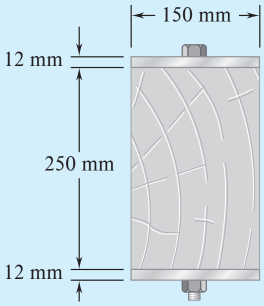


Figura P6.57

6.58 y 6.59 Una barra de acero y una barra de aluminio se unen para formar una viga compuesta como se muestra en la figura. Si se sabe que el cortante vertical en la viga es de 4 kips y que el módulo de elasticidad es de 29×10^6 psi para el acero y de 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en la superficie pegada, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. (*Sugerencia:* Utilice el método indicado en el problema 6.55).

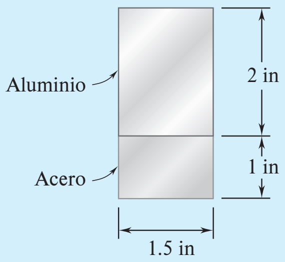


Figura P6.58

6.60 Considere la viga en voladizo *AB* analizada en la sección 6.5 y la porción *ACKJ* de la viga que está localizada a la izquierda de la sección transversal *CC'* y por encima del plano horizontal *JK*, donde *K* es un punto a una distancia $y < y_Y$ por encima del eje neutro (figura P6.60). *a*) Al recordar que $\sigma_x = \sigma_Y$ entre *C* y *E* y que $\sigma_x = (\sigma_Y/y_Y)y$ entre *E* y *K*, muestre que la magnitud de la fuerza cortante horizontal **H** ejercida sobre la cara inferior de la porción de la viga *ACKJ* es

$$H = \frac{1}{2} b\sigma_Y \left(2c - y_Y - \frac{y^2}{y_Y}\right)$$

b) Si se observa que el esfuerzo cortante en *K* es

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta A} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{b}\frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{1}{b}\frac{\partial H}{\partial x}$$

y se recuerda que y_Y es una función de *x* definida por la ecuación (6.14), deduzca la ecuación (6.15).

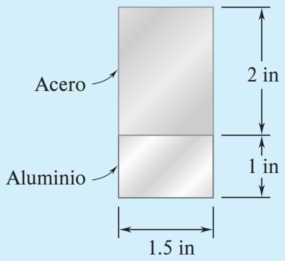


Figura P6.59

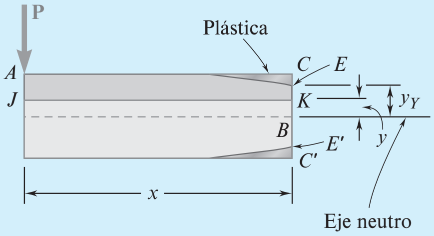


Figura P6.60

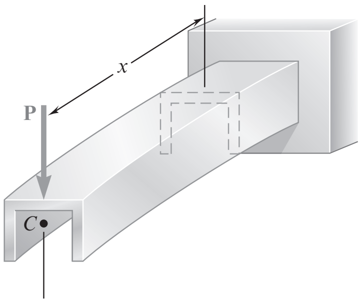


Figura 6.37 Viga de canal en voladizo con plano de simetría vertical.

*6.6 CARGA ASIMÉTRICA DE ELEMENTOS CON PARED DELGADA Y CENTRO DE CORTANTE

Hasta ahora, el análisis de los efectos de cargas transversales ha estado limitado a elementos con un plano vertical de simetría y a cargas aplicadas en ese plano. Se observó que los elementos se flexionaban en el plano de carga (figura 6.37) y en cualquier sección transversal dada, el momento flector **M** y el cortante **V** (figura 6.38) resultaron en esfuerzos normales y cortantes:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

y

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

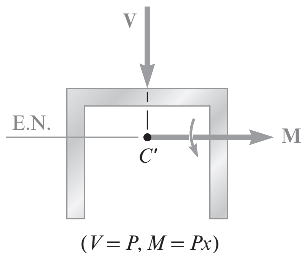


Figura 6.38 Carga aplicada en un plano de simetría vertical.

En esta sección se analizarán los efectos de cargas transversales en *elementos de pared delgada sin plano vertical de simetría.* Suponga que el elemento en canal de la figura 6.37 se ha girado 90° y que la línea de acción de **P** pasa todavía por el centroide de la sección final. El vector **M** que representa el momento flector en una sección dada todavía se dirige a lo largo del eje principal de la sección (figura 6.39), y el eje neutro coincidirá con ese eje (vea la sección 4.8). La ecuación (4.16) puede utilizarse para calcular los esfuerzos normales en la sección. Sin embargo, la ecuación (6.6) no puede usarse para determinar los esfuerzos cortantes, puesto que esta ecuación se dedujo para un elemento que posee un plano vertical de simetría (vea la sección 6.4). En realidad, se observará que el elemento se *flexionará y torcerá* bajo la carga aplicada (figura 6.40), y la distribución resultante de esfuerzos cortantes será muy diferente de la definida por la ecuación (6.6).

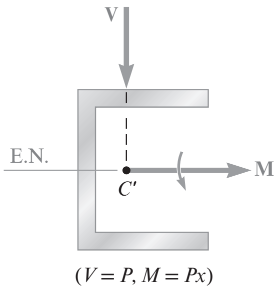


Figura 6.39 Carga perpendicular al plano de simetría.

¿Es posible aplicar la carga vertical **P** de modo que el elemento en canal de la figura 6.40 se *flexione sin torcerse*? Si es así, ¿dónde debe aplicarse **P**? Si el elemento se flexiona sin torsión, entonces el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección puede obtenerse de la ecuación (6.6), en donde Q es el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro (figura 6.41*a*), y la distribución de esfuerzos será la de la figura 6.41*b*, con $\tau = 0$ tanto en A como en E. La fuerza cortante ejercida sobre

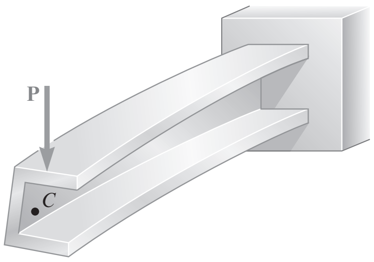


Figura 6.40 Deformación de una viga de canal cuando no está cargada en el plano de simetría.

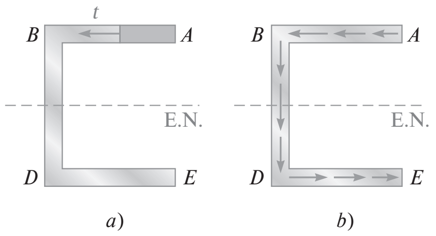


Figura 6.41 Esfuerzo cortante y flujo cortante como resultado de la carga asimétrica. *a*) Esfuerzo cortante. *b*) Flujo cortante *q*.

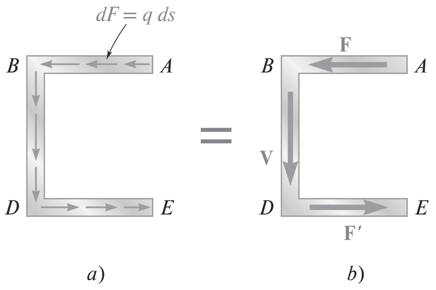


Figura 6.42 El flujo cortante en cada elemento resulta en un cortante vertical y un momento. *a*) Flujo cortante *q*. *b*) Fuerzas resultantes sobre los elementos.

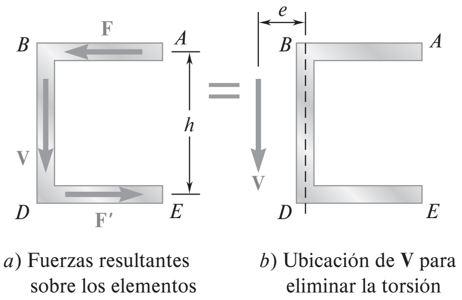


Figura 6.43 Fuerza-momento resultante por la flexión sin torsión, y reubicación de **V** para crear el mismo efecto.

un pequeño elemento de área $dA = tds$ es $dF = \tau dA = \tau tds$, o $dF = qds$ (figura 6.42*a*), donde q es el flujo cortante $q = \tau t = VQ/I$. La resultante de las fuerzas cortantes ejercida sobre los elementos del patín superior *AB* del canal es una fuerza horizontal **F** (figura 6.42*b*) de magnitud

$$F = \int_A^B q\, ds \qquad (6.17)$$

Debido a la simetría del canal con respecto a su eje neutro, la resultante de las fuerzas cortantes ejercida sobre el patín inferior *DE* es una fuerza **F′** de igual magnitud a **F** pero de sentido contrario. La resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre el alma *BD* debe ser igual a la fuerza cortante vertical **V** en la sección:

$$V = \int_B^D q\, ds \qquad (6.18)$$

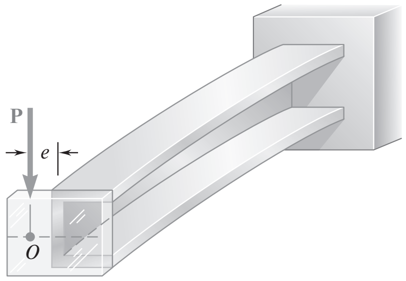


Figura 6.44 Ubicación de la carga para eliminar la torsión mediante el uso de una ménsula adjunta.

Las fuerzas **F** y **F′** forman un momento *Fh*, donde *h* es la distancia entre las líneas centrales de los patines *AB* y *DE* (figura 6.43*a*). Este momento puede eliminarse si el cortante vertical **V** se mueve a la izquierda a una distancia *e* tal que el momento de **V** con respecto a *B* sea igual a *Fh* (figura 6.43*b*). Entonces, $Ve = Fh$ o

$$e = \frac{Fh}{V} \qquad (6.19)$$

Cuando la fuerza **P** se aplica a una distancia *e* a la izquierda de la línea central del alma *BD*, el elemento se flexiona sin torsión en un plano vertical (figura 6.44).

El punto *O*, donde la línea de acción de **P** interseca al eje de simetría de la sección extrema, es el *centro de cortante* de esa sección. En el caso de una carga oblicua **P** (figura 6.45*a*), el elemento también estará libre de cualquier torsión si la carga **P** se aplica en el centro de cortante de la sección. Entonces la carga **P** puede descomponerse en dos componentes $\mathbf{P}_z$ y $\mathbf{P}_y$ (figura 6.45*b*) correspondientes a las condiciones de carga de las figuras 6.37 y 6.44, ninguna de las cuales hace que el elemento se tuerza.

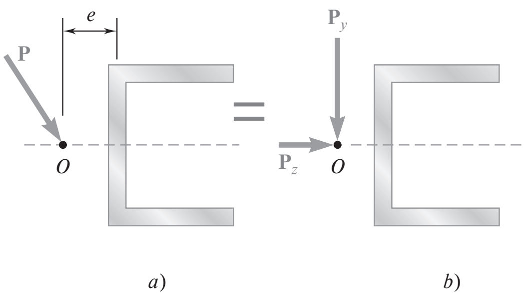


Figura 6.45 *a*) La carga oblicua aplicada en el centro de cortante no causará torsión, puesto que *b*) puede descomponerse en componentes que no la causan.

Aplicación de conceptos 6.5

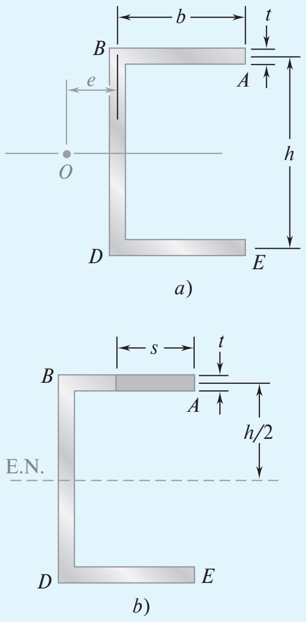


Figura 6.46 *a*) Sección canal. *b*) Segmento de patín usado para calcular el flujo cortante.

Determine el centro de cortante O de una sección en canal de espesor uniforme (figura 6.46*a*), si se sabe que $b = 4$ in, $h = 6$ in y $t = 0.15$ in.

Suponiendo que el elemento no se tuerce, se determina el flujo cortante q en el patín AB a una distancia s de A (figura 6.46*b*). Al recordar la ecuación (6.5) y observar que el primer momento Q del área sombreada con respecto al eje neutro es $Q = (s\tau)(h/2)$,

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I} \tag{6.20}$$

donde V es el cortante vertical e I el momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro.

Al recordar la ecuación (6.17), la magnitud de la fuerza cortante **F** ejercida sobre el patín AB se determina integrando el flujo cortante q desde A hasta B:

$$F = \int_0^b q\,ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I}\,ds = \frac{Vth}{2I}\int_0^b s\,ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I} \tag{6.21}$$

La distancia e desde la línea central del alma BD hasta el centro de cortante O puede obtenerse de la ecuación (6.19):

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2}{4I}\frac{h}{V} = \frac{th^2b^2}{4I} \tag{6.22}$$

El momento de inercia I de la sección canal puede expresarse como

$$I = I_{\text{alma}} + 2I_{\text{patín}}$$
$$= \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

Si se desprecia el término que contiene t^3, por ser muy pequeño, resulta

$$I = \tfrac{1}{12}th^3 + \tfrac{1}{2}tbh^2 = \tfrac{1}{12}th^2(6b + h) \tag{6.23}$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (6.22), se escribe

$$e = \frac{3b^2}{6b + h} = \frac{b}{2 + \dfrac{h}{3b}} \tag{6.24}$$

Se nota que la distancia e no depende de t y que puede variar de 0 a $b/2$ de acuerdo con el valor de la relación $h/3b$. Para la sección canal dada,

$$\frac{h}{3b} = \frac{6 \text{ in}}{3(4 \text{ in})} = 0.5$$

y

$$e = \frac{4 \text{ in}}{2 + 0.5} = 1.6 \text{ in}$$

Aplicación de conceptos 6.6

Para la sección canal de la Aplicación de conceptos 6.5, determine la distribución de esfuerzos cortantes causados por un cortante vertical **V** de 2.5 kips, aplicado en el centro de cortante *O* (figura 6.47*a*).

Esfuerzos cortantes en los patines. Como **V** se aplica en el centro de cortante, no hay torsión y los esfuerzos en el patín *AB* se obtienen de la ecuación (6.20). Se tiene

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh}{2I}s \tag{6.25}$$

que muestra que la distribución de esfuerzos en el patín *AB* es lineal. Al hacer $s = b$ y sustituir I de la ecuación (6.23), se obtiene el valor del esfuerzo cortante en *B*:

$$\tau_B = \frac{Vhb}{2(\frac{1}{12}th^2)(6b + h)} = \frac{6Vb}{th(6b + h)} \tag{6.26}$$

Si se hace $V = 2.5$ kips y se usan las dimensiones dadas,

$$\tau_B = \frac{6(2.5 \text{ kips})(4 \text{ in})}{(0.15 \text{ in})(6 \text{ in})(6 \times 4 \text{ in} + 6 \text{ in})}$$
$$= 2.22 \text{ ksi}$$

Esfuerzos cortantes en el alma. La distribución de los esfuerzos cortantes en el alma *BD* es parabólica, como en el caso de la viga W, y el máximo esfuerzo ocurre en el eje neutro. Al calcular el primer momento de la mitad superior de la sección transversal con respecto al eje neutro (figura 6.47*b*),

$$Q = bt(\tfrac{1}{2}h) + \tfrac{1}{2}ht(\tfrac{1}{4}h) = \tfrac{1}{8}ht(4b + h) \tag{6.27}$$

Al sustituir I y Q de las ecuaciones (6.23) y (6.27), respectivamente, en la expresión para el esfuerzo cortante,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(\frac{1}{8}ht)(4b + h)}{\frac{1}{12}th^2(6b + h)t} = \frac{3V(4b + h)}{2th(6b + h)}$$

o, con los datos dados

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3(2.5 \text{ kips})(4 \times 4 \text{ in} + 6 \text{ in})}{2(0.15 \text{ in})(6 \text{ in})(6 \times 4 \text{ in} + 6 \text{ in})}$$
$$= 3.06 \text{ ksi}$$

Distribución de esfuerzos sobre la sección. En la figura 6.47*c* se muestra la gráfica de la distribución de esfuerzos cortantes sobre la sección completa del canal.

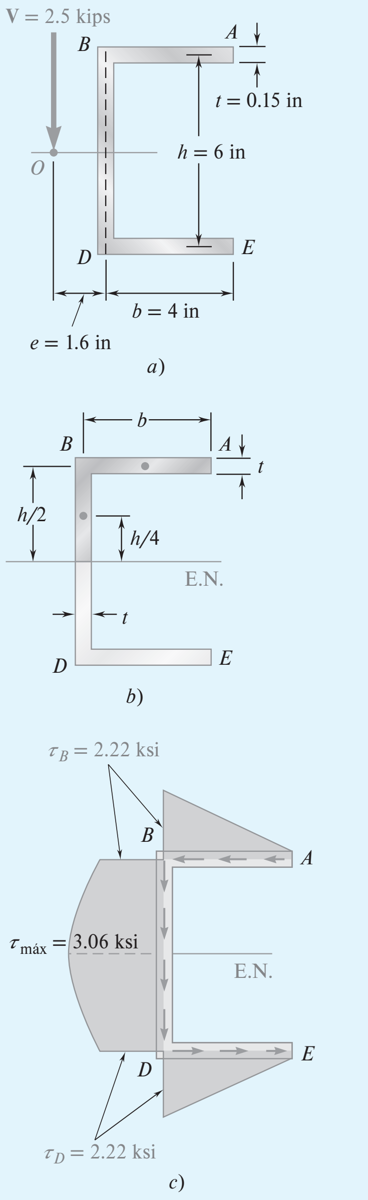


Figura 6.47 *a*) Sección canal cargada en el centro de cortante. *b*) Sección usada para encontrar el esfuerzo cortante máximo. *c*) Distribución del esfuerzo cortante.

Aplicación de conceptos 6.7

Para la sección canal de la Aplicación de conceptos 6.5, y despreciando las concentraciones de esfuerzos, determine el máximo esfuerzo cortante causado por una fuerza cortante vertical **V** de 2.5 kips aplicada en el centroide *C* de la sección, que está localizado a 1.143 in a la derecha de la línea central del alma *BD* (figura 6.48*a*).

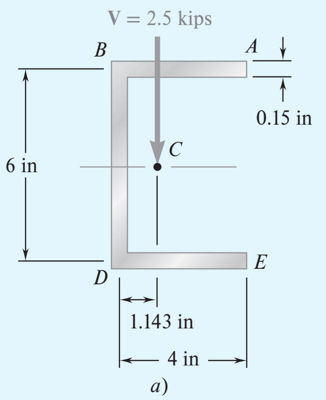


Figura 6.48 *a*) Sección canal cargada en el centroide (no en el centro de cortante).

Sistema equivalente fuerza-par en el centro de cortante. El centro de cortante O de la sección transversal se determinó en la Aplicación de conceptos 6.5 y se encontró a una distancia $e = 1.6$ in a la izquierda de la línea central del alma BD. El cortante **V** (figura 6.48*b*) se reemplazará por un sistema equivalente fuerza-momento en el centro de cortante O (figura 6.48*c*). Este sistema consta de una fuerza **V** de 2.5 kips y de un par de torsión **T** de magnitud

$$T = V(OC) = (2.5 \text{ kips})(1.6 \text{ in} + 1.143 \text{ in})$$
$$= 6.86 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

Esfuerzos debidos a la flexión. La fuerza **V** de 2.5 kips ocasiona una flexión del elemento, y la distribución correspondiente de esfuerzos cortantes en la sección (figura 6.48*d*) se determinó en la Aplicación de conceptos 6.6. Recuerde que el máximo valor del esfuerzo debido a esta fuerza resultó ser

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{flexión}} = 3.06 \text{ ksi}$$

Esfuerzos debidos a la torsión. El par **T** provoca que el elemento se tuerza, y la correspondiente distribución de esfuerzos se ilustra en la figura 6.48*e*. Recuerde del capítulo 3, que la analogía de la membrana muestra que, en un elemento de pared delgada y espesor uniforme, el esfuerzo causado por un par de torsión **T** es máximo a lo largo del borde de la sección. Al usar las ecuaciones (3.42) y (3.40) con

$$a = 4 \text{ in} + 6 \text{ in} + 4 \text{ in} = 14 \text{ in}$$
$$b = t = 0.15 \text{ in} \qquad b/a = 0.0107$$

Se tiene,

$$c_1 = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630b/a) = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630 \times 0.0107) = 0.331$$

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{torsión}} = \frac{T}{c_1 ab^2} = \frac{6.86 \text{ kip} \cdot \text{in}}{(0.331)(14 \text{ in})(0.15 \text{ in})^2} = 65.8 \text{ ksi}$$

Esfuerzos combinados. El esfuerzo máximo debido a flexión y torsión combinadas ocurre en el eje neutro, en la superficie interna del alma, y es

$$\tau_{\text{máx}} = 3.06 \text{ ksi} + 65.8 \text{ ksi} = 68.9 \text{ ksi}$$

Como observación práctica, esto excede el esfuerzo cortante a la cedencia para los aceros comúnmente disponibles. Este análisis demuestra el efecto potencialmente grande que la torsión puede tener sobre los esfuerzos cortantes en canales y formas estructurales similares.

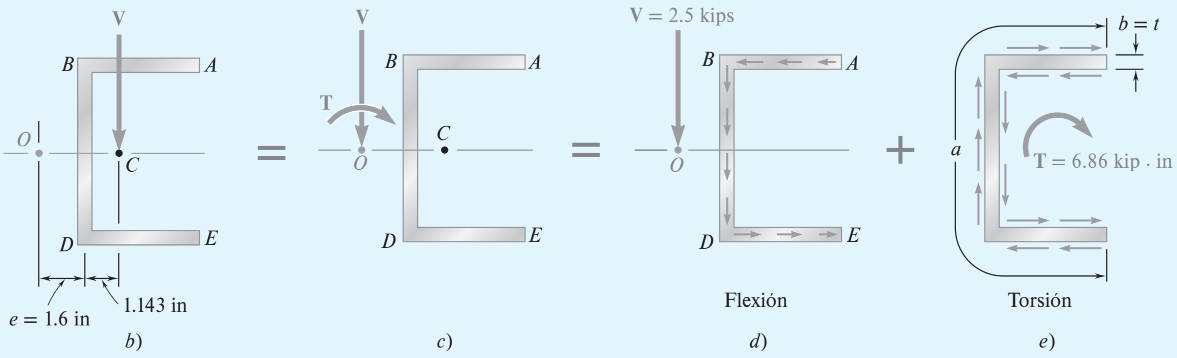


Figura 6.48 *b*) La carga en el centroide *c*) es equivalente a una fuerza-par en el centro de cortante, que es la superposición del esfuerzo cortante debido a *d*) la flexión y *e*) la torsión.

Se consideran de nuevo los elementos de pared delgada que no poseen un plano de simetría. Imagine el caso de un ángulo sometido a una carga vertical **P**. Si el elemento se orienta de manera que la carga **P** sea perpendicular a uno de los ejes centroidales principales *Cz* de la sección transversal, el vector momento **M**, que representa el momento flector en una sección dada, se dirigirá a lo largo de *Cz* (figura 6.49) y el eje neutro coincidirá con ese eje (vea la sección 4.8). La ecuación (4.16) es aplicable y puede usarse para calcular los esfuerzos normales en la sección. Ahora se determinará dónde debe aplicarse la carga **P** de manera que la ecuación (6.6) pueda usarse para determinar los esfuerzos cortantes en la sección, es decir, de modo que el elemento *se flexione sin torcerse*.

Suponga que los esfuerzos cortantes en la sección están definidos por la ecuación (6.6). Como en el caso de un elemento canal, las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la sección pueden expresarse como $dF = q\,ds$, con $q = VQ/I$, donde Q representa el primer momento con respecto al eje neutro (figura 6.50*a*). La resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre la porción *OA* de la sección transversal es la fuerza $\mathbf{F}_1$ dirigida a lo largo de *OA*, y la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas en la porción *OB* es una fuerza $\mathbf{F}_2$ a lo largo de *OB* (figura 6.50*b*). Como $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ pasan por el punto *O* en la esquina del ángulo, su propia resultante, que es el cortante **V** en la sección, debe pasar también por *O* (figura 6.50*c*). El elemento no se torcerá si la línea de acción de la carga **P** pasa por la esquina *O* de la sección en la cual se aplica.

Se puede aplicar el mismo razonamiento cuando la carga **P** es perpendicular al otro eje principal centroidal *Cy* de la sección angular. Como cualquier carga **P** aplicada en la esquina *O* de la sección transversal puede descomponerse en componentes perpendiculares a los ejes principales, el elemento no se torcerá si cada carga se aplica en la esquina *O* de la sección transversal. Por lo tanto, *O* es el centro de cortante de la sección.

En muchas estructuras se usan ángulos con uno de sus patines vertical y el otro horizontal. Tales elementos no se torcerán si se aplican fuerzas verticales a lo largo de la línea central de su patín vertical. Observe en la figura 6.51 que la resultante de las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la porción vertical *OA* de una sección dada será igual al cortante **V**, mientras la resultante de las fuerzas cortantes en la porción horizontal *OB* será cero:

$$\int_O^A q\,ds = V \qquad \int_O^B q\,ds = 0$$

Esto *no* significa que no habrá esfuerzo cortante en el ala horizontal del elemento. Al descomponer el cortante **V** en componentes perpendiculares a los ejes principales centroidales de la sección y al calcular el esfuerzo cortante en todos los puntos, τ es cero en solo un punto entre *O* y *B* (vea Problema modelo 6.6).

Otro tipo de elemento de pared delgada que se encuentra con frecuencia en la práctica es la forma Z. Aunque la sección transversal de un perfil Z no posee ejes de simetría, sí tiene un *centro de simetría O* (figura 6.52). Esto significa que a cualquier punto *H* de la sección transversal, le corresponde otro punto *H'* tal que el segmento *HH'* es bisecado por *O*. Claramente, el centro de simetría *O* coincide con el centroide de la sección transversal. Como se demostrará ahora, el punto *O* es también el centro de cortante de la sección transversal.

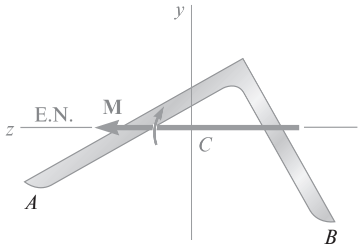
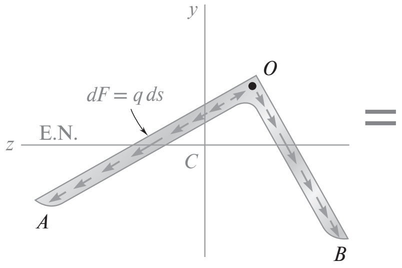
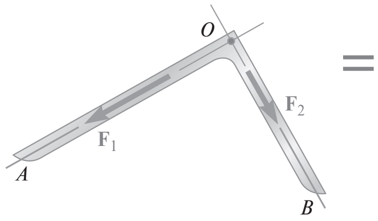


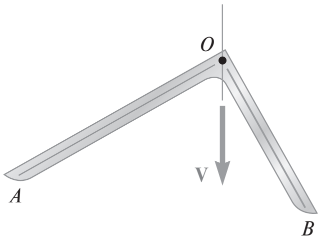
Figura 6.49 Viga sin plano de simetría sujeta a un momento flector.



a) Fuerzas cortantes elementales



b) Fuerzas resultantes sobre los elementos



c) Ubicación de **V** para eliminar la torsión

Figura 6.50 Determinación del centro de cortante, *O*, en una forma angular.

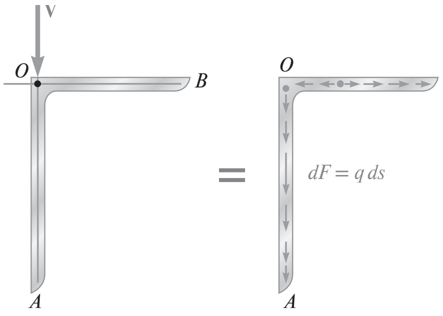


Figura 6.51 Sección en ángulo cargada verticalmente y flujo cortante resultante.

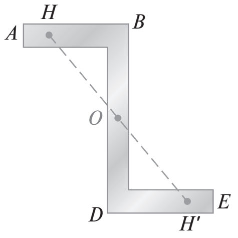


Figura 6.52 El centroide de esta sección en *Z* coincide con su centro de cortante.

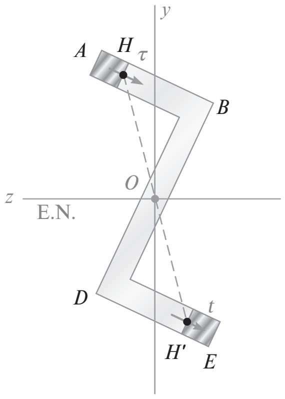


Figura 6.53 Ubicación del eje neutro para una carga aplicada en un plano perpendicular al eje principal *z*.

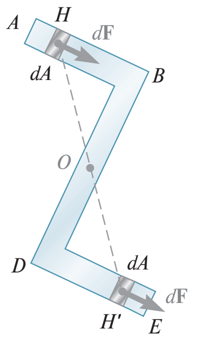
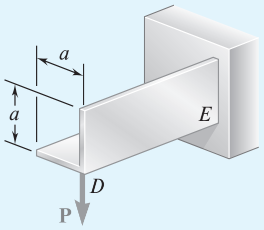


Figura 6.54 En un elemento que se dobla sin torsión, ocurren momentos iguales y opuestos con respecto a *O*, para cualquier par de elementos simétricos.

Como en el caso del perfil angular, se supone que las cargas se aplican en un plano perpendicular a uno de los ejes principales de la sección, de modo que este eje es también el eje neutro de la sección (figura 6.53). Además se supone que los esfuerzos cortantes en la sección están definidos por la ecuación (6.6), donde el elemento se flexiona sin torsión. Si Q es el primer momento con respecto al eje neutro de la porción AH de la sección transversal y Q' es el primer momento de la porción EH', se nota que $Q' = -Q$. Así, los esfuerzos cortantes en H y H' tienen la misma magnitud y dirección, y las fuerzas cortantes ejercidas sobre pequeños elementos de área dA localizados, respectivamente, en H y H' son fuerzas iguales que tienen momentos iguales y opuestos con respecto a O (figura 6.54). Como esto es cierto para cualquier par de elementos simétricos, la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre la sección tiene un momento nulo con respecto a O. Esto significa que el cortante **V** en la sección se dirige a lo largo de una línea que pasa por O. Como este análisis puede repetirse cuando las cargas se aplican en un plano perpendicular al otro eje principal, el punto O es el centro de cortante de la sección.

Problema modelo 6.6



Determine la distribución de esfuerzos cortantes en el perfil angular DE, con pared delgada y espesor uniforme t, para la carga mostrada en la figura.

ESTRATEGIA: Localice el centroide de la sección transversal y determine los dos momentos de inercia principales. Descomponga la carga **P** en componentes paralelas a los ejes principales, iguales a las fuerzas cortantes. Enseguida, los dos conjuntos de esfuerzos cortantes se calcularán en ubicaciones a lo largo de los dos lados del ángulo. Después, se superpondrán para obtener la distribución de esfuerzos cortantes.

MODELAR y ANALIZAR:

Centro de cortante. Recuerde, de la sección 6.6, que el centro de cortante de la sección transversal de un perfil angular de pared delgada está en su esquina. Como la carga **P** se aplica en D, causa flexión pero no torsión del perfil.

Ejes principales. Se localiza el centroide C de la sección transversal dada AOB (figura 1). Como el eje y' es un eje de simetría, los ejes y' y z' son los ejes principales centroidales de la sección. Recuerde que para el paralelogramo mostrado (figura 2), $I_{nn} = \frac{1}{12}bh^3$ e $I_{mm} = \frac{1}{3}bh^3$. Considerando cada lado como un paralelogramo, se determinan los momentos centroidales de inercia $I_{y'}$ e $I_{z'}$:

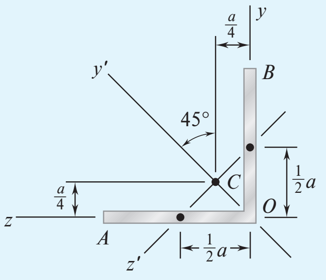


Figura 1 Sección angular con ejes principales y' y z'.

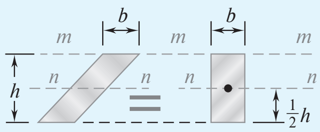


Figura 2 Paralelogramo y rectángulo equivalente para determinar momentos de inercia.

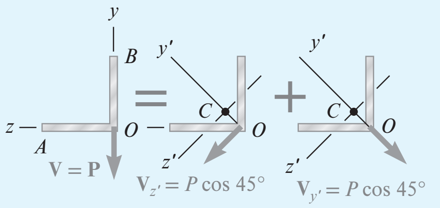


Figura 3 Descomposición de la carga en componentes paralelas a los ejes principales.

$$I_{y'} = 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\cos 45°}\right)(a \cos 45°)^3\right] = \frac{1}{3}ta^3$$

$$I_{z'} = 2\left[\frac{1}{12}\left(\frac{t}{\cos 45°}\right)(a \cos 45°)^3\right] = \frac{1}{12}ta^3$$

Superposición. El cortante **V** en la sección es igual a la carga **P**. Como se muestra en la figura 3, se descompone en componentes paralelas a los ejes principales.

Esfuerzos cortantes debidos a $\mathbf{V}_{y'}$. Con base en la figura 4, se determina el esfuerzo cortante en el punto e de coordenada y:

$$\bar{y}' = \tfrac{1}{2}(a + y)\cos 45° - \tfrac{1}{2}a \cos 45° = \tfrac{1}{2}y \cos 45°$$

$$Q = t(a - y)\bar{y}' = \tfrac{1}{2}t(a - y)y \cos 45°$$

$$\tau_1 = \frac{V_{y'}Q}{I_{z'}t} = \frac{(P\cos 45°)[\frac{1}{2}t(a-y)y\cos 45°]}{(\frac{1}{12}ta^3)t} = \frac{3P(a-y)y}{ta^3}$$

El esfuerzo cortante en el punto f está representado por una función de z similar.

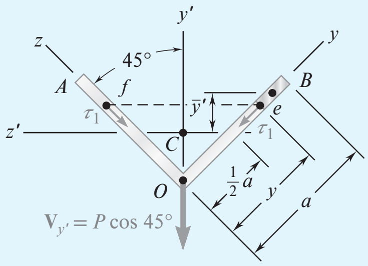


Figura 4 Componente de la carga en el plano de simetría.

Esfuerzos cortantes debidos a $\mathbf{V}_{z'}$. Con base en la figura 5, considere de nuevo el punto e:

$$\bar{z}' = \tfrac{1}{2}(a + y)\cos 45°$$

$$Q = (a - y)t\bar{z}' = \tfrac{1}{2}(a^2 - y^2)t \cos 45°$$

$$\tau_2 = \frac{V_{z'}Q}{I_{y'}t} = \frac{(P\cos 45°)[\frac{1}{2}(a^2-y^2)t\cos 45°]}{(\frac{1}{3}ta^3)t} = \frac{3P(a^2-y^2)}{4ta^3}$$

El esfuerzo cortante en el punto f está representado por una función de z similar.

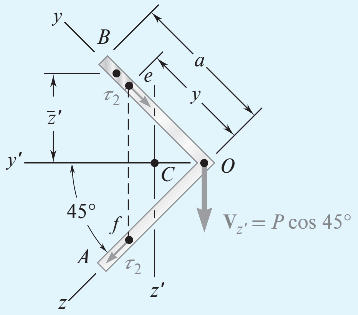


Figura 5 Componente de la carga perpendicular al plano de simetría.

Esfuerzos combinados. *A lo largo del lado vertical.* El esfuerzo cortante en el punto e es

$$\tau_e = \tau_2 + \tau_1 = \frac{3P(a^2-y^2)}{4ta^3} + \frac{3P(a-y)y}{ta^3} = \frac{3P(a-y)}{4ta^3}[(a+y)+4y]$$

$$\tau_e = \frac{3P(a-y)(a+5y)}{4ta^3}$$

A lo largo del lado horizontal. El esfuerzo cortante en el punto f es

$$\tau_f = \tau_2 - \tau_1 = \frac{3P(a^2-z^2)}{4ta^3} - \frac{3P(a-z)z}{ta^3} = \frac{3P(a-z)}{4ta^3}[(a+z)-4z]$$

$$\tau_f = \frac{3P(a-z)(a-3z)}{4ta^3}$$

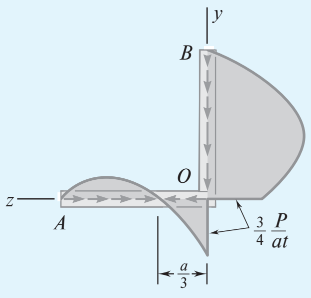


Figura 6 Distribución del esfuerzo cortante.

REVISAR y PENSAR: La gráfica de los esfuerzos combinados se presenta en la figura 6.

Problemas

6.61 a 6.64 Determine la ubicación del centro de cortante O de una viga de pared delgada con espesor uniforme, que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

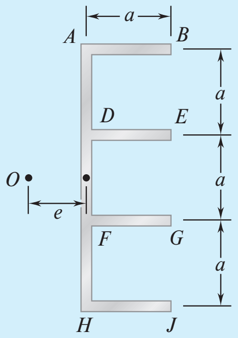


Figura P6.61

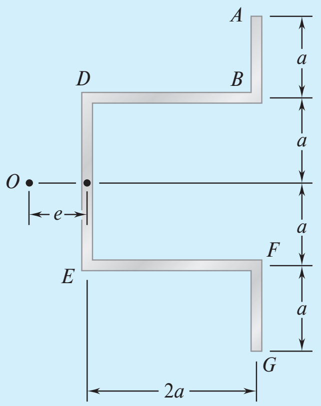


Figura P6.62

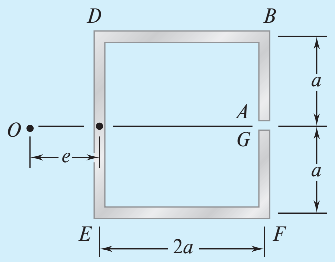


Figura P6.63

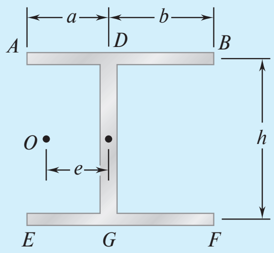


Figura P6.64

6.65 a 6.68 Una viga extruida tiene la sección transversal mostrada. Determine *a*) la ubicación del centro de cortante O, *b*) la distribución de los esfuerzos cortantes causados por la fuerza cortante vertical **V** que se aplica en O.

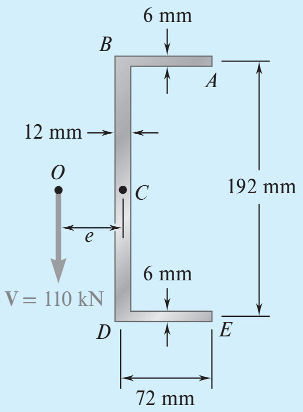


Figura P6.65

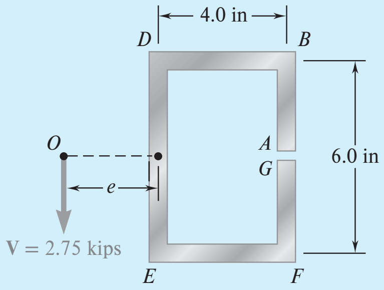


Figura *P6.66*

$t = \frac{1}{8}$ in

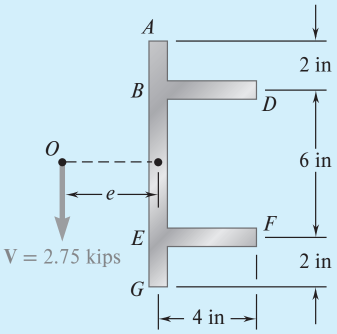
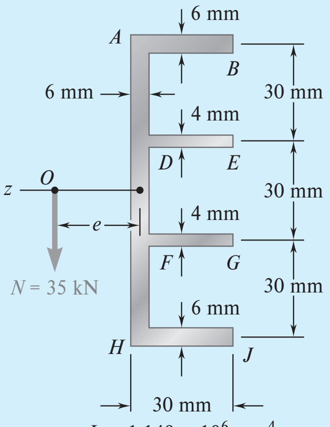


Figura *P6.67*

$t = \frac{1}{8}$ in



$I_z = 1.149 \times 10^6$ mm^4

Figura P6.68

6.69 a *6.74* Determine la ubicación del centro de cortante O de una viga de pared delgada con espesor uniforme, que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

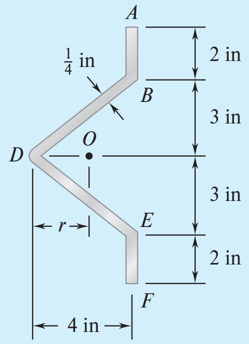


Figura P6.69

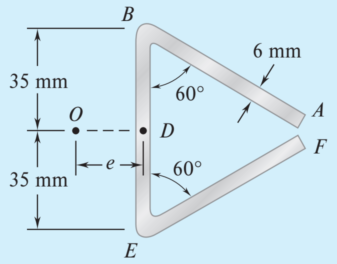


Figura P6.70

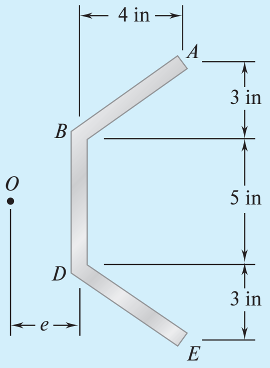


Figura P6.71

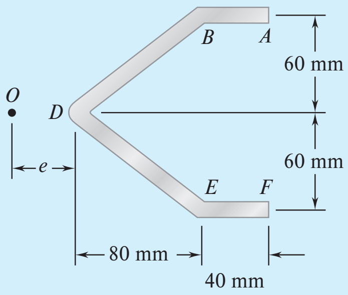


Figura P6.72

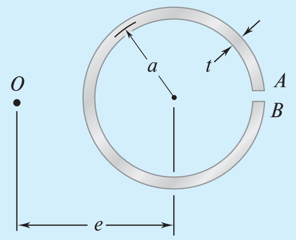


Figura *P6.73*

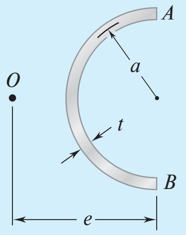


Figura *P6.74*

6.75 y 6.76 Una viga de pared delgada tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la ubicación del centro de cortante O de la sección transversal.

6.77 y 6.78 Una viga de pared delgada con espesor uniforme tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la dimensión b para la cual el centro de cortante O de la sección transversal se localiza en el punto indicado.

6.79 Para el perfil angular y la carga del Problema modelo 6.6, verifique que $\int q\, dz = 0$ a lo largo del ala horizontal del ángulo y que $\int q\, dy = P$ a lo largo de su lado vertical.

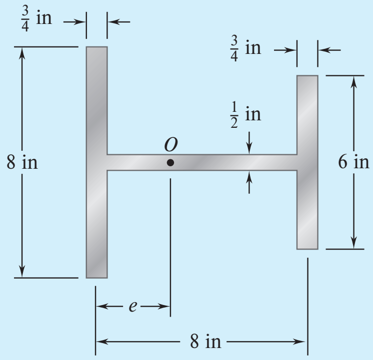


Figura P6.75

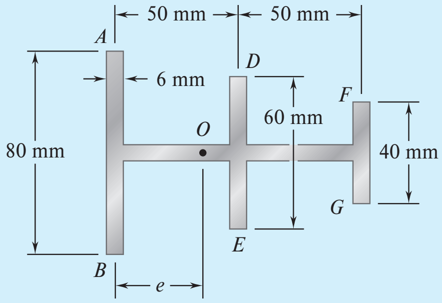


Figura P6.76

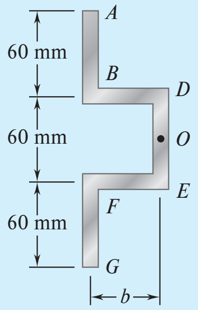


Figura P6.77

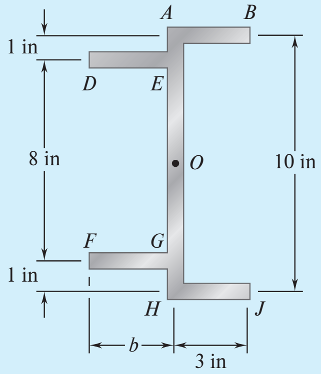


Figura P6.78

6.80 Para el perfil angular y la carga del Problema modelo 6.6, *a*) determine los puntos donde el esfuerzo cortante es máximo y los valores correspondientes del esfuerzo, *b*) verifique que los puntos obtenidos se encuentran localizados sobre el eje neutro correspondiente a la carga dada.

***6.81** Para la carga mostrada, determine la distribución de esfuerzos cortantes a lo largo de la línea *D'B'* en el lado horizontal del perfil angular que se muestra en la figura. Los ejes *x'* y *y'* son los ejes centroidales principales de la sección transversal.

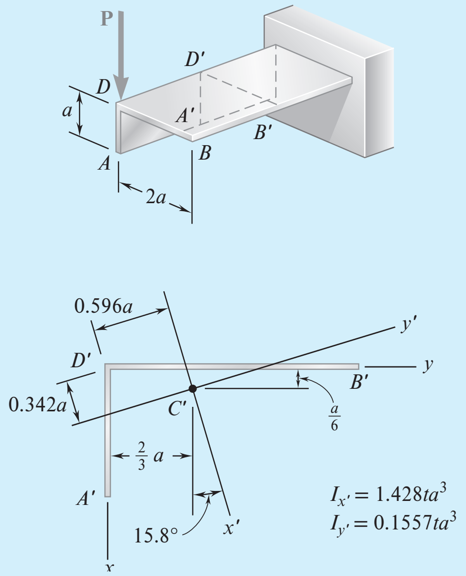


Figura P6.81

***6.82** Para el perfil angular y la carga del problema 6.81, determine la distribución de esfuerzos cortantes a lo largo de la línea *D'A'* en el lado vertical.

***6.83** Una placa de acero, con 160 mm de ancho y 8 mm de espesor, se dobla para formar el canal mostrado en la figura. Si se sabe que la carga vertical **P** actúa en un punto del plano medio del alma del canal, determine *a*) el par de torsión **T** que causaría que el canal se torciera de la misma forma que lo hace bajo la carga **P**, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el canal causado por la carga **P**.

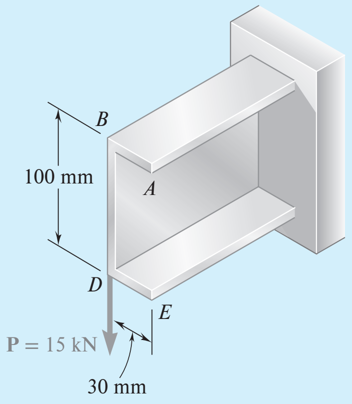


Figura P6.83

***6.84** Resuelva el problema 6.83 suponiendo que, para formar el canal mostrado en la figura, se dobla una placa con 6 mm de espesor.

****6.85*** La viga en voladizo *AB* que consiste en la mitad de un tubo de pared delgada con un radio medio de 1.25 in y un espesor de pared de $\frac{3}{8}$ in, se somete a una carga vertical de 500 lb. Si se sabe que la línea de acción de la carga pasa a través del centroide *C* de la sección transversal de la viga, determine *a*) el sistema momento-fuerza equivalente en el centro de cortante de la sección transversal, *b*) el máximo esfuerzo cortante en la viga. (*Sugerencia:* Se demostró en el problema 6.74 que el centro de cortante *O* de esta sección transversal se localiza al doble de distancia desde su diámetro vertical de lo que se encuentra su centroide *C*).

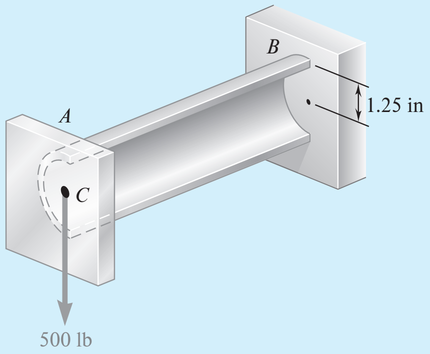


Figura *P6.85*

****6.86*** Resuelva el problema 6.85 suponiendo que el espesor de la viga se reduce a $\frac{1}{4}$ in.

***6.87** La viga en voladizo que se muestra en la figura consta de un perfil *Z* de $\frac{1}{4}$ in de espesor. Para la carga dada, determine la distribución de esfuerzos cortantes a lo largo de la línea *A′B′* en el lado horizontal superior del perfil *Z*. Los ejes *x′* y *y′* son los ejes centroidales principales de la sección transversal y los momentos de inercia correspondientes son $I_{x'} = 166.3$ in^4 e $I_{y'} = 13.61$ in^4.

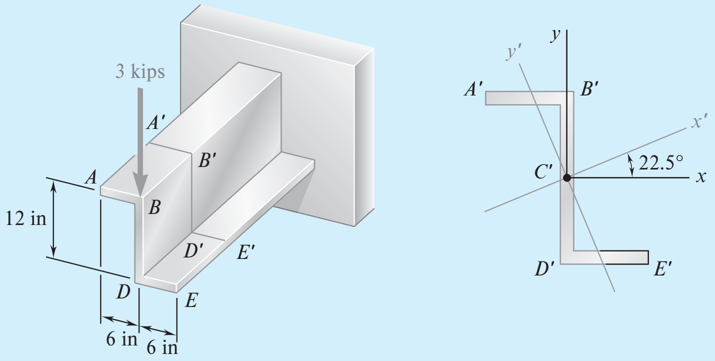


Figura P6.87 *a*) *b*)

***6.88** Para la viga en voladizo y la carga del problema 6.87, determine la distribución de esfuerzos cortantes a lo largo de la línea *B′D′* en el alma vertical del perfil Z.

Repaso y resumen

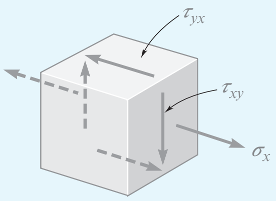


Figura 6.55 Elemento esforzado de la sección de una viga cargada transversalmente.

Esfuerzos en un elemento de viga

Se consideró un pequeño elemento localizado en el plano vertical de simetría de una viga bajo carga transversal (figura 6.55) y se encontró que los esfuerzos normales σ_x y los esfuerzos cortantes τ_{xy} se ejercen en las caras transversales de dicho elemento, mientras que los esfuerzos cortantes τ_{yx}, con igual magnitud que τ_{xy}, se ejercen en sus caras horizontales.

Cortante horizontal

Para una viga prismática AB con plano de simetría vertical que soporta varias cargas concentradas y distribuidas (figura 6.56), a una distancia x desde el extremo A, es

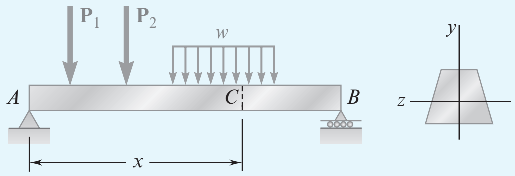


Figura 6.56 Viga cargada transversalmente con un plano de simetría vertical.

posible desprender de la viga un elemento $CDD'C'$ de longitud Δx que se extiende por el ancho de la viga desde su superficie superior hasta un plano horizontal localizado a una distancia y_1 del eje neutro (figura 6.57). La magnitud de la fuerza cortante $\Delta \mathbf{H}$ ejercida sobre la cara inferior del elemento de viga es

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \qquad (6.4)$$

donde V = cortante vertical en la sección transversal dada

Q = primer momento con respecto al eje neutro de la porción sombreada @ de la sección

I = momento centroidal de inercia de toda el área de la sección transversal

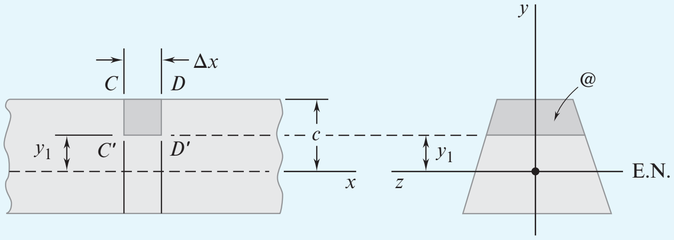


Figura 6.57 Segmento corto de viga con elemento esforzado *CDD′C′*.

Flujo cortante

El *cortante horizontal por unidad de longitud*, o *flujo cortante*, que se denota con la letra q, se obtuvo al dividir ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \qquad (6.5)$$

Esfuerzos cortantes en una viga

Al dividir ambos miembros de la ecuación (6.4) entre el área ΔA de la cara horizontal del elemento y al observar que $\Delta A = t\,\Delta x$, donde t es el ancho del elemento en el corte, el *esfuerzo cortante promedio* sobre la cara horizontal del elemento es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \qquad (6.6)$$

Como los esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} se ejercen sobre un plano transversal y uno horizontal a través de D' y son iguales, la ecuación (6.6) también representa el valor promedio de τ_{xy} a lo largo de la línea $D'_1\,D'_2$ (figura 6.58).

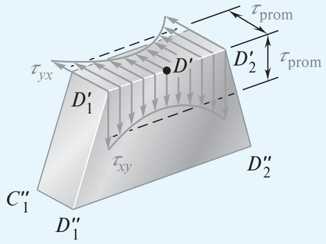


Figura 6.58 Distribución del esfuerzo cortante a través de los planos horizontal y transversal.

Esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular

Se encontró que la distribución de esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular es parabólica y que el máximo esfuerzo, que ocurre en el centro de la sección, es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \qquad (6.10)$$

donde A es el área de la sección rectangular. Para vigas con patines anchos, se encontró que una buena aproximación al esfuerzo cortante máximo puede obtenerse al dividir el cortante V entre el área transversal del alma.

Cortante longitudinal en una superficie curva

Las ecuaciones (6.4) y (6.5) pueden utilizarse para determinar la fuerza cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ y el flujo cortante q ejercidos sobre un elemento de viga si el elemento se encuentra limitado por una superficie curva arbitraria en lugar de un plano horizontal (figura 6.59).

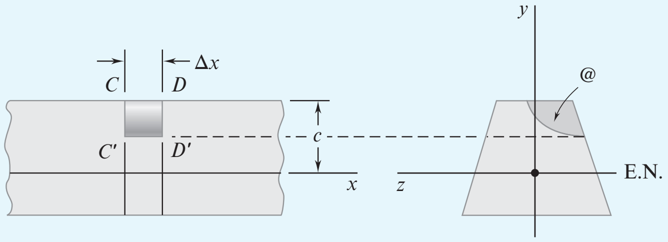


Figura 6.59 Segmento de viga que muestra el elemento *CDD'C'* de longitud Δx.

Esfuerzos cortantes en elementos de pared delgada

Se encontró que es posible extender el uso de la ecuación (6.6) para determinar el esfuerzo cortante promedio en almas y patines de elementos de pared delgada, así como en vigas de patín ancho y vigas de caja (figura 6.60).

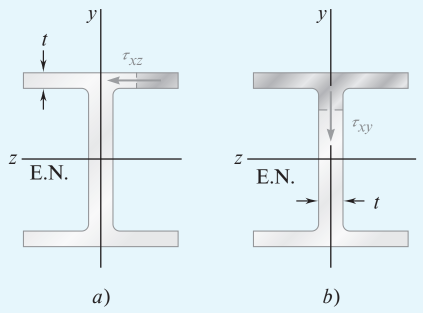


Figura 6.60 Secciones de una viga de patín ancho que muestra esfuerzo cortante *a*) en un patín, *b*) en el alma. El área sombreada se utiliza para calcular el primer momento de área.

Deformaciones plásticas

Una vez iniciada la deformación plástica, una carga adicional provoca que las zonas plásticas penetren en el núcleo elástico de una viga. Debido a que los esfuerzos cortantes pueden ocurrir solo en el núcleo elástico de la viga, se advirtió que tanto un incremento en la carga como un decremento resultante en el tamaño del núcleo elástico contribuyen al incremento en los esfuerzos cortantes.

Carga asimétrica y centro de cortante

Los elementos prismáticos que *no* están cargados en su plano de simetría experimentarán tanto flexión como torsión. La torsión se evita al aplicar la carga en el punto O de la sección transversal. Este punto se conoce como el *centro de cortante,* donde las cargas deben aplicarse para que el elemento solo se doble (figura 6.61). Si las cargas se aplican en dicho punto,

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{4.16, 6.6}$$

El principio de superposición puede usarse para encontrar los esfuerzos en elementos asimétricos de pared delgada como canales, ángulos y vigas extruidas.

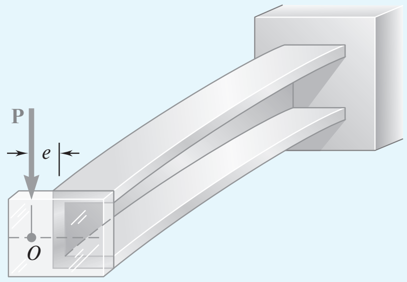


Figura 6.61 Ubicación de la carga para eliminar la torsión mediante el uso de una ménsula adjunta.

Problemas de repaso

6.89 Tres tablas se clavan entre sí para formar la viga mostrada en la figura, la cual está sometida a un cortante vertical. Si se sabe que el espaciamiento entre los clavos es $s = 75$ mm y que la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 400 N, determine el cortante permisible cuando $w = 120$ mm.

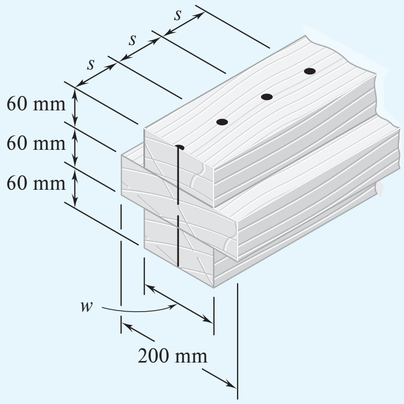


Figura P6.89

6.90 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección *n-n* y determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en dicha sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *a*.

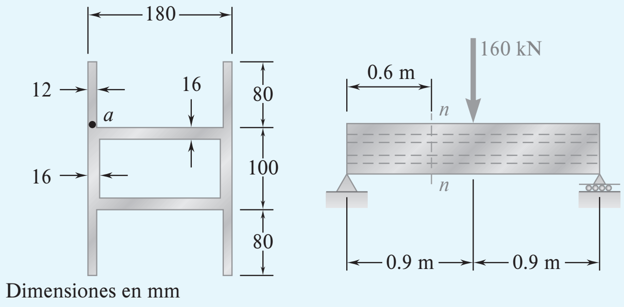


Figura *P6.90*

6.91 Para la viga de patín ancho que soporta la carga mostrada en la figura, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse. Considere que el máximo esfuerzo normal es de 24 ksi y que el máximo esfuerzo cortante usando la aproximación $\tau_m = V/A_{\text{alma}}$ es de 14.5 ksi.

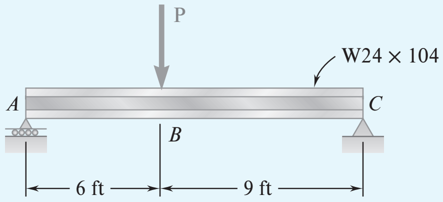


Figura P6.91

6.92 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección *n-n* y determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

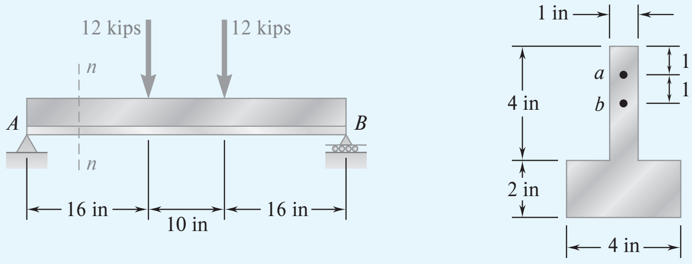


Figura *P6.92*

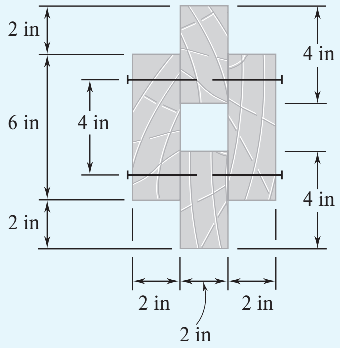


Figura P6.93

6.93 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura está sujeta a un cortante vertical de 1 500 lb. Si se sabe que el espaciamiento longitudinal de los clavos es $s = 2.5$ in y que cada clavo tiene 3.5 in de longitud, determine la fuerza cortante en cada clavo.

6.94 Si un cortante vertical **V** causa un esfuerzo cortante máximo de 75 MPa en la extrusión con forma de sombrero que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante correspondiente en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

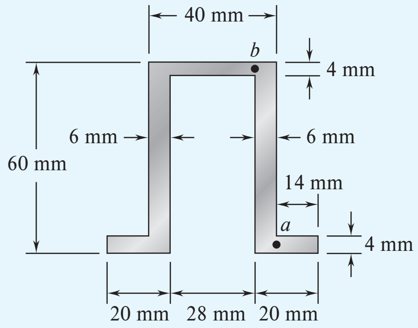


Figura P6.94

6.95 Como se muestra en la figura, tres tablas están conectadas mediante pernos de 14 mm de diámetro, espaciados cada 150 mm a lo largo del eje longitudinal de la viga. Determine el esfuerzo cortante promedio en los pernos, para un cortante vertical de 10 kN.

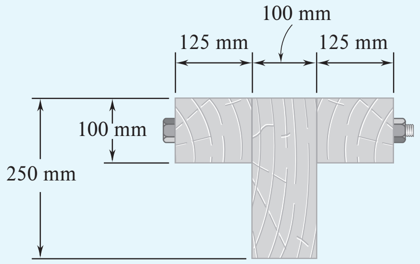


Figura *P6.95*

6.96 Tres placas de acero de 1 × 18 in se unen con pernos a cuatro ángulos L6 × 6 × 1 para formar una viga con la sección transversal que se muestra en la figura. Los pernos tienen un diámetro de $\frac{7}{8}$ in y están espaciados longitudinalmente cada 5 in. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible

en los pernos es de 12 ksi, determine el máximo cortante vertical permisible en la viga. (*Dato:* $I_x = 6\ 123\ \text{in}^4$).

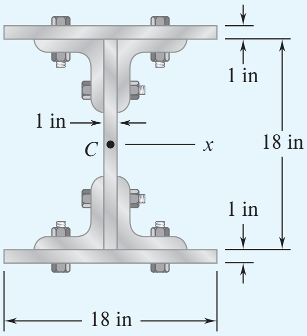


Figura P6.96

6.97 La viga compuesta que se muestra en la figura se fabricó al soldar canales de acero rolado C200 × 17.1 a los patines de un perfil de patín ancho de acero rolado W50 × 80. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 200 kN, determine *a*) la fuerza cortante horizontal por metro en cada soldadura, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *a* del perfil de patín ancho.

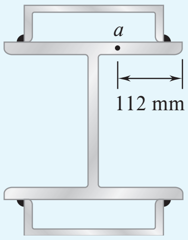


Figura P6.97

6.98 El diseño de una viga requiere soldar cuatro placas horizontales a una placa vertical de 0.5 × 5 in como se muestra en la figura. Para un cortante vertical **V**, determine la dimensión *h* para la que el flujo cortante a través de las superficies soldadas es máximo.

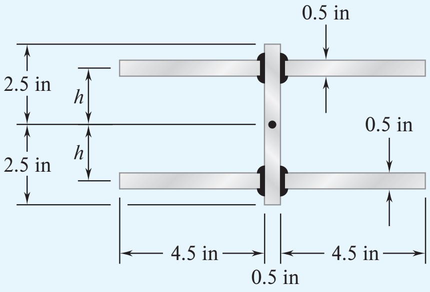


Figura *P6.98*

6.99 Una viga de pared delgada con espesor uniforme tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la dimensión *b* para la cual el centro de cortante *O* de la sección transversal se localiza en el punto indicado.

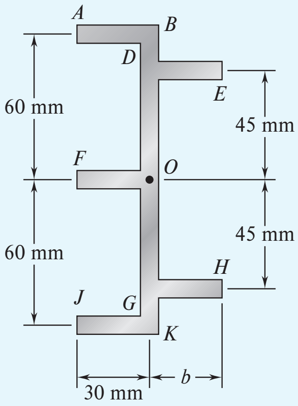


Figura P6.99

6.100 Determine la ubicación del centro de cortante *O* de una viga de pared delgada con espesor uniforme, que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

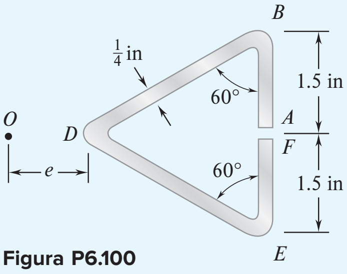


Figura P6.100

Problemas de computadora

Los siguientes problemas están diseñados para resolverse con una computadora.

6.C1 Una viga de madera se diseñará para soportar una carga distribuida y hasta dos cargas concentradas, como se indica en la figura. Una de las dimensiones de su sección transversal rectangular uniforme ha sido especificada y la otra se determinará de tal manera que el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la viga no excedan los valores permisibles dados σ_{perm} y τ_{perm}. Mida x desde el extremo A y utilizando unidades del SI o de uso común en Estados Unidos, escriba un programa para computadora que calcule, en secciones transversales sucesivas, desde $x = 0$ hasta $x = L$ y utilizando incrementos dados Δx, el cortante, el momento flector, y el mínimo valor de la dimensión desconocida que satisfaga en dicha sección 1) el requisito del esfuerzo normal permisible, 2) el requisito del esfuerzo cortante permisible. Utilice este programa para resolver el problema 5.65 suponiendo que $\sigma_{perm} =$ 12 MPa y $\tau_{perm} = 825$ kPa y utilizando $\Delta x = 0.1$ m.

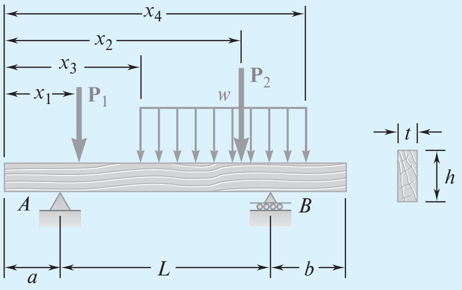


Figura P6.C1

6.C2 Una viga de madera en voladizo AB de longitud L y con la sección rectangular mostrada en la figura soporta una carga concentrada **P** en su extremo libre y una carga uniformemente distribuida w a lo largo de toda su longitud. Escriba un programa de computadora que determine la longitud L y el ancho b de la viga para los que, tanto el máximo esfuerzo normal, como el máximo esfuerzo cortante en la viga alcanzan sus máximos valores permisibles. Suponiendo que $\sigma_{perm} = 1.8$ ksi y $\tau_{perm} = 120$ psi, utilice este programa para determinar las dimensiones L y b cuando *a*) $P = 1000$ lb y $w = 0$, *b*) $P = 0$ y $w = 12.5$ lb/in, *c*) $P = 500$ lb y $w = 12.5$ lb/in.

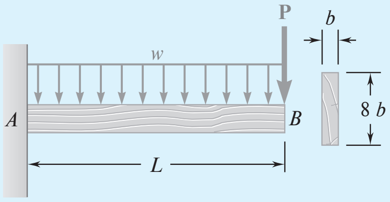


Figura P6.C2

6.C3 Una viga con la sección transversal mostrada en la figura se somete a un cortante vertical **V**. Escriba un programa para computadora que, para cargas

y dimensiones expresadas en el sistema SI o en unidades de uso común en Estados Unidos, pueda utilizarse para calcular el esfuerzo cortante a lo largo de la línea entre dos áreas rectangulares adyacentes cualesquiera que formen la sección transversal. Utilice este programa para resolver *a*) el problema 6.10, *b*) el problema 6.12, *c*) el problema 6.22.

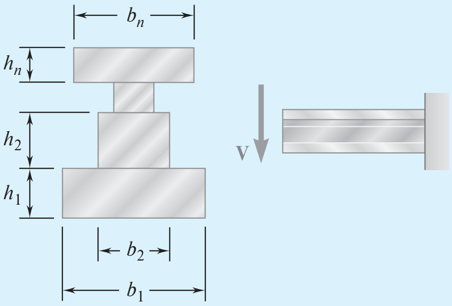


Figura P6.C3

6.C4 Una placa con espesor uniforme t se dobla, como se muestra en la figura, para formar un perfil con un plano vertical de simetría y después se utiliza como viga. Escriba un programa de computadora que, para cargas y dimensiones expresadas en el sistema SI o en unidades de uso común en Estados Unidos, pueda utilizarse para determinar la distribución de esfuerzos cortantes causados por un cortante vertical **V**. Utilice este programa para *a*) resolver el problema 6.47, *b*) encontrar el esfuerzo cortante en el punto E para el perfil y la carga del problema 6.50, suponiendo un espesor $t = \frac{1}{4}$ in.

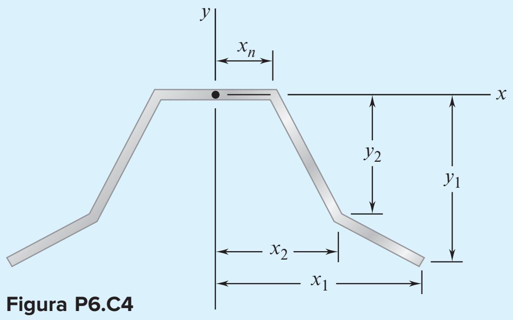


Figura P6.C4

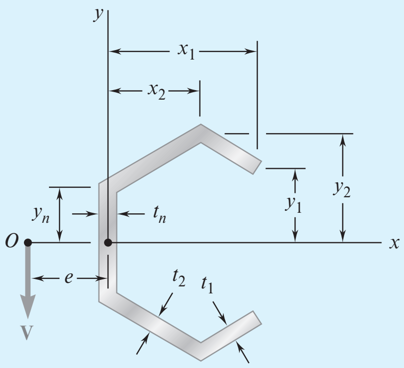


Figura P6.C5

6.C5 La sección transversal de una viga extruida es simétrica con respecto al eje x y consta de varios segmentos rectos como se observa en la figura. Escriba un programa de computadora que, para cargas y dimensiones expresadas en el sistema SI o en unidades de uso común en Estados Unidos, pueda utilizarse para determinar *a*) la ubicación del centro de cortante O, *b*) la distribución de esfuerzos cortantes causados por una fuerza vertical aplicada en O. Utilice este programa para resolver el problema 6.70.

6.C6 Una viga de pared delgada tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Escriba un programa de computadora que, para cargas y dimensiones expresadas en el sistema SI o en unidades de uso común en Estados Unidos, pueda utilizarse para determinar la ubicación del centro de cortante O de la sección transversal. Utilice este programa para resolver el problema 6.75.

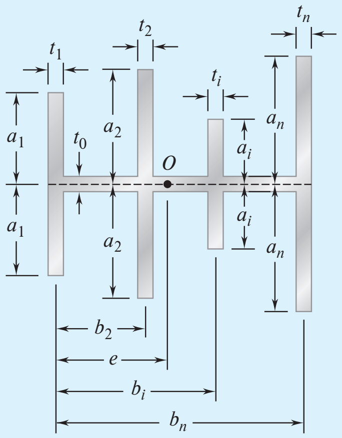
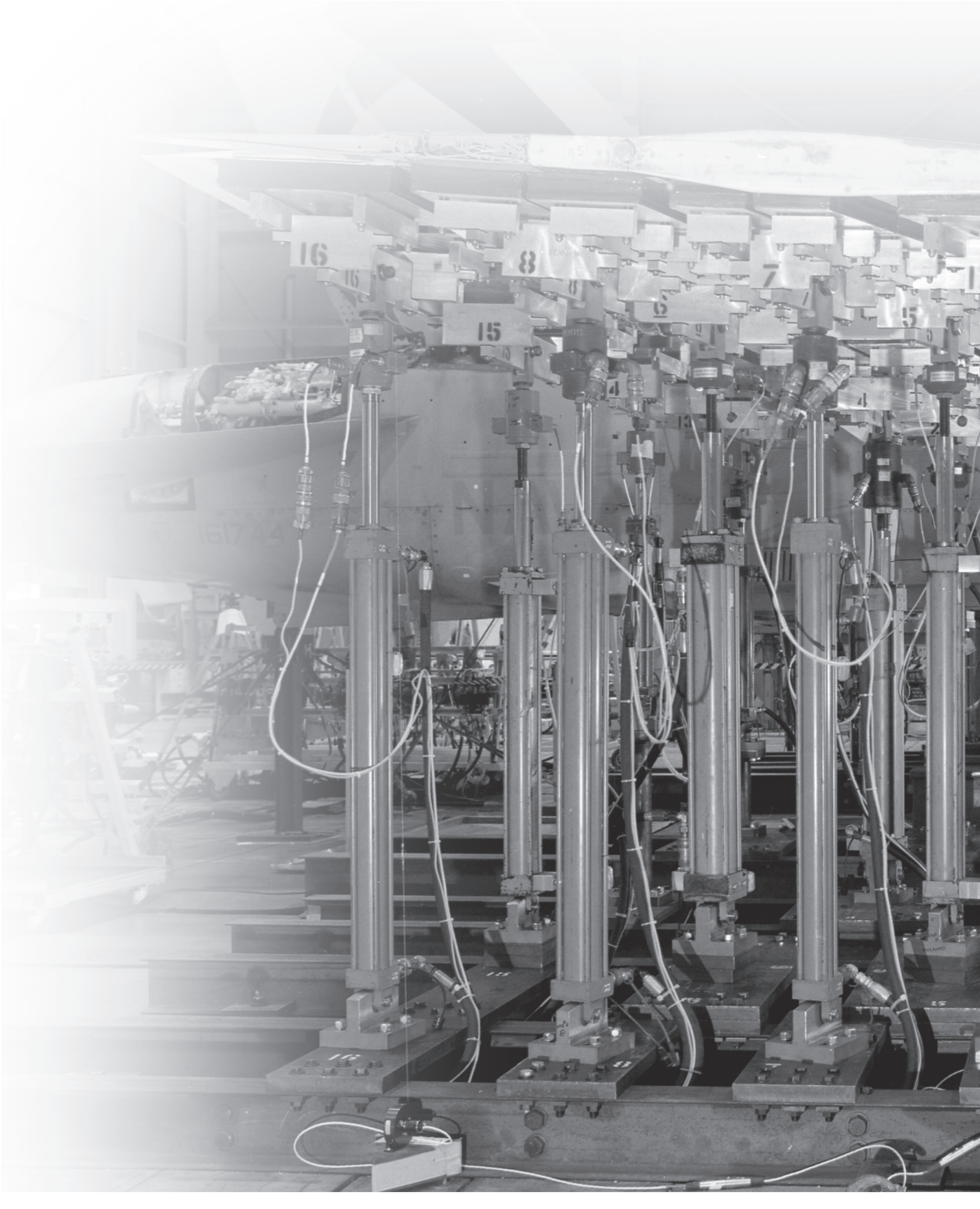


Figura P6.C6


16
8
15
7

7

Transformaciones de esfuerzos y deformaciones

El ala de avión de la fotografía se prueba para determinar la forma en que las fuerzas de elevación se distribuyen en el ala. En este capítulo se estudian métodos para determinar los esfuerzos y deformaciones máximos en cualquier punto en una estructura como ésta, así como el estudio de las condiciones de esfuerzo necesarias para provocar la falla.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Aplicar** las ecuaciones de transformación de esfuerzos a situaciones de esfuerzo planas para determinar cualquier componente de esfuerzo en un punto.
- **Aplicar** el enfoque alternativo del círculo de Mohr para realizar transformaciones de esfuerzos planos.
- **Utilizar** técnicas de transformación para identificar los componentes clave del esfuerzo, como los esfuerzos principales.
- **Extender** el análisis del círculo de Mohr para examinar los estados tridimensionales del esfuerzo.
- **Examinar** las teorías de falla para materiales dúctiles y frágiles.
- **Analizar** los estados de esfuerzos planos en recipientes a presión de pared delgada.
- **Extender** el análisis del círculo de Mohr para examinar la transformación de la deformación.

Introducción

7.1 **Transformación del esfuerzo plano**
7.1A Ecuaciones de transformación
7.1B Esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo
7.2 **Círculo de Mohr para el esfuerzo plano**
7.3 **Estado general de esfuerzo**
7.4 **Análisis tridimensional de esfuerzos**
*7.5 **Teorías de falla**
7.5A Criterios de cedencia para materiales dúctiles
7.5B Criterios de fractura para materiales frágiles bajo esfuerzo plano
7.6 **Esfuerzos en recipientes a presión de pared delgada**
*7.7 **Transformación de la deformación plana**
7.7A Ecuaciones de transformación
7.7B Círculo de Mohr para la deformación plana
*7.8 **Análisis tridimensional de la deformación**
*7.9 **Mediciones de la deformación; roseta de deformación**

Introducción

El estado más general de esfuerzo en un punto dado Q puede representarse por seis componentes (sección 1.4). Tres de estas, σ_x, σ_y y σ_z, definen los esfuerzos normales ejercidos sobre las caras de un elemento cúbico centrado en Q y con la misma orientación de los ejes coordenados (figura 7.1*a*). Las otras tres, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx},[†] son las componentes de los esfuerzos cortantes del mismo elemento. El mismo estado de esfuerzos se representará mediante un conjunto diferente de componentes si se giran los ejes (figura 7.1*b*). En la primera parte de este capítulo se determina cómo se transforman las componentes de los esfuerzos cuando se giran los ejes coordenados. En la segunda parte del capítulo se realizará un análisis similar de la transformación de las componentes de la deformación.

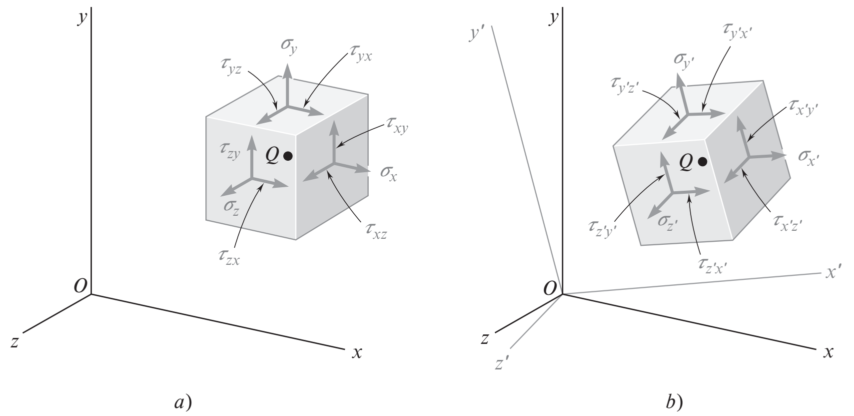


Figura 7.1 Estado general de esfuerzos en un punto: *a*) con referencia a {*xyz*}, *b*) con referencia a {*x'y'z'*}.

El análisis de la transformación del esfuerzo se ocupará principalmente del *esfuerzo plano*, es decir, de una situación en la que dos de las caras del elemento cúbico están libres de cualquier esfuerzo. Si se elige el eje z perpendicular a estas caras, $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, y los únicos componentes de esfuerzo restantes son σ_x, σ_y y τ_{xy} (figura 7.2). Esta situación se produce en una placa delgada sometida a fuerzas que actúan en el plano medio de la placa (figura 7.3). También ocurre en la superficie libre de un elemento estructural o componente de máquina donde cualquier punto de la superficie de ese elemento o componente no está sometido a una fuerza externa (figura 7.4).

En la sección 7.1A, un estado de esfuerzos plano en un punto dado Q se caracteriza por los componentes de tensión σ_x, σ_y, y τ_{xy} asociados con el elemento mostrado en la figura 7.5*a*. Las componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociados con ese elemento después de haber sido girados en un ángulo θ alrededor del eje z (figura 7.5*b*) serán entonces determinados. En la sección 7.1B, se encontrará el valor θ_p de θ, donde los esfuerzos $\sigma_{x'}$

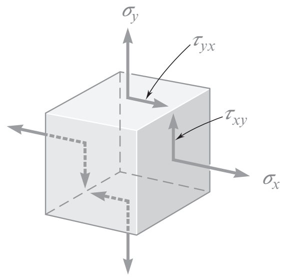


Figura 7.2 Componentes de esfuerzo distintos de cero para un estado de esfuerzos plano.

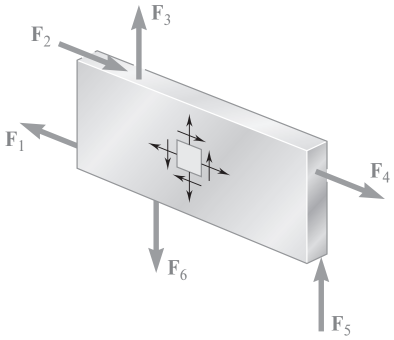


Figura 7.3 Ejemplo de esfuerzo plano: placa delgada sujeta a cargas solo en los planos.

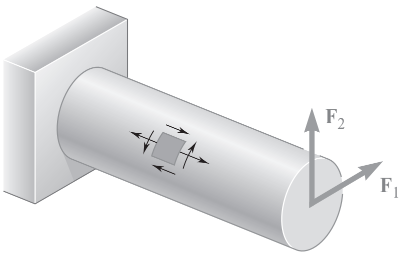


Figura 7.4 Ejemplo de esfuerzo plano: superficie libre de un componente estructural.

[†] Recuerde que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ y $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (sección 1.4).

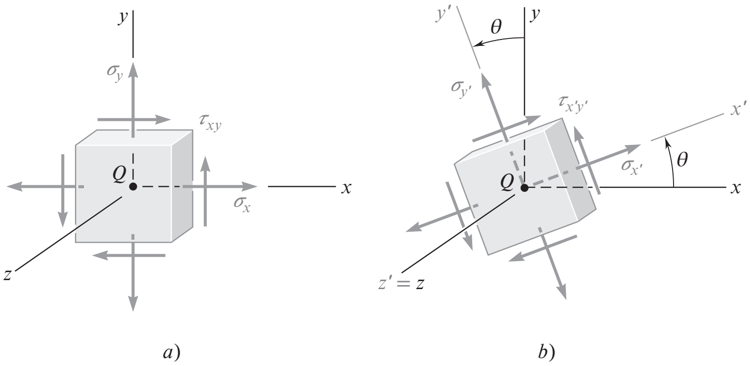


Figura 7.5 Estado de esfuerzos plano: *a*) con referencia a {*xyz*}, *b*) con referencia a {*x′y′z′*}.

y $\sigma_{y'}$ son los esfuerzos máximo y mínimo. Estos valores del esfuerzo normal son los *esfuerzos principales* en el punto *Q*, y las caras del elemento correspondiente definen los *planos principales de esfuerzo* en ese punto. También se discute el ángulo de rotación θ_s para el cual el esfuerzo cortante es máximo.

En la sección 7.2 se presenta un método alterno para la solución de problemas que implican la transformación del esfuerzo plano, basado en el uso del *círculo de Mohr.*

En la sección 7.3 se estudiará un *estado de esfuerzos tridimensional* en un punto dado y se determinará el esfuerzo normal en un plano de orientación arbitraria en ese punto. En la sección 7.4 se describirán las rotaciones de un elemento cúbico con respecto a cada uno de los ejes principales de esfuerzo y las transformaciones correspondientes del esfuerzo mediante tres círculos de Mohr diferentes. Para un estado de *esfuerzos plano* en un punto dado, el máximo valor del esfuerzo cortante obtenido antes, considerando rotaciones en el plano de esfuerzo, no representa necesariamente el esfuerzo cortante máximo en ese punto. Eso hace necesario distinguir los esfuerzos cortantes máximos *en el plano* y *fuera del plano*.

En la sección 7.5A se analizan los *criterios de cedencia* para materiales dúctiles sometidos a esfuerzo plano. Para predecir si un material cederá en algún punto crítico, en condiciones de carga dadas, se determinarán los esfuerzos principales, σ_a y σ_b en ese punto y se utilizarán con la resistencia a la cedencia σ_Y del material para evaluar alguno de esos criterios. Dos criterios que se utilizan comúnmente son: el *criterio de la máxima resistencia a cortante* y el *criterio de la máxima energía de distorsión.* En la sección 7.5B se desarrollarán *criterios de fractura* para materiales frágiles sometidos a un esfuerzo plano, usando los esfuerzos principales σ_a y σ_b en algún punto crítico y la resistencia última σ_U del material. Dos criterios que se analizarán son el *esfuerzo normal máximo* y el *criterio de Mohr.*

Los *recipientes a presión de pared delgada* son una importante aplicación del análisis del esfuerzo plano. En la sección 7.6 se analizarán los esfuerzos en recipientes cilíndricos y esféricos a presión (fotografías 7.1 y 7.2).

Fotografía 7.1 Recipientes cilíndricos a presión.

Fotografía 7.2 Recipiente esférico a presión.

La sección 7.7 está dedicada a la *transformación de la deformación plana* y el *círculo de Mohr para la deformación plana.* En la sección 7.8 se verá el análisis tridimensional de la deformación y cómo pueden usarse los círculos de Mohr para determinar la deformación cortante máxima en un punto dado. Estos dos casos particulares son de especial interés y no deben confundirse: el caso de *deformación plana* y el caso de *esfuerzo plano.*

En la sección 7.9 se considera la aplicación de *galgas extensiométricas* para medir la deformación normal en la superficie de un elemento estructural o componente de máquina. Las componentes ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, que caracterizan un estado de deformación en un punto dado, se calculan a partir de las medidas efectuadas en tres galgas extensiométricas que forman una *roseta de deformación.*

7.1 TRANSFORMACIÓN DEL ESFUERZO PLANO

7.1A Ecuaciones de transformación

Suponga que existe un estado de esfuerzos plano en el punto Q (con $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), y definido por las componentes de esfuerzo σ_x, σ_y y τ_{xy}, asociadas con el elemento de la figura 7.5*a*. Se determinan las componentes de esfuerzo $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con el elemento después que ha girado un ángulo θ con respecto al eje z (figura 7.5*b*). Estas componentes se dan en términos de σ_x, σ_y, τ_{xy} y θ.

Con objeto de determinar el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ y el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ ejercidos sobre la cara perpendicular al eje x', considere un elemento prismático con caras perpendiculares a los ejes x, y y x' (figura 7.6*a*). Si el área de la cara oblicua es ΔA, las áreas de las caras vertical y horizontal son iguales a $\Delta A \cos\theta$ y ΔA sen θ, respectivamente. Las *fuerzas* ejercidas sobre las tres caras se muestran en la figura 7.6*b*. (No se ejercen fuerzas sobre las caras triangulares del elemento, pues los esfuerzos normales y cortantes correspondientes se han supuesto iguales a cero). Usando componentes a lo largo de los ejes x' y y', las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_{x'} = 0: \quad \sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x(\Delta A \cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta - \sigma_y(\Delta A\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta - \tau_{xy}(\Delta A\,\text{sen}\,\theta)\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_{y'} = 0: \quad \tau_{x'y'}\Delta A + \sigma_x(\Delta A \cos\theta)\,\text{sen}\,\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \sigma_y(\Delta A\,\text{sen}\,\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(\Delta A\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Al resolver la primera ecuación para $\sigma_{x'}$ y la segunda para $\tau_{x'y'}$,

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y\,\text{sen}^2\,\theta + 2\tau_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \qquad \textbf{(7.1)}$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) \qquad \textbf{(7.2)}$$

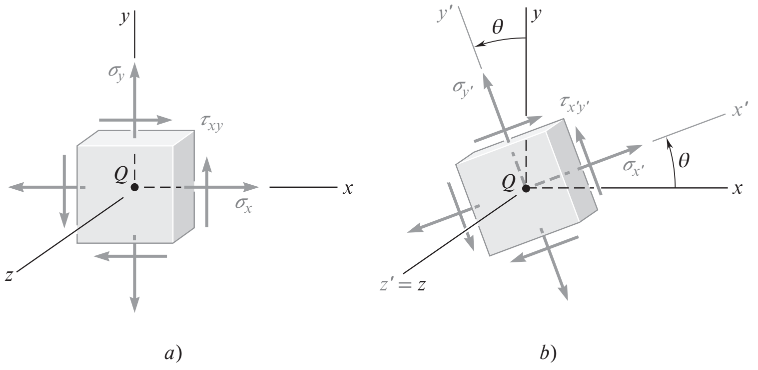


Figura 7.5 (repetida) Estado de esfuerzos plano: *a*) con referencia a {*xyz*}, *b*) con referencia a {*x'y'z'*}.

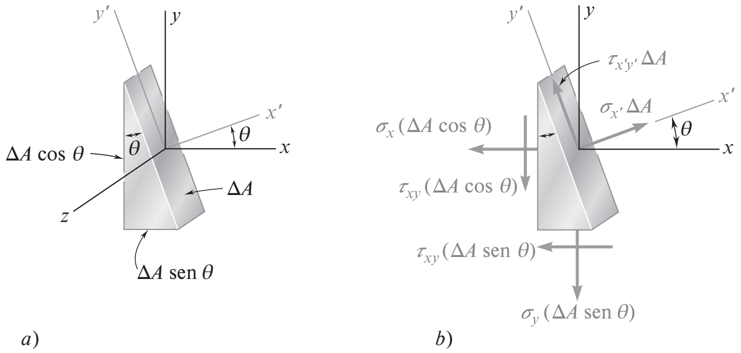


Figura 7.6 Las ecuaciones de transformación de esfuerzos se determinan considerando un elemento de cuña prismático arbitrario. *a*) Geometría del elemento. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

Al recordar las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \tag{7.3}$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{7.4}$$

La ecuación (7.1) se reescribe como

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

o bien

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.5}$$

Usando las relaciones de la ecuación (7.3), la ecuación (7.2) ahora es

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{7.6}$$

El esfuerzo normal $\sigma_{y'}$ se obtiene reemplazando θ en la ecuación (7.5) por el ángulo $\theta + 90°$ que el eje y' forma con el eje x. Como $\cos(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen}(2\theta + 180°) = -\operatorname{sen} 2\theta$,

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.7}$$

Al sumar miembro a miembro las ecuaciones (7.5) y (7.7),

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \tag{7.8}$$

Como $\sigma_z + \sigma_{z'} = 0$, se verifica para el esfuerzo plano que la suma de los esfuerzos normales ejercidos sobre un elemento cúbico de material es independiente de la orientación del elemento.[†]

[†] Esto verifica la propiedad de dilatación, como se explicó en la primera nota al pie de página de la sección 2.6.

7.1B Esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo

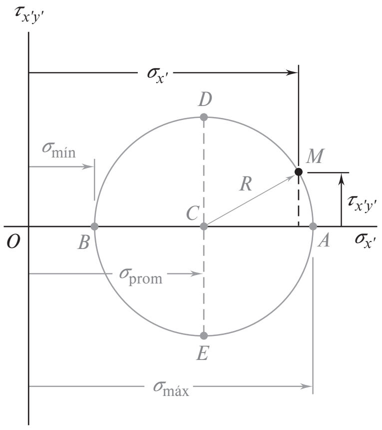


Figura 7.7 Relación circular de esfuerzos transformados.

Las ecuaciones (7.5) y (7.6) son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se utiliza un sistema de ejes rectangulares para graficar un punto M de abscisa $\sigma_{x'}$ y ordenada $\tau_{x'y'}$ para cualquier parámetro dado θ, todos los puntos obtenidos estarán situados en un círculo. Para establecer esta propiedad, se elimina θ de las ecuaciones (7.5) y (7.6), trasponiendo primero $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ en la ecuación (7.5) y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, luego se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación (7.6) y, finalmente, se suman miembro a miembro las dos ecuaciones obtenidas.

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{x'y'} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy} \tag{7.9}$$

Se establece

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}} \tag{7.10}$$

la identidad de la ecuación (7.9) se da como

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{prom})^2 + \tau^2_{x'y'} = R^2 \tag{7.11}$$

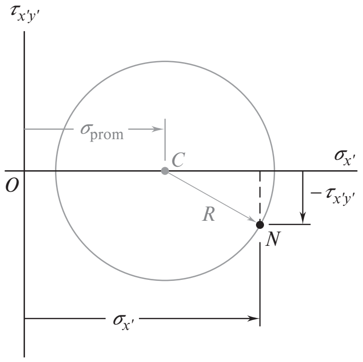


Figura 7.8 Formación equivalente del círculo de transformación del esfuerzo.

que es la ecuación de un círculo de radio R con centro en el punto C de abscisa σ_{prom} y ordenada 0 (figura 7.7). Debido a la simetría del círculo con respecto al eje horizontal, se obtiene el mismo resultado si se grafica un punto N de abscisa $\sigma_{x'}$ y ordenada $-\tau_{x'y'}$ en vez de M (figura 7.8). Esta propiedad se usará en la sección 7.2.

Los puntos A y B, donde el círculo de la figura 7.7 interseca el eje horizontal, son de especial interés: el punto A corresponde al valor máximo del esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ mientras el punto B corresponde a su valor mínimo. Además, ambos puntos tienen un valor cero del esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$. Así, los valores θ_p del parámetro θ que corresponden a los puntos A y B pueden obtenerse haciendo $\tau_{x'y'} = 0$ en la ecuación (7.6).†

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{7.12}$$

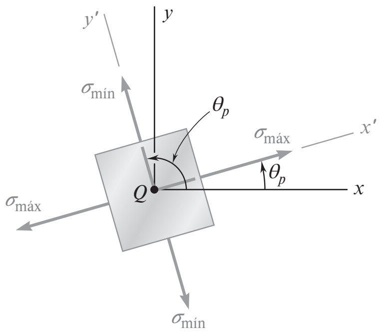


Figura 7.9 Esfuerzos principales.

Esta ecuación define dos valores $2\theta_p$ que están separados a 180° y, por lo tanto, dos valores θ_p que difieren en 90°. Cualquiera de estos valores puede usarse para determinar la orientación del elemento correspondiente (figura 7.9). Los planos que contienen las caras del elemento obtenido de este modo se llaman *planos principales de esfuerzo* en el punto Q, y los valores correspondientes $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$ ejercidos sobre estos planos son los *esfuerzos principales* en Q. Como los dos valores θ_p, definidos por la ecuación (7.12), se obtuvieron haciendo $\tau_{x'y'} = 0$ en la ecuación (7.6), es claro que no se ejerce ningún esfuerzo cortante en los planos principales.

De la figura 7.7,

$$\sigma_{máx} = \sigma_{prom} + R \quad \text{y} \quad \sigma_{mín} = \sigma_{prom} - R \tag{7.13}$$

Al sustituir σ_{prom} y R de la ecuación (7.10),

$$\sigma_{máx,\, mín} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}} \tag{7.14}$$

† Esta relación también se puede obtener diferenciando $\sigma_{x'}$ en la ecuación (7.5) y haciendo la derivada igual a cero: $d\sigma_{x'}/d\theta = 0$.

A menos que sea posible decir por inspección cuál de los dos planos se somete a $\sigma_{\text{máx}}$ y cuál a $\sigma_{\text{mín}}$, es necesario sustituir uno de los valores de θ_p en la ecuación (7.5) para determinar cuál de los dos corresponde al valor máximo del esfuerzo normal.

Con referencia de nuevo a la figura 7.7, los puntos D y E, localizados en el diámetro vertical del círculo, corresponden al mayor valor numérico del esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$. Puesto que la abscisa de los puntos D y E es $\sigma_{\text{prom}} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, los valores θ_s del parámetro θ que corresponden a estos puntos se obtienen haciendo $\sigma_{x'} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ en la ecuación (7.5). La suma de los últimos dos términos en esa ecuación debe ser cero. Así, para $\theta = \theta_s$,†

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_s + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta_s = 0$$

o bien

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7.15}$$

Esta ecuación define dos valores $2\theta_s$ que están separados a 180°, y por lo tanto dos valores θ_s que difieren en 90°. Cualquiera de estos valores puede usarse para determinar la orientación del elemento correspondiente al esfuerzo cortante máximo (figura 7.10). La figura 7.7 muestra que el valor máximo del esfuerzo cortante es igual al radio R del círculo. Al recordar la segunda de las ecuaciones (7.10),

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.16}$$

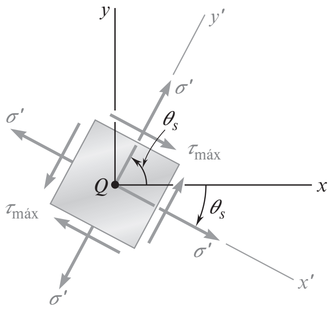


Figura 7.10 Esfuerzo cortante máximo.

Como se observó antes, el esfuerzo normal correspondiente a la condición de esfuerzo cortante máximo es

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{7.17}$$

Al comparar las ecuaciones (7.12) y (7.15), tan $2\theta_s$ es el recíproco negativo de tan $2\theta_p$. Por consiguiente, los ángulos $2\theta_s$ y $2\theta_p$ están separados a 90° y, por lo tanto, los ángulos θ_s y θ_p difieren en 45°. Así, *los planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales*. Esto confirma los resultados encontrados en la sección 1.4 para el caso de una carga axial céntrica (figura 1.38), y en la sección 3.1C para una carga torsional (figura 3.17).

Se debe estar consciente de que el análisis sobre la transformación de esfuerzo plano se ha limitado a las rotaciones *en el plano de esfuerzo.* Si el elemento cúbico de la figura 7.5 se gira con respecto a un eje distinto del eje z, sus caras pueden someterse a esfuerzos cortantes mayores que los dados por la ecuación (7.16). En la sección 7.3, esto ocurrirá cuando los esfuerzos principales definidos en la ecuación (7.14) tengan el mismo signo (es decir, cuando ambos sean de tensión o ambos de compresión). En tales casos, el valor obtenido mediante la ecuación (7.16) se refiere como el esfuerzo cortante máximo *en el plano*.

Aplicación de conceptos 7.1

Para el estado de esfuerzos plano de la figura 7.11*a*, determine *a*) los planos principales, *b*) los esfuerzos principales, *c*) el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal correspondiente.

† Esta relación también se obtiene diferenciando $\tau_{x'y'}$ en la ecuación (7.6) y haciendo la derivada igual a cero: $d\tau_{x'y'}/d\theta = 0$.

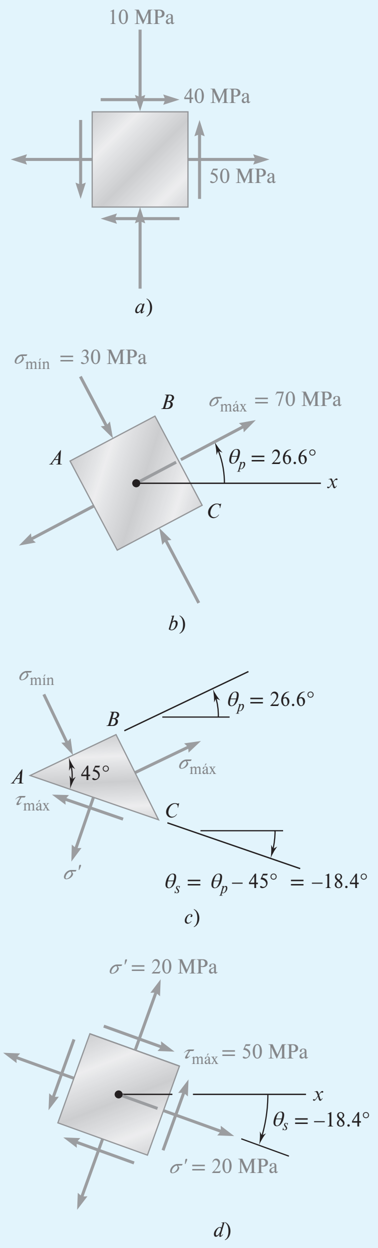


Figura 7.11 *a*) Elemento de esfuerzo plano. *b*) Elemento de esfuerzo plano orientado en las direcciones principales. *c*) Elemento de esfuerzo plano que muestra los planos de corte principal y máximo. *d*) Elemento de esfuerzo plano que muestra la orientación de corte máximo.

***a*) Planos principales.** Siguiendo la convención de signos usual, las componentes del esfuerzo son

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

Al sustituir en la ecuación (7.12)

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{80}{60}$$

$$2\theta_p = 53.1^\circ \quad \text{y} \quad 180^\circ + 53.1^\circ = 233.1^\circ$$

$$\theta_p = 26.6^\circ \quad \text{y} \quad 116.6^\circ$$

***b*) Esfuerzos principales.** La ecuación (7.14) da

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Los planos principales y los esfuerzos principales se muestran en la figura 7.11*b*. Haciendo $2\theta = 53.1^\circ$ en la ecuación (7.5), se verifica que el esfuerzo normal ejercido en la cara *BC* del elemento es el esfuerzo máximo:

$$\sigma_{x'} = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53.1^\circ + 40 \text{ sen } 53.1^\circ$$

$$= 20 + 30 \cos 53.1^\circ + 40 \text{ sen } 53.1^\circ = 70 \text{ MPa} = \sigma_{\text{máx}}$$

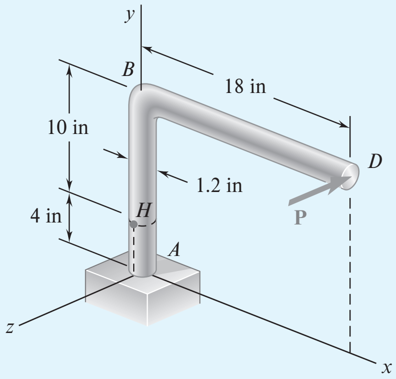
***c*) Esfuerzos cortantes máximos.** De la ecuación (7.16) se obtiene

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

Puesto que $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ tienen signos opuestos, $\tau_{\text{máx}}$ en realidad representa el valor máximo del esfuerzo cortante en el punto. La orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo y el sentido de los esfuerzos cortantes se determinan pasando una sección a lo largo del plano diagonal *AC* del elemento de la figura 7.11*b*. Como las caras *AB* y *BC* del elemento están en los planos principales, el plano diagonal *AC* debe ser uno de los planos de esfuerzo cortante máximo (figura 7.11*c*). Además, las condiciones de equilibrio para el elemento prismático *ABC* requieren que los esfuerzos cortantes ejercidos en *AC* estén dirigidos como se indica. En la figura 7.11*d* se muestra el elemento cúbico correspondiente al esfuerzo cortante máximo. El esfuerzo normal en cada una de las cuatro caras del elemento lo da la ecuación (7.17):

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Problema modelo 7.1



Una fuerza única horizontal **P** con una magnitud de 150 lb se aplica al extremo *D* de la palanca *ABD*. Si se sabe que la porción *AB* de la palanca tiene un diámetro de 1.2 in, determine: *a*) los esfuerzos normal y cortante situados en un punto *H*, con lados paralelos a los ejes *x* y *y*, *b*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H*.

ESTRATEGIA: Se puede iniciar por determinar las fuerzas y los pares que actúan sobre la sección que contiene el punto de interés y luego usarlos para calcular los esfuerzos normales y cortantes que actúan en ese punto. Después, estos esfuerzos se pueden transformar para obtener los esfuerzos principales y su orientación.

MODELAR y ANALIZAR:

Sistema fuerza-momento. Se reemplaza la fuerza **P** por un sistema fuerza-momento equivalente en el centro *C* de la sección transversal que contiene el punto *H* (figura 1):

$$P = 150 \text{ lb} \qquad T = (150 \text{ lb})(18 \text{ in}) = 2.7 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

$$M_x = (150 \text{ lb})(10 \text{ in}) = 1.5 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

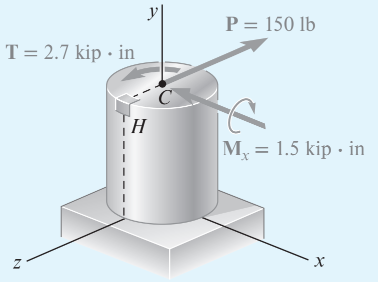


Figura 1 Sistema fuerza-momento equivalente que actúa sobre la sección transversal que contiene el punto *H*.

***a*) Esfuerzos σ_x, σ_y, τ_{xy} en el punto *H*.** Mediante la convención de signos mostrada en la figura 7.2, se determina el sentido y el signo de cada componente del esfuerzo examinando cuidadosamente el sistema fuerza-momento en el punto *C* (figura 1):

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = +\frac{Mc}{I} = +\frac{(1.5 \text{ kip} \cdot \text{in})(0.6 \text{ in})}{\frac{1}{4}\pi\,(0.6 \text{ in})^4} \qquad \sigma_y = +8.84 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

$$\tau_{xy} = +\frac{Tc}{J} = +\frac{(2.7 \text{ kip} \cdot \text{in})(0.6 \text{ in})}{\frac{1}{2}\pi\,(0.6 \text{ in})^4} \qquad \tau_{xy} = +7.96 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

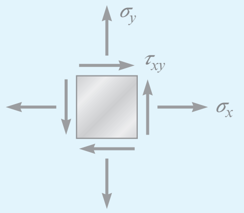


Figura 2 Elemento de esfuerzo en el plano general (que muestra las direcciones positivas).

Se observa que la fuerza cortante **P** no causa esfuerzo cortante en el punto *H*. El elemento de esfuerzo plano general (figura 2) se completa para reflejar estos resultados de esfuerzo (figura 3).

***b*) Planos principales y esfuerzos principales.** Al sustituir los valores de las componentes de esfuerzo en la ecuación (7.12), la orientación de los planos principales es

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(7.96)}{0 - 8.84} = -1.80$$

$$2\theta_p = -61.0^\circ \quad \text{y} \quad 180^\circ - 61.0^\circ = +119^\circ$$

$$\theta_p = -30.5^\circ \quad \text{y} \quad +59.5^\circ \blacktriangleleft$$

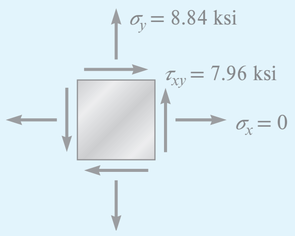


Figura 3 Elemento de esfuerzo en el punto *H*.

Al sustituir en la ecuación (7.14), las magnitudes de los esfuerzos principales son:

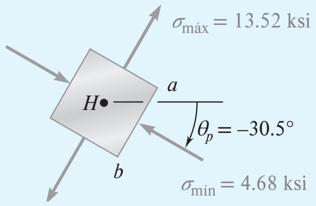


Figura 4 Elemento de esfuerzo en el punto *H* orientado en las direcciones principales.

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{0 + 8.84}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + (7.96)^2} = +4.42 \pm 9.10$$

$$\sigma_{\text{máx}} = +13.52 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{\text{mín}} = -4.68 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

Al considerar la cara *ab* del elemento mostrado en la figura, $\theta_p = -30.5°$ en la ecuación (7.5) y $\sigma_{x'} = 4.68$ ksi. Los esfuerzos principales son los mostrados en la figura 4.

Problemas

7.1 a 7.4 Para el estado de esfuerzos dado, determine los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre la cara oblicua del elemento triangular sombreado que se muestra en la figura. Use un método de análisis basado en las ecuaciones de equilibrio de dicho elemento, como se hizo en las deducciones de la sección 7.1A.

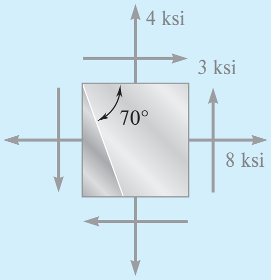


Figura P7.1

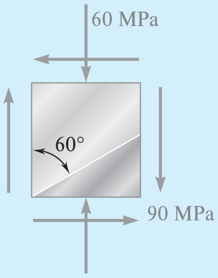


Figura P7.2

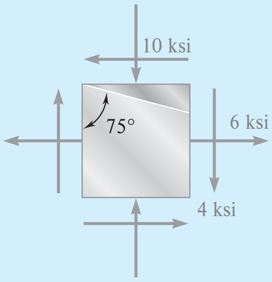


Figura P7.3

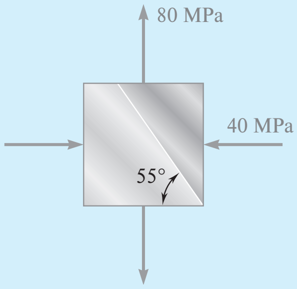


Figura P7.4

7.5 a *7.8* Para el estado de esfuerzos dado, determine *a*) los planos principales, *b*) los esfuerzos principales.

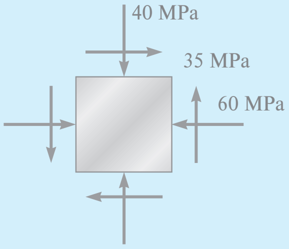


Figura P7.5 y P7.9

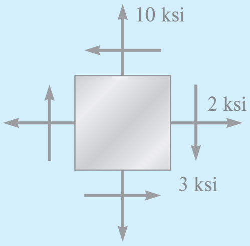


Figura *P7.6* y P7.10

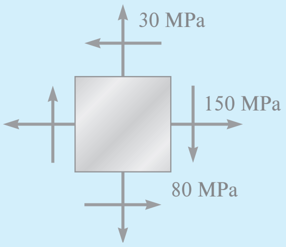


Figura P7.7 y P7.11

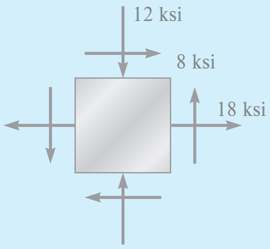


Figura *P7.8* y P7.12

7.9 a 7.12 Para el estado de esfuerzos dado, determine *a*) la orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el plano, *c*) el esfuerzo normal correspondiente.

7.13 a *7.16* Para el estado de esfuerzos dado, determine los esfuerzos normal y cortante después de girar el elemento mostrado *a*) 25° en el sentido de las manecillas del reloj, *b*) 10° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

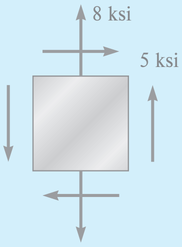


Figura P7.13

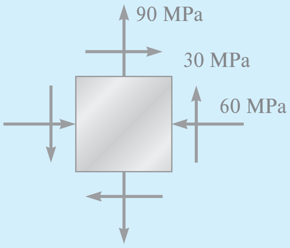


Figura *P7.14*

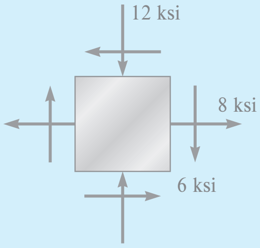


Figura P7.15

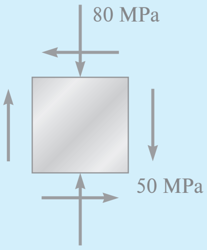


Figura *P7.16*

7.17 y 7.18 La fibra de un elemento de madera forma un ángulo de 15° con la vertical. Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la fibra, *b*) el esfuerzo normal perpendicular a la fibra.

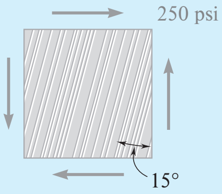


Figura P7.17

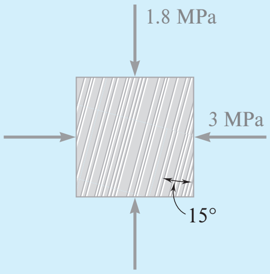


Figura P7.18

7.19 Dos elementos de madera con una sección transversal rectangular uniforme de 80 × 120 mm se pegan mediante el empalme simple al sesgo que se muestra en la figura. Si se sabe que $\beta = 22°$ y que los esfuerzos máximos permi-

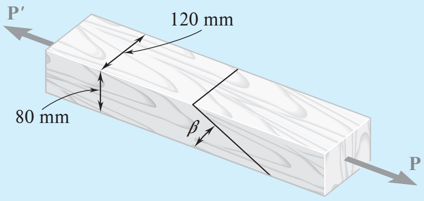


Figura P7.19 y *P7.20*

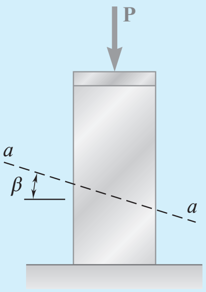


Figura P7.21

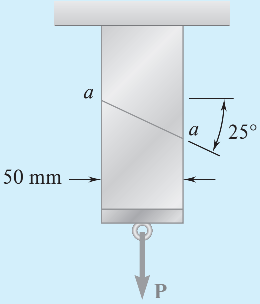


Figura *P7.22*

sibles en la junta son, respectivamente, de 400 kPa en tensión (perpendicular al empalme) y de 600 kPa en corte (paralelo al empalme), determine la máxima carga céntrica **P** que puede aplicarse.

7.20 Dos elementos de madera con una sección transversal uniforme rectangular de 80 × 120 mm se pegan mediante el empalme simple al sesgo que se muestra en la figura. Si se sabe que $\beta = 25°$ y que se aplican cargas céntricas de magnitud $P = 10$ kN a los elementos mostrados en la figura, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo al empalme, *b*) el esfuerzo normal perpendicular al empalme.

7.21 La fuerza céntrica **P** se aplica a un poste corto como se muestra en la figura. Si se sabe que los esfuerzos en el plano *a-a* son $\sigma = -15$ ksi y $\tau = 5$ ksi, determine *a*) el ángulo β que forma el plano *a-a* con la horizontal, *b*) el esfuerzo de compresión máximo en el poste.

7.22 Dos elementos de sección transversal uniforme de 50 × 80 mm se pegan a lo largo del plano *a-a* que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Si se sabe que los esfuerzos permisibles para la junta pegada son $\sigma = 800$ kPa y $\tau = 600$ kPa, determine la carga central máxima **P** que puede aplicarse.

7.23 El eje de un automóvil está sometido a las fuerzas y al momento que se muestran en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje sólido es de 32 mm, determine *a*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H* localizado en la parte superior del eje, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el mismo punto.

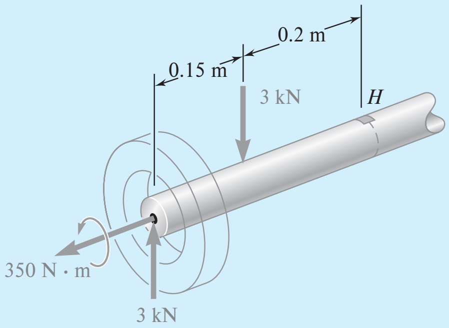


Figura P7.23

7.24 Una fuerza vertical de 400 lb se aplica en *D* sobre un engrane unido al eje sólido *AB* de 1 in de diámetro. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*, que se ubica en la parte superior del eje como se muestra en la figura.

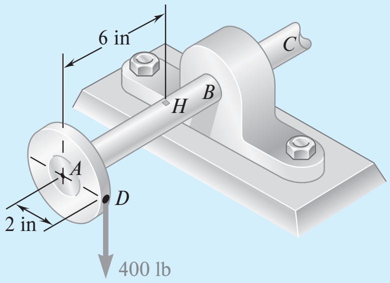


Figura P7.24

7.25 Un mecánico usa una matraca para aflojar un tornillo en el punto E. Si se sabe que el mecánico aplica una fuerza vertical de 24 lb en A, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto H localizado, como se muestra, sobre la parte superior del eje que tiene un diámetro de $\frac{3}{4}$ in.

7.26 El tubo de acero AB tiene un diámetro exterior de 102 mm y un espesor de pared de 6 mm. Si se sabe que el brazo CD está rígidamente unido al tubo, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto K.

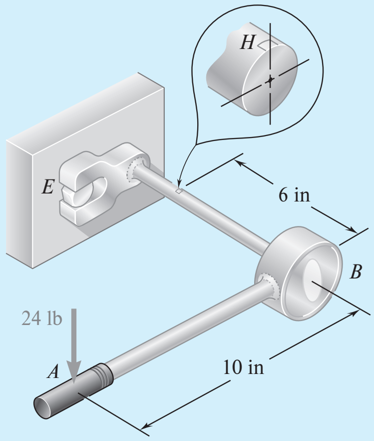


Figura P7.25

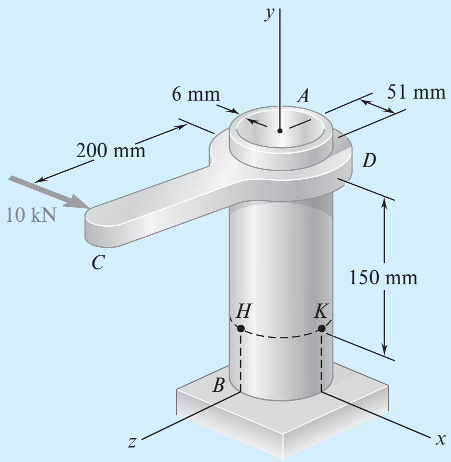


Figura P7.26

7.27 Para el estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura, determine el valor máximo de σ_y para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 75 MPa.

7.28 Para el estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura, determine *a*) el valor máximo de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual a 12 ksi, *b*) los esfuerzos principales correspondientes.

7.29 Para el estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura, determine *a*) el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la soldadura es cero, *b*) los esfuerzos principales correspondientes.

7.30 Determine el rango de valores de σ_x para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual a 10 ksi.

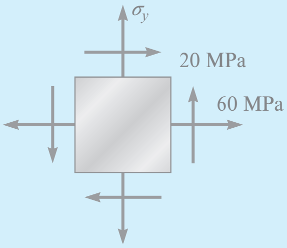


Figura P7.27

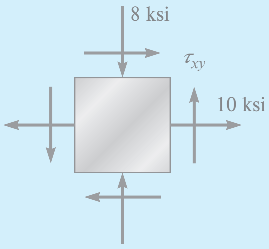


Figura *P7.28*

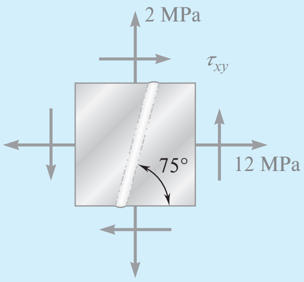


Figura P7.29

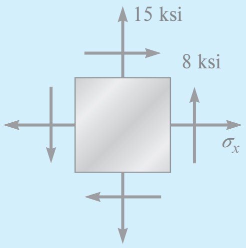


Figura *P7.30*

7.2 CÍRCULO DE MOHR PARA EL ESFUERZO PLANO

El círculo usado en la sección anterior para obtener las ecuaciones relativas a la transformación de un esfuerzo plano lo introdujo el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), por lo que se conoce como *círculo de Mohr* para el esfuerzo plano. Este círculo puede utilizarse como método alterno para la solución de los problemas considerados en la sección 7.1. Este método se basa en consideraciones geométricas simples y no requiere el uso de ecuaciones especializadas. Aunque fue diseñado originalmente para obtener soluciones gráficas, también se puede utilizar una calculadora.

Considere un elemento cuadrado de un material sometido a esfuerzo plano (figura 7.12*a*), y sean σ_x, σ_y y τ_{xy} las componentes del esfuerzo ejercido sobre el elemento. Se dibuja un punto X de coordenadas σ_x y $-\tau_{xy}$, y un punto Y de coordenadas σ_y y $+\tau_{xy}$ (figura 7.12*b*). Si τ_{xy} es positivo, como se supone en la figura 7.12*a*, el punto X está situado debajo del eje σ y el punto Y encima, como se muestra en la figura 7.12*b*. Si τ_{xy} es negativo, X se sitúa encima del eje σ y Y debajo. Al unir X y Y mediante una línea recta, el punto C está en la intersección de la línea XY con el eje σ, y se dibuja el círculo con centro en C y diámetro XY. La abscisa de C y el radio del círculo son respectivamente iguales a σ_{prom} y R en las ecuaciones (7.10). El círculo obtenido es el círculo de Mohr para el esfuerzo plano. Así, las abscisas de los puntos A y B, en donde el círculo interseca el eje σ, representan los esfuerzos principales $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$ en el punto considerado.

Como $\tan(XCA) = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$, el ángulo XCA es igual en magnitud a uno de los ángulos $2\theta_p$ que satisfacen las ecuaciones (7.12). Así, el ángulo θ_p en la figura 7.12*a* define la orientación del plano principal correspondiente al punto A en la figura 7.12*b* y puede obtenerse dividiendo a la mitad el ángulo XCA medido en el círculo de Mohr. Si $\sigma_x > \sigma_y$ y $\tau_{xy} > 0$, como en el caso considerado aquí, la rotación que lleva CX a CA es en sentido contrario a las agujas del reloj. Pero en ese caso, el ángulo θ_p obtenido de la ecuación (7.12), y definiendo la dirección de la normal Oa al plano principal, es positivo; por ello la rotación que lleva Ox a Oa es también en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por lo tanto, los sentidos de rotación en ambas partes de la figura 7.12 son los mismos. Así, si se requiere un giro en sentido contrario de las manecillas del reloj a través de $2\theta_p$ para llevar CX a CA en el círculo Mohr, una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj a través de θ_p llevará Ox a Oa en la figura 7.12*a*.†

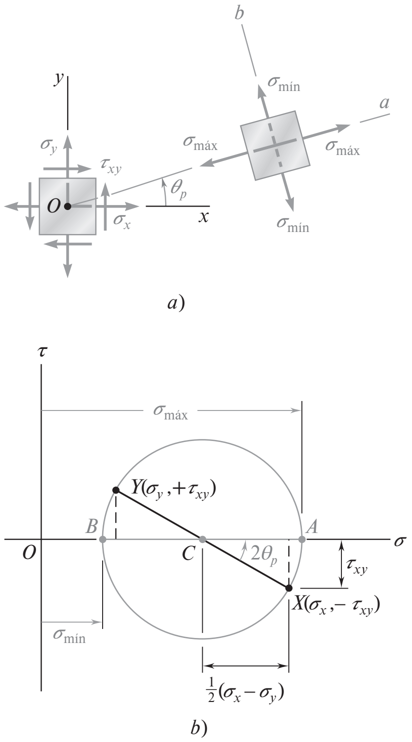


Figura 7.12 *a*) Elemento de esfuerzo plano y la orientación de los planos principales. *b*) Círculo de Mohr correspondiente.

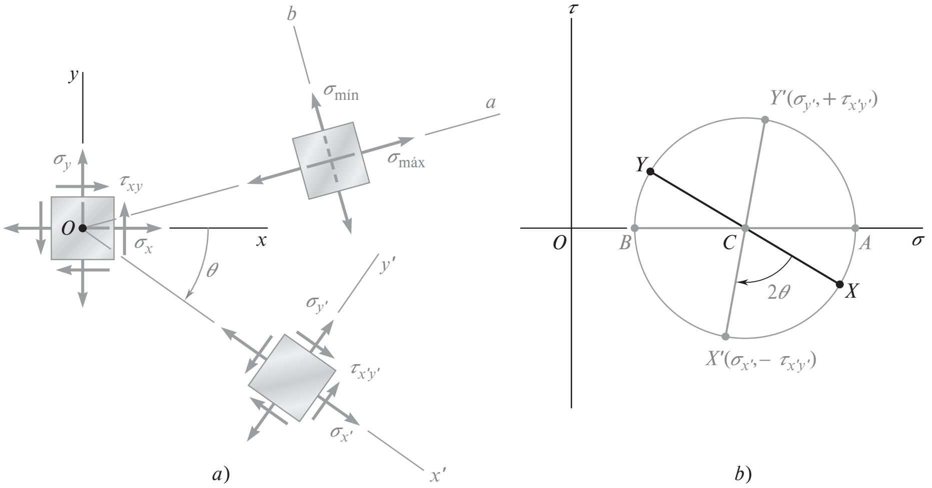


Figura 7.13 *a*) Elemento de esfuerzo referido a los ejes *xy*, transformado para obtener componentes referenciadas a los ejes *x′y′*. *b*) Círculo de Mohr correspondiente.

† Esto se debe al hecho de utilizar el círculo de la figura 7.8, en vez del círculo de la figura 7.7, como círculo de Mohr.

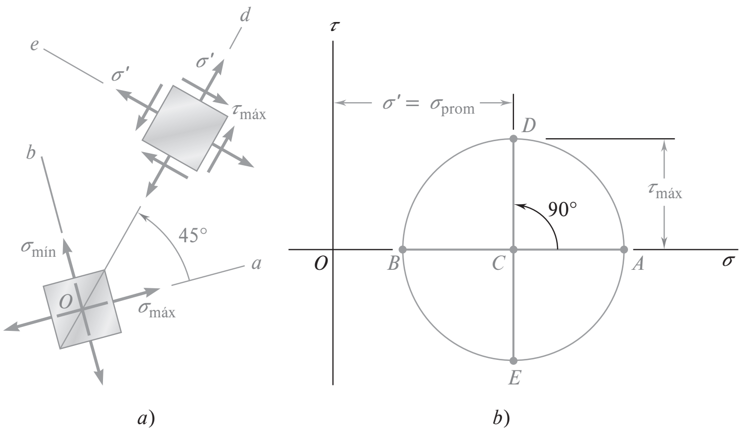


Figura 7.14 *a*) Elementos de esfuerzo que muestran la orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo en relación con los planos principales. *b*) Círculo de Mohr correspondiente.

Como el círculo de Mohr está definido en forma única, el mismo círculo puede obtenerse de las componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$, correspondientes a los ejes x' y y' mostrados en la figura 7.13*a*. El punto X' de coordenadas $\sigma_{x'}$ y $-\tau_{x'y'}$, y el punto Y' de coordenadas $\sigma_{y'}$ y $+\tau_{x'y'}$, están localizados en el círculo de Mohr y el ángulo $X'CA$ de la figura 7.13*b* debe ser el doble del ángulo $x'Oa$ de la figura 7.13*a*. Como el ángulo XCA es el doble del ángulo xOa, el ángulo XCX' de la figura 7.13*b* es el doble del ángulo xOx' de la figura 7.13*a*. Así el diámetro $X'Y'$ que define los esfuerzos normales y cortantes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ puede obtenerse girando el diámetro XY a través de un ángulo igual al doble del ángulo θ formado por los ejes x' y x de la figura 7.13*a*. La rotación que hace coincidir el diámetro XY con el diámetro $X'Y'$, en la figura 7.13*b*, tiene igual sentido que la rotación que superpone los ejes xy a los ejes $x'y'$ en la figura 7.13*a*.

Esta propiedad puede usarse para verificar que los planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales. Ciertamente, los puntos D y E del círculo de Mohr corresponden a los planos de esfuerzo cortante máximo, mientras que A y B corresponden a los planos principales (figura 7.14*b*). Puesto que los diámetros AB y DE del círculo de Mohr están a 90° uno del otro, las caras de los elementos correspondientes están a 45° entre sí (figura 7.14*a*).

La construcción del círculo de Mohr para el esfuerzo plano se simplifica mucho si cada cara del elemento usado para definir las componentes del esfuerzo se considera por separado. De las figuras 7.12 y 7.13, cuando el esfuerzo cortante ejercido *sobre una cara dada* tiende a hacer girar el elemento *en el sentido de las manecillas del reloj*, el punto en el círculo de Mohr correspondiente a esa cara está colocado por *encima* del eje σ en el círculo de Mohr. Cuando el esfuerzo cortante en una cara tiende a hacer girar el elemento en *sentido contrario a las manecillas del reloj*, el punto correspondiente a esa cara está localizado *debajo* del eje σ (figura 7.15). En cuanto a los esfuerzos normales, se usa la convención usual, por lo que el esfuerzo de tensión es positivo y se grafica hacia la derecha, mientras que un esfuerzo de compresión se considera negativo y se grafica hacia la izquierda.

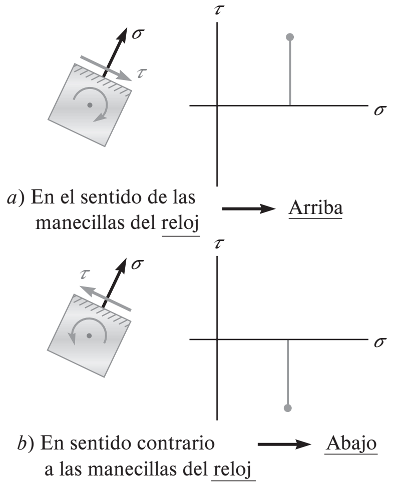
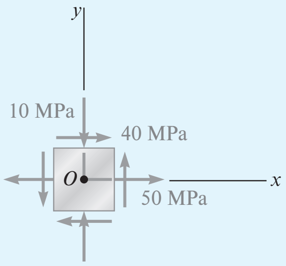


Figura 7.15 Convención para graficar el esfuerzo cortante en el círculo de Mohr.

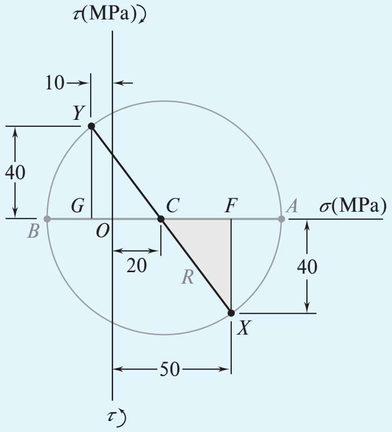
Aplicación de conceptos 7.2

Para el estado de esfuerzos plano considerado en la Aplicación de conceptos 7.1, *a*) construya el círculo de Mohr, *b*) determine los esfuerzos principales, *c*) obtenga el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal correspondiente.

***a*) Construcción del círculo de Mohr.** Se muestra en la figura 7.16*a* que el esfuerzo normal ejercido sobre la cara orientada hacia el eje x es de tensión (positivo)



a)



b)

Figura 7.16 *a*) Elemento de esfuerzo plano. *b*) Círculo de Mohr correspondiente.

y que el esfuerzo cortante tiende a rotar el elemento en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por lo tanto, el punto X del círculo de Mohr se grafica a la derecha del eje vertical y debajo del eje horizontal (figura 7.16*b*). Una inspección similar de los esfuerzos normal y cortante ejercidos sobre la cara superior del elemento muestra que el punto Y debe dibujarse a la izquierda del eje vertical y encima del eje horizontal. Dibujando la línea XY, se obtiene el centro C del círculo de Mohr. Su abscisa es:

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Como los lados del triángulo sombreado son

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \qquad \text{y} \qquad FX = 40 \text{ MPa}$$

el radio del círculo es

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

***b*) Planos principales y esfuerzos principales.** Los esfuerzos principales son

$$\sigma_{\text{máx}} = OA = OC + CA = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

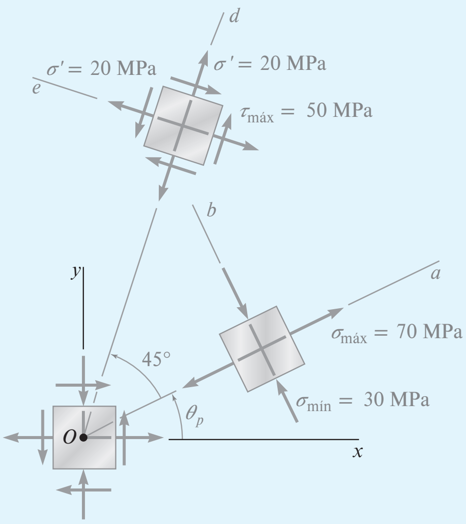
$$\sigma_{\text{mín}} = OB = OC - BC = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Al recordar que el ángulo ACX representa $2\theta_p$ (figura 7.16*b*),

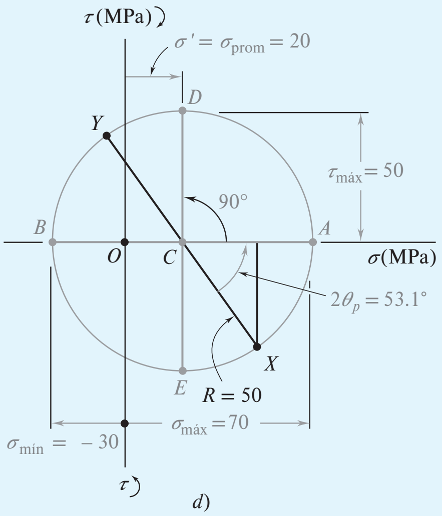
$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

$$2\theta_p = 53.1° \qquad \theta_p = 26.6°$$

Como la rotación que lleva CX a CA, en la figura 7.16*d*, es en sentido contrario a las manecillas del reloj, la rotación que lleva a Ox hasta el eje Oa, que corresponde a $\sigma_{\text{máx}}$ en la figura 7.16*c*, es también en sentido contrario a las manecillas del reloj.



c)



d)

Figura 7.16 (*cont.*) *c*) Orientaciones del elemento de esfuerzo para los esfuerzos cortantes principal y cortante. *d*) Círculo de Mohr usado para determinar los esfuerzos cortantes principal y máximo.

c) Esfuerzo cortante máximo. Ya que una rotación adicional de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj llevará de *CA* a *CD* en la figura 7.16*d*, una rotación adicional de 45° en sentido contrario a las manecillas del reloj llevará el eje *Oa* a *Od* que corresponde al esfuerzo cortante máximo en la figura 7.16*d*. Se observa en la figura 7.16*d* que $\tau_{\text{máx}} = R = 50$ MPa y que el esfuerzo normal correspondiente es $\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = 20$ MPa. Como el punto *D* está por encima del eje σ en la figura 7.16*c*, los esfuerzos cortantes ejercidos sobre las caras perpendiculares a *Od* en la figura 7.16*d* deben dirigirse de manera que tiendan a rotar el elemento en el sentido de las manecillas del reloj.

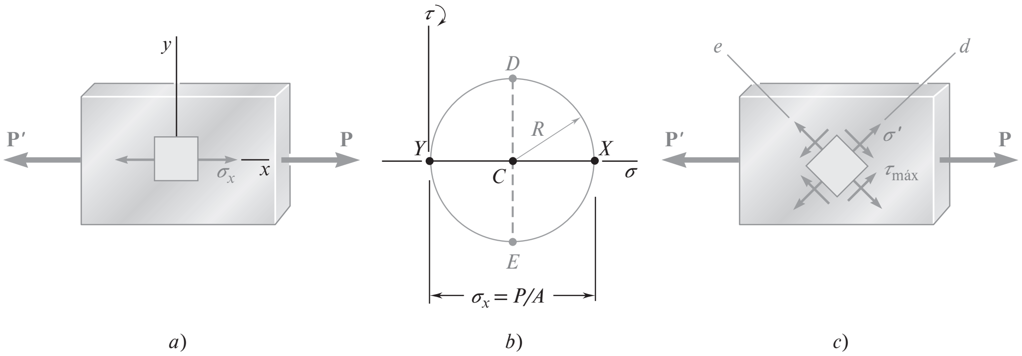


Figura 7.17 *a*) Elemento bajo una carga axial céntrica. *b*) Círculo de Mohr. *c*) Elemento que muestra los planos de esfuerzo cortante máximo.

El círculo de Mohr ofrece un modo conveniente de verificar los resultados obtenidos para esfuerzos bajo carga axial céntrica (sección 1.4) y bajo carga torsional (sección 3.1C). En el primer caso (figura 7.17*a*), $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = 0$. Los puntos correspondientes *X* y *Y* definen un círculo de radio $R = P/2A$ que pasa por el origen de coordenadas (figura 7.17*b*). Los puntos *D* y *E* dan la orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo (figura 7.17*c*), así como $\tau_{\text{máx}}$ y los correspondientes esfuerzos normales σ':

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma' = R = \frac{P}{2A} \tag{7.18}$$

En el caso de torsión (figura 7.18*a*), $\sigma_x = \sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = \tau_{\text{máx}} = Tc/J$. Por consiguiente, los puntos *X* y *Y* están localizados en el eje τ y el círculo de Mohr tiene un radio $R = Tc/J$ centrado en el origen (figura 7.18*b*). Los puntos *A* y *B* definen los planos principales (figura 7.18*c*) y los esfuerzos principales:

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \pm R = \pm \frac{Tc}{J} \tag{7.19}$$

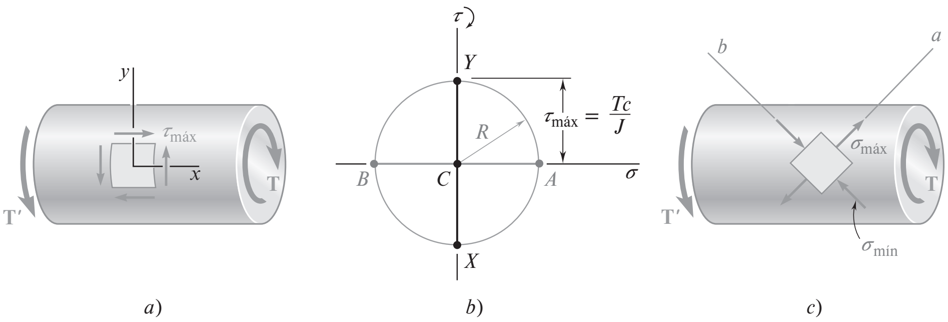
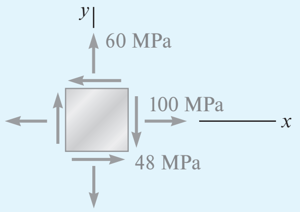


Figura 7.18 *a*) Elemento bajo una carga torsional. *b*) Círculo de Mohr. *c*) Elemento que muestra la orientación de los esfuerzos principales.

Problema modelo 7.2



Para el estado de esfuerzos plano mostrado en la figura, determine: *a*) los esfuerzos principales y los planos principales, *b*) las componentes del esfuerzo ejercidas sobre el elemento obtenido rotando el elemento dado 30° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

ESTRATEGIA: Puesto que el estado de esfuerzos dado representa dos puntos en el círculo de Mohr, se pueden utilizar estos para generar el círculo. El estado de esfuerzos en cualquier otro plano, incluyendo los planos principales, puede entonces determinarse fácilmente a través de la geometría del círculo.

MODELAR y ANALIZAR:

Construcción del círculo de Mohr (figura 1). En una cara perpendicular al eje *x*, el esfuerzo normal es de tensión y el esfuerzo cortante tiende a rotar el elemento en el sentido de las manecillas del reloj. Así, se elabora la gráfica de *X* en un punto 100 unidades a la derecha del eje vertical y 48 unidades por encima del eje horizontal. Al examinar las componentes del esfuerzo en la cara superior se elabora la gráfica del punto *Y*(60, –48). Se unen los puntos *X* y *Y* mediante una línea recta, para definir el centro *C* del círculo de Mohr. La abscisa de *C*, que representa σ_{prom}, y el radio *R* del círculo pueden medirse directamente o calcularse como sigue

$$\sigma_{prom} = OC = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(100 + 60) = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$

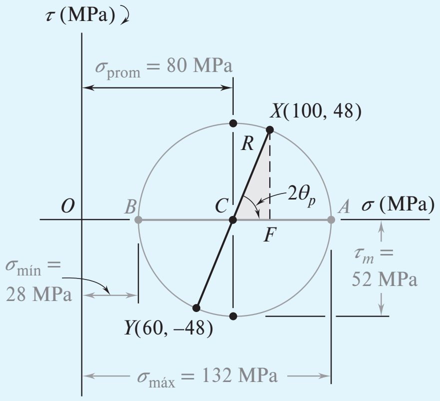


Figura 1 Círculo de Mohr, para un estado de esfuerzos dado.

***a*) Planos principales y esfuerzos principales.** Se rota el diámetro *XY* en el sentido de las manecillas del reloj $2\theta_p$ hasta que coincida con el diámetro *AB*. Por lo tanto,

$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4 \qquad 2\theta_p = 67.4° \qquad \theta_p = 33.7° \quad ◀$$

Los esfuerzos principales están representados por las abscisas de los puntos *A* y *B*:

$$\sigma_{máx} = OA = OC + CA = 80 + 52 \qquad \sigma_{máx} = +132 \text{ MPa} \quad ◀$$

$$\sigma_{mín} = OB = OC - BC = 80 - 52 \qquad \sigma_{mín} = +28 \text{ MPa} \quad ◀$$

Como la rotación que trae XY hasta AB es en el sentido de las manecillas del reloj, la rotación que trae Ox al eje Oa, que corresponde a $\sigma_{máx}$, es también en el mismo sentido. Se obtiene la orientación mostrada en la figura 2 para los planos principales.

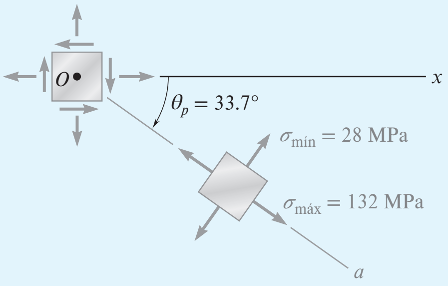


Figura 2 Orientación del elemento de esfuerzo principal.

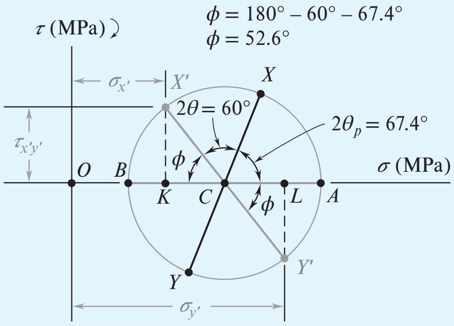


Figura 3 Análisis del círculo de Mohr para la rotación del elemento 30° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

***b)* Componentes de esfuerzo en el elemento rotado 30°↺.** Los puntos X' y Y' en el círculo de Mohr que corresponden a las componentes de esfuerzo en el elemento rotado, se obtienen girando XY en sentido contrario a las manecillas del reloj, un ángulo $2\theta = 60°$ (figura 3). Se encuentra

$$\phi = 180° - 60° - 67.4° \qquad \phi = 52.6° \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52.6° \qquad \sigma_{x'} = +48.4 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52.6° \qquad \sigma_{y'} = +111.6 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \text{ sen } 52.6° \qquad \tau_{x'y'} = 41.3 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Como X' se localiza por encima del eje horizontal, el esfuerzo cortante en la cara perpendicular a Ox' tiende a rotar el elemento en el sentido de las manecillas del reloj. Los esfuerzos, junto con su orientación, se muestran en la figura 4.

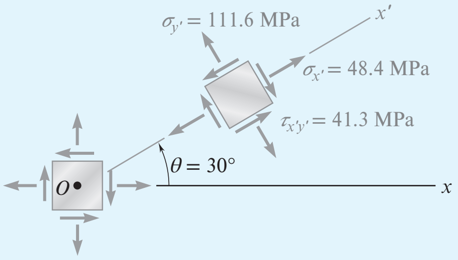
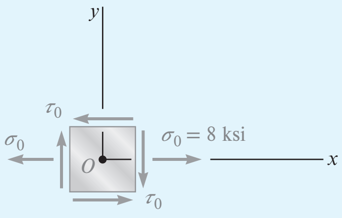


Figura 4 Componentes de esfuerzo obtenidas al rotar el elemento original 30° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Problema modelo 7.3

Un estado de esfuerzos plano consiste en un esfuerzo de tensión $\sigma_0 = 8$ ksi ejercido sobre las superficies verticales y en esfuerzo cortante desconocido. Determine: *a*) la magnitud del esfuerzo cortante τ_0 para el cual el mayor esfuerzo normal es de 10 ksi, *b*) el esfuerzo cortante máximo correspondiente.



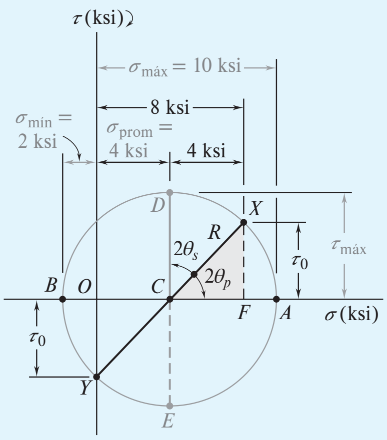


Figura 1 Círculo de Mohr para el estado de esfuerzos dado.

ESTRATEGIA: Puede utilizar los esfuerzos normales en el elemento dado para determinar el esfuerzo normal medio, estableciendo así el centro del círculo de Mohr. Si se sabe que el esfuerzo normal máximo dado es también un esfuerzo principal, se puede usar esto para completar la construcción del círculo.

MODELAR y ANALIZAR:

Construcción del círculo de Mohr (figura 1). Se supondrá que los esfuerzos cortantes actúan en los sentidos mostrados. En consecuencia, el esfuerzo cortante τ_0 en una cara perpendicular al eje x tiende a rotar el elemento en el sentido de las manecillas del reloj, y se traza el punto X de coordenadas 8 ksi y τ_0 por encima del eje horizontal. Considerando una cara horizontal del elemento, $\sigma_y = 0$ y τ_0 tiende a rotar el elemento en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por lo tanto, se grafica Y a una distancia τ_0 por debajo de O.

La abscisa del centro C del círculo de Mohr es

$$\sigma_{prom} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(8 + 0) = 4 \text{ ksi}$$

El radio R del círculo se encuentra observando que $\sigma_{máx} = 10$ ksi y está representado por la abscisa del punto A:

$$\sigma_{máx} = \sigma_{prom} + R$$

$$10 \text{ ksi} = 4 \text{ ksi} + R \qquad R = 6 \text{ ksi}$$

***a*) Esfuerzo cortante τ_0.** Considerando el triángulo rectángulo CFX,

$$\cos 2\theta_p = \frac{CF}{CX} = \frac{CF}{R} = \frac{4 \text{ ksi}}{6 \text{ ksi}} \qquad 2\theta_p = 48.2° \circlearrowright \qquad \theta_p = 24.1° \circlearrowright$$

$$\tau_0 = FX = R \operatorname{sen} 2\theta_p = (6 \text{ ksi}) \operatorname{sen} 48.2° \qquad \tau_0 = 4.47 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

***b*) Esfuerzo cortante máximo.** Las coordenadas del punto D del círculo de Mohr representan el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal correspondiente.

$$\tau_{máx} = R = 6 \text{ ksi} \qquad \tau_{máx} = 6 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

$$2\theta_s = 90° - 2\theta_p = 90° - 48.2° = 41.8° \circlearrowleft \qquad \theta_x = 20.9° \circlearrowleft$$

El esfuerzo cortante máximo se ejerce sobre un elemento orientado como se muestra en la figura 2. (También se muestra el elemento sobre el cual se ejercen los esfuerzos principales.)

REVISAR y PENSAR: Si se invirtiera la hipótesis original sobre el sentido de τ_0 se obtendría el mismo círculo y las mismas respuestas, pero la orientación del elemento sería como se muestra en la figura 3.

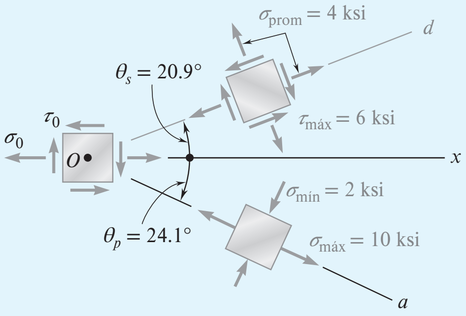


Figura 2 Orientación de los planos principales y de esfuerzo cortante máximo para el sentido supuesto de τ_0.

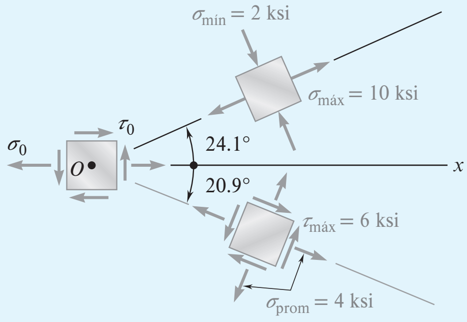


Figura 3 Orientación de los planos principales y de esfuerzo cortante máximo para el sentido opuesto de τ_0.

Problemas

7.31 Utilice el círculo de Mohr para resolver los problemas 7.5 y 7.9.

7.32 Utilice el círculo de Mohr para resolver los problemas 7.7 y 7.11.

7.33 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.10.

7.34 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.12.

7.35 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.13.

7.36 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.14.

7.37 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.15.

7.38 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.16.

7.39 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.17.

7.40 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.18.

7.41 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.19.

7.42 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.20.

7.43 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.21.

7.44 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.22.

7.45 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.23.

7.46 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.24.

7.47 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.25.

7.48 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.26.

7.49 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.27.

7.50 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.28.

7.51 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.29.

7.52 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.30.

7.53 Resuelva el problema 7.29 usando el círculo de Mohr y suponiendo que la soldadura forma un ángulo de 60° con la horizontal.

***7.54* y 7.55** Determine los planos principales y los esfuerzos principales para el estado de esfuerzos plano resultante de la superposición de los dos estados de esfuerzos que se muestran en la figura.

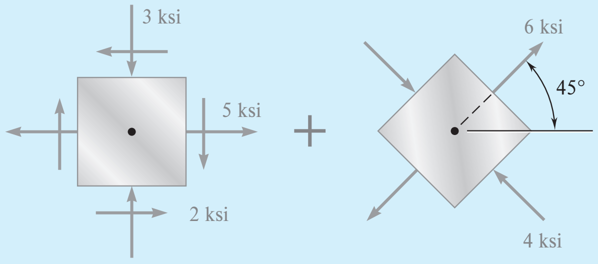


Figura *P7.54*

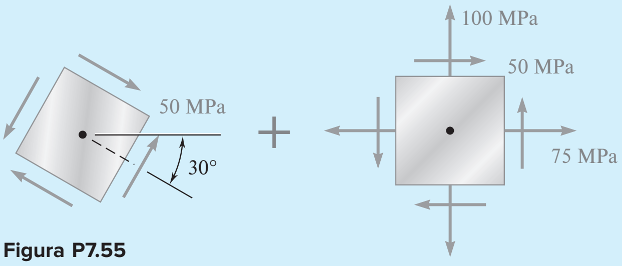


Figura P7.55

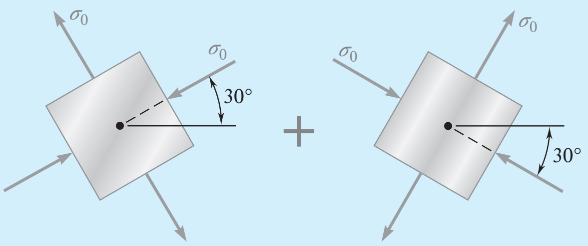


Figura P7.56

Figura P7.57

7.56 y 7.57 Determine los planos principales y los esfuerzos principales para el estado de esfuerzos plano resultante de la superposición de los dos estados de esfuerzos que se muestran en la figura.

7.58 Para el elemento que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xy} para los cuales el esfuerzo de tensión máximo es menor o igual que 60 MPa.

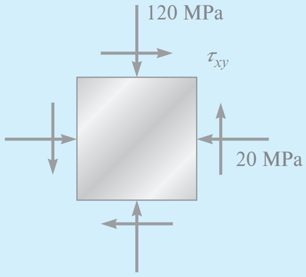


Figura P7.58 y P7.59

7.59 Para el elemento que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xy} para los cuales el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 150 MPa.

7.60 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los cuales la magnitud del esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ es menor o igual que 8 ksi.

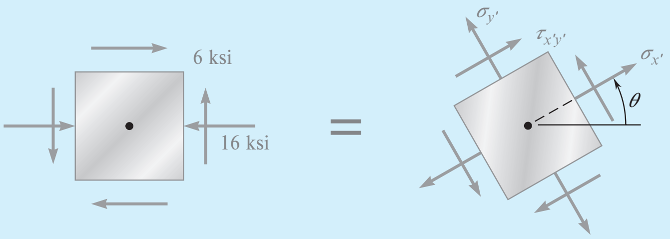


Figura *P7.60*

7.61 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los cuales el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ es menor o igual a 50 MPa.

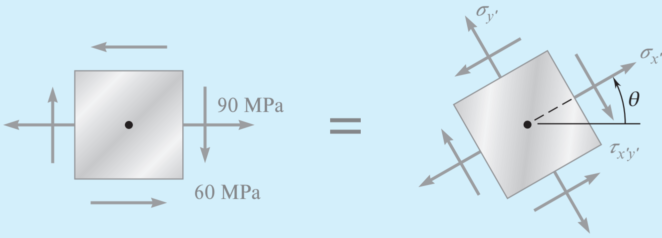


Figura P7.61 y P7.62

7.62 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los que el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ es menor o igual a 100 MPa.

7.63 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, se sabe que los esfuerzos normal y cortante están dirigidos como se indica y que $\sigma_x = 14$ ksi, $\sigma_y = 9$ ksi y $\sigma_{mín} = 5$ ksi. Determine *a*) la orientación de los planos principales, *b*) el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$, *c*) el esfuerzo cortante máximo en el plano.

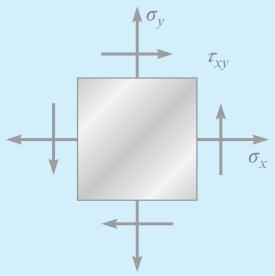


Figura P7.63

7.64 El círculo de Mohr que se muestra en la figura corresponde al estado de esfuerzos dado en la figura 7.5*a* y *b*. Observe que $\sigma_{x'} = OC + (CX') \cos (2\theta_p - 2\theta)$ y que $\tau_{x'y'} = (CX') \operatorname{sen} (2\theta_p - 2\theta)$, deduzca las expresiones para $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ dadas en las ecuaciones (7.5) y (7.6), respectivamente. [*Sugerencia:* Utilice $\operatorname{sen} (A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$ y $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$].

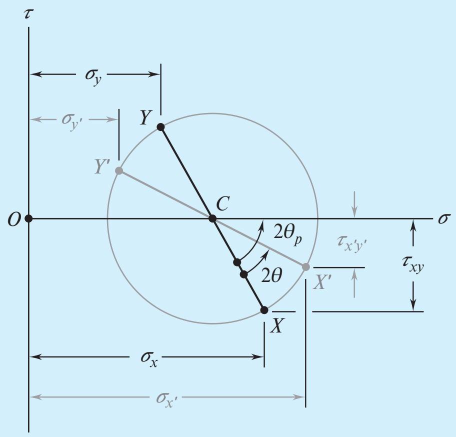


Figura P7.64

7.65 *a*) Demuestre que la expresión $\sigma_{x'}\sigma_{y'} - \tau^2_{x'y'}$, donde $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ son componentes de esfuerzo a lo largo de los ejes rectangulares x' y y', es independiente de la orientación de dichos ejes. Asimismo, demuestre que la expresión dada representa el cuadrado de la tangente trazada desde el origen de las coordenadas al círculo de Mohr. *b*) Con la propiedad de invariancia establecida en el inciso *a*, exprese el esfuerzo cortante τ_{xy} en términos de σ_x, σ_y y los esfuerzos principales $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$.

7.3 ESTADO GENERAL DE ESFUERZO

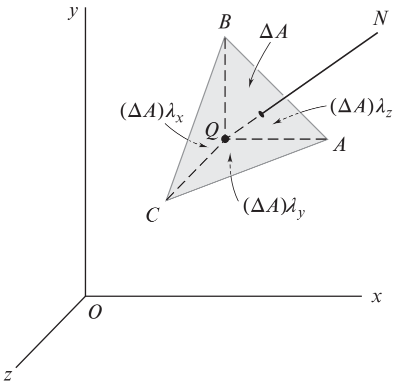


Figura 7.19 Tetraedro de esfuerzo en el punto Q con tres caras paralelas a los planos coordenados.

En las secciones precedentes se ha supuesto un estado de esfuerzos plano con $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, y considerando solo transformaciones de esfuerzo asociadas con una rotación alrededor del eje z. Ahora se considerará el estado de esfuerzos general representado en la figura 7.1*a* y la transformación de esfuerzos asociada con la rotación de ejes mostrada en la figura 7.1*b*. Sin embargo, el análisis se limitará a la determinación del *esfuerzo normal* σ_n en un plano de orientación arbitraria.

Tres de las caras del tetraedro mostrado en la figura 7.19 son paralelas a los planos coordenados, y la cuarta cara ABC es perpendicular a la línea QN. Si ΔA es el área de la cara ABC, y λ_x, λ_y, λ_z, los cosenos directores de QN, las áreas de las caras perpendiculares a los ejes x, y y z son $(\Delta A)\lambda_x$, $(\Delta A)\lambda_y$ y $(\Delta A)\lambda_z$. Si el estado de esfuerzos en el punto Q está definido por las componentes de esfuerzo σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}, las *fuerzas* ejercidas sobre las caras paralelas a los planos coordenados se obtienen multiplicando las componentes apropiadas del esfuerzo por el área de cada cara (figura 7.20). Por otra parte, las fuerzas ejercidas sobre la cara ABC constan de una fuerza normal de magnitud $\sigma_n\,\Delta A$ dirigida a lo largo de QN, y de una fuerza cortante de magnitud $\tau\,\Delta A$ perpendicular a QN, pero de dirección desconocida. Como QBC, QCA y QAB, respectivamente, enfrentan las direcciones negativas de los ejes x, y y z, las fuerzas ejercidas deben mostrarse con sentidos negativos.

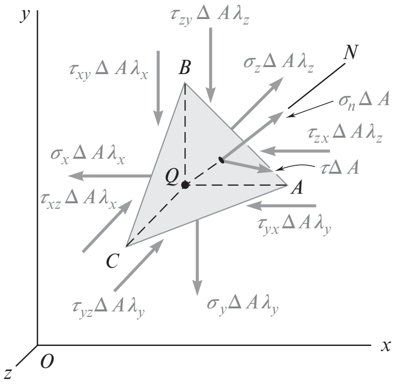


Figura 7.20 Diagrama de cuerpo libre del tetraedro de esfuerzo en el punto Q.

La suma de las componentes de todas las fuerzas que actúan en el tetraedro, a lo largo de QN, es cero. Las componentes de una fuerza paralela al eje x a lo largo de QN se obtiene multiplicando la magnitud de esa fuerza por el coseno director λ_x. Las componentes de las fuerzas paralelas a los ejes y y z se obtienen en forma similar. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Sigma F_n = 0: \quad & \sigma_n \Delta A - (\sigma_x \Delta A\,\lambda_x)\lambda_x - (\tau_{xy}\,\Delta A\,\lambda_x)\lambda_y - (\tau_{xz}\,\Delta A\,\lambda_x)\lambda_z \\ & - (\tau_{yx}\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_x - (\sigma_y\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_y - (\tau_{yz}\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_z \\ & - (\tau_{zx}\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_x - (\tau_{zy}\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_y - (\sigma_z\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_z = 0\end{aligned}$$

Al dividir entre ΔA y despejando σ_n, se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_x\lambda_x^2 + \sigma_y\lambda_y^2 + \sigma_z\lambda_z^2 + 2\tau_{xy}\lambda_x\lambda_y + 2\tau_{yz}\lambda_y\lambda_z + 2\tau_{zx}\lambda_z\lambda_x \qquad (7.20)$$

Se observa que la ecuación del esfuerzo normal σ_n es una *forma cuadrática* en λ_x, λ_y y λ_z. Los ejes coordenados se encuentran cuando el miembro derecho de la ecuación (7.20) se reduce a los tres términos que contienen los cuadrados de los cosenos directores.† Al llamar a estos ejes a, b y c, los correspondientes esfuerzos normales por σ_a, σ_b y σ_c, y los cosenos directores de QN, con respecto a estos ejes, por λ_a, λ_b y λ_c, se escribe

$$\sigma_n = \sigma_a\lambda_a^2 + \sigma_b\lambda_b^2 + \sigma_c\lambda_c^2 \qquad (7.21)$$

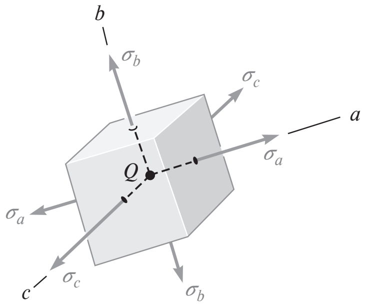


Figura 7.21 Elemento de esfuerzo general orientado hacia los ejes principales.

Los ejes coordenados a, b, c son los *ejes principales de esfuerzo.* Como su orientación depende del estado de esfuerzos en Q y, en consecuencia, de la posición de Q, se han representado en la figura 7.21 unidos a Q. Los planos coordenados correspondientes son los *planos principales de esfuerzo* y los correspondientes esfuerzos normales σ_a, σ_b y σ_c son los *esfuerzos principales* en Q.‡

† En la sección 9.16 de F. P. Beer y E. R. Johnston, *Vector Mechanics for Engineers*, 10a. ed., McGraw-Hill, Book Company, 2013, se encuentra una forma cuadrática similar para representar el momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje cualquiera. En la sección 9.17 se muestra que esta forma está asociada con una *superficie cuadrática* y que al reducir la forma cuadrática a términos que contienen solo los cuadrados de los cosenos directores es equivalente a determinar los ejes principales de esa superficie.

‡ Para ver un análisis de la determinación de los planos principales de esfuerzos y de los esfuerzos principales, consulte S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, 1970, sec. 77.

7.4 ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE ESFUERZOS

Si el elemento de la figura 7.21 gira con respecto a uno de los ejes principales en Q, por ejemplo, el eje c (figura 7.22), la correspondiente transformación de esfuerzos puede analizarse mediante el círculo de Mohr, como una transformación de esfuerzo plano. Los esfuerzos cortantes ejercidos sobre las caras perpendiculares al eje c permanecen iguales a cero. El esfuerzo normal σ_c es perpendicular al plano ab en el cual la transformación tiene lugar y no afecta esta transformación. Por lo tanto, puede usarse el círculo de diámetro AB para determinar los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre las caras del elemento cuando gira con respecto al eje c (figura 7.23). Análogamente, los círculos de diámetro BC y CA pueden usarse para determinar los esfuerzos en el elemento cuando gira con respecto a los ejes a y b, respectivamente. Mientras este análisis se limita a rotaciones con respecto a los ejes principales, podría demostrarse que cualquier otra transformación de ejes conducirá a esfuerzos representados en la figura 7.23 por un punto localizado dentro del área sombreada. Por consiguiente, el radio del mayor de los círculos da el esfuerzo cortante máximo en el punto Q. Al notar que el diámetro de ese círculo es igual a la diferencia entre $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$,

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}|\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}| \tag{7.22}$$

donde $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ representan los valores *algebraicos* de los esfuerzos máximo y mínimo en el punto Q.

Recuerde que en un *esfuerzo plano*, si se seleccionan los ejes x y y, se tiene $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Esto significa que el eje z (es decir, el eje perpendicular al plano de esfuerzo) es uno de los tres ejes principales de esfuerzo. En un diagrama de círculo de Mohr, este eje corresponde al origen O, en donde $\sigma = \tau = 0$. Los otros dos ejes principales corresponden a los puntos A y B donde el círculo de Mohr, para el plano xy, interseca el eje σ. Si A y B están en lados opuestos del origen O (figura 7.24), los esfuerzos principales correspondientes representan al esfuerzo máximo y mínimo normal en el punto Q, y el esfuerzo cortante máximo es igual al máximo cortante "en el plano". Recuerde que en la sección 7.1B, los planos de esfuerzo cortante máximo corresponden a los puntos D y E del círculo de Mohr y están a 45° de los planos principales correspondientes a los puntos A y B. Estos se muestran en los planos diagonales sombreados de las figuras 7.25*a* y *b*.

No obstante, si A y B están en el mismo lado de O, donde σ_a y σ_b tienen el mismo signo, el círculo que define $\sigma_{\text{máx}}$, $\sigma_{\text{mín}}$ y $\tau_{\text{máx}}$ *no* es el círculo correspondiente a una transformación de esfuerzo dentro del plano xy. Si $\sigma_a > \sigma_b > 0$, como se supone en la figura 7.26, $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_a$, $\sigma_{\text{mín}} = 0$ y $\tau_{\text{máx}}$ es igual al radio del círculo definido por los puntos

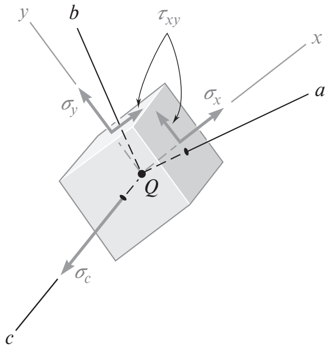


Figura 7.22 Elemento de esfuerzo rotado respecto al eje *c*.

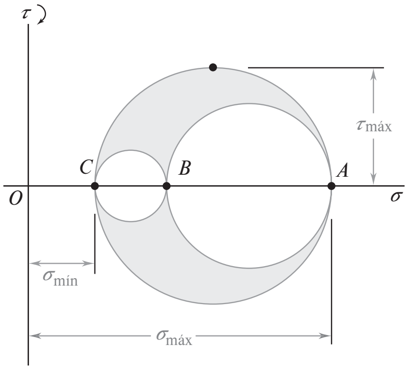


Figura 7.23 Círculos de Mohr para el estado general de esfuerzos.

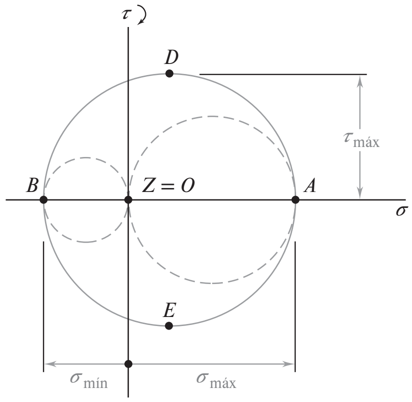


Figura 7.24 Círculos de Mohr tridimensionales para un estado de esfuerzos plano donde $\sigma_a > 0 > \sigma_b$.

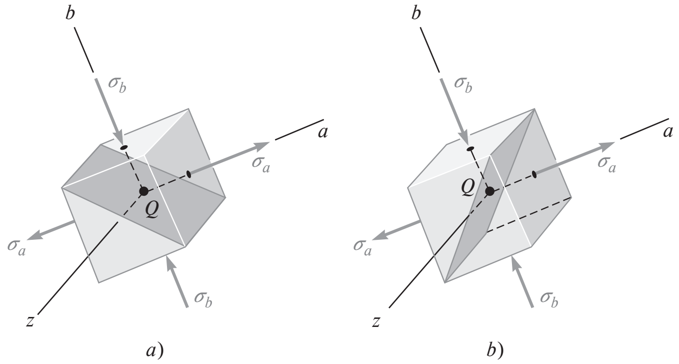


Figura 7.25 Esfuerzo cortante máximo en el plano para un elemento que tiene un eje principal alineado con el eje *z*. *a*) 45° en el sentido horario desde el eje principal *a*. *b*) 45° en sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje principal *a*.

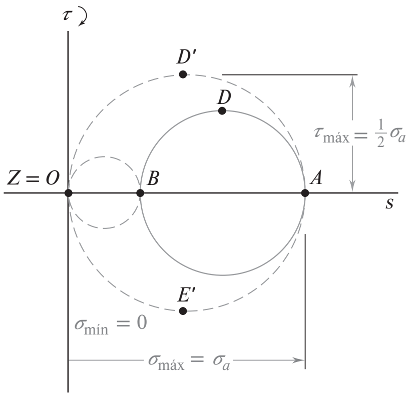


Figura 7.26 Círculos de Mohr tridimensionales para un estado de esfuerzos donde $\sigma_a > \sigma_b > 0$.

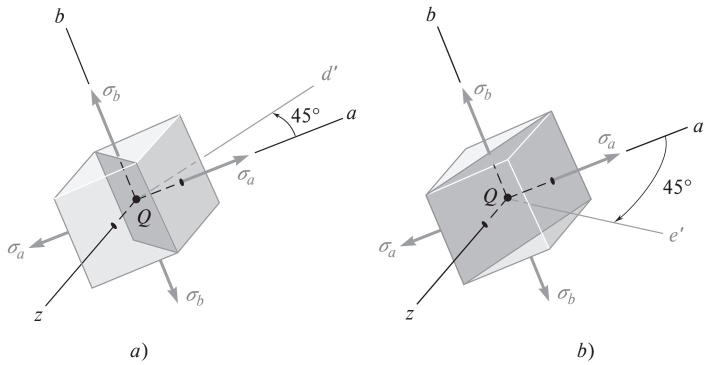


Figura 7.27 Esfuerzo cortante máximo fuera del plano para un elemento de esfuerzo plano. *a*) 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje principal *a*. *b*) 45° en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje principal *a*.

O y A. Por lo tanto, $\tau_{máx} = \frac{1}{2}\sigma_{máx}$. Las normales Qd' y Qe', a los planos de esfuerzo cortante máximo, se obtienen rotando el eje Qa a un ángulo de 45° dentro del plano za. Estos planos de esfuerzo cortante máximo se muestran en los planos diagonales sombreados en las figuras 7.27*a* y *b*.

Aplicación de conceptos 7.3

Para el estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura 7.28*a*, determine: *a*) los tres planos principales y esfuerzos principales y *b*) el esfuerzo cortante máximo.

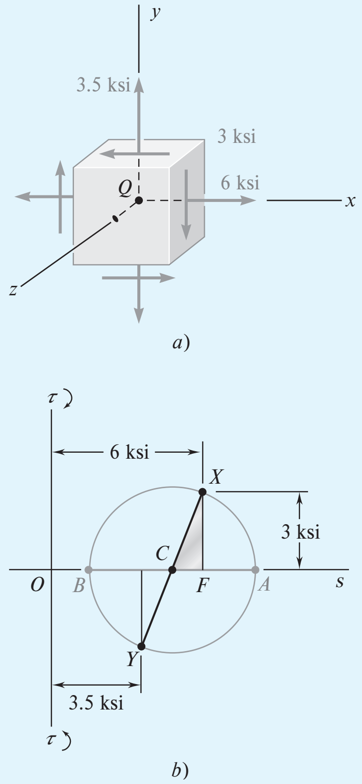


Figura 7.28 *a*) Elemento de esfuerzo plano. *b*) Círculo de Mohr para la transformación del esfuerzo en el plano *xy*.

a) Planos y esfuerzos principales. Se construye el círculo de Mohr para las transformaciones de esfuerzo en el plano xy (figura 7.28*b*). El punto X se grafica 6 unidades a la derecha del eje τ y 3 unidades por encima del eje σ (ya que el correspondiente esfuerzo cortante tiende a rotar el elemento en el sentido de las manecillas del reloj). El punto Y está 3.5 unidades a la derecha del eje τ y 3 unidades por debajo del eje σ. Al trazar la línea XY, se obtiene el centro C del círculo de Mohr para el plano xy. Su abscisa es

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{6 + 3.5}{2} = 4.75 \text{ ksi}$$

Como los lados del triángulo derecho CFX son $CF = 6 - 4.75 = 1.25$ ksi y $FX = 3$ ksi, el radio del círculo es

$$R = CX = \sqrt{(1.25)^2 + (3)^2} = 3.25 \text{ ksi}$$

Los esfuerzos principales en el plano de esfuerzos son:

$$\sigma_a = OA = OC + CA = 4.75 + 3.25 = 8.00 \text{ ksi}$$
$$\sigma_b = OB = OC - BC = 4.75 - 3.25 = 1.50 \text{ ksi}$$

Puesto que las caras del elemento que son perpendiculares al eje z están libres de esfuerzo, estas definen uno de los planos principales y el esfuerzo principal correspondiente es $\sigma_z = 0$. Los otros dos planos principales están definidos por los puntos A y B en el círculo de Mohr. El ángulo θ_p a través del cual el elemento debe rotarse respecto al eje z para que sus caras coincidan con estos planos (figura 7.28*c*) es la mitad del ángulo ACX.

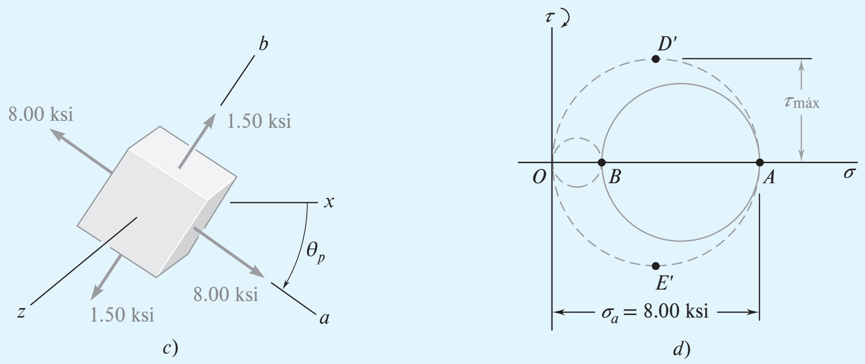


Figura 7.28 (*cont.*) *c*) Orientación de los esfuerzos principales, *d*) Círculos de Mohr tridimensionales.

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{3}{1.25}$$

$$2\theta_p = 67.4° \circlearrowright \qquad \theta_p = 33.7° \circlearrowright$$

***b*) Esfuerzo cortante máximo.** Ahora se dibujan los círculos de diámetro *OB* y *OA*, que corresponden respectivamente a rotaciones del elemento con respecto a los ejes *a* y *b* (figura 7.28*d*). Note que el esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro *OA*. Por lo tanto,

$$\tau_{máx} = \tfrac{1}{2}\sigma_a = \tfrac{1}{2}(8.00 \text{ ksi}) = 4.00 \text{ ksi}$$

Como los puntos *D′* y *E′* que definen los planos de esfuerzo cortante máximo están en los extremos del diámetro vertical del círculo que corresponde a una rotación con respecto al eje *b*, las caras del elemento de la figura 7.28*c* pueden llevarse a coincidir con los planos de esfuerzo cortante máximo mediante una rotación de 45° con respecto al eje *b*.

*7.5 TEORÍAS DE FALLA

7.5A Criterios de cedencia para materiales dúctiles

Los elementos estructurales y los componentes de máquinas elaborados de un material dúctil se diseñan usualmente de manera que el material no ceda bajo las condiciones esperadas de carga. Cuando el elemento o componente está sometido a esfuerzo uniaxial (figura 7.29), el valor del esfuerzo normal σ_x que hará ceder el material puede obtenerse a partir de una prueba de tensión del mismo material, ya que la probeta y el elemento estructural o componente de máquina están en el mismo estado de esfuerzos. En consecuencia, sin importar el mecanismo real que hace ceder el material, el elemento o componente está seguro siempre que $\sigma_x < \sigma_Y$, donde σ_Y es la resistencia a la cedencia de la probeta.

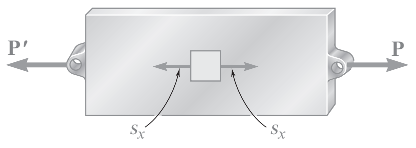


Figura 7.29 Elemento estructural bajo esfuerzo uniaxial.

Por otra parte, cuando un elemento estructural o componente de máquina está en un estado de esfuerzos plano (figura 7.30*a*), es conveniente usar uno de los métodos desarrollados con anterioridad para determinar los esfuerzos principales σ_a y σ_b en cualquier punto dado (figura 7.30*b*). El material puede considerarse entonces en un estado de esfuerzos biaxial en ese punto. Como este estado es diferente del estado

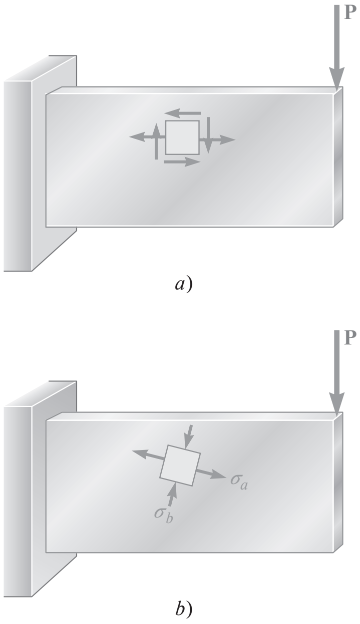


Figura 7.30 Elemento estructural en un estado de esfuerzos plano. *a*) Elemento de esfuerzo con referencia a los ejes coordenados. *b*) Elemento de esfuerzo referido a los ejes principales.

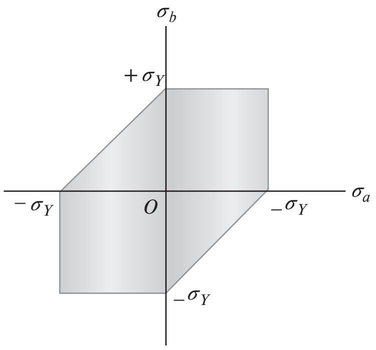


Figura 7.31 Hexágono de Tresca para el criterio del esfuerzo cortante máximo.

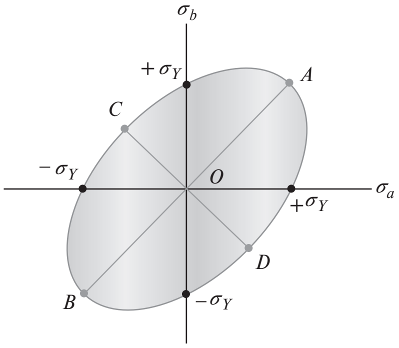


Figura 7.32 Superficie de Von Mises basada en el criterio de la energía de distorsión máxima.

uniaxial, no es posible predecir directamente a partir de tal prueba si el elemento estructural o el elemento de máquina bajo investigación fallará. Debe establecerse algún criterio acerca del mecanismo de falla del material que permita comparar los efectos de ambos estados de esfuerzos en el material. El propósito de esta sección es presentar los dos criterios de cedencia usados con mayor frecuencia para materiales dúctiles.

Criterio del esfuerzo cortante máximo. Este criterio se basa en la observación de que la cedencia en materiales dúctiles es causada por el deslizamiento del material, a lo largo de superficies oblicuas, debido principalmente a esfuerzos cortantes (vea la sección 2.1B). De acuerdo con este criterio, un componente estructural es seguro siempre que el valor máximo $\tau_{\text{máx}}$ del esfuerzo cortante en ese componente siga siendo menor que el esfuerzo cortante correspondiente en una probeta de tensión del mismo material cuando la probeta comienza a ceder.

Hay que recordar de la sección 1.3 que el máximo valor del esfuerzo cortante bajo una carga axial céntrica es igual a la mitad del valor del esfuerzo axial correspondiente; por lo tanto, se concluye que el esfuerzo cortante máximo en una prueba de tensión es $\frac{1}{2}\sigma_Y$ cuando la probeta empieza a ceder. Por otra parte, se estudió en la sección 7.4 que, para el esfuerzo plano, $\tau_{\text{máx}}$ del esfuerzo cortante es igual a $\frac{1}{2}|\sigma_{\text{máx}}|$ si los esfuerzos principales son ambos positivos o ambos negativos y es $\frac{1}{2}|\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}|$ si el esfuerzo máximo es positivo y el mínimo negativo. Por consiguiente, si los esfuerzos principales σ_a y σ_b tienen el mismo signo, el criterio del esfuerzo cortante máximo da

$$|\sigma_a| < \sigma_Y \qquad |\sigma_b| < \sigma_Y \tag{7.23}$$

Si los esfuerzos principales σ_a y σ_b tienen signos opuestos, el criterio del esfuerzo cortante máximo produce

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_Y \tag{7.24}$$

En la figura 7.31 se han representado gráficamente las relaciones obtenidas. Cualquier estado de esfuerzos se representa por un punto de coordenadas σ_a y σ_b, en donde σ_a y σ_b son los esfuerzos principales. Si el punto cae dentro del área mostrada, el componente estructural es seguro. Si cae fuera de esta área, la componente falla como resultado de la cedencia en el material. El hexágono asociado con la iniciación de la cedencia se conoce como *hexágono de Tresca* en honor al ingeniero francés Henri Edouard Tresca (1814-1885).

Criterio de la máxima energía de distorsión. Este criterio se basa en la determinación de la energía de distorsión en un material dado. Esta es la energía asociada con cambios en la forma del material (distinto de la energía asociada con cambios de volumen en el mismo material). Este criterio también se conoce como el *criterio de Von Mises,* en honor del matemático germano-estadounidense Richard von Mises (1883-1953). Aquí, un componente estructural dado es seguro siempre que el valor máximo de la energía de distorsión por unidad de volumen en ese material permanezca más pequeño que la energía de distorsión por unidad de volumen requerida para hacer ceder una probeta del mismo material sometida a tensión. La energía de distorsión por unidad de volumen en un material isotrópico bajo esfuerzo plano es

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \tag{7.25}$$

donde σ_a y σ_b son los esfuerzos principales y G el módulo de rigidez. En una probeta de tensión que empieza a ceder, $\sigma_a = \sigma_Y$, $\sigma_b = 0$ y $(u_d)_Y = \sigma_Y^2/6G$. Así, el criterio de la máxima energía de distorsión indica que el componente estructural es seguro siempre que $u_d < (u_d)_Y$, o

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \tag{7.26}$$

donde el punto de coordenadas σ_a y σ_b cae dentro del área mostrada en la figura 7.32. Esta área está limitada por la elipse

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_Y^2 \tag{7.27}$$

la cual interseca los ejes coordenados en $\sigma_a = \pm\sigma_Y$ y $+ \sigma_b = \pm\sigma_Y$. El eje mayor de la elipse biseca el primer y tercer cuadrantes y se extiende desde A ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_Y$) hasta B ($\sigma_a = \sigma_b = -\sigma_Y$), mientras su eje menor se extiende desde C ($\sigma_a = -\sigma_b = -0.577\sigma_Y$) hasta D ($\sigma_a = -\sigma_b = 0.577\sigma_Y$).

En la figura 7.33 se comparan el criterio del esfuerzo cortante máximo con el de la energía máxima de distorsión. La elipse pasa por los vértices del hexágono. En consecuencia, para los estados de esfuerzos representados por estos seis puntos, los dos criterios dan los mismos resultados. Para cualquier otro estado de esfuerzos, el criterio del esfuerzo cortante máximo es más conservador que el criterio de la máxima energía de distorsión, ya que el hexágono está dentro de la elipse.

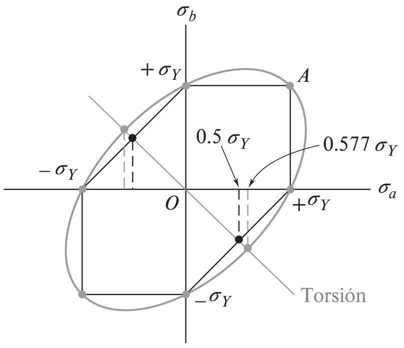


Figura 7.33 Comparación de los criterios de Tresca y Von Mises.

Un estado de esfuerzos de interés particular es el que se asocia con la cedencia en una prueba de torsión. Recuerde de la figura 7.18 que, para la torsión, $\sigma_{\text{mín}} = -\sigma_{\text{máx}}$. Entonces, los puntos correspondientes en la figura 7.33 están localizados en la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes. Se tiene que la cedencia ocurre en una prueba de torsión cuando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0.5\sigma_Y$, de acuerdo con el criterio del esfuerzo cortante máximo y, $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0.577\sigma_Y$ según el criterio de la máxima energía de distorsión. Pero al recordar la figura 7.18, σ_a y σ_b deben ser iguales en magnitud a $\tau_{\text{máx}}$, que se obtiene de una prueba de torsión para la resistencia de la cedencia τ_Y del material. Como el esfuerzo de cedencia σ_Y en tensión y τ_Y en cortante están dados para varios materiales dúctiles en el apéndice B, puede calcularse la razón τ_Y/σ_Y para estos materiales, donde el rango es de 0.55 a 0.60. Por consiguiente, el criterio de la máxima energía de distorsión aparece un poco más aproximado que el criterio del esfuerzo cortante máximo para predecir la cedencia en torsión.

7.5B Criterios de fractura para materiales frágiles bajo esfuerzo plano

Cuando los materiales frágiles se someten a una prueba de tensión, fallan repentinamente por ruptura (o fractura) sin ninguna cedencia previa. Cuando un elemento estructural o componente de máquina hecho de material frágil está bajo tensión uniaxial, el esfuerzo normal que lo hace fallar es igual a la resistencia última σ_U, determinada de una prueba de tensión, puesto que ambos, la probeta de prueba de tensión y el elemento o componente están en el mismo estado de esfuerzos. Sin embargo, cuando un elemento estructural o componente de máquina está en un estado de esfuerzos plano, es conveniente determinar los esfuerzos principales σ_a y σ_b en cualquier punto dado y usar uno de los criterios de esta sección para predecir si el elemento estructural o elemento de máquina fallará.

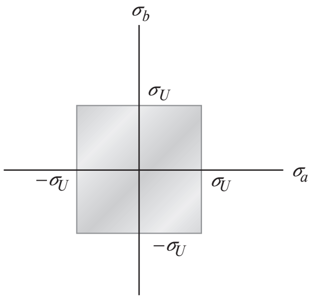


Figura 7.34 Superficie de Coulomb para el criterio de esfuerzo normal máximo.

Criterio del esfuerzo normal máximo. De acuerdo con este criterio, un componente estructural dado falla cuando el esfuerzo normal máximo alcanza la resistencia última σ_U obtenida de una prueba de tensión de una probeta del mismo material. Así, el componente estructural será seguro mientras los valores absolutos de los esfuerzos principales σ_a y σ_b sean ambos menores que σ_U:

$$|\sigma_a| < \sigma_U \qquad |\sigma_b| < \sigma_U \tag{7.28}$$

El criterio del esfuerzo normal máximo puede expresarse gráficamente en la figura 7.34. Si el punto obtenido dibujando los valores σ_a y σ_b de los esfuerzos principales cae dentro del área cuadrada mostrada en la figura, el componente estructural es seguro. Si cae fuera del área, el componente fallará.

El criterio del esfuerzo normal máximo se conoce como *criterio de Coulomb*, en honor del físico francés Charles Augustin de Coulomb (1736-1806). Este criterio experimenta una importante limitación: se basa en la hipótesis de que la resistencia última del material es la misma en tensión y en compresión. Como se observa en la sección 2.1B, este caso se presenta raras veces, porque la presencia de fallas en el material, como grietas microscópicas o cavidades, tienden a debilitar el material sometido a tensión, mientras que no afectan apreciablemente su resistencia a la falla a la compresión. Ade-

más, este criterio no considera efectos distintos de los esfuerzos normales en el mecanismo de falla del material.†

Criterio de Mohr. Este criterio, sugerido por el ingeniero alemán Otto Mohr, se usa para predecir el efecto de un estado dado de esfuerzo plano en un material frágil, cuando se dispone de los resultados de varios tipos de pruebas.

Suponga que se han realizado pruebas de tensión y compresión en un material dado y que se han determinado σ_{UT} y σ_{UC} del esfuerzo último a tensión y a compresión. El estado de esfuerzos correspondiente a la ruptura de la probeta a tensión puede representarse en un diagrama de círculo de Mohr por el círculo que interseca el eje horizontal en O y σ_{UT} (figura 7.36*a*). Análogamente, el estado de esfuerzos correspondiente a la falla de la probeta por compresión puede representarse por el círculo que interseca al eje horizontal en O y en σ_{UC}. Es claro que un estado de esfuerzos representado por un círculo enteramente contenido en cualquiera de estos dos círculos será seguro. Así, si los dos esfuerzos principales son positivos, el estado de esfuerzos es seguro mientras $\sigma_a < \sigma_{UT}$ y $\sigma_b < \sigma_{UT}$. Si ambos esfuerzos principales son negativos, el estado de esfuerzos es seguro siempre que $|\sigma_a| < |\sigma_{UC}|$ y $|\sigma_b| < |\sigma_{UC}|$. Al dibujar el punto de coordenadas σ_a y σ_b (figura 7.36*b*), el estado de esfuerzos es seguro mientras el punto caiga dentro de una de las áreas cuadradas mostradas en esa figura.

Para analizar σ_a y σ_b cuando tienen signos opuestos, se supondrá que se ha realizado una prueba de torsión en el material y que se ha determinado su resistencia última a cortante, τ_U. Al dibujar el círculo centrado en O, que representa el estado de esfuerzos correspondiente a la falla de la probeta en la prueba de torsión (figura 7.37*a*), se observa que cualquier estado de esfuerzos representado por un círculo contenido en ese círculo es también seguro. De acuerdo con el criterio de Mohr, un estado de esfuerzos es seguro si está representado por un círculo localizado enteramente dentro del área limitada por la envolvente de los círculos correspondientes a los datos disponibles. Las porciones restantes del diagrama de esfuerzos principales pueden obtenerse dibujando

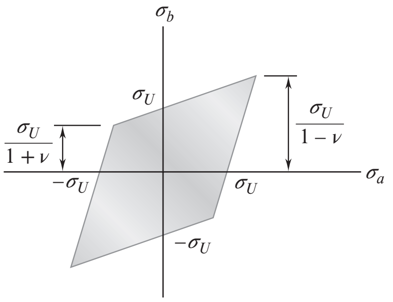


Figura 7.35 Superficie de Saint-Venant para el criterio de deformación normal máxima.

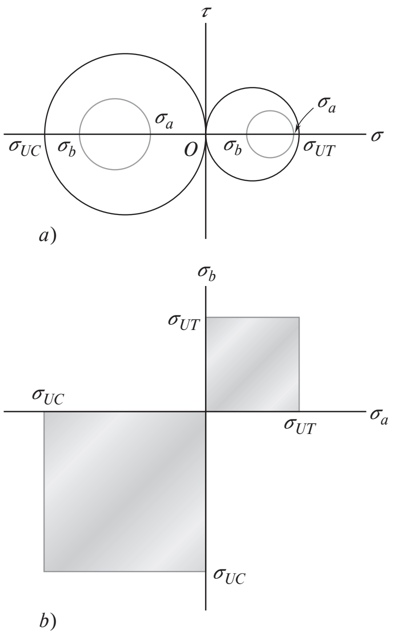


Figura 7.36 Criterio de Mohr para materiales frágiles que tienen diferentes resistencias finales en tensión y compresión. *a*) Círculos de Mohr para pruebas de compresión uniaxial (izquierda) y tensión (derecha) en la rotura. *b*) Estados de esfuerzos seguro cuando σ_a y σ_b tienen el mismo signo.

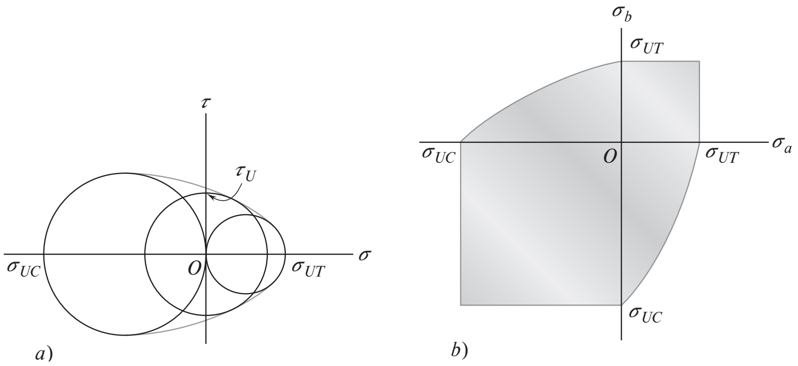


Figura 7.37 Criterio de Mohr para materiales frágiles. *a*) Círculos de Mohr para pruebas de compresión uniaxial (izquierda), de torsión (enmedio) y de tensión uniaxial (derecha) en la ruptura. *b*) Envolvente de estados de esfuerzos seguros.

† Otro criterio de falla conocido como *máxima deformación normal* o de Saint-Venant, se usó ampliamente durante el siglo XIX. De acuerdo con este criterio, un componente estructural dado es seguro siempre que el valor máximo de la deformación normal en ese componente permanezca menor que el valor ϵ_U de la deformación a la cual fallará una probeta del mismo material a tensión. Pero, como se verá en la sección 7.8, la deformación es máxima a lo largo de uno de los ejes principales de esfuerzo, si la deformación es elástica y el material es homogéneo e isotrópico. Así, designando por ϵ_a y ϵ_b los valores de la deformación normal a lo largo de los ejes principales en el plano de esfuerzo, se escribe

$$|\epsilon_a| < \epsilon_U \qquad |\epsilon_b| < \epsilon_U \tag{7.29}$$

Con el uso de la ley de Hooke generalizada (sección 2.5) se podrían expresar estas relaciones en términos de los esfuerzos principales σ_a y σ_b y la resistencia última σ_U del material. Se encontraría que, de acuerdo con el criterio de la máxima deformación normal, el componente estructural es seguro mientras el punto obtenido al graficar σ_a y σ_b cae dentro del área mostrada en la figura 7.35, donde ν es la relación de Poisson para el material dado.

varios círculos tangentes a esta envolvente, determinando los valores correspondientes de σ_a y σ_b, y trazando los puntos de coordenadas σ_a y σ_b (figura 7.37*b*).

Se pueden dibujar diagramas más exactos cuando hay disponibilidad de resultados de pruebas, correspondientes a varios estados de esfuerzos. Si los únicos datos disponibles son las resistencias últimas σ_{UT} y σ_{UC}, la envolvente de la figura 7.37*a* se reemplaza por las tangentes *AB* y *A'B'* a los círculos correspondientes a falla a tensión y falla a compresión (figura 7.38*a*). A partir de los triángulos semejantes en esa figura, la abscisa del centro *C* de un círculo tangente a *AB* y a *A'B'* está relacionada linealmente con su radio *R*. Como $\sigma_a = OC + R$ y $\sigma_b = OC - R$, σ_a y σ_b también están relacionados linealmente. Así, el área sombreada correspondiente a este criterio simplificado de Mohr se encuentra limitada por líneas rectas en el segundo y cuarto cuadrantes (figura 7.38*b*).

Para determinar si un componente estructural estará seguro bajo una carga dada, el estado de esfuerzos debe calcularse en todos los puntos críticos del componente (es decir, donde es probable que ocurran concentraciones de esfuerzos). Esto se puede hacer usando los factores de concentración de esfuerzos dados en las figuras 2.52, 3.28, 4.24 y 4.25. Sin embargo, hay muchas instancias en donde debe usarse la teoría de la elasticidad para determinar el estado de esfuerzos en un punto crítico.

Debe tenerse un especial cuidado cuando se han detectado *grietas macroscópicas* en una componente estructural. Mientras pueda suponerse que la probeta utilizada para determinar la resistencia última del material a tensión contiene el mismo tipo de fallas (es decir, grietas *microscópicas* o cavidades) que el elemento estructural, la probeta está ciertamente libre de grietas macroscópicas detectables. Cuando se identifica una grieta en un componente estructural, es necesario determinar si esa grieta tenderá a propagarse bajo la carga esperada y hará fallar el componente o si permanecerá estable. Esto requiere un análisis que considere la energía asociada con el crecimiento de la grieta. Tal análisis está fuera del alcance de este texto y debe desarrollarse mediante los métodos de la mecánica de fracturas.

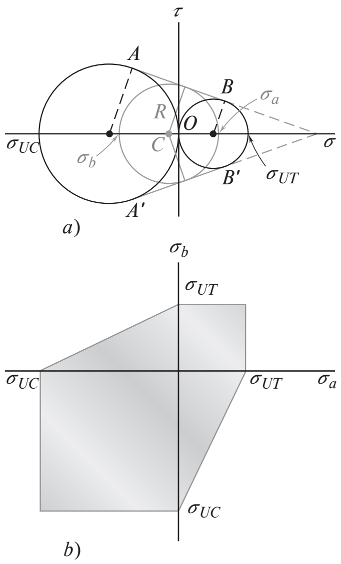
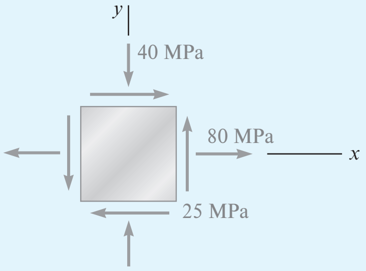


Figura 7.38 Criterio de Mohr simplificado para materiales frágiles. *a*) Círculos de Mohr para pruebas de compresión uniaxial (izquierda), de torsión (enmedio) y de tensión uniaxial (derecha) en la ruptura. *b*) Envolvente de estados de esfuerzos seguros.

Problema modelo 7.4

El estado de esfuerzos plano representado en la figura ocurre en un punto crítico de un componente de máquina de acero. Como resultado de varias pruebas de tensión, se ha encontrado que la resistencia a la cedencia a tensión es $\sigma_Y = 250$ MPa para el grado de acero usado. Determine el factor de seguridad con respecto a la cedencia, usando: *a*) el criterio del esfuerzo cortante máximo y *b*) el criterio de la máxima energía de distorsión.



ESTRATEGIA: Dibuje el círculo de Mohr del estado dado de esfuerzos plano. Al analizar este círculo para obtener los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, se pueden aplicar los criterios de esfuerzo cortante máximo y de energía de distorsión máxima.

MODELAR y ANALIZAR:

Círculo de Mohr. Se construye el círculo de Mohr (figura 1) para el estado dado de esfuerzos y se halla

$$\sigma_{prom} = OC = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(80 - 40) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(60)^2 + (25)^2} = 65 \text{ MPa}$$

Esfuerzos principales

$$\sigma_a = OC + CA = 20 + 65 = +85 \text{ MPa}$$
$$\sigma_b = OC - BC = 20 - 65 = -45 \text{ MPa}$$

***a*) Criterio de esfuerzo cortante máximo.** Como la resistencia a la tensión es $\sigma_Y = 250$ MPa, el esfuerzo cortante correspondiente a la cedencia es

$$\tau_Y = \tfrac{1}{2}\sigma_Y = \tfrac{1}{2}(250 \text{ MPa}) = 125 \text{ MPa}$$

Para $\tau_m = 65$ MPa,

$$F.S. = \frac{\tau_Y}{\tau_m} = \frac{125 \text{ MPa}}{65 \text{ MPa}} \qquad F.S. = 1.92 \blacktriangleleft$$

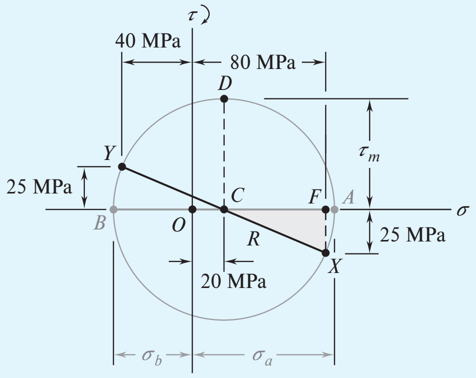


Figura 1 Círculo de Mohr para un elemento de esfuerzo dado.

***b*) Criterio de la máxima energía de distorsión.** Al introducir un factor de seguridad en la ecuación (7.26), se escribe

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \left(\frac{\sigma_Y}{F.S.}\right)^2$$

Para $\sigma_a = +85$ MPa, $\sigma_b = -45$ MPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, se tiene

$$(85)^2 - (85)(-45) + (45)^2 = \left(\frac{250}{F.S.}\right)^2$$

$$114.3 = \frac{250}{F.S.} \qquad F.S. = 2.19 \blacktriangleleft$$

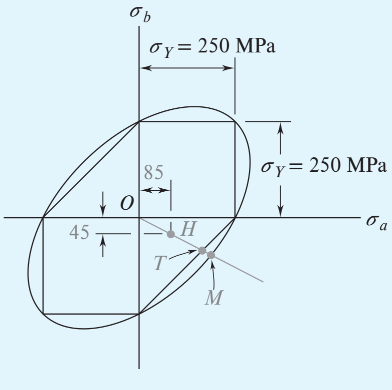


Figura 2 Envolventes de Tresca y Von Mises, y estado de esfuerzos dado (punto *H*).

REVISAR y PENSAR: Para un material dúctil con $\sigma_Y = 250$ MPa, se ha dibujado el hexágono asociado con el criterio del esfuerzo cortante máximo y la elipse asociada con el criterio de la máxima energía de distorsión (figura 2). El estado dado de esfuerzo plano está representado por el punto *H* de coordenadas $\sigma_a = 85$ MPa y $\sigma_b = -45$ MPa. La línea recta dibujada a través de los puntos *O* y *H* interseca el hexágono en el punto *T* y la elipse, en el punto *M*. Para cada criterio, el *F.S.* puede verificarse midiendo los segmentos de línea indicados y calculando sus razones:

$$a)\ F.S. = \frac{OT}{OH} = 1.92 \qquad b)\ F.S. = \frac{OM}{OH} = 2.19$$

Problemas

7.66 Para el estado de esfuerzos plano mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_x = 14$ ksi y $\sigma_y = 4$ ksi, *b*) $\sigma_x = 21$ ksi y $\sigma_y = 14$ ksi (*Sugerencia:* Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de él).

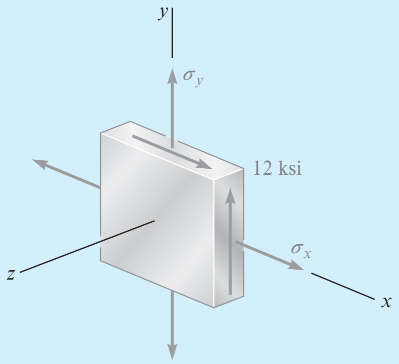


Figura P7.66 y *P7.67*

7.67 Para el estado de esfuerzos plano mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_x = 20$ ksi y $\sigma_y = 10$ ksi, *b*) $\sigma_x = 12$ ksi y $\sigma_y = 5$ ksi (*Sugerencia:* Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de él).

7.68 Para el estado de esfuerzos mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_y = 40$ MPa, *b*) $\sigma_y = 120$ MPa. (*Sugerencia:* Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de él).

7.69 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_y = 20$ MPa, *b*) $\sigma_y = 140$ MPa. (*Sugerencia:* Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de él.)

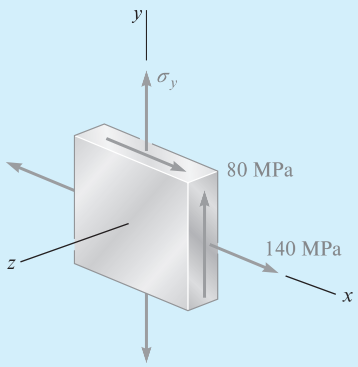


Figura P7.68 y P7.69

7.70 y 7.71 Para el estado de esfuerzos mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_z = 0$, *b*) $\sigma_z = +60$ MPa, *c*) $\sigma_z = -60$ MPa.

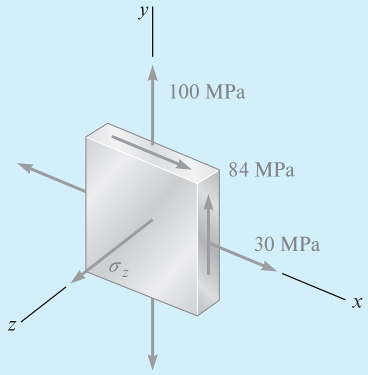


Figura P7.70

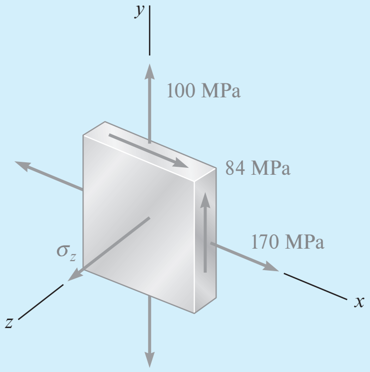


Figura P7.71

7.72 y 7.73 Para el estado de esfuerzos mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\tau_{yz} = 17.5$ ksi, *b*) $\tau_{yz} = 8$ ksi, *c*) $\tau_{yz} = 0$.

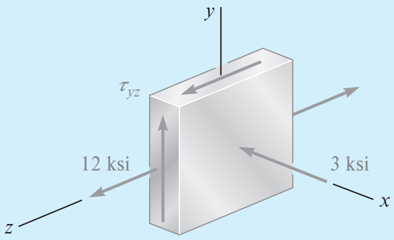


Figura *P7.72*

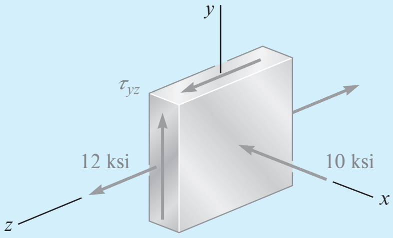


Figura P7.73

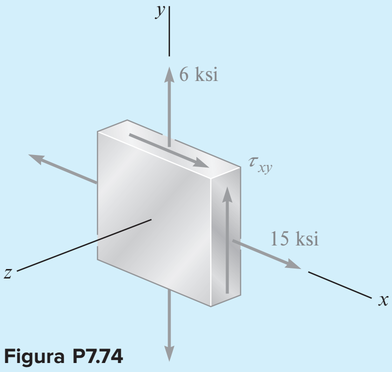


Figura P7.74

7.74 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo es *a*) 9 ksi, *b*) 12 ksi.

7.75 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo es de 80 MPa.

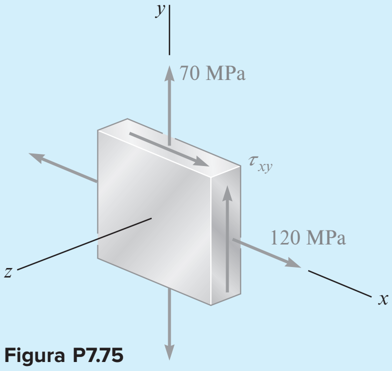


Figura P7.75

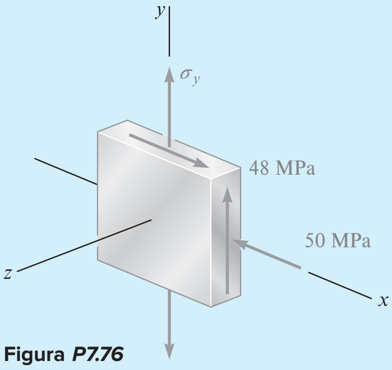


Figura *P7.76*

7.76 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo sea de 73 MPa.

7.77 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo sea de 10 ksi.

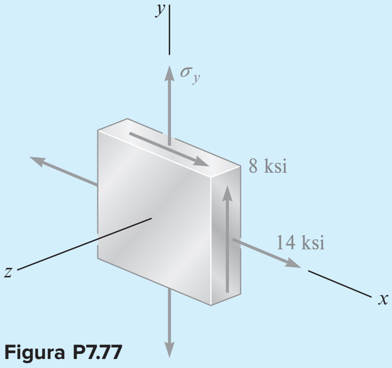


Figura P7.77

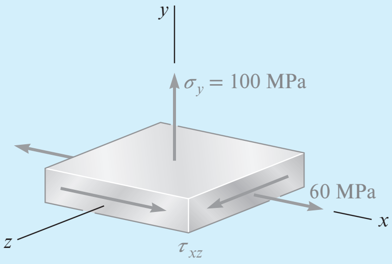


Figura *P7.78*

7.78 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xz} para los cuales el esfuerzo cortante máximo es menor o igual que 60 MPa.

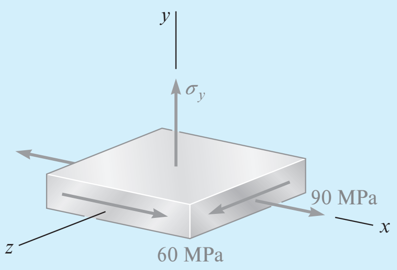


Figura P7.79

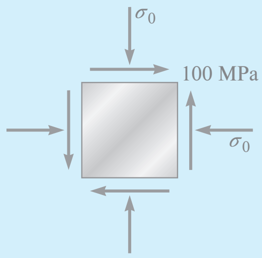


Figura P7.81

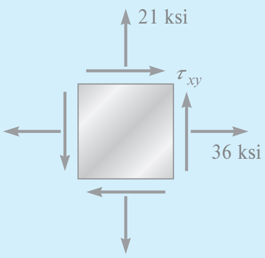


Figura P7.83

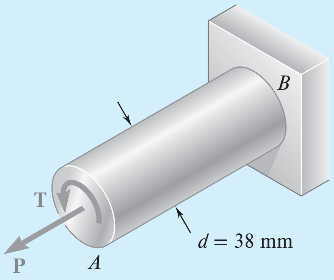


Figura *P7.85*

7.79 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo sea de 80 MPa.

***7.80** Para el estado de esfuerzos del problema 7.69, determine *a*) el valor de σ_y para el cual el esfuerzo cortante máximo es lo más pequeño posible, *b*) el valor correspondiente del esfuerzo cortante.

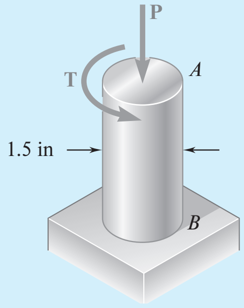


Figura P7.87

7.81 El estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura ocurre en un componente de máquina, hecho de acero con $\sigma_Y = 325$ MPa. Con el criterio de la máxima energía de distorsión determine si ocurre cedencia cuando *a*) $\sigma_0 = 200$ MPa, *b*) $\sigma_0 = 240$ MPa, *c*) $\sigma_0 = 280$ MPa. Si no ocurre cedencia, determine el factor de seguridad correspondiente.

7.82 Resuelva el problema 7.81, pero ahora utilice el criterio del esfuerzo cortante máximo.

7.83 El estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura ocurre en un elemento de máquina, hecho de acero con $\sigma_Y = 45$ ksi. Con el criterio de la máxima energía de distorsión, determine si ocurre cedencia cuando *a*) $\tau_{xy} = 9$ ksi, *b*) $\tau_{xy} = 18$ ksi, *c*) $\tau_{xy} = 20$ ksi. Si la cedencia no ocurre, determine el factor de seguridad correspondiente.

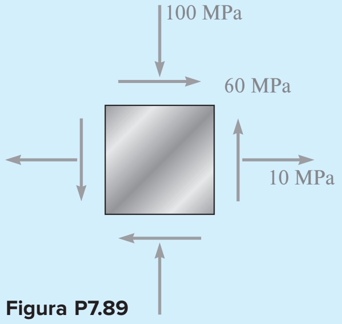


Figura P7.89

7.84 Resuelva el problema 7.83, pero ahora utilice el criterio del esfuerzo cortante máximo.

7.85 El eje *AB* de 38 mm de diámetro está hecho de un grado de acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 250$ MPa. Usando el criterio del esfuerzo cortante máximo, determine la magnitud del par de torsión **T** para el que ocurre la cedencia cuando $P = 240$ kN.

7.86 Resuelva el problema 7.85, pero ahora utilice el criterio de la máxima energía de distorsión.

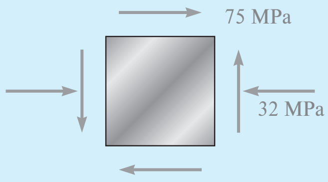


Figura P7.90

7.87 El eje *AB* de 1.5 in de diámetro está hecho de un grado de acero con un esfuerzo de tensión hasta la cedencia de 42 ksi. Usando el criterio del esfuerzo cortante máximo, determine la magnitud del par de torsión **T** para el cual la cedencia ocurre cuando $P = 60$ kips.

7.88 Resuelva el problema 7.87, pero ahora utilice el criterio de la máxima energía de distorsión.

7.89 y 7.90 Se espera que el estado de esfuerzos plano mostrado en la figura ocurra en una fundición de aluminio. Si se sabe que para la aleación de aluminio usada $\sigma_{UT} = 80$ MPa y $\sigma_{UC} = 200$ MPa, y utilizando el criterio de Mohr, determine si se producirá la ruptura de la fundición.

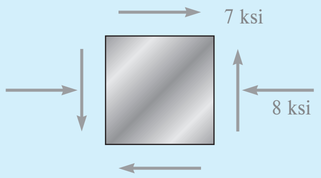


Figura P7.91

7.91 y 7.92 Se espera que el estado de esfuerzos plano mostrado en la figura ocurra en una fundición de aluminio. Si se sabe que para la aleación de

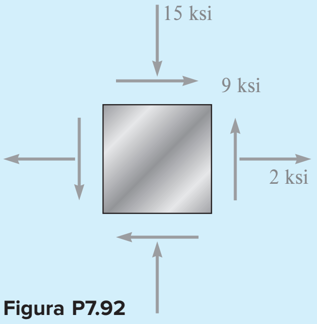


Figura P7.92

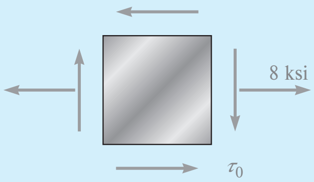


Figura *P7.93*

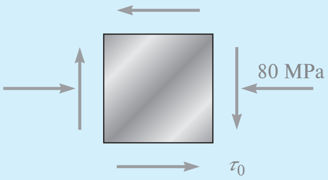


Figura P7.94

aluminio usada $\sigma_{UT} = 10$ ksi y $\sigma_{UC} = 30$ ksi, y utilizando el criterio de Mohr, determine si ocurrirá la ruptura de la fundición.

7.93 El estado de esfuerzos plano mostrado en la figura ocurrirá en un punto crítico de una fundición de aluminio, hecha con una aleación, para la cual $\sigma_{UT} = 10$ ksi y $\sigma_{UC} = 25$ ksi. Con el criterio de Mohr, determine el esfuerzo cortante τ_0 para el cual debería esperarse una falla.

7.94 El estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura ocurrirá en un punto crítico de un tubo que está hecho de una aleación de aluminio, para la cual $\sigma_{UT} = 75$ MPa y $\sigma_{UC} = 150$ MPa. Use el criterio de Mohr y determine el esfuerzo cortante τ_0 para el cual debería esperarse una falla.

7.95 La varilla de aluminio fundido que se muestra en la figura está hecha de una aleación para la cual $\sigma_{UT} = 70$ MPa y $\sigma_{UC} = 175$ MPa. Si se sabe que la magnitud T de los pares aplicados se incrementa lentamente, utilice el criterio de Mohr para determinar el esfuerzo cortante τ_0 al cual se espera ocurrirá la ruptura.

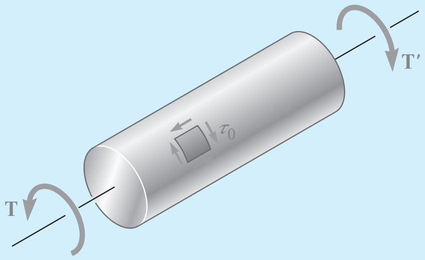


Figura P7.95

7.96 La varilla de aluminio fundido que se muestra en la figura está hecha de una aleación para la cual $\sigma_{UT} = 60$ MPa y $\sigma_{UC} = 120$ MPa. Usando el criterio de Mohr, determine la magnitud del par **T** para el cual debería esperarse una falla.

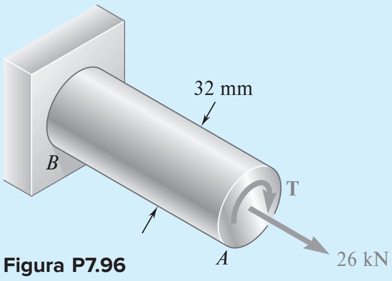


Figura P7.96

7.97 Un componente de máquina está elaborado de un hierro fundido para el cual $\sigma_{UT} = 8$ ksi y $\sigma_{UC} = 20$ ksi. Para cada estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura y con el criterio de Mohr, determine el esfuerzo normal σ_0 al cual se espera que ocurra la ruptura de la componente.

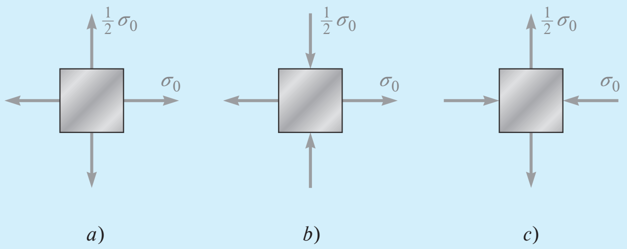


Figura *P7.97*

7.6 ESFUERZOS EN RECIPIENTES A PRESIÓN DE PARED DELGADA

Los recipientes de pared delgada constituyen una aplicación importante del análisis de esfuerzo plano. Como sus paredes oponen poca resistencia a la flexión, puede suponerse que las fuerzas internas ejercidas sobre una parte de la pared son tangentes a la superficie del recipiente (figura 7.39). Los esfuerzos resultantes en un elemento de pared estarán contenidos en un plano tangente a la superficie del recipiente.

El análisis de esfuerzos en recipientes de pared delgada se limitará a los dos tipos que se encuentran con mayor frecuencia: recipientes cilíndricos y esféricos (fotografías 7.3 y 7.4).

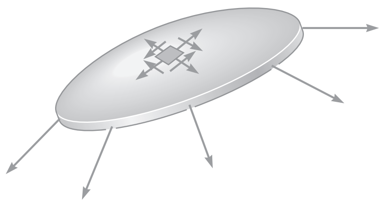


Figura 7.39 Distribución de esfuerzos supuesta en recipientes a presión de pared delgada.

Fotografía 7.3 Recipientes cilíndricos a presión para propano líquido.

Fotografía 7.4 Recipientes esféricos a presión en una planta química.

Recipientes cilíndricos a presión. Considere un recipiente cilíndrico de radio interior r y espesor de pared t, que contiene un fluido a presión (figura 7.40). Se determinarán los esfuerzos ejercidos sobre un pequeño elemento de pared con lados respectivamente paralelos y perpendiculares al eje del cilindro. Debido a la simetría axial del recipiente y de su contenido, es claro que no se ejercen esfuerzos cortantes sobre el elemento. Por lo tanto, los esfuerzos normales σ_1 y σ_2 mostrados en la figura 7.40 son esfuerzos principales. El esfuerzo σ_1 se conoce como *esfuerzo tangencial* o *de costilla* porque se presenta en los aros de los barriles de madera; el esfuerzo σ_2 es el *esfuerzo longitudinal.*

Para determinar el esfuerzo de costilla σ_1 se retira una porción del recipiente y su contenido limitado por el plano xy y por dos planos paralelos al plano yz con una distancia Δx de separación entre ellos (figura 7.41). Las fuerzas paralelas al eje z que actúan en el cuerpo libre así definido consisten en las fuerzas internas elementales $\sigma_1\, dA$ en las secciones de pared y en las fuerzas de presión elementales $p\, dA$ ejercidas sobre la porción de fluido incluido en el cuerpo libre. Note que la *presión manométrica* del fluido p es la diferencia en exceso de la presión interior sobre la presión atmosférica exterior. La resultante de las fuerzas internas $\sigma_1\, dA$ es igual al producto de σ_1 y del área

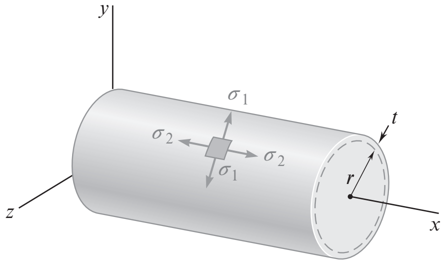


Figura 7.40 Recipiente cilíndrico presurizado.

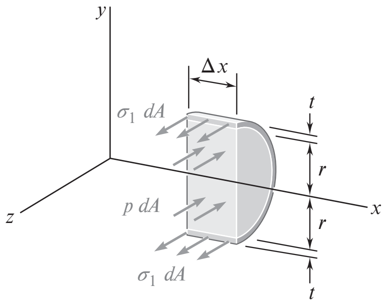


Figura 7.41 Diagrama de cuerpo libre para determinar el esfuerzo de costilla en un recipiente cilíndrico a presión.

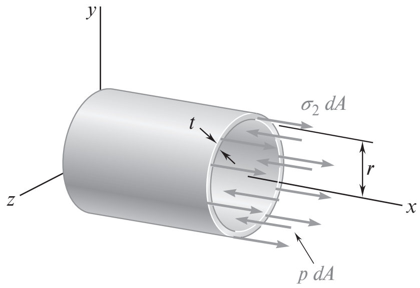


Figura 7.42 Diagrama de cuerpo libre para determinar el esfuerzo longitudinal.

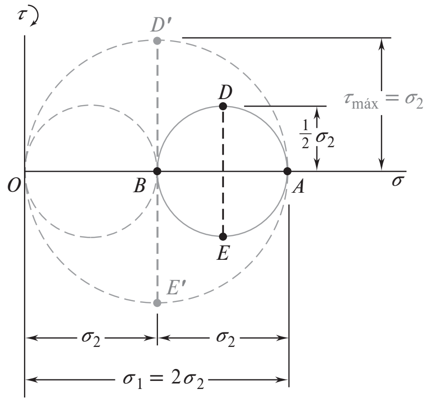


Figura 7.43 Círculo de Mohr para un elemento de un recipiente cilíndrico a presión.

transversal $2t\,\Delta x$ de la pared, mientras que la resultante de las fuerzas $p\,dA$ es el producto de p y el área $2r\,\Delta x$. La ecuación de equilibrio $\Sigma F_z = 0$ da

$$\Sigma F_z = 0: \qquad \sigma_1(2t\,\Delta x) - p(2r\,\Delta x) = 0$$

y al despejar el esfuerzo de costilla σ_1

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \tag{7.30}$$

Para determinar el esfuerzo longitudinal σ_2, se realizará una sección perpendicular al eje x y se considerará el cuerpo libre que consta de la parte del recipiente y de su contenido a la izquierda de la sección (figura 7.42). Las fuerzas que actúan en este cuerpo libre son las fuerzas internas elementales $\sigma_2\,dA$ en la sección de pared y las fuerzas elementales de presión $p\,dA$ ejercidas sobre la porción de fluido incluido en el cuerpo libre. Note que el área de la sección de fluido es πr^2 y que el área de la sección de la pared puede obtenerse multiplicando la circunferencia $2\pi r$ del cilindro por su espesor de pared t, la ecuación de equilibrio es:†

$$\Sigma F_x = 0: \qquad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

y al despejar el esfuerzo longitudinal σ_2,

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.31}$$

Observe en las ecuaciones (7.30) y (7.31) que el esfuerzo de costilla σ_1 es el doble del esfuerzo longitudinal σ_2:

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \tag{7.32}$$

Al dibujar el círculo de Mohr a través de los puntos A y B, que corresponden respectivamente a los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 (figura 7.43), y al recordar que el esfuerzo cortante máximo en el plano es igual al radio del círculo, se obtiene

$$\tau_{\text{máx(en el plano)}} = \tfrac{1}{2}\sigma_2 = \frac{pr}{4t} \tag{7.33}$$

Este esfuerzo corresponde a los puntos D y E y se ejerce sobre un elemento obtenido mediante la rotación de 45° del elemento original de la figura 7.40, *dentro del plano* tangente a la superficie del recipiente. Sin embargo, el esfuerzo cortante máximo en la pared del recipiente es mayor. Es igual al radio del círculo de diámetro OA y corresponde a una rotación de 45° alrededor de un eje longitudinal y *fuera del plano* de esfuerzo.‡

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.34}$$

† Usando el radio medio de la sección de la pared, $r_m = r + \frac{1}{2}t$, para calcular la resultante de las fuerzas, un valor más exacto del esfuerzo longitudinal es

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}\,\frac{1}{1 + \dfrac{t}{2r}}$$

Sin embargo, para un recipiente de pared delgada, el término $t/2r$ es suficientemente pequeño para permitir el uso de la ecuación (7.31) en el diseño y el análisis de ingeniería. Si un recipiente a presión no es de pared delgada (es decir, si $t/2r$ no es pequeño), los esfuerzos σ_1 y σ_2 varían a través de la pared y deben calcularse por los métodos de la teoría de la elasticidad.

‡ Aunque el tercer esfuerzo principal es cero en la superficie exterior del recipiente, es igual a $-p$ en la superficie interna y está representado por un punto $C(-p, 0)$ en un diagrama del círculo de Mohr. Así, cerca de la superficie interna del recipiente, el esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro CA, o

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + p) = \frac{pr}{2t}\left(1 + \frac{t}{r}\right)$$

Sin embargo, para un recipiente de pared delgada, t/r es pequeño y puede despreciarse la variación de $\tau_{\text{máx}}$ a través de la sección de la pared. Esto se aplica también a los recipientes esféricos a presión.

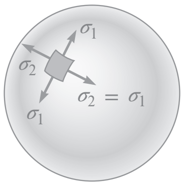


Figura 7.44 Recipiente esférico presurizado.

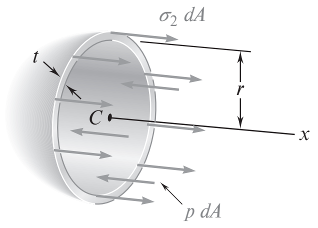


Figura 7.45 Diagrama de cuerpo libre para determinar el esfuerzo en un recipiente esférico a presión.

Recipientes esféricos a presión. Considere ahora un recipiente esférico, de radio interior r y espesor de pared t, que contiene un fluido bajo presión manométrica p. Por simetría, los esfuerzos en las cuatro caras de un elemento pequeño de pared deben ser iguales (figura 7.44).

$$\sigma_1 = \sigma_2 \tag{7.35}$$

Para determinar el valor del esfuerzo, se pasa una sección por el centro C del recipiente y se considera el cuerpo libre que consta de la porción de recipiente y su contenido, a la izquierda de la sección (figura 7.45). La ecuación de equilibrio para este cuerpo libre es la misma que para el cuerpo libre de la figura 7.42. Así se concluye que, para un recipiente esférico,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.36}$$

Como los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son iguales, el círculo de Mohr para la transformación de esfuerzos, dentro del plano tangente a la superficie del recipiente, se reduce a un punto (figura 7.46). Se concluye que el esfuerzo normal en el plano es constante y que el esfuerzo cortante máximo en el plano es cero. Sin embargo, el esfuerzo cortante máximo en la pared del recipiente no es cero; es igual al radio del círculo con el diámetro OA y corresponde a una rotación de 45° fuera del plano de esfuerzo. Entonces,

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \tag{7.37}$$

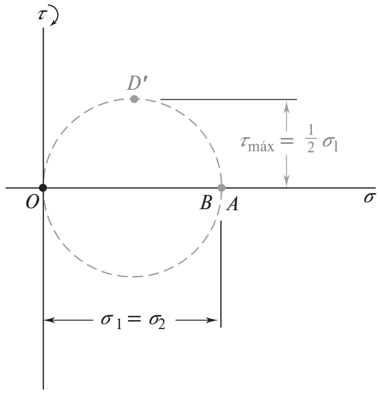
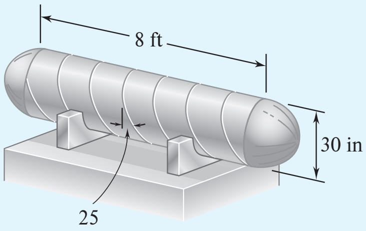


Figura 7.46 Círculo de Mohr para un elemento de un recipiente esférico a presión.

Problema modelo 7.5

Un tanque de aire comprimido está apoyado por dos soportes como se indica en la figura; uno de los soportes está diseñado de tal modo que no ejerce ninguna fuerza longitudinal sobre el tanque. El cuerpo cilíndrico del tanque tiene 30 in de diámetro exterior y está hecho de placa de acero de $\frac{3}{8}$ in con soldadura a tope en hélice que forma un ángulo de 25° con un plano transversal. Los extremos son esféricos con un espesor uniforme de $\frac{5}{16}$ in. Para una presión manométrica interior de 180 psi, determine *a*) el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante máximo en los extremos esféricos, *b*) los esfuerzos en las direcciones perpendicular y paralela a la soldadura helicoidal.



ESTRATEGIA: Usando las ecuaciones para recipientes a presión de pared delgada, es posible determinar el estado de esfuerzos plano en cualquier punto dentro de la tapa del extremo esférico y dentro del cuerpo cilíndrico. Después se pueden graficar los correspondientes círculos de Mohr y usarlos para determinar las componentes de esfuerzo que interesan.

MODELAR y ANALIZAR:

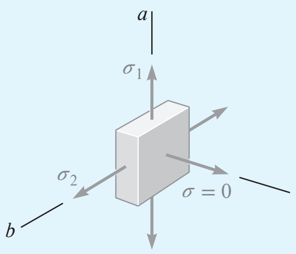


Figura 1 Estado de esfuerzos en cualquier punto de la tapa esférica.

***a)* Tapa esférica.** En la figura 1 se muestra el estado de esfuerzos dentro de cualquier punto en la tapa esférica. Usando la ecuación (7.36), se escribe

$$p = 180 \text{ psi}, t = \tfrac{5}{16} \text{ in} = 0.3125 \text{ in}, \ r = 15 - 0.3125 = 14.688 \text{ in}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{(180 \text{ psi})(14.688 \text{ in})}{2(0.3125 \text{ in})} \qquad \sigma = 4\,230 \text{ psi} ◀$$

Se observa que para esfuerzos en un plano tangente a la tapa, el círculo de Mohr se reduce a un punto (A, B) en el eje horizontal y que todos los esfuerzos cortantes en el plano son cero (figura 2). En la superficie de la tapa, el tercer esfuerzo principal es cero y corresponde al punto O. En un círculo de Mohr de diámetro AO, el punto D' representa el esfuerzo cortante máximo y ocurre en planos a 45° del plano tangente a la tapa.

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(4\,230 \text{ psi}) \qquad \tau_{\text{máx}} = 2\,115 \text{ psi} ◀$$

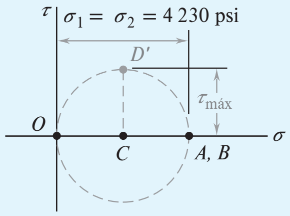


Figura 2 Círculo de Mohr para un elemento de esfuerzo en la tapa esférica.

***b)* Cuerpo cilíndrico del tanque.** El estado de esfuerzos dentro de cualquier punto en el cuerpo cilíndrico es como se muestra en la figura 3. Se determina el esfuerzo de costilla σ_1 y el esfuerzo longitudinal σ_2 usando las ecuaciones (7.30) y (7.32). Se escribe

$$p = 180 \text{ psi}, \ t = \tfrac{3}{8} \text{ in} = 0.375 \text{ in}, \ r = 15 - 0.375 = 14.625 \text{ in}$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(180 \text{ psi})(14.625 \text{ in})}{0.375 \text{ in}} = 7\,020 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = 3\,510 \text{ psi}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 5\,265 \text{ psi} \qquad R = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 1\,755 \text{ psi}$$

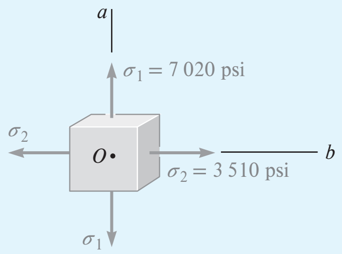


Figura 3 Estado de esfuerzos en cualquier punto del cuerpo cilíndrico.

Esfuerzos en la soldadura. Si se observa que tanto el esfuerzo de costilla como el longitudinal son esfuerzos principales, es posible trazar el círculo de Mohr mostrado en la figura 4.

Un elemento que tiene una cara paralela a la soldadura se obtiene rotando 25° la cara perpendicular al eje Ob (figura 3) en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Entonces, se localiza en el círculo de Mohr (figura 4) el punto X', que corresponde a las componentes del esfuerzo en la soldadura, al rotar el radio CB $2\theta = 50°$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

$$\sigma_w = \sigma_{\text{prom}} - R\cos 50° = 5\,265 - 1\,755 \cos 50° \qquad \sigma_w = +4\,140 \text{ psi} ◀$$

$$\tau_w = R \operatorname{sen} 50° = 1\,755 \operatorname{sen} 50° \qquad \tau_w = 1\,344 \text{ psi} ◀$$

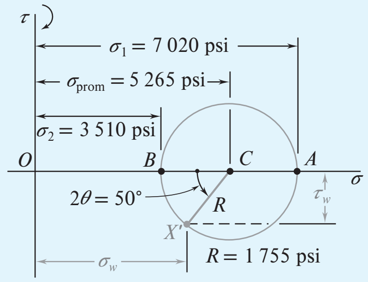


Figura 4 Círculo de Mohr para un elemento de esfuerzo en el cuerpo cilíndrico.

Como X' está por debajo del eje horizontal, τ_w tiende a rotar al elemento en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Las componentes del esfuerzo sobre la soldadura se muestran en la figura 5.

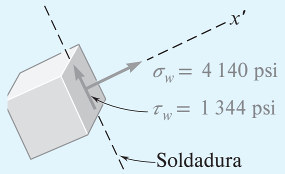


Figura 5 Componentes del esfuerzo sobre la soldadura.

Problemas

7.98 Un recipiente esférico a presión tiene un diámetro exterior de 3 m y un espesor de pared de 12 mm. Si se sabe que para el acero usado $\sigma_{perm} = 80$ MPa, $E = 200$ GPa y $\nu = 0.29$, determine *a*) la presión manométrica permisible, *b*) el incremento correspondiente en el diámetro del recipiente.

7.99 Un contenedor esférico de gas de 5 m de diámetro externo y espesor de pared de 24 mm está hecho de acero con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.29$. Si se sabe que la presión medida en el contenedor se incrementa de cero a 1.8 MPa, determine *a*) el esfuerzo normal máximo en el contenedor, *b*) el incremento correspondiente en el diámetro del contenedor.

7.100 Se sabe que en un recipiente esférico a presión hecho de acero, con 10 in de diámetro externo y una pared de 0.25 in de espesor, se tiene una presión manométrica máxima de 1 150 psi. Si el esfuerzo último en el acero usado es $\sigma_U = 60$ ksi, determine el factor de seguridad con respecto a la falla por tensión.

7.101 Se fabricará un recipiente esférico a presión de 750 mm de diámetro externo con un acero que tiene una resistencia última $\sigma_U = 400$ MPa. Si se desea un factor de seguridad de 4.0 y la presión manométrica puede alcanzar 4.2 MPa, determine el espesor mínimo de pared que debe usarse.

7.102 Un contenedor esférico de gas hecho de acero tiene 20 ft de diámetro exterior y una pared con $\frac{7}{16}$ in de espesor. Si se sabe que la presión interna es de 75 psi, determine los esfuerzos normal y cortante máximos en el contenedor.

7.103 Una pelota de baloncesto tiene 300 mm de diámetro exterior y 3 mm de espesor de pared. Determine el esfuerzo normal en la pared cuando la pelota se encuentra inflada a una presión manométrica de 120 kPa.

7.104 El tanque de almacenamiento no presurizado que se muestra en la figura tiene un grosor de pared de 5 mm y está hecho de un acero con esfuerzo último en tensión de 400 MPa. Determine la altura h máxima a la cual puede llenarse con agua si se desea un factor de seguridad de 4.0. (Densidad del agua $= 1\,000$ kg/m^3).

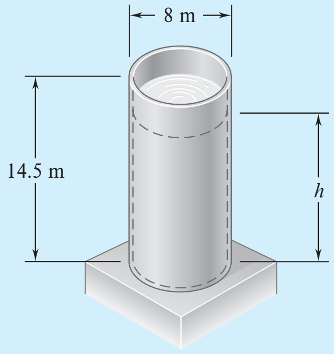


Figura P7.104

7.105 Para el tanque de almacenamiento del problema 7.104, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la pared cilíndrica cuando el tanque se llena a su capacidad ($h = 14.5$ m).

7.106 El tanque de almacenamiento presurizado que se muestra en la fotografía 7.3 tiene un diámetro exterior de 3.3 m y un espesor de pared de 18 mm. Cuando la presión interna del tanque es de 1.5 MPa, determine los esfuerzos normal y cortante máximos en el tanque.

7.107 Un tubo de acero de peso estándar con un diámetro nominal de 12 in conduce agua bajo una presión de 400 psi. *a*) Si se sabe que el diámetro exterior es de 12.75 in y el grosor de pared es de 0.375 in, determine el esfuerzo de tensión máximo en el tubo. *b*) Resuelva el inciso *a*, suponiendo que se utiliza un tubo extrafuerte, con 12.75 in de diámetro exterior y 0.5 in de espesor de pared.

7.108 Un tanque cilíndrico de almacenamiento contiene propano líquido con una presión de 1.5 MPa a una temperatura de 38°C. Si se sabe que el tanque tiene un diámetro exterior de 320 mm y un espesor de pared de 3 mm, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque.

7.109 Determine la máxima presión interna que puede aplicarse a un tanque cilíndrico de 5.5 ft de diámetro exterior y una pared con espesor de $\frac{5}{8}$ in, si el esfuerzo normal último del acero usado es de 65 ksi y se desea un factor de seguridad de 5.0.

7.110 Una tubería de carga de acero tiene 36 in de diámetro exterior y 0.5 in de espesor de pared. La tubería conecta un embalse en A con una estación generadora en B. Si se sabe que el peso específico del agua es de 62.4 lb/ft^3, determine los máximos esfuerzos normal y cortante en la tubería bajo condiciones estáticas.

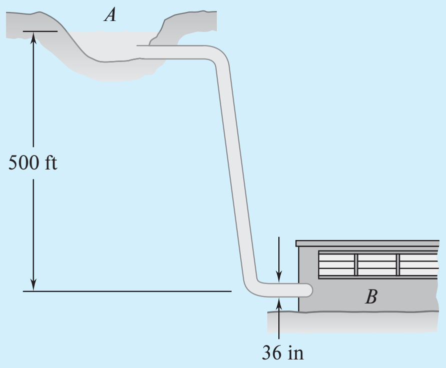


Figura *P7.110* y P7.111

7.111 Una tubería de carga de acero con 36 in de diámetro exterior, conecta un embalse en A con una estación generadora en B. Si se sabe que el peso específico del agua es de 62.4 lb/ft^3 y que el esfuerzo normal permisible del acero es de 12.5 ksi, determine el espesor mínimo que puede usarse para la tubería.

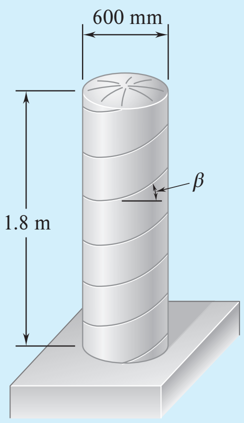


Figura P7.112

7.112 La porción cilíndrica del tanque de aire comprimido que se muestra en la figura, está fabricada con una placa de 8 mm de espesor, soldada en hélice y formando un ángulo $\beta = 30°$ con la horizontal. Si se sabe que el esfuerzo permisible normal a la soldadura es de 75 MPa, determine la máxima presión manométrica que puede usarse en el tanque.

7.113 Para el tanque de aire comprimido del problema 7.112, determine la presión manométrica que causaría un esfuerzo cortante paralelo a la soldadura de 30 MPa.

7.114 El tanque de acero a presión que se muestra en la figura tiene un diámetro interior de 750 mm y un grosor de pared de 9 mm. Si se sabe que las costuras de la soldadura a lo largo de una hélice forman un ángulo $\beta = 50°$ con el eje longitudinal del tanque y que la presión manométrica en éste es de 1.5

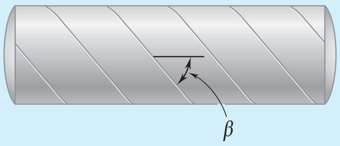


Figura P7.114 y P7.115

MPa, determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

7.115 El tanque presurizado que se muestra en la figura se fabricó soldando tiras de placa a lo largo de una hélice que forma un ángulo β con un plano transversal. Determine el máximo valor de β que puede usarse si el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura no debe ser mayor a 85% del esfuerzo máximo en el tanque.

7.116 Varias placas cuadradas, cada una de 0.5 in de espesor, pueden soldarse en una de las dos formas que se muestran en la figura para construir la parte cilíndrica de un tanque de aire comprimido. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible perpendicular a la soldadura es de 12 ksi, determine la máxima presión manométrica permisible en cada caso.

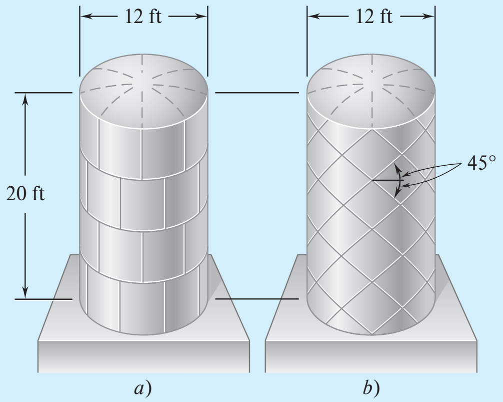


Figura *P7.116*

7.117 El tanque a presión que se muestra en la figura tiene una pared con 0.375 in de espesor, la cual está soldada a lo largo de una hélice que forma un ángulo $\beta = 20°$ con un plano transversal. Para una presión manométrica de 85 psi, determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

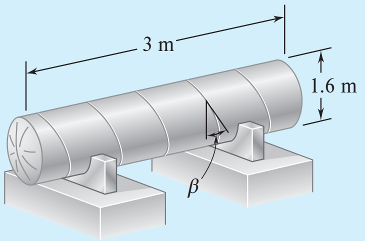


Figura P7.117

7.118 Para el tanque del problema 7.117, determine la máxima presión manométrica permisible, si se sabe que el esfuerzo normal permisible perpendicular a la soldadura es de 18 ksi y el esfuerzo cortante permisible paralelo a la soldadura es de 10 ksi.

7.119 Para el tanque del problema 7.117, determine el rango de valores de β que pueden usarse si el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura no debe exceder de 1 350 psi cuando la presión manométrica sea de 85 psi.

7.120 Un recipiente a presión con un diámetro interior de 10 in y una pared con espesor de 0.25 in está hecho de una sección *AB* de 4 ft de tubo soldado en espiral y se encuentra equipado con dos placas rígidas en los extremos. La

presión manométrica dentro del recipiente es de 300 psi y se aplican fuerzas céntricas axiales **P** y **P′** de 10 kips a las placas de los extremos. Determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

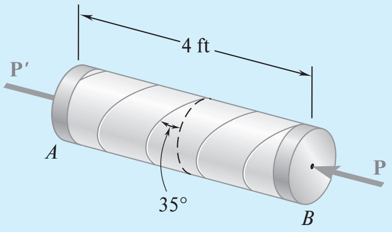


Figura P7.120

7.121 Resuelva el problema 7.120 suponiendo que la magnitud P de las dos fuerzas se incrementa a 30 kips.

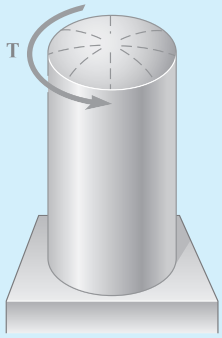


Figura P7.122 y *P7.123*

7.122 Un par de torsión con magnitud $T = 12$ kN · m se aplica al extremo de un tanque que contiene aire comprimido bajo una presión de 8 MPa. Si el tanque tiene 180 mm de diámetro interno y 12 mm de espesor de pared, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque.

7.123 El tanque que se muestra en la figura tiene un diámetro interior de 180 mm y una pared con espesor de 12 mm. Si se sabe que el tanque contiene aire comprimido bajo una presión de 8 MPa, determine la magnitud T del par aplicado para el que el esfuerzo normal máximo en el tanque es de 75 MPa.

7.124 El tanque de aire comprimido AB tiene un diámetro exterior de 250 mm y un espesor de pared de 8 mm. El tanque se ajusta con un collarín mediante el cual se aplica en B una fuerza **P** de 40 kN, en la dirección horizontal. Si se sabe que la presión manométrica dentro del tanque es de 5 MPa, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el punto K.

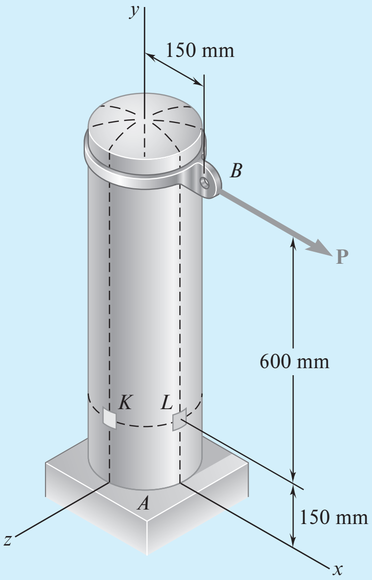


Figura P7.124

7.125 En el problema 7.124, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el punto L.

7.126 Un anillo de latón de 5 in de diámetro exterior y de 0.25 in de espesor se ajusta exactamente en el interior de un anillo de acero de 5 in de diámetro interior y 0.125 in de espesor cuando la temperatura de los dos anillos es de 50 °F. Si se sabe que la temperatura de ambos anillos se eleva a 125 °F, determine *a*) el esfuerzo de tensión en el anillo de acero, *b*) la presión correspondiente ejercida por el anillo de latón sobre el de acero.

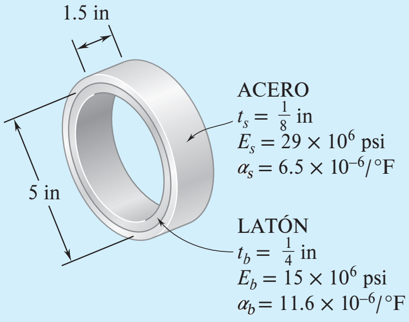


Figura P7.126

7.127 Resuelva el problema 7.126, pero ahora suponga que el anillo de latón tiene un espesor de 0.125 in y que el anillo de acero tiene un espesor de 0.25 in.

*7.7 TRANSFORMACIÓN DE LA DEFORMACIÓN PLANA

7.7A Ecuaciones de transformación

Se analizarán ahora las transformaciones de la *deformación* cuando los ejes coordenados giran. El análisis primero se limitará a estados de *deformación plana*; es decir, a situaciones en donde las deformaciones del material tienen lugar dentro de planos paralelos y son las mismas en cada uno de estos planos. Si se escoge el eje z perpendicular a los planos en los cuales ocurre la deformación, se tiene $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ y las únicas componentes de deformación que restan son ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}. Tal situación ocurre en una placa sometida a cargas uniformemente distribuidas a lo largo de sus bordes y que está impedida para expandirse o contraerse lateralmente mediante soportes fijos, rígidos y lisos (figura 7.47). También se encontrará en una barra de longitud infinita sometida, en sus lados, a cargas uniformemente distribuidas ya que, por razones de simetría, los elementos situados en un plano transversal no pueden salirse de él. Este modelo idealizado muestra que en el caso real de una barra larga sometida a cargas transversales uniformemente distribuidas (figura 7.48), existe un estado de esfuerzos plano en cualquier sección transversal que no esté localizada demasiado cerca de uno de los extremos de la barra.†

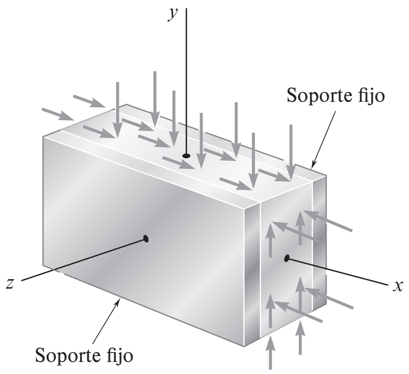


Figura 7.47 Ejemplo de deformación unitaria plana: placa restringida lateralmente mediante soportes fijos.

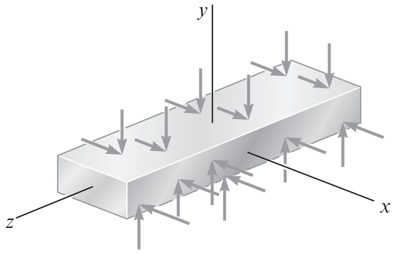


Figura 7.48 Ejemplo de deformación unitaria plana: barra de longitud infinita en la dirección *z*.

Suponga que existe un estado de esfuerzos plano en el punto Q (con $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$), definido por las componentes de deformación ϵ_z, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes x y y. Como se estudió en las secciones 2.5 y 2.7, un elemento cuadrado de centro Q, con lados de longitud Δs y paralelos a los ejes x y y, se transforma en un paralelogramo con lados de longitud $\Delta s(1 + \epsilon_x)$ y $\Delta s(1 + \epsilon_y)$, formando ángulos de $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$ y $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ entre sí (figura 7.49). Como resultado de las deformaciones de los otros elementos localizados en el plano xy, el elemento considerado también puede experimentar un movimiento de cuerpo rígido, pero tal movimiento es insignificante con respecto a las deformaciones en el punto Q y no se tendrá en cuenta en este análisis. El propósito es determinar en términos de ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} y θ las componentes de deformación $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ y $\gamma_{x'y'}$ asociadas con el marco de referencia $x'y'$ obtenido mediante la rotación de los ejes x y y un ángulo θ. Como se observa en la figura 7.50, estas nuevas componentes de la deformación definen el paralelogramo en que se transforma un cuadrado con lados paralelos a los ejes x' y y'.

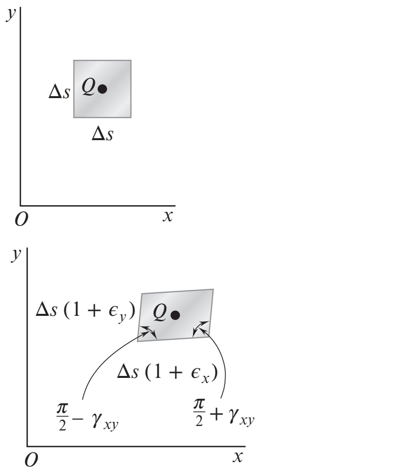


Figura 7.49 Elemento de deformación unitaria plana: sin deformar y deformado.

La deformación normal $\epsilon(\theta)$ a lo largo de una línea AB que forma un ángulo arbitrario θ con el eje x. Esta deformación se determina usando el triángulo rectángulo ABC con AB como hipotenusa (figura 7.51*a*) y el triángulo oblicuo $A'B'C'$, en el cual se transforma el triángulo ABC (figura 7.51*b*). Si Δs es la longitud de AB, la longitud de $A'B'$ es $\Delta s[1 + \epsilon(\theta)]$. Análogamente, llamando Δx y Δy a las longitudes de los lados AC

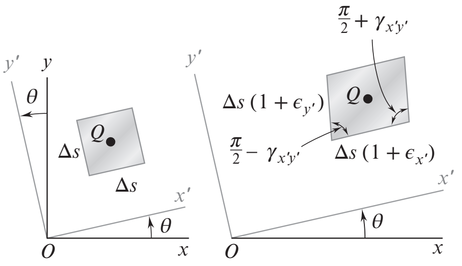


Figura 7.50 Transformación de un elemento en deformación plana, en las orientaciones sin deformar y deformada.

† Un estado de *deformación plana* y un estado de *esfuerzos plano* no ocurren simultáneamente, excepto con materiales ideales que tienen una razón de Poisson igual a cero. Las restricciones en los elementos de la placa de la figura 7.47 y de la barra de la figura 7.48 resultan en un esfuerzo σ_z diferente de cero. Por otra parte, en el caso de la placa de la figura 7.3, la ausencia de cualquier restricción lateral se transforma en $\sigma_z = 0$ y $\epsilon_z \neq 0$.

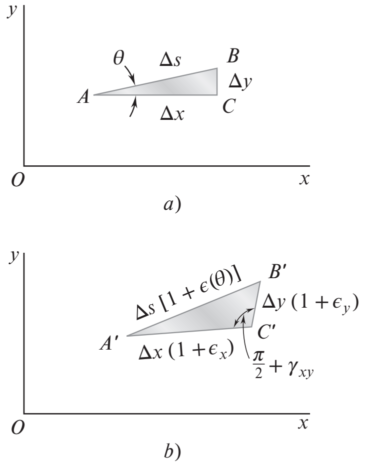


Figura 7.51 Evaluación de la deformación a lo largo de la línea *AB*. *a*) Sin deformar; *b*) deformada.

y *CB*, las longitudes de $A'C'$ y $C'B'$ serán $\Delta x\,(1+\epsilon_x)$ y $\Delta y\,(1+\epsilon_y)$, respectivamente. Al recordar de la figura 7.49, que el ángulo recto en *C* en la figura 7.51*a* se transforma en un ángulo igual a $\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy}$ en la figura 7.51*b* y aplicando la ley de los cosenos al triángulo $A'B'C'$ para obtener

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B')\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy}\right)$$

$$(\Delta s)^2[1+\epsilon(\theta)]^2 = (\Delta x)^2(1+\epsilon_x)^2 + (\Delta y)^2(1+\epsilon_y)^2$$

$$-\,2(\Delta x)(1+\epsilon_x)(\Delta y)(1+\epsilon_y)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy}\right) \qquad (7.38)$$

Pero, de la figura 7.51*a*,

$$\Delta x = (\Delta s)\cos\theta \qquad \Delta y = (\Delta s)\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (7.39)$$

y, como γ_{xy} es muy pequeño

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy}\right) = -\,\mathrm{sen}\,\gamma_{xy} \approx -\gamma_{xy} \qquad (7.40)$$

Al sustituir de las ecuaciones (7.39) y (7.40) en la ecuación (7.38) y al recordar que $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$, y despreciando los términos de segundo orden en $\epsilon(\theta)$, ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, se obtiene

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x\cos^2\theta + \epsilon_y\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \gamma_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \qquad (7.41)$$

La ecuación (7.41) permite hallar la deformación normal $\epsilon(\theta)$ en cualquier dirección *AB* en términos de las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} y del ángulo θ que forma *AB* con el eje *x*. Observe que, para $\theta = 0$, la ecuación (7.41) produce $\epsilon(0) = \epsilon_x$ y que para $\theta = 90°$, da $\epsilon(90°) = \epsilon_y$. Por otra parte, haciendo $\theta = 45°$ en la ecuación (7.41), se obtiene la deformación normal en la dirección de la bisectriz *OB* del ángulo entre los ejes *x* y *y* (figura 7.52). Para representar esta deformación con ϵ_{OB}, se escribe

$$\epsilon_{OB} = \epsilon(45°) = \tfrac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}) \qquad (7.42)$$

Al resolver γ_{xy} en la ecuación (7.42),

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \qquad (7.43)$$

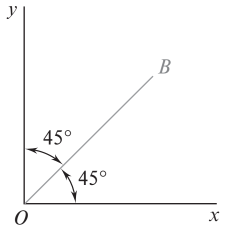


Figura 7.52 Bisector *OB*.

Esta relación permite expresar la *deformación cortante* asociada con un par de ejes rectangulares dado en función de las *deformaciones normales* medidas a lo largo de estos ejes y su bisectriz. Esto tiene un papel fundamental en la presente deducción y también se usará en la sección 7.9 para la determinación experimental de las deformaciones cortantes.

El propósito principal de esta sección es expresar las componentes de la deformación asociadas con el marco de referencia $x'y'$ de la figura 7.50 en términos del ángulo θ y de las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, asociadas con los ejes *x* y *y*. Se nota que la deformación normal $\epsilon_{x'}$ a lo largo del eje x' está dada por la ecuación (7.41). Usando las relaciones trigonométricas (7.3) y (7.4), la forma alterna de la ecuación (7.41) es

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta \qquad (7.44)$$

Al remplazar θ por $\theta + 90°$, se obtiene la deformación normal a lo largo del eje y'. Como $\cos(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ y $\mathrm{sen}\,(2\theta + 180°) = -\mathrm{sen}\,2\theta$,

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta \qquad (7.45)$$

Al sumar miembro a miembro las ecuaciones (7.44) y (7.45), se obtiene

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y \quad (7.46)$$

Puesto que $\epsilon_z = \epsilon_{z'} = 0$, la suma de las deformaciones normales asociadas con un elemento cúbico de material es independiente de la orientación del elemento en deformación plana.[†]

Al reemplazar θ por $\theta + 45°$ en la ecuación (7.44), se obtiene una expresión para la deformación normal a lo largo de la bisectriz OB' del ángulo formado por los ejes x' y y'. Como cos $(2\theta + 90°) = -$sen 2θ y sen $(2\theta + 90°) = \cos 2\theta$,

$$\epsilon_{OB'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (7.47)$$

Al escribir la ecuación (7.43) con respecto a los ejes x' y y', se expresa la deformación cortante $\gamma_{x'y'}$ en función de las deformaciones normales medidas a lo largo de los ejes x' y y', y de la bisectriz OB':

$$\gamma_{x'y'} = 2\epsilon_{OB'} - (\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'}) \quad (7.48)$$

Al sustituir de las ecuaciones (7.46) y (7.47) en la (7.48), se obtiene

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \operatorname{sen} 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (7.49a)$$

Las ecuaciones (7.44), (7.45) y (7.49*a*) son las que definen la transformación de deformación plana bajo una rotación de ejes en el plano de deformación. Al dividir la ecuación (7.49*a*) entre 2, la forma alternativa es

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (7.49b)$$

Observe que las ecuaciones (7.44), (7.45) y (7.49*b*) para la transformación de la deformación plana se parecen a las ecuaciones deducidas para la transformación del esfuerzo plano (sección 7.1). Aunque las primeras pueden obtenerse de las segundas reemplazando los esfuerzos normales por las correspondientes deformaciones normales, debe notarse, sin embargo, que los esfuerzos cortantes τ_{xy} y $\tau_{x'y'}$ deben reemplazarse por la *mitad* de las correspondientes deformaciones cortantes (es decir, por $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ y $\frac{1}{2}\gamma_{x'y'}$).

7.7B Círculo de Mohr para la deformación plana

Como las ecuaciones para la transformación de deformación plana son de la misma forma que las ecuaciones para la transformación de esfuerzo plano, el uso del círculo de Mohr puede extenderse al análisis de deformación plana. Dadas las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} que definen las deformaciones representadas en la figura 7.49, se graficó un punto $X(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ de abscisa igual a la deformación normal ϵ_x y de ordenada igual a la mitad de la deformación cortante γ_{xy}, y un punto $Y(\epsilon_y, +\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ (figura 7.53). Dibujando el diámetro XY, se define el centro C del círculo de Mohr para deformación plana. La abscisa de C y el radio R del círculo son

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (7.50)$$

Si γ_{xy} es positiva, como se supone en la figura 7.49, los puntos X y Y se trazan debajo y encima del eje horizontal en la figura 7.53. Pero, en ausencia de cualquier rotación de cuerpo rígido, el lado del elemento de la figura 7.49 asociado con ϵ_x gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, mientras el lado asociado con ϵ_y gira en el sentido de las manecillas del reloj. En consecuencia, si la deformación de cortan-

[†] Vea la nota al pie de la página 88.

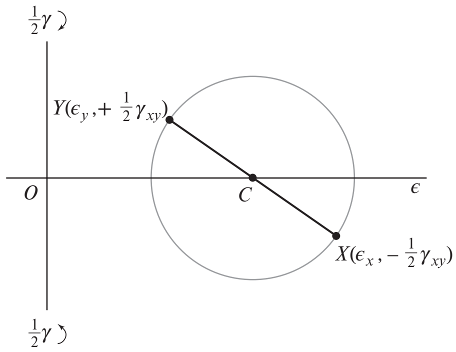


Figura 7.53 Círculo de Mohr para la deformación unitaria plana.

te hace que un lado dado gire *en el sentido de las manecillas del reloj*, el punto correspondiente en el círculo de Mohr para deformación plana se dibuja *encima* del eje horizontal y si la deformación hace que el lado gire *en contra de las manecillas del reloj*, el punto correspondiente se traza *debajo* del eje horizontal. Esta convención está de acuerdo con la usada para dibujar el círculo de Mohr para el esfuerzo plano.

Los puntos A y B, donde el círculo de Mohr interseca el eje horizontal, corresponden a las *deformaciones principales* $\epsilon_{\text{máx}}$ y $\epsilon_{\text{mín}}$ (figura 7.54*a*). Así,

$$\epsilon_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{prom}} + R \qquad \text{y} \qquad \epsilon_{\text{mín}} = \epsilon_{\text{prom}} - R \tag{7.51}$$

donde ϵ_{prom} y R están definidos por las ecuaciones (7.50). El valor correspondiente θ_p del ángulo θ se obtiene observando que la deformación cortante es cero para A y B. Haciendo $\gamma_{x'y'} = 0$ en la ecuación (7.49*a*),

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{7.52}$$

Los ejes correspondientes a y b, en la figura 7.54*b*, son los *ejes principales de deformación.* El ángulo θ_p, que define la dirección del eje principal Oa en la figura 7.54*b* correspondiente al punto A en la figura 7.54*a*, es igual a la mitad del ángulo XCA medido en el círculo de Mohr, y la rotación que lleva Ox hacia Oa tiene el mismo sentido de la rotación que hace coincidir el diámetro XY del círculo de Mohr con el diámetro AB.

Recuerde de la sección 2.7 que, en el caso de la deformación elástica de un material homogéneo e isotrópico, la ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortantes conduce a $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ para cualquier par de ejes rectangulares x y y. Así, $\gamma_{xy} = 0$ cuando

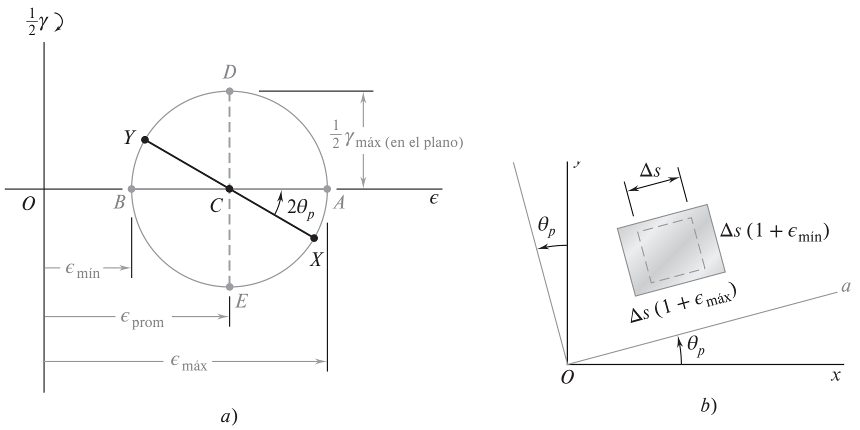


Figura 7.54 *a*) Círculo de Mohr para la deformación plana, que muestra las deformaciones principales y la máxima deformación cortante en el plano. *b*) Elemento de deformación orientado hacia las direcciones principales.

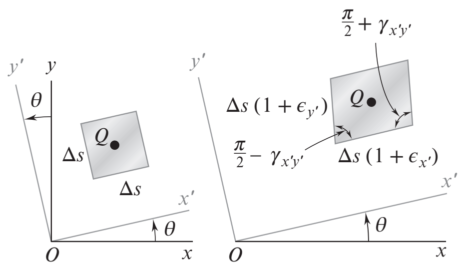


Figura 7.50 (*repetida*) Transformación de un elemento de deformación plana en las orientaciones no deformada y deformada.

$\tau_{xy} = 0$. Esto indica que los ejes principales de la deformación coinciden con los ejes principales de esfuerzo.

La deformación cortante máxima en el plano está definida por los puntos D y E en la figura 7.54*a*. Es igual al diámetro del círculo de Mohr. Al recordar la segunda de las ecuaciones (7.50),

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{7.53}$$

Finalmente, los puntos X' y Y', que definen las componentes de la deformación correspondientes a una rotación de los ejes coordenados a través de un ángulo θ (figura 7.50), se obtienen rotando el diámetro XY del círculo de Mohr en el mismo sentido a través de un ángulo 2θ (figura 7.55).

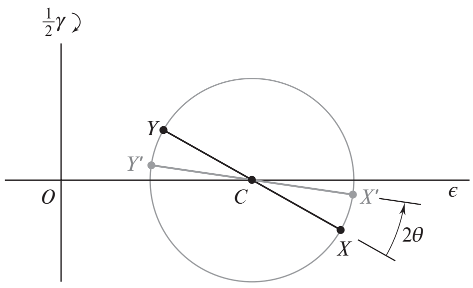


Figura 7.55 Deformaciones en los planos arbitrarios X' y Y' con referencia a los planos originales X y Y sobre el círculo de Mohr.

Aplicación de conceptos 7.4

Para un material en estado de deformación plana se sabe que el lado horizontal de un cuadrado de 10 × 10 mm se alarga 4 μm, mientras el lado vertical permanece constante, y que el ángulo en la esquina izquierda inferior aumenta en 0.4×10^{-3} rad (figura 7.56*a*). Determine *a*) los ejes principales y las deformaciones principales, *b*) la deformación cortante máxima y la correspondiente deformación normal.

***a*) Ejes y deformaciones principales.** Se determinan las coordenadas de los puntos X y Y en el círculo de Mohr para la deformación.

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6}\ \text{m}}{10 \times 10^{3}\ \text{m}} = +400\,\mu \qquad \epsilon_y = 0 \qquad \left|\frac{\gamma_{xy}}{2}\right| = 200\,\mu$$

Como el lado del cuadrado asociado con ϵ_x gira *en el sentido de las manecillas del reloj*, el punto X de coordenadas ϵ_x y $|\gamma_{xy}/2|$ se traza *encima* del eje horizontal. Como $\epsilon_y = 0$ y el lado correspondiente gira *en sentido contrario a las manecillas del reloj*, el

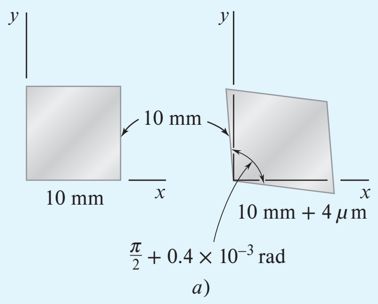


Figura 7.56 Análisis del estado de deformación plana. *a*) elemento de deformación: sin deformar y deformado.

punto Y se traza directamente *debajo* del origen (figura 7.56*b*). Al dibujar el diámetro XY, se determina el centro C del círculo de Mohr y su radio R.

$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200\,\mu \qquad OY = 200\,\mu$$

$$R = \sqrt{(OC)^2 + (OY)^2} = \sqrt{(200\,\mu)^2 + (200\,\mu)^2} = 283\,\mu$$

Las deformaciones principales están definidas por las abscisas de los puntos A y B.

$$\epsilon_a = OA = OC + R = 200\,\mu + 283\,\mu = 483\,\mu$$
$$\epsilon_b = OB = OC - R = 200\,\mu - 283\,\mu = -83\,\mu$$

En la figura 7.56*c* se muestran los ejes principales Oa y Ob. Como $OC = OY$, el ángulo en C del triángulo OCY es de 45°. Así, el ángulo $2\theta_p$ que trae a XY hacia AB es de 45°↻ y el ángulo θ_p que lleva Ox hasta Oa es de 22.5°↻.

***b*) Deformación cortante máxima.** Los puntos D y E definen la deformación cortante máxima en el plano que, como las deformaciones principales tienen signos opuestos, es también la máxima deformación por cortante (vea la sección 7.8).

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = R = 283\,\mu \qquad \gamma_{\text{máx}} = 566\,\mu$$

Las deformaciones normales correspondientes son ambas iguales a

$$\epsilon' = OC = 200\,\mu$$

Los ejes de deformación cortante máxima se muestran en la figura 7.56*d*.

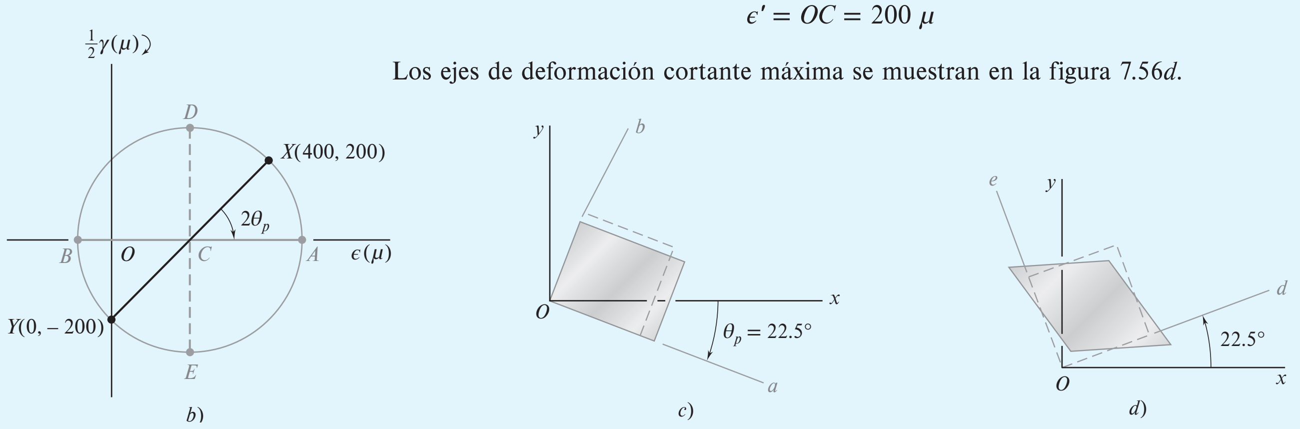


Figura 7.56 (*cont.*) *b*) Círculo de Mohr para el elemento de deformación plana dado. *c*) Elementos de deformación principal deformado y sin deformar. *d*) Elementos de deformación cortante máxima deformado y sin deformar.

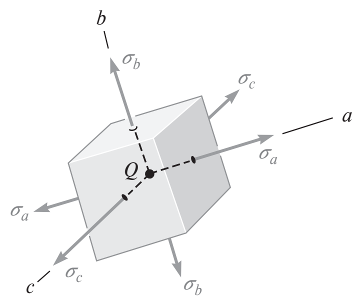


Figura 7.21 (*repetida*) Elemento de esfuerzo general orientado hacia los ejes principales.

*7.8 ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE LA DEFORMACIÓN

En la sección 7.3 se vio que, en el caso más general del esfuerzo, pueden determinarse tres ejes coordenados a, b y c, llamados ejes principales de esfuerzo. Un pequeño elemento cúbico, con caras respectivamente perpendiculares a estos ejes, está libre de esfuerzos cortantes (figura 7.21), por lo que $\tau_{ab} = \tau_{bc} = \tau_{ca} = 0$. La ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortante se aplica cuando la deformación es elástica y el material homogéneo e isotrópico. Entonces, $\gamma_{ab} = \gamma_{bc} = \gamma_{ca} = 0$, es decir, los ejes a, b y c son también *ejes principales de deformación.* Un pequeño cubo de lado unitario, centrado en Q y con caras perpendiculares a los ejes principales, se deforma en un paralelepípedo rectangular de lados $1 + \epsilon_a$, $1 + \epsilon_b$ y $1 + \epsilon_c$ (figura 7.57).

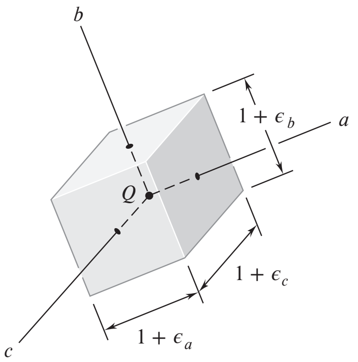


Figura 7.57 Elemento de deformación orientado hacia las direcciones de los ejes principales.

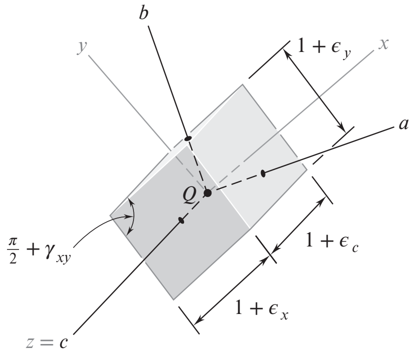


Figura 7.58 Elemento de deformación que tiene un eje coincidente con un eje de deformación principal.

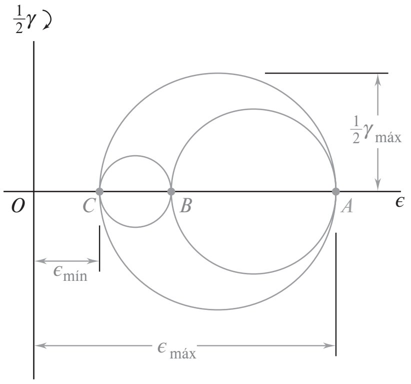


Figura 7.59 Círculo de Mohr para el análisis tridimensional de la deformación unitaria.

Si el elemento de la figura 7.57 se gira alrededor de uno de los ejes principales en Q, por ejemplo el eje c (figura 7.58), el método de análisis desarrollado antes para la transformación de la deformación plana puede usarse para determinar las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con las caras perpendiculares al eje c, ya que este método no implica ninguna de las otras componentes de deformación.† Puede dibujarse entonces el círculo de Mohr por los puntos A y B, correspondientes a los ejes principales a y b (figura 7.59). De manera similar, los círculos de diámetros BC y CA se usan para analizar las transformaciones de la deformación cuando se rota el elemento alrededor de los ejes a y b, respectivamente.

El análisis tridimensional de la deformación por medio del círculo de Mohr se limita aquí a rotaciones alrededor de los ejes principales (como el caso para el análisis del esfuerzo) y se usa para hallar la deformación cortante máxima $\gamma_{máx}$ en el punto Q. Puesto que $\gamma_{máx}$ es igual al diámetro del mayor de los tres círculos mostrados en la figura 7.59,

$$\gamma_{máx} = |\epsilon_{máx} - \epsilon_{mín}| \tag{7.54}$$

donde $\epsilon_{máx}$ y $\epsilon_{mín}$ representan los valores *algebraicos* de las deformaciones máxima y mínima en el punto Q.

De regreso al caso particular de la *deformación plana* y eligiendo los ejes x y y en el plano de deformación, se tiene $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. En consecuencia, el eje z es uno de los tres ejes principales en Q, y el punto correspondiente, en el diagrama del círculo de Mohr, es el origen O, donde $\epsilon = \gamma = 0$. Si los puntos A y B que definen los ejes principales en el plano de deformación caen en lados opuestos de O (figura 7.60*a*), las deformaciones principales correspondientes representan las deformaciones máxima y mínima en el punto Q, y la deformación cortante máxima es igual a la deformación cortante máxima en el plano correspondiente a los puntos D y E. Sin embargo, si A y B están en el mismo lado de O (figura 7.60*b*), de modo que si ϵ_a y ϵ_b tienen igual signo, entonces la deformación cortante máxima se define por los puntos D' y E' en el círculo de diámetro OA, y $\gamma_{máx} = \epsilon_{máx}$.

Considere ahora el caso particular del *esfuerzo plano* encontrado en una placa delgada o en la superficie libre de un elemento estructural o componente de máquina. Al elegir los ejes x y y en el plano de esfuerzo, se tiene $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, y el eje z es un eje principal de esfuerzo. Si la deformación es elástica y el material es homogéneo e isotrópico, la ley de Hooke muestra que $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. Así, el eje z es también un eje principal de deformación y puede usarse el círculo de Mohr para estudiar la transformación de deformación en el plano xy. Sin embargo, como se verá más adelante, la ley de Hooke *no* muestra que $\epsilon_z = 0$; de hecho, un estado de esfuerzos plano, en general, no resulta de un estado de deformación plana.

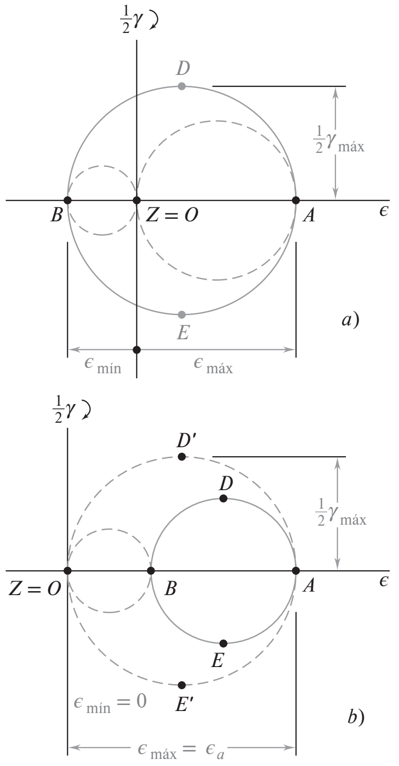


Figura 7.60 Configuraciones posibles del círculo de Mohr para la deformación unitaria plana. *a*) Deformaciones principales con signos mixtos. *b*) Deformaciones principales con signos positivos.

† Las otras cuatro caras del elemento permanecen rectangulares y los bordes paralelos al eje c se mantienen iguales.

Si se usan a y b como los ejes principales dentro del plano de esfuerzo y c como el eje principal perpendicular a ese plano, se hace $\sigma_x = \sigma_a$, $\sigma_y = \sigma_b$ y $\sigma_z = 0$ en las ecuaciones (2.20) de la ley general de Hooke (sección 2.5) y se obtiene

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu\sigma_b}{E} \quad (7.55)$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu\sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E} \quad (7.56)$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \quad (7.57)$$

Al sumar miembro a miembro las ecuaciones (7.55) y (7.56), resulta

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \quad (7.58)$$

Al despejar $\sigma_a + \sigma_b$ de la ecuación (7.58) y al sustituir en la ecuación (7.57), se escribe

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \quad (7.59)$$

La relación obtenida define la tercera deformación principal en términos de las deformaciones principales en el plano. Si B está entre A y C en el diagrama de Mohr (figura 7.61), la deformación cortante máxima es igual al diámetro CA del círculo correspondiente a una rotación con respecto al eje b, fuera del plano de esfuerzo.

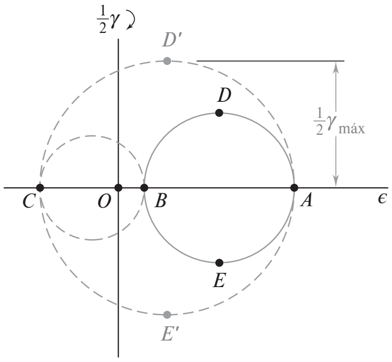


Figura 7.61 Círculo de Mohr del análisis de la deformación unitaria para el esfuerzo plano.

Aplicación de conceptos 7.5

Como resultado de medidas tomadas en la superficie de un componente de máquina con galgas extensiométricas orientadas de varias maneras, se ha establecido que las deformaciones principales en la superficie libre son $\epsilon_a = +400 \times 10^{-6}$ in/in y $\epsilon_b = -50 \times 10^{-6}$ in/in. Si el módulo de Poisson para el material dado es $\nu = 0.30$, determine, *a*) la deformación cortante máxima en el plano, *b*) el valor real de la deformación cortante máxima cerca de la superficie del componente.

***a*) Deformación cortante máxima en el plano.** Se dibuja el círculo de Mohr por los puntos A y B que corresponden a las deformaciones principales dadas (figura 7.62*a*). La deformación cortante máxima en el plano se define por los puntos D y E, y es igual al diámetro del círculo de Mohr.

$$\gamma_{\text{máx(en el plano)}} = 400 \times 10^{-6} + 50 \times 10^{-6} = 450 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

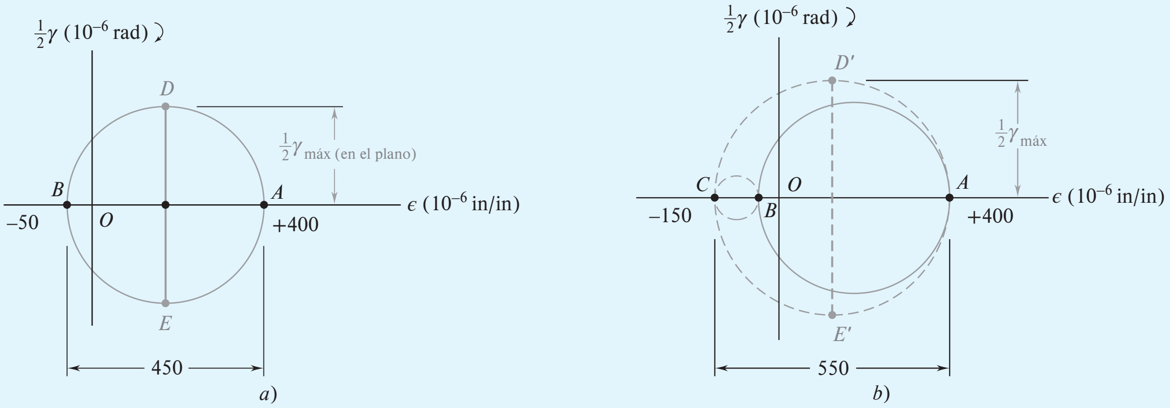


Figura 7.62 Uso del círculo de Mohr para determinar la deformación cortante máxima. *a*) Círculo de Mohr para el plano de las deformaciones dadas. *b*) Círculo de Mohr tridimensional para la deformación.

***b*) Deformación cortante máxima.** Primero se determina la tercera deformación principal ϵ_c. Como hay un estado de *esfuerzos* plano en la superficie del componente de máquina, la ecuación (7.59) da

$$\begin{aligned}\epsilon_c &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a+\epsilon_b)\\ &= -\frac{0.30}{0.70}(400\times10^{-6}-50\times10^{-6}) = -150\times10^{-6}\ \text{in/in}\end{aligned}$$

Se dibujan los círculos de Mohr por *A* y *C* y por *B* y *C* (figura 7.62*b*), y se halla que la deformación cortante máxima es igual al diámetro del círculo *CA*:

$$\gamma_{\text{máx}} = 400\times10^{-6} + 150\times10^{-6} = 550\times10^{-6}\ \text{rad}$$

Se nota que, aunque ϵ_a y ϵ_b tienen signos opuestos, la deformación cortante máxima en el plano no representa la verdadera deformación cortante máxima.

*7.9 MEDICIONES DE LA DEFORMACIÓN; ROSETA DE DEFORMACIÓN

La deformación normal puede determinarse en cualquier dirección dada sobre la superficie de un elemento estructural o componente de máquina haciendo dos marcas *A* y *B* a través de una línea dibujada en la dirección deseada, y midiendo la longitud del segmento *AB* antes y después de aplicar la carga. Si *L* es la longitud no deformada de *AB* y δ su alargamiento, la deformación normal a lo largo de *AB* es $\epsilon_{AB} = \delta/L$.

Un método más conveniente y exacto para la medida de deformaciones normales se basa en los medidores de deformación eléctricos conocidos como galgas extensiométricas. Una galga extensiométrica común consta de un alambre delgado de una longitud determinada, dispuesto como en la figura 7.63, adherido a dos piezas de papel. Para medir la deformación ϵ_{AB} de un material dado en la dirección *AB*, la galga se adhiere a la superficie del material con las vueltas de alambre paralelas a *AB*. Cuando el material se alarga, el alambre aumenta en longitud y disminuye en diámetro, provocando que la resistencia eléctrica de la galga aumente. Midiendo la corriente que pasa por una galga bien calibrada, es posible determinar la deformación ϵ_{AB} de manera precisa y continua a medida que la carga aumenta.

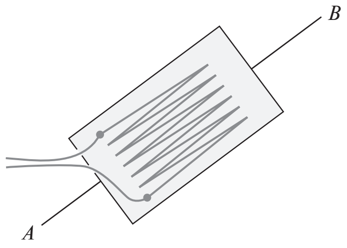


Figura 7.63 Galga extensiométrica.

Las componentes de deformación ϵ_x y ϵ_y pueden determinarse en un punto dado de la superficie libre del material simplemente midiendo la deformación normal a lo largo de los ejes *x* y *y* trazados por ese punto. Al recordar la ecuación (7.43), se observa que una tercera medida de deformación normal, realizada a lo largo de la bisectriz *OB* del ángulo formado por los ejes *x* y *y* permite determinar también la deformación cortante γ_{xy} (figura 7.64):

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \qquad (7.43)$$

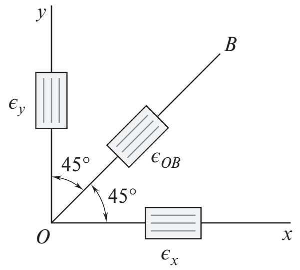


Figura 7.64 Roseta de deformación que mide las deformaciones normales en la dirección de *x*, *y*, y la bisectriz *OB*.

Las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} en un punto dado también pueden obtenerse de la medida de deformación normal hecha a lo largo de *tres líneas cualesquiera* dibujadas por ese punto (figura 7.65). Designando respectivamente por θ_1, θ_2 y θ_3 el ángulo que cada una de las líneas forma con el eje *x*, por ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 las medidas de las deformaciones correspondientes y reemplazando en la ecuación (7.41), se tienen las tres ecuaciones:

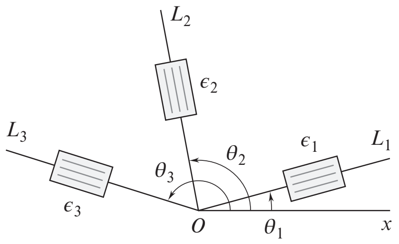
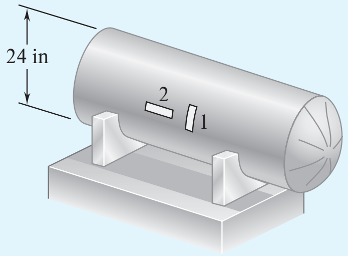


Figura 7.65 Galga extensiométrica generalizada en arreglo de roseta.

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_x\cos^2\theta_1 + \epsilon_y\,\text{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\\ \epsilon_2 &= \epsilon_x\cos^2\theta_2 + \epsilon_y\,\text{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_2\\ \epsilon_3 &= \epsilon_x\cos^2\theta_3 + \epsilon_y\,\text{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,\theta_3\cos\theta_3\end{aligned} \qquad (7.60)$$

Estas pueden resolverse simultáneamente para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}.†

El arreglo de galgas extensiométricas utilizadas para medir las tres deformaciones normales ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 se conoce como *roseta de deformación.* La roseta usada para medir deformaciones normales a lo largo de los ejes x y y, y su bisectriz se conoce como roseta de 45° (figura 7.64). Otra roseta muy usada es la de 60° (vea el problema modelo 7.7).



Problema modelo 7.6

Un tanque de almacenamiento cilíndrico utilizado para el transporte de gas a presión tiene un diámetro interior de 24 in y un espesor de $\frac{3}{4}$ in. Varias galgas extensiométricas adheridas a la superficie del tanque en dirección transversal y longitudinal indican deformaciones de 255×10^{-6} y 60×10^{-6} in/in, respectivamente. Sabiendo que una prueba de torsión mostró que el módulo de rigidez del material usado en el tanque es $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine: *a*) la presión manométrica en el interior del tanque, *b*) los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en la pared del tanque.

ESTRATEGIA: Se pueden utilizar las deformaciones medidas a fin de trazar el círculo de Mohr para la deformación, y utilizar este círculo para determinar el esfuerzo cortante máximo en el plano. Al aplicar la ley de Hooke para obtener el esfuerzo cortante máximo en el plano correspondiente, es posible hallar la presión manométrica en el tanque a través de la ecuación apropiada de un recipiente de pared delgada a presión; asimismo, se puede desarrollar el círculo de Mohr para determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Presión manométrica en el interior del tanque.** Las deformaciones dadas son las deformaciones principales en la superficie del tanque. Trazando los puntos correspondientes A y B, se dibuja el círculo de Mohr para deformación (figura 1). La deformación cortante máxima en el plano es igual al diámetro del círculo.

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 255 \times 10^{-6} - 60 \times 10^{-6} = 195 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

De la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación cortantes,

$$\begin{aligned} \tau_{\text{máx (en el plano)}} &= G\gamma_{\text{máx (en el plano)}} \\ &= (11.2 \times 10^6 \text{ psi})(195 \times 10^{-6} \text{ rad}) \\ &= 2\,184 \text{ psi} = 2.184 \text{ ksi} \end{aligned}$$

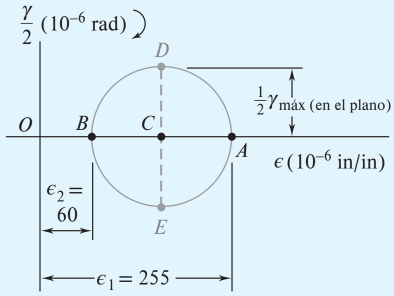


Figura 1 Círculo de Mohr para las deformaciones medidas.

† Se debe notar que la superficie libre en la cual se hacen las medidas de deformación está en un estado de *esfuerzos plano*, mientras que las ecuaciones (7.41) y (7.43) se dedujeron para un estado de *deformación plana*. Sin embargo, como se observó antes, la normal a la superficie libre es un eje principal de deformación y las deducciones de la sección 7.7A permanecen válidas.

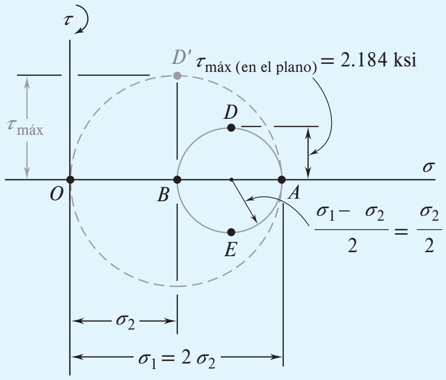


Figura 2 Círculos de Mohr tridimensionales para componentes de esfuerzo en recipientes.

Al sustituir este valor y los datos dados en la ecuación (7.33),

$$\tau_{\text{máx (en el plano)}} = \frac{pr}{4t} \qquad 2\,184 \text{ psi} = \frac{p(12 \text{ in})}{4(0.75 \text{ in})}$$

Al resolver la presión manométrica p,

$$p = 546 \text{ psi} \quad ◀$$

***b*) Esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo.** Al recordar que para un recipiente cilíndrico de pared delgada $\sigma_1 = 2\sigma_2$, se dibuja el círculo de Mohr para el esfuerzo (figura 2) y se obtiene

$$\sigma_2 = 2\tau_{\text{máx (en el plano)}} = 2(2.184 \text{ ksi}) = 4.368 \text{ ksi} \qquad \sigma_2 = 4.37 \text{ ksi} \quad ◀$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 = 2(4.368 \text{ ksi}) \qquad \sigma_1 = 8.74 \text{ ksi} \quad ◀$$

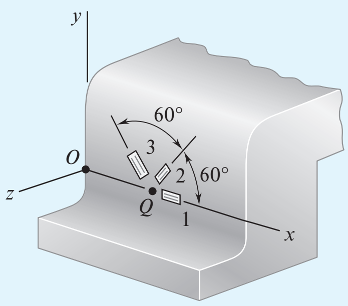
El esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro OA y corresponde a una rotación de 45° con respecto al eje longitudinal.

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \sigma_2 = 4.368 \text{ ksi} \qquad \tau_{\text{máx}} = 4.37 \text{ ksi} \quad ◀$$

Problema modelo 7.7

Usando una roseta de 60° se han determinado las siguientes deformaciones en el punto Q sobre la superficie de una base de máquina hecha de acero:

$$\epsilon_1 = 40\ \mu \qquad \epsilon_2 = 980\ \mu \qquad \epsilon_3 = 330\ \mu$$



Usando los ejes coordenados mostrados, determine en el punto Q, (*a*) las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, (*b*) las deformaciones principales, (*c*) la deformación cortante máxima. (Utilice $\nu = 0.29$.)

ESTRATEGIA: A partir de las mediciones de deformación en la roseta, se pueden encontrar las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} usando la ecuación (7.60).

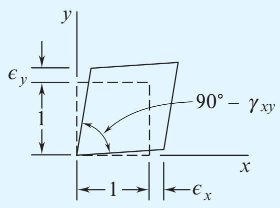


Figura 1 Elementos de deformación unitaria en Q, deformado y sin deformar.

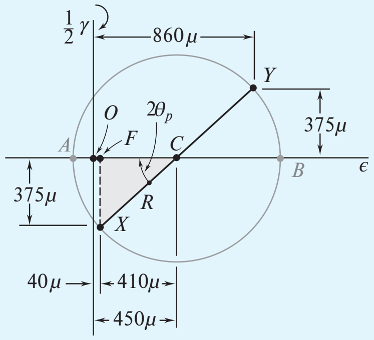


Figura 2 Círculo de Mohr usado para determinar las deformaciones principales.

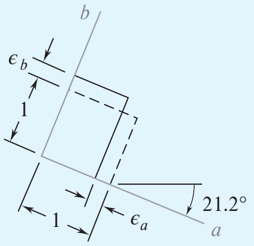


Figura 3 Elemento de deformación principal en Q, deformado y sin deformar.

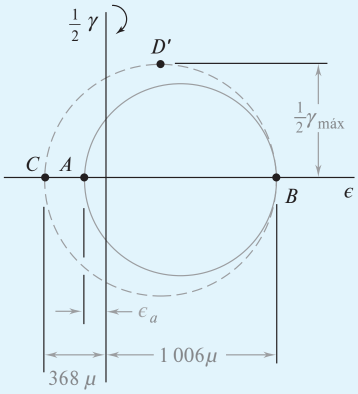


Figura 4 Círculos de Mohr tridimensionales, usados para determinar la deformación cortante máxima.

Con base en estas deformaciones, se puede trazar el círculo de Mohr para el esfuerzo, a fin de determinar las deformaciones principales y el esfuerzo cortante máximo.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Componentes de deformación $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$.** Para los ejes coordenados mostrados

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 60° \qquad \theta_3 = 120°$$

Al sustituir estos valores en las ecuaciones (7.60), resulta

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x(1) + \epsilon_y(0) + \gamma_{xy}(0)(1)\\
\epsilon_2 &= \epsilon_x(0.500)^2 + \epsilon_y(0.866)^2 + \gamma_{xy}(0.866)(0.500)\\
\epsilon_3 &= \epsilon_x(-0.500)^2 + \epsilon_y(0.866)^2 + \gamma_{xy}(0.866)(-0.500)
\end{aligned}$$

Al resolver ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} en estas ecuaciones

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}(2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0.866}$$

Al sustituir los valores de ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3,

$$\epsilon_x = 40\,\mu \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] \qquad \epsilon_y = +860\,\mu \blacktriangleleft$$

$$\gamma_{xy} = (980 - 330)/0.866 \qquad \gamma_{xy} = 750\,\mu \blacktriangleleft$$

Estas deformaciones se indican en el elemento mostrado en la figura 1.

***b*) Deformaciones principales.** El lado del elemento asociado con ϵ_x gira en sentido contrario a las manecillas del reloj; en consecuencia, se traza el punto X debajo del eje horizontal, como $X(40, -375)$. Luego se grafica $Y(860, +375)$ y se dibuja el círculo de Mohr (figura 2).

$$\epsilon_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}(860\,\mu + 40\,\mu) = 450\,\mu$$

$$R = \sqrt{(375\,\mu)^2 + (410\,\mu)^2} = 556\,\mu$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{375\,\mu}{410\,\mu} \qquad 2\theta_p = 42.4° \circlearrowright \qquad \theta_p = 21.2° \circlearrowright$$

Los puntos A y B corresponden a las deformaciones principales,

$$\epsilon_a = \epsilon_{\text{prom}} - R = 450\,\mu - 556\,\mu \qquad \epsilon_a = -106\,\mu \blacktriangleleft$$

$$\epsilon_b = \epsilon_{\text{prom}} + R = 450\,\mu + 556\,\mu \qquad \epsilon_b = +1\,006\mu \blacktriangleleft$$

Estas deformaciones se indican sobre el elemento mostrado en la figura 3. Como $\sigma_z = 0$ en la superficie, puede usarse la ecuación (7.59) para obtener la deformación principal ϵ_c:

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0.29}{1 - 0.29}(-106\,\mu + 1\,006\mu) \qquad \epsilon_c = -368\,\mu \blacktriangleleft$$

***c*) Deformación cortante máxima.** Si se grafica el punto C y se traza el círculo de Mohr por los puntos B y C (figura 4) se obtiene el punto D' y se escribe

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(1\,006\mu + 368\,\mu) \qquad \gamma_{\text{máx}} = 1\,374\mu \blacktriangleleft$$

Problemas

7.128 a 7.131 Para el estado de deformación plana dado, utilice el método de la sección 7.7A para determinar el estado de deformación plana asociado con los ejes x' y y' rotados a través del ángulo θ dado.

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	θ
7.128 y 7.132	-800μ	$+450\mu$	$+200\mu$	25° ⤶
7.129 y 7.133	$+240\mu$	$+160\mu$	$+150\mu$	60° ⤶
7.130 y 7.134	-500μ	$+250\mu$	0	15° ⤴
7.131 y 7.135	0	$+320\mu$	-100μ	30° ⤴

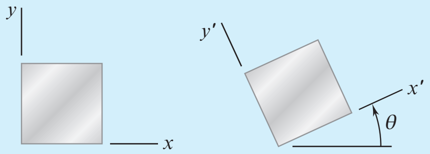


Figura P7.128 a P7.135

7.132 a 7.135 Para el estado de deformación plana dado, utilice el círculo de Mohr para determinar el estado de deformación plana asociado con los ejes x' y y' rotados a través del ángulo θ dado.

7.136 a 7.139 El siguiente estado de deformación plana se midió sobre la superficie de una placa delgada. Si se sabe que la superficie de la placa está libre de esfuerzo, determine *a*) la dirección y magnitud de las deformaciones principales, *b*) la deformación cortante máxima en el plano, *c*) la deformación cortante máxima. (Use $\nu = \frac{1}{3}$).

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
7.136	-260μ	-60μ	$+480\mu$
7.137	-600μ	-400μ	$+350\mu$
7.138	$+160\mu$	-480μ	-600μ
7.139	$+30\mu$	$+570\mu$	$+720\mu$

7.140 a 7.143 Para el estado de deformación plana dado, utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) la orientación y magnitud de las deformaciones principales, *b*) la máxima deformación en el plano, *c*) la deformación cortante máxima.

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
7.140	$+60\mu$	$+240\mu$	-50μ
7.141	$+400\mu$	$+200\mu$	$+375\mu$
7.142	$+300\mu$	$+60\mu$	$+100\mu$
7.143	-180μ	-260μ	$+315\mu$

7.144 Determine la deformación ϵ_x si se han determinado las siguientes deformaciones mediante el uso de la roseta que se muestra en la figura:

$$\epsilon_1 = +480\mu \qquad \epsilon_2 = -120\mu \qquad \epsilon_3 = +80\mu$$

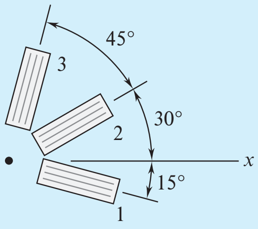


Figura *P7.144*

7.145 Durante la prueba de un elemento de máquina, las deformaciones determinadas mediante el uso de la roseta mostrada en la figura son

$$\epsilon_1 = +600\mu \qquad \epsilon_2 = +450\mu \qquad \epsilon_3 = -75\mu$$

Determine *a*) las deformaciones principales en el plano, *b*) la deformación cortante máxima en el plano.

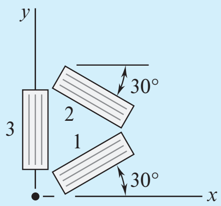


Figura *P7.145*

7.146 La roseta que se muestra en la figura se utilizó para determinar las siguientes deformaciones, en un punto sobre la superficie del gancho de una grúa:

$$\epsilon_1 = +420 \times 10^{-6} \text{ in/in} \qquad \epsilon_2 = -45 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$
$$\epsilon_4 = +165 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

a) ¿Cuál sería la lectura del medidor 3? *b*) Determine las deformaciones principales y la deformación cortante máxima en el plano.

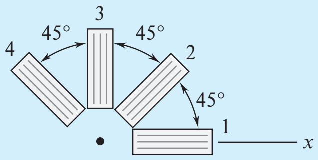


Figura P7.146

7.147 Las deformaciones ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 en un punto dado se determinaron utilizando una roseta de 45°. Con el uso del círculo de Mohr, demuestre que las deformaciones principales son:

$$\epsilon_{\text{máx, mín}} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_3) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

(*Sugerencia:* Los triángulos sombreados son congruentes).

7.148 Demuestre que la suma de las tres mediciones de deformación realizadas con una roseta de 60° es independiente de la orientación de la roseta e igual a

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_{\text{prom}}$$

donde ϵ_{prom} es la abscisa del centro del círculo de Mohr correspondiente.

7.149 Durante la prueba de un elemento de máquina las deformaciones determinadas, mediante el uso de la roseta que se muestra en la figura, son

$$\epsilon_1 = -93.1 \times 10^{-6} \text{ in/in} \qquad \epsilon_2 = +385 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$
$$\epsilon_3 = +210 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

Determine *a*) la orientación y magnitud de las deformaciones principales en el plano de la roseta, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el plano.

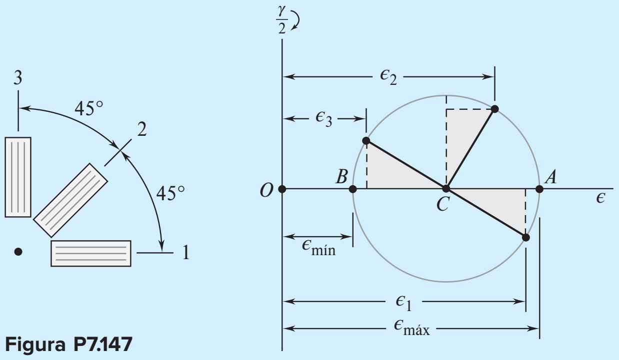


Figura P7.147

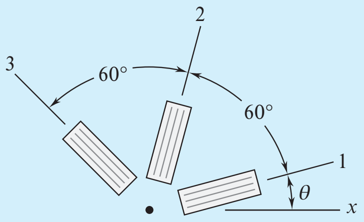


Figura P7.148

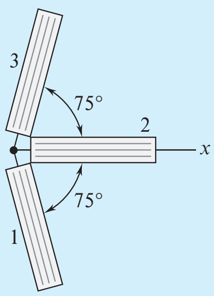


Figura P7.149

7.150 Una fuerza axial centrada **P** y una fuerza horizontal $\mathbf{Q}_x$ se aplican en el punto C de la barra rectangular que se muestra en la figura. Una roseta de deformación de 45° sobre la superficie de la barra en el punto A indica las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -60 \times 10^{-6} \text{ in/in} \qquad \epsilon_2 = +240 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$
$$\epsilon_3 = +200 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine las magnitudes de **P** y $\mathbf{Q}_x$.

7.151 Resuelva el problema 7.150 suponiendo que la roseta en el punto A indica las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -30 \times 10^{-6} \text{ in/in} \qquad \epsilon_2 = +250 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$
$$\epsilon_3 = +100 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

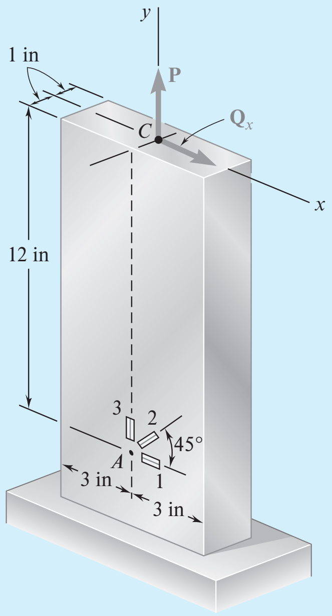


Figura P7.150

7.152 Una sola galga extensiométrica está unida a una flecha de acero sólido con 4 in de diámetro y forma un ángulo $\beta = 25°$ con una línea paralela al eje de la flecha. Si se sabe que $G = 11.5 \times 10^6$ psi, determine el par **T** correspondiente a una lectura de 300×10^{-6} in/in del medidor.

7.153 Resuelva el problema 7.152 suponiendo que la galga extensiométrica forma un ángulo $\beta = 35°$ con una línea paralela al eje de la flecha.

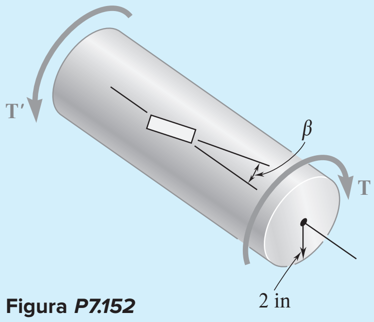


Figura *P7.152*

7.154 Una sola galga extensiométrica que forma un ángulo $\beta = 18°$ con un plano horizontal se utiliza para determinar la presión manométrica en el tanque cilíndrico que se muestra en la figura. El espesor de pared del tanque es de 6 mm y su diámetro interior de 600 mm; está hecho de acero, con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$. Determine la presión en el tanque indicada por una lectura de 280μ en la galga extensiométrica.

7.155 Resuelva el problema 7.154 suponiendo que la galga extensiométrica forma un ángulo $\beta = 35°$ con un plano horizontal.

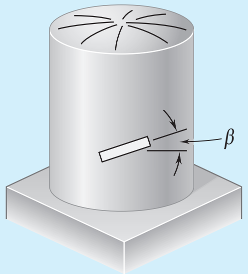


Figura P7.154

7.156 Se sabe que el estado de esfuerzos plano dado existe en la superficie de un componente de máquina. Si $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa, determine la dirección y magnitud de las tres deformaciones principales, *a*) para ello determine el estado correspondiente de deformación [utilice las ecuaciones (2.43) y (2.38)] y después use el círculo de Mohr para deformación, *b*) emplee el círculo de Mohr para esfuerzos a fin de determinar los planos y esfuerzos principales y luego encuentre las deformaciones correspondientes.

7.157 El siguiente estado de deformación se encontró en la superficie de un elemento de máquina hecho de hierro fundido:

$$\epsilon_x = -720\mu \qquad \epsilon_y = -400\mu \qquad \gamma_{xy} = +660\mu$$

Si se sabe que $E = 69$ GPa y $G = 28$ GPa, encuentre los planos y esfuerzos principales *a*) mediante la determinación del correspondiente estado de esfuerzos plano [utilice las ecuaciones (2.36) y (2.43) y las primeras dos ecuaciones del problema 2.73] y después utilice el círculo de Mohr para esfuerzos, *b*) por medio del círculo de Mohr para deformación determine la orientación y magnitud de las deformaciones principales y después los esfuerzos correspondientes.

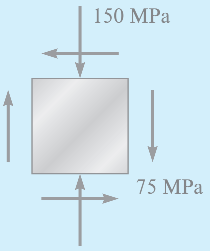


Figura P7.156

Repaso y resumen

Transformación del esfuerzo plano

Un estado de *esfuerzos plano* en un punto dado Q tiene valores distintos de cero para σ_x, σ_y y τ_{xy}. Las componentes de esfuerzo asociadas con el elemento se muestran en la figura 7.66*a*. Las ecuaciones para las componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con ese elemento después de rotarlo a través de un ángulo θ con respecto al eje z (figura 7.77*b*) son

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad \textbf{(7.5)}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad \textbf{(7.7)}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad \textbf{(7.6)}$$

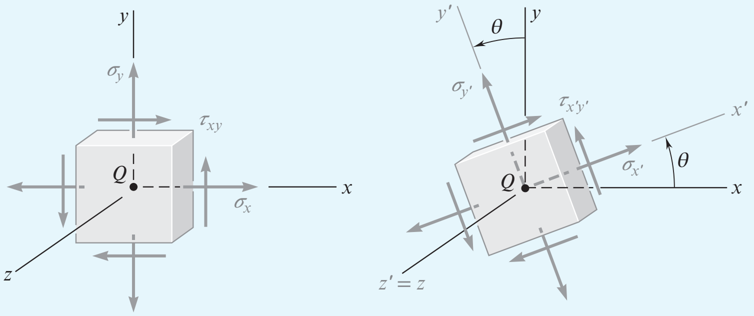


Figura 7.66 Estado de esfuerzos plano. *a*) Con referencia a {*xyz*}. *b*) Con referencia a {*x'y'z'*}.

Los valores θ_p del ángulo de rotación que corresponden a los valores máximo y mínimo del esfuerzo normal en el punto Q son

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \textbf{(7.12)}$$

Planos principales y esfuerzos principales

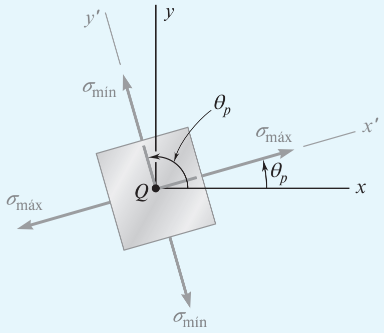


Figura 7.67 Esfuerzos principales.

Los dos valores obtenidos para θ_p están separados a 90° (figura 7.67) y definen los *planos principales de esfuerzo* en el punto Q. Los valores correspondientes del esfuerzo normal se denominan *esfuerzos principales* en Q:

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \textbf{(7.14)}$$

El esfuerzo cortante correspondiente es cero.

Esfuerzo cortante máximo en el plano

El ángulo θ para el valor máximo del esfuerzo cortante θ_s se encuentra usando

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7.15}$$

Los dos valores obtenidos para θ_s están separados a 90° (figura 7.68). Sin embargo, los planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales. El valor máximo del esfuerzo cortante *en el plano de esfuerzo* es

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.16}$$

y el valor correspondiente del esfuerzo normal es

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{7.17}$$

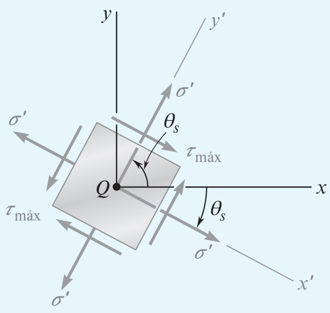


Figura 7.68 Esfuerzo cortante máximo.

Círculo de Mohr para el esfuerzo

El *círculo de Mohr* proporciona un método alternativo, basado en consideraciones geométricas simples, para el análisis de la transformación del esfuerzo plano. Dado el estado de esfuerzos mostrado en el elemento a la izquierda de la figura 7.69*a*, se grafica el punto X de coordenadas σ_x, $-\tau_{xy}$ y el punto Y de coordenadas σy, $+\tau_{xy}$ en la figura 7.69*b*. Dibujando el círculo de diámetro XY, se obtiene el círculo de Mohr. Las abscisas de los puntos de intersección A y B del círculo con el eje horizontal representan los esfuerzos principales, y el ángulo de rotación que trae el diámetro XY hasta AB es el doble del ángulo θ_p que define los planos principales, como se muestra en el elemento de la derecha en la figura 7.69*a*. El diámetro DE define el esfuerzo cortante máximo y la orientación del plano correspondiente (figura 7.70).

Estado general de esfuerzo

Un *estado general de esfuerzo* se caracteriza por seis componentes de esfuerzo, donde el esfuerzo normal en un plano de orientación arbitraria puede expresarse como una forma cuadrática de los cosenos directores de la normal a ese plano. Esto prueba la existencia de tres *ejes principales de esfuerzo* y tres *esfuerzos principales* en cualquier punto dado. Al girar un pequeño elemento cúbico con respecto a cada uno de los tres ejes principales, se dibujaron los correspondientes círculos de Mohr que generan

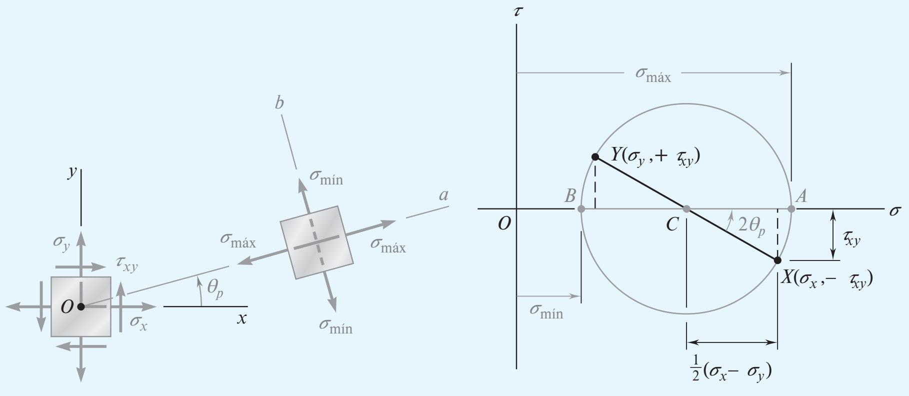


Figura 7.69 *a*) Elemento de esfuerzo plano, y la orientación de los planos principales. *b*) Círculo de Mohr correspondiente.

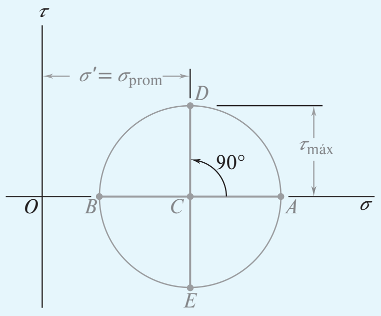


Figura 7.70 El esfuerzo cortante máximo está orientado a ±45° de las direcciones principales.

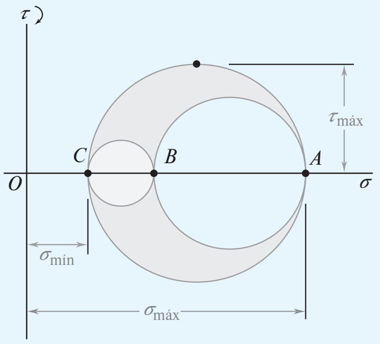


Figura 7.71 Círculos de Mohr tridimensionales para el estado general de esfuerzo.

los valores de $\sigma_{\text{máx}}$, $\sigma_{\text{mín}}$ y $\tau_{\text{máx}}$ (figura 7.71). En el caso de *esfuerzo plano*, cuando los ejes x y y se eligen en el plano de esfuerzo, el punto C coincide con el origen O. Si A y B están en lados opuestos de O, el esfuerzo cortante máximo es igual al esfuerzo cortante máximo en el plano. Si A y B están situados en el mismo lado de O, éste no será el caso. Por ejemplo, si $\sigma_a > \sigma_b > 0$ el esfuerzo cortante máximo es igual a $\frac{1}{2}\sigma_a$ y corresponde a una rotación fuera del plano de esfuerzo (figura 7.72).

Criterios de cedencia para materiales dúctiles

Para predecir si un componente estructural o de máquina fallará en algún punto crítico debido a la cedencia del material, se determinan los esfuerzos principales σ_a y σ_b en ese punto para las condiciones de carga dadas. Después se grafica el punto de coordenadas σ_a y σ_b. Si este punto cae dentro de cierta área, el componente es seguro; si cae fuera, el componente fallará. En la figura 7.73 se muestra el área usada con el criterio del esfuerzo cortante máximo y el área usada con el criterio de la energía de distorsión máxima, se indica en la figura 7.74. Ambas áreas dependen de la resistencia a la cedencia σ_Y del material.

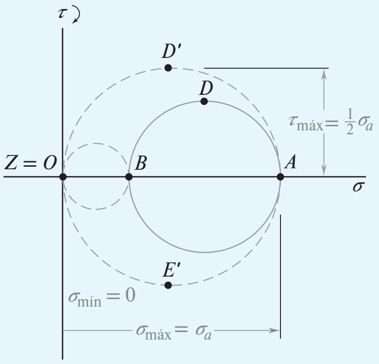


Figura 7.72 Círculos de Mohr tridimensionales para el esfuerzo plano que tiene dos esfuerzos principales positivos.

Criterios de ruptura para materiales frágiles

El método más común para predecir la falla de los materiales frágiles es el *criterio de Mohr* basado en la ruptura, que utiliza los resultados de varios tipos de pruebas disponibles para un material dado. El área sombreada de la figura 7.75 es utilizada cuando se han determinado las resistencias últimas σ_{UT} y σ_{UC} a partir de una prueba de tensión y una de compresión. Los esfuerzos principales σ_a y σ_b se determinan en un punto dado y si el punto correspondiente cae dentro del área sombreada, el componente es seguro; si cae fuera, el componente fallará.

Recipientes cilíndricos a presión

Se analizaron los esfuerzos en *recipientes a presión de pared delgada* y se obtuvieron ecuaciones que relacionan los esfuerzos en las paredes con la *presión manométrica p* del fluido contenido. Para un *recipiente cilíndrico* de radio interior r y espesor t (figura 7.76), los *esfuerzos de costilla* σ_1, y el *esfuerzo longitudinal* σ_2 son

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad \textbf{(7.30 y 7.31)}$$

El esfuerzo *cortante máximo* ocurre fuera del plano de esfuerzo y es

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad \textbf{(7.34)}$$

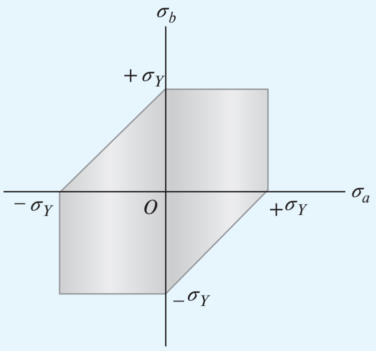


Figura 7.73 Hexágono de Tresca para el criterio del esfuerzo cortante máximo.

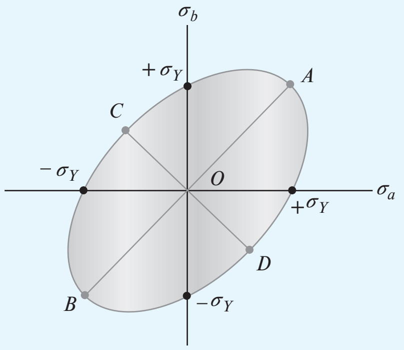


Figura 7.74 Superficie de Von Mises basada en el criterio de la máxima energía de distorsión.

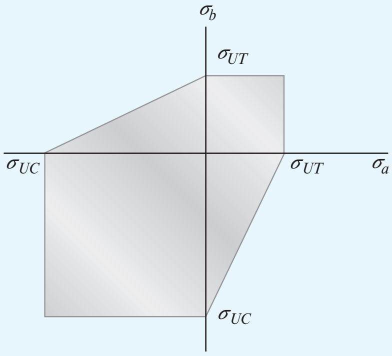


Figura 7.75 Criterio de Mohr simplificado para materiales frágiles.

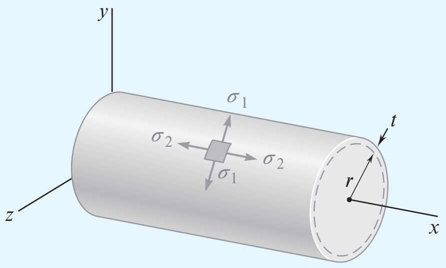


Figura 7.76 Recipiente cilíndrico presurizado.

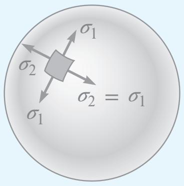


Figura 7.77 Recipiente esférico presurizado.

Recipientes esféricos a presión

Para un *recipiente esférico* de radio interior r y espesor t (figura 7.77), los dos esfuerzos principales son iguales:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.36}$$

De nuevo, el *esfuerzo cortante máximo* ocurre fuera del plano de esfuerzo y es

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \tag{7.37}$$

Transformación de la deformación plana

La última parte de este capítulo se dedicó a la *transformación de la deformación*. Se analizó la transformación de la *deformación plana* y se introdujo el *círculo de Mohr para deformación plana.* El estudio fue análogo al de la transformación de esfuerzo, excepto que donde se utiliza el esfuerzo cortante τ ahora se usa $\frac{1}{2}\gamma$, es decir, *la mitad de la deformación cortante*. Las fórmulas obtenidas para la transformación de la deformación bajo una rotación de ejes a través de un ángulo θ fueron

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\text{sen}\,2\theta \tag{7.44}$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\text{sen}\,2\theta \tag{7.45}$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\,\text{sen}\,2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \tag{7.49}$$

Círculo de Mohr para deformación

Usando el círculo de Mohr para deformación (figura 7.78), las relaciones que definen el ángulo de rotación θ_p correspondiente a los *ejes principales de deformación* y los valores de las *deformaciones principales* $\epsilon_{\text{máx}}$ y $\epsilon_{\text{mín}}$ son

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{7.52}$$

$$\epsilon_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{prom}} + R \qquad \text{y} \qquad \epsilon_{\text{mín}} = \epsilon_{\text{prom}} - R \tag{7.51}$$

donde

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{7.50}$$

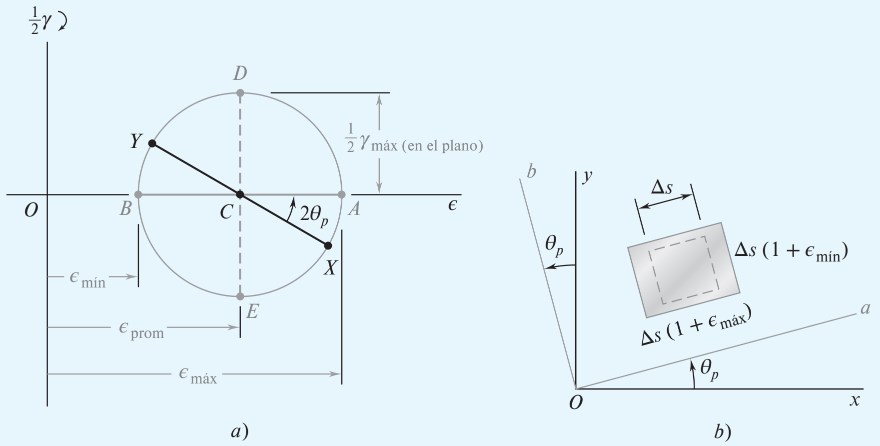


Figura 7.78 *a*) Círculo de Mohr para la deformación plana, que muestra las deformaciones principales y la deformación cortante máxima en el plano. *b*) Elemento de deformación orientado hacia las direcciones principales.

La *deformación cortante máxima* para una rotación en el plano de deformación es

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{7.53}$$

En el caso del *esfuerzo plano*, la deformación principal ϵ_c en una dirección perpendicular al plano de esfuerzo se expresa en términos de las deformaciones principales en el plano ϵ_a y ϵ_b:

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \tag{7.59}$$

Galgas extensiométricas y rosetas de deformación

Las *galgas extensiométricas* se usan para medir la deformación normal en la superficie de un elemento estructural o componente de máquina. Una *roseta de deformación* que consta de tres medidores alineados a lo largo de rectas que forman ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 con el eje x (figura 7.79). Las relaciones entre las medidas ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 de los medidores y las componentes ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}, que caracterizan el estado de deformación en ese punto, son

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2\theta_1 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \\
\epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2\theta_2 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \\
\epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2\theta_3 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_3 \cos\theta_3
\end{aligned} \tag{7.60}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, una vez que se han determinado ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3.

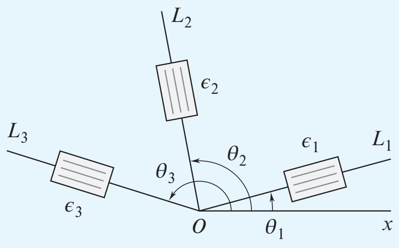


Figura 7.79 Arreglo generalizado de galgas extensiométricas en roseta.

Problemas de repaso

7.158 Un tubo de acero con 12 in de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa con $\frac{1}{4}$ in de espesor, la cual se suelda a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 22.5° con un plano perpendicular al eje del tubo. Si se aplica una fuerza axial **P** de 40 kips y un par de torsión **T** de 80 kip · in, cada uno de ellos con la dirección mostrada, determine los esfuerzos cortantes normal y en el plano en las direcciones normal y tangencial a la soldadura, respectivamente.

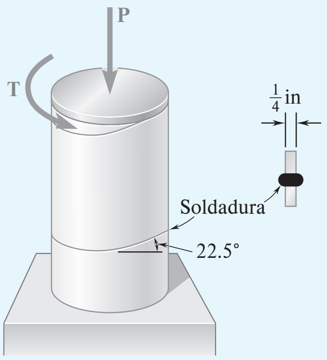


Figura P7.158

7.159 Dos placas de acero con sección transversal uniforme de 10 × 80 mm se sueldan entre sí, como se muestra en la figura. Si se sabe que se aplican cargas céntricas de 100 kN sobre las placas soldadas y que $\beta = 25°$, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la soldadura, *b*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura.

7.160 Dos placas de acero con sección transversal uniforme de 10 × 80 mm se sueldan entre sí, como se muestra en la figura. Si se sabe que se aplican cargas céntricas de 100 kN sobre las placas soldadas y que el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la soldadura es de 30 MPa, determine *a*) el ángulo β, *b*) el esfuerzo normal correspondiente perpendicular a la soldadura.

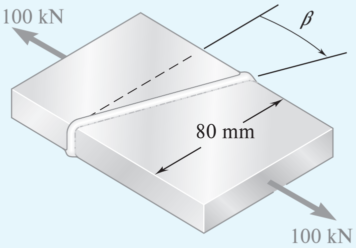


Figura P7.159 y *P7.160*

7.161 Determine los planos principales y los esfuerzos principales para el estado de esfuerzos plano resultante de la superposición de los dos estados de esfuerzos que se muestran en la figura.

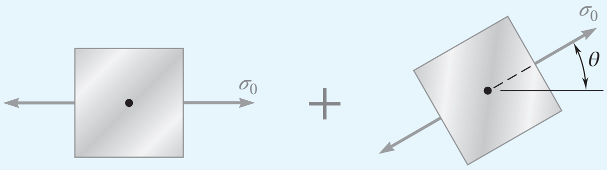


Figura P7.161

7.162 Para el estado de esfuerzos mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_z = +4$ ksi, *b*) $\sigma_z = -4$ ksi, *c*) $\sigma_z = 0$.

7.163 Para el estado de esfuerzos que se muestra en la figura, determine el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo es de *a*) 60 MPa, *b*) 78 MPa.

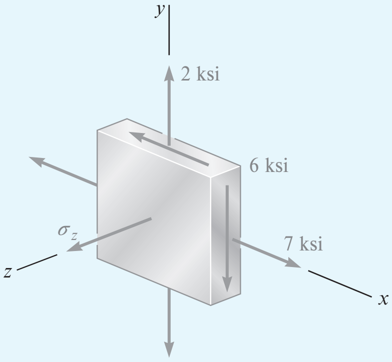


Figura *P7.162*

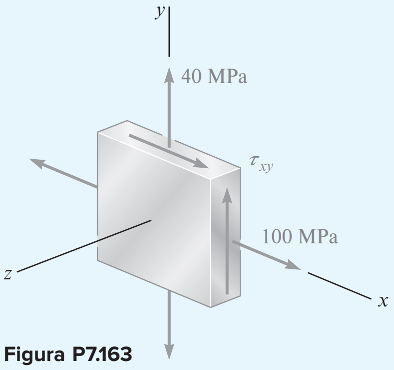


Figura P7.163

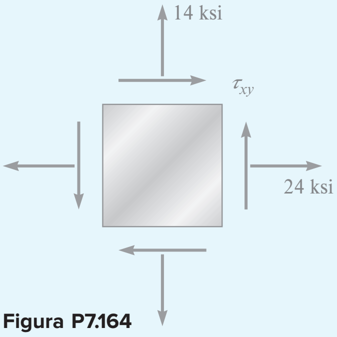


Figura P7.164

7.164 El estado de esfuerzos plano que se muestra en la figura ocurre en un componente de máquina hecho de acero con $\sigma_Y = 30$ ksi. Usando el criterio de la máxima energía de distorsión, determine si ocurre cedencia cuando *a*) $\tau_{xy} = 6$ ksi, *b*) $\tau_{xy} = 12$ ksi, *c*) $\tau_{xy} = 14$ ksi. Si no ocurre la cedencia, determine el factor de seguridad correspondiente.

7.165 El tanque de aire comprimido *AB* tiene un diámetro interior de 450 mm y una pared uniforme de 6 mm de espesor. Si se sabe que la presión manométrica en el tanque es de 1.2 MPa, determine el máximo esfuerzo normal y el máximo esfuerzo cortante en el plano, en el punto *a* que se encuentra en la parte superior del tanque.

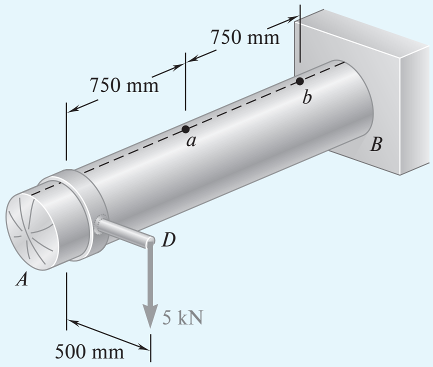


Figura P7.165

7.166 Para el tanque de aire comprimido y la carga del problema 7.165, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el plano, en el punto *b* de la parte superior del tanque.

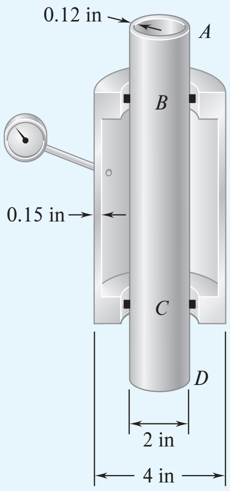


Figura P7.167

7.167 El tubo de latón *AD* pasa dentro de una camisa usada para aplicar una presión hidrostática de 500 psi sobre la porción *BC* del tubo. Si se sabe que la presión dentro del tubo es de 100 psi, determine el esfuerzo normal máximo en el tubo.

7.168 Para el ensamble del problema 7.167, determine el esfuerzo normal en la camisa *a*) en una dirección perpendicular al eje longitudinal de la camisa, *b*) en una dirección paralela a ese eje.

7.169 Determine la máxima deformación normal en el plano, si se sabe que mediante el uso de la roseta mostrada en la figura, se obtuvieron las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -50 \times 10^{-6} \text{ in/in} \qquad \epsilon_2 = +360 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$
$$\epsilon_3 = +315 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

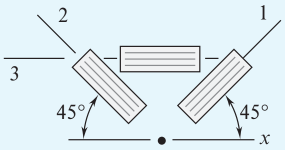


Figura P7.169

Problemas de computadora

Los siguientes problemas están diseñados para resolverse con una computadora.

7.C1 Un estado de esfuerzos plano está definido por las componentes de esfuerzo σ_x, σ_y y τ_{xy} asociadas con el elemento de la figura P7.C1*a*. *a*) Escriba un programa para computadora que calcule las componentes de esfuerzo $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con el elemento después de haberlo girado un ángulo θ alrededor del eje z (figura P7.C1*b*). *b*) Use este programa para resolver los problemas 7.13 a 7.16.

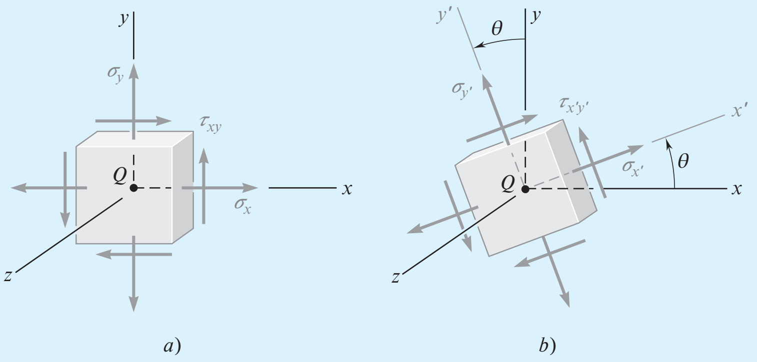


Figura P7.C1

7.C2 Un estado de esfuerzos plano está definido por las componentes σ_x, σ_y y τ_{xy} asociadas con el elemento de la figura P7.C1*a*. *a*) Escriba un programa para computadora que determine los ejes principales, los esfuerzos principales, el máximo esfuerzo cortante en el plano y el máximo esfuerzo cortante. *b*) Use este programa para resolver los problemas 7.5, 7.9, 7.68 y 7.69.

7.C3 *a*) Escriba un programa de computadora que, para un estado dado de esfuerzo plano y una resistencia a la cedencia dado de un material dúctil, pueda utilizarse para determinar si el material cederá. El programa deberá utilizar tanto el criterio del máximo esfuerzo cortante como el de la energía máxima de distorsión. Asimismo, deben imprimirse los valores de los esfuerzos principales y, si el material no cede, calcule el factor de seguridad. *b*) Use este programa para resolver los problemas 7.81, 7.82 y 7.164.

7.C4 *a*) Escriba un programa para computadora basado en el criterio de ruptura de Mohr para materiales frágiles que, para un estado dado de esfuerzo plano y valores dados de la resistencia última de un material a tensión y a compresión, pueda usarse para determinar si ocurrirá ruptura o no. El programa debe imprimir también los valores de los esfuerzos principales. *b*) Use el programa para resolver los problemas 7.91 y 7.92, y para verificar las respuestas a los problemas 7.93 y 7.94.

7.C5 Un estado de deformación plana se define por las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes x y y. *a*) Escriba un programa para computadora que calcule las componentes de deformación $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ y $\gamma_{x'y'}$ asociadas con el marco de referencia $x'y'$ obtenido al rotar los ejes x y y un ángulo θ. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 7.129 y 7.131.

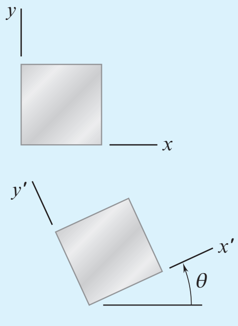
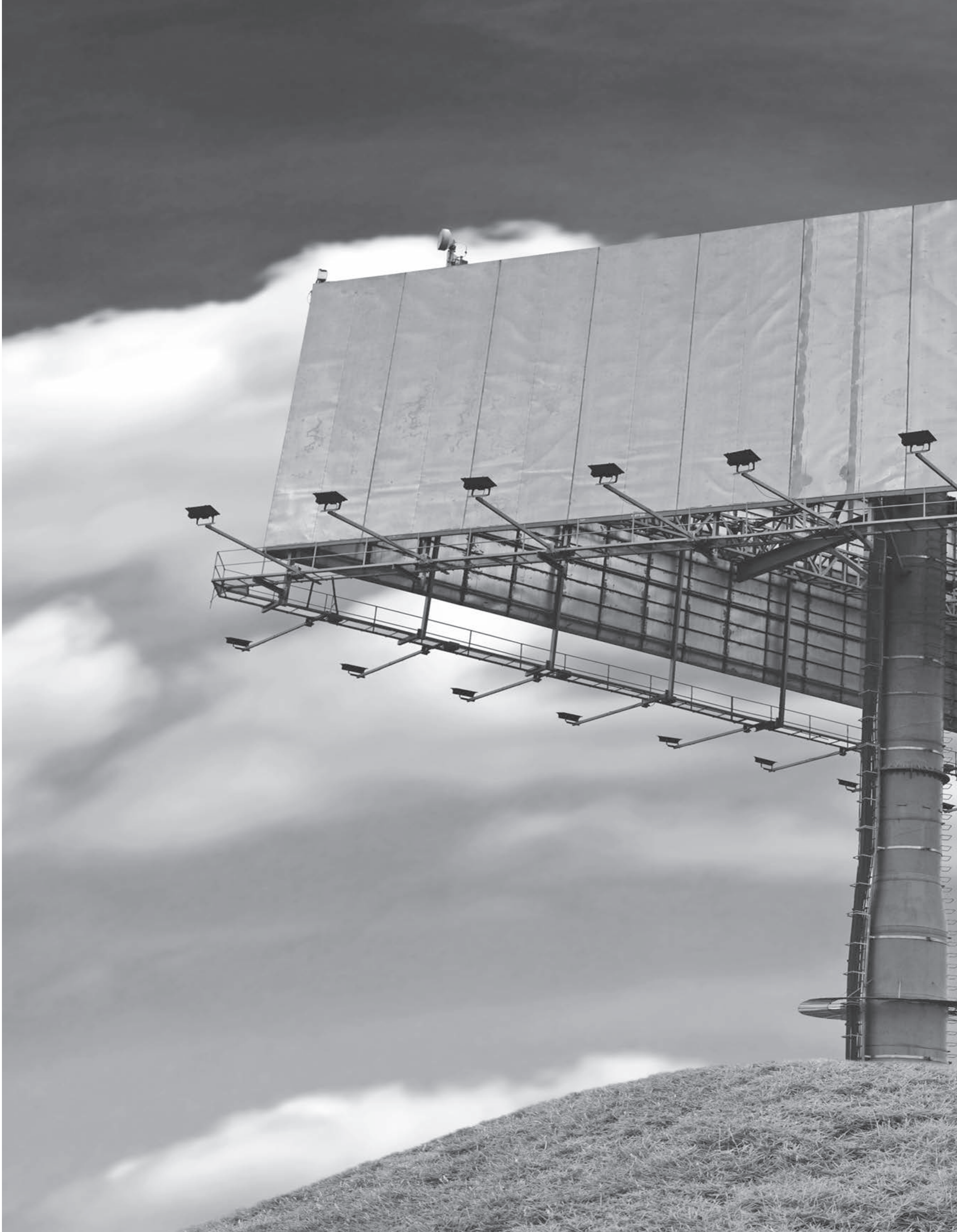


Figura P7.C5

7.C6 Un estado de deformación se define por las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, asociadas con los ejes x y y. *a*) Escriba un programa para computadora que determine la orientación y magnitud de las deformaciones principales, la deformación cortante máxima en el plano y la deformación cortante máxima. *b*) Use este programa para resolver los problemas 7.136 a 7.139.

7.C7 Un estado de deformación plana está definido por las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} medidas en un punto. *a*) Escriba un programa para computadora que determine la orientación y magnitud de las deformaciones principales, la deformación cortante máxima en el plano, así como la magnitud de la deformación cortante. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 7.140 a 7.143.

7.C8 Una roseta que consta de tres medidores, que forma dos ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 con el eje x, se adhiere a la superficie libre de un elemento de máquina hecho de un material con una relación de Poisson ν. *a*) Escriba un programa que, para las lecturas dadas ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 de las galgas, pueda utilizarse para calcular las componentes de deformación asociadas con los ejes x y y a fin de obtener la orientación y magnitud de las tres deformaciones principales, la deformación cortante máxima en el plano y la deformación cortante máxima. *b*) Use este programa para resolver los problemas 7.144, 7.145, 7.146 y 7.169.



8

Esfuerzos principales bajo una carga dada

Debido a la gravedad y a la carga del viento, la columna que soporta el anuncio está sometida en forma simultánea a compresión, flexión y torsión. En este capítulo se examinarán los esfuerzos resultantes de tales cargas combinadas.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Describir** cómo varían los componentes de esfuerzo a través de una viga.
- **Identificar** las ubicaciones clave para el análisis de esfuerzos en una viga de forma I.
- **Diseñar** ejes de transmisión sujetos a cargas transversales y pares de torsión.
- **Describir** los esfuerzos a través de un elemento, que surgen de cargas combinadas.

Introducción

8.1 Esfuerzos principales en una viga

8.2 Diseño de ejes de transmisión

8.3 Esfuerzos bajo cargas combinadas

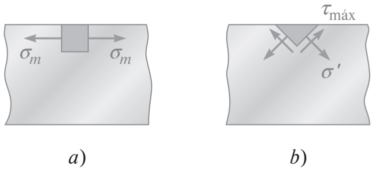


Figura 8.1 Elementos de esfuerzo donde el esfuerzo normal es máximo en una viga cargada transversalmente. *a*) Elemento que muestra el esfuerzo normal máximo. *b*) Elemento que muestra el esfuerzo cortante máximo correspondiente.

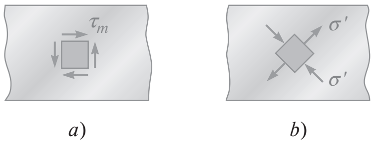


Figura 8.2 Elementos de esfuerzo donde el esfuerzo cortante es máximo en una viga cargada transversalmente. *a*) Elemento que muestra el esfuerzo cortante máximo. *b*) Elemento que muestra el esfuerzo normal máximo correspondiente.

Introducción

En la primera parte de este capítulo se aplicarán los conocimientos adquiridos en el capítulo 7 sobre la transformación de esfuerzos al diseño de vigas y ejes. En la segunda parte se estudiará cómo determinar los esfuerzos principales en elementos estructurales y de maquinaria sujetos a condiciones dadas de carga.

En el capítulo 5 se estudió el esfuerzo normal máximo σ_m que ocurre en una viga sometida a una carga transversal (figura 8.1*a*) y se verificó si dicho valor excedía el esfuerzo permisible σ_{perm} para el material dado. Si fuera así, el diseño de la viga no sería aceptable. Si bien el peligro para un material frágil en realidad es fallar a la tensión, para un material dúctil es fallar a cortante (figura 8.1*b*). Entonces, una situación en la que $\sigma_m > \sigma_{perm}$ indica que $|M|_{máx}$ es demasiado grande para la sección transversal seleccionada, pero no proporciona ninguna información acerca del mecanismo real de falla. En forma similar, $\tau_m > \tau_{perm}$ indica que $|V|_{máx}$ es demasiado grande para la sección transversal seleccionada. Mientras que el peligro para un material dúctil es, en realidad, fallar en cortante (figura 8.2*a*), el peligro para un material frágil es fallar a la tensión bajo los esfuerzos principales (figura 8.2*b*). La distribución de los esfuerzos principales en una viga se analiza en la sección 8.1.

En función de la forma de la sección transversal de la viga y el valor de la cortante V en la sección crítica, donde $|M| = |M|_{máx}$, podría ocurrir que el mayor valor del esfuerzo normal no se diera en los extremos superior o inferior de la sección, sino en algún otro punto dentro de ésta. En la sección 8.1, una combinación de valores grandes de σ_x y τ_{xy} cerca de la unión del alma y las aletas de una viga W o S puede ocasionar que el valor del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ (figura 8.3) sea mayor que el valor σ_m en la superficie de la viga.

La sección 8.2 cubrirá el diseño de ejes de transmisión sometidos a cargas transversales y a pares de torsión. Se analizará el efecto conjunto de los esfuerzos normales debidos a la flexión y a los esfuerzos cortantes debidos a la torsión.

En la sección 8.3 se determinarán los esfuerzos en un punto K dado de un cuerpo con forma cualquiera sujeto a cargas combinadas. En primer lugar, se reducirá la carga dada a fuerzas y momentos en la sección que contiene a K. Enseguida, se calcularán los esfuerzos normal y cortante en K. Por último, con el uso de uno de los métodos para la transformación de esfuerzos (capítulo 7), se determinarán los planos y esfuerzos principales, así como el esfuerzo cortante máximo.

8.1 ESFUERZOS PRINCIPALES EN UNA VIGA

Considere una viga prismática AB sometida a ciertas cargas arbitrarias transversales (figura 8.4). Se denotarán con V y M la fuerza cortante y el momento flector, respectivamente, en una sección que pase por un punto dado C. Recuerde de los capítulos 5 y 6 que, dentro del límite elástico, los esfuerzos que se ejercen sobre un pequeño elemento con caras perpendiculares a los ejes x y y se reducen a los esfuerzos normales $\sigma_m = Mc/I$ si el elemento se encuentra en la superficie superior o inferior de la viga, y a los esfuerzos cortantes $\tau_m = VQ/It$ si el elemento está en la superficie neutra (figura 8.5).

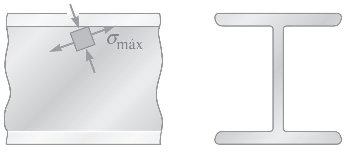


Figura 8.3 Elemento de esfuerzo principal en la unión de una aleta con el alma de una viga de forma I.

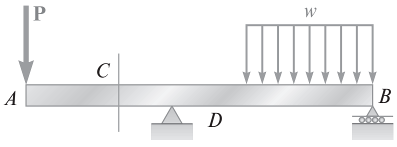


Figura 8.4 Viga prismática cargada transversalmente.

En cualquier otro punto de la sección transversal, un elemento de material está sujeto simultáneamente a los esfuerzos normales

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{8.1}$$

donde y es la distancia desde la superficie neutra e I es el momento de inercia centroidal de la sección, y a los esfuerzos cortantes

$$\tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \tag{8.2}$$

donde Q es el primer momento alrededor del eje neutro de la porción del área de la sección transversal localizada sobre el punto donde se calculan los esfuerzos, y t es el ancho de la sección transversal en ese punto. Con el uso de cualquiera de los métodos de análisis que se presentaron en el capítulo 7, es posible obtener los esfuerzos principales en cualquier punto de la sección transversal (figura 8.6).

Ahora surge la siguiente pregunta: ¿el esfuerzo normal máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en cierto punto dentro de la sección transversal podría ser mayor que el valor $\sigma_m = Mc/I$ calculado en la superficie de la viga? Si es así, entonces la determinación del mayor esfuerzo normal en la viga implicará una dificultad más grande que el cálculo de $|M|_{\text{máx}}$ y el uso de la ecuación (8.1). Se puede obtener una respuesta a esta pregunta con la investigación de la distribución de los esfuerzos principales en una viga rectangular en voladizo sometida a una carga concentrada **P** en su extremo libre (figura 8.7). Recuerde de la sección 6.2, que los esfuerzos normal y cortante a una distancia x de la carga **P** y a una distancia y por encima de la superficie neutra están dados, respectivamente, por las ecuaciones (6.13) y (6.12). Toda vez que el momento de inercia de la sección transversal es

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(bh)(2c)^2}{12} = \frac{Ac^2}{3}$$

donde A es el área de la sección transversal y c la mitad de la profundidad de la viga,

$$\sigma_x = \frac{Pxy}{I} = \frac{Pxy}{\frac{1}{3}Ac^2} = 3\frac{P}{A}\frac{xy}{c^2} \tag{8.3}$$

y

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{8.4}$$

Mediante el uso del método de la sección 7.1B o el de la sección 7.2, puede determinarse $\sigma_{\text{máx}}$ en cualquier punto de la viga. La figura 8.8 muestra los resultados del cálculo de las razones $\sigma_{\text{máx}}/\sigma_m$ y $\sigma_{\text{mín}}/\sigma_m$ en las dos secciones de la viga, correspondientes respectivamente a $x = 2c$ y a $x = 8c$. En cada sección, estas razones se determinaron en 11 puntos diferentes, y se indica la orientación de los ejes principales en cada punto.[†]

Resulta claro que $\sigma_{\text{máx}}$ es menor σ_m en las dos secciones consideradas en la figura 8.8. Si excede a σ_m en algún sitio, será en las secciones cercanas a la carga **P**, donde σ_m es pequeña comparada con τ_m.[‡] Pero, para secciones cercanas a la carga **P**, el principio de Saint-Venant no se aplica, y las ecuaciones (8.3) y (8.4) dejan de ser válidas, excepto en el caso muy improbable de una carga distribuida en forma parabólica sobre el extremo libre de la sección (vea la sección 6.2), donde se usan métodos avanzados de análisis que toman en cuenta el efecto de las concentraciones de esfuerzo. Por lo tanto, se concluye que, para vigas de sección transversal rectangular, y dentro del marco de la teoría presentada en este texto, el esfuerzo normal máximo puede obtenerse de la ecuación (8.1).

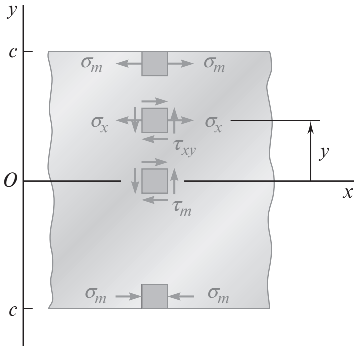


Figura 8.5 Elementos de esfuerzo en puntos seleccionados de una viga.

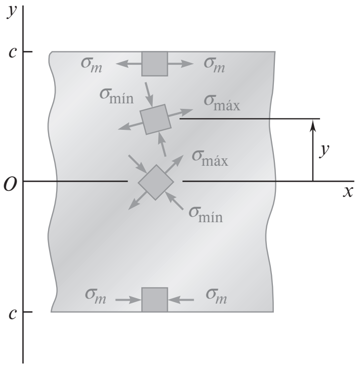


Figura 8.6 Elementos de esfuerzo principal en puntos seleccionados de una viga.

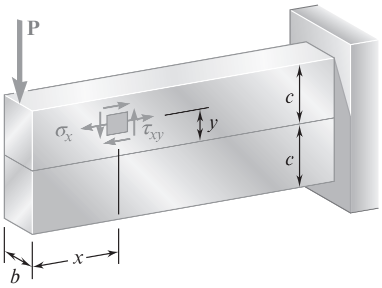
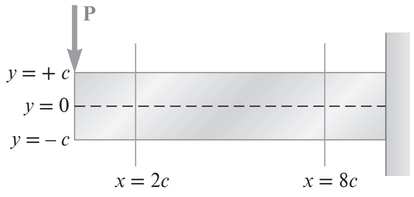


Figura 8.7 Viga rectangular delgada en voladizo que soporta una sola carga concentrada.

[†] Vea el problema 8.C2, que se refiere a un programa que puede escribirse para obtener los resultados de la figura 8.8.

[‡] Como se comprobará en el problema 8.C2, $\sigma_{\text{máx}}$ excede a σ_m si $x \leq 0.544c$.



	$x = 2c$		$x = 8c$	
y/c	$\sigma_{mín}/\sigma_m$	$\sigma_{máx}/\sigma_m$	$\sigma_{mín}/\sigma_m$	$\sigma_{máx}/\sigma_m$
1.0	0	1.000	0	1.000
0.8	–0.010	0.810	–0.001	0.801
0.6	–0.040	0.640	–0.003	0.603
0.4	–0.090	0.490	–0.007	0.407
0.2	–0.160	0.360	–0.017	0.217
0	–0.250	0.250	–0.063	0.063
2 0.2	–0.360	0.160	–0.217	0.017
2 0.4	–0.490	0.090	–0.407	0.007
2 0.6	–0.640	0.040	–0.603	0.003
2 0.8	–0.810	0.010	–0.801	0.001
2 1.0	–1.000	0	–1.000	0

Figura 8.8 Distribución de esfuerzos principales en dos secciones transversales de una viga rectangular en voladizo que soporta una carga concentrada única.

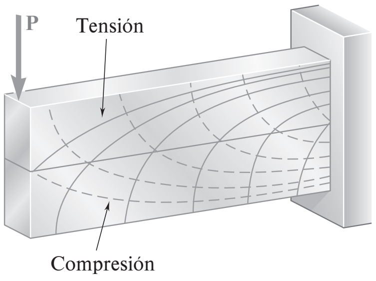


Figura 8.9 Trayectorias de esfuerzo en una viga rectangular en voladizo que soporta una sola carga concentrada.

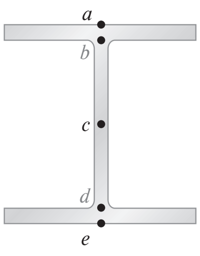


Figura 8.10 Ubicaciones clave para el análisis de esfuerzos en vigas de forma I.

En la figura 8.8 se determinaron las direcciones de los ejes principales en 11 puntos de las dos secciones consideradas. Si este análisis se extendiera a un número mayor de secciones y a un número más grande de puntos en cada sección, sería posible dibujar dos sistemas ortogonales de curvas en el flanco de la viga (figura 8.9). Un sistema consiste en curvas tangentes a los ejes principales que corresponden a $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$. Las curvas así obtenidas se conocen como *trayectorias de esfuerzo.* Una trayectoria del primer grupo (líneas sólidas) define en cada uno de sus puntos la dirección del mayor esfuerzo de tensión, mientras que una trayectoria del segundo grupo (líneas punteadas) define la dirección del mayor esfuerzo de compresión.†

La conclusión a la que se ha llegado para las vigas de sección transversal rectangular, acerca de que el esfuerzo normal máximo en la viga puede obtenerse a partir de la ecuación (8.1), sigue siendo válida para muchas de las vigas de sección transversal no rectangular. Sin embargo, cuando el ancho de la sección transversal varía en forma tal que los esfuerzos cortantes mayores τ_{xy} ocurrirán en los puntos cercanos a la superficie de la viga (donde σ_x también es grande), y en dichos puntos el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ puede ser mayor que σ_m. Esta es una posibilidad distinta cuando se seleccionen vigas W o S, y se calculan los esfuerzos principales $\sigma_{máx}$ en las juntas *b* y *d* del alma con las aletas de la viga (figura 8.10). Esto se hace determinando σ_x y τ_{xy} en ese punto con las ecuaciones (8.1) y (8.2), y con el uso de cualquiera de los métodos de análisis del capítulo 7 para obtener $\sigma_{máx}$ (vea el problema modelo 8.1). Un procedimiento alternativo para seleccionar una sección aceptable usa la aproximación $\tau_{máx} = V/A_{alma}$ [ecuación (6.11)]. Esto conduce a un valor ligeramente mayor, y por lo tanto conservador, del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con las aletas de la viga (vea el problema modelo 8.2).

† Un material frágil, como el concreto, fallará en tensión a lo largo de planos perpendiculares a las trayectorias del esfuerzo de tensión. Así, para ser efectivas, las barras de acero de refuerzo deben colocarse en forma tal que intersequen a dichos planos. Por otro lado, las varillas unidas al alma de un larguero de placa serán eficaces para evitar el pandeo solo si intersecan planos perpendiculares a las trayectorias del esfuerzo de compresión.

8.2 DISEÑO DE EJES DE TRANSMISIÓN

El diseño de ejes de transmisión en la sección 3.4 solo consideró los esfuerzos debidos a los pares de torsión ejercidos sobre los ejes. Sin embargo, si la potencia se transfiere hacia el eje y desde éste por medio de engranes o ruedas dentadas (figura 8.11*a*), las fuerzas ejercidas sobre los dientes de los engranes son equivalentes a sistemas fuerza-momento aplicados en los centros de las secciones transversales correspondientes (figura 8.11*b*). Esto significa que el eje se somete a una carga transversal y a una carga de torsión.

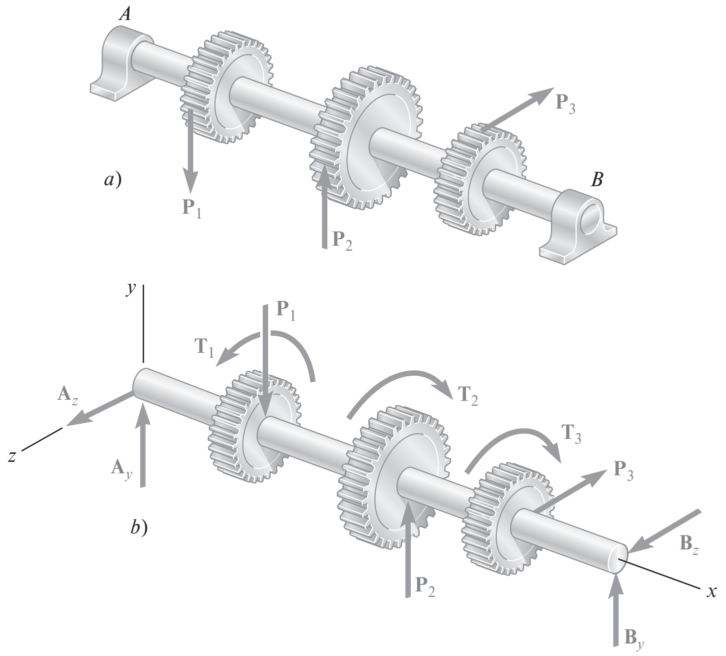


Figura 8.11 Cargas en sistemas de engranes y ejes. *a*) Fuerzas aplicadas a dientes de engranes. *b*) Diagrama de cuerpo libre de un eje, donde las fuerzas de engrane se reemplazan por sistemas equivalentes fuerza-momento aplicados al eje.

Los esfuerzos cortantes producidos en el eje por las cargas transversales suelen ser mucho más pequeños que los provocados por los pares de torsión, por lo que no se incluirán en este análisis.[†] Sin embargo, los esfuerzos normales debidos a las cargas transversales, pueden ser muy grandes y su contribución al esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ debiera tomarse en cuenta.

Considere la sección transversal del eje en algún punto *C*. Se representa el par de torsión **T** y los momentos de flexión $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ que actúan, en un plano horizontal y en otro vertical por medio de los vectores que se muestran (figura 8.12*a*). Dado que cualquier diámetro de la sección es un eje principal de inercia para la sección, puede reemplazarse $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ por su resultante **M** (figura 8.12*b*) con el objeto de calcular los esfuerzos normales σ_x. Así, σ_x es máximo al final del diámetro perpendicular al vector que representa a **M** (figura 8.13). Al recordar que los valores de los esfuerzos normales en ese punto son, respectivamente, $\sigma_m = Mc/I$ y cero, mientras que el esfuerzo cortante es $\tau_m = Tc/J$, se grafican los puntos correspondientes *X* y *Y* en un diagrama de círculo de Mohr (figura 8.14). El esfuerzo cortante máximo resulta ser

$$\tau_{\text{máx}} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$

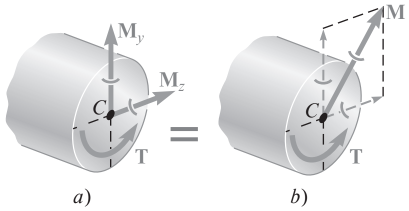


Figura 8.12 *a*) Momentos de torsión y de flexión que actúan sobre la sección transversal de un eje. *b*) Momentos de flexión reemplazados por su resultante **M**.

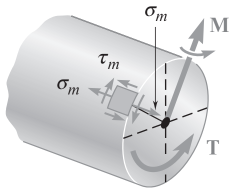


Figura 8.13 Elemento de esfuerzo máximo.

[†] Para una aplicación en la que deban considerarse los esfuerzos cortantes producidos por las cargas transversales, vea los problemas 8.21 y 8.22.

Al recordar que $2I = J$ para una sección transversal circular o anular,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{c}{J}\sqrt{M^2 + T^2} \tag{8.5}$$

Se deduce que el valor mínimo permisible de la razón J/c para la sección transversal del eje es

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M^2 + T^2})_{\text{máx}}}{\tau_{\text{todos}}} \tag{8.6}$$

donde el numerador del miembro del lado derecho de la expresión obtenida representa el valor máximo de $\sqrt{M^2 + T^2}$ en el eje, y τ_{perm} es el esfuerzo cortante permisible. Al expresar el momento flector M en términos de sus componentes en los dos planos coordenados, se obtiene:

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2})_{\text{máx}}}{\tau_{\text{todos}}} \tag{8.7}$$

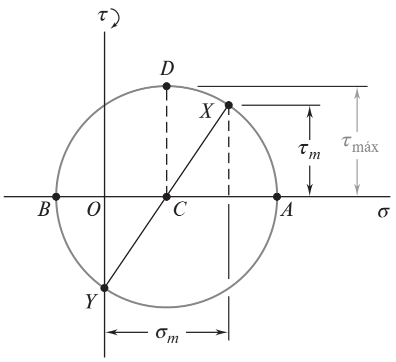


Figura 8.14 Círculo de Mohr para la carga en un eje.

Las ecuaciones (8.6) y (8.7) pueden usarse para diseñar ejes circulares tanto sólidos como huecos y debieran compararse con la ecuación (3.21), la cual se obtuvo con la suposición de tener únicamente una carga de torsión.

El máximo valor de $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ es más fácil de encontrar si se dibujan los diagramas del momento flector que corresponden a M_y y a M_z, así como un tercer diagrama que represente los valores de T a lo largo del eje (vea el problema modelo 8.3).

Problema modelo 8.1

Se aplica una fuerza de 160 kN, como se muestra en la figura, en el extremo de una viga de acero laminado W200 × 52. Ignore el efecto de los filetes y las concentraciones de esfuerzos, y determine si los esfuerzos normales en la viga satisfacen una especificación de diseño menor o igual que 150 MPa en la sección A-A'.

ESTRATEGIA: Para determinar el esfuerzo normal máximo, debe realizar un análisis del esfuerzo en la viga en la superficie de la aleta, así como en la unión del alma y la aleta. Un análisis de círculo de Mohr también será necesario en la unión de la aleta y el alma para determinar este esfuerzo normal máximo.

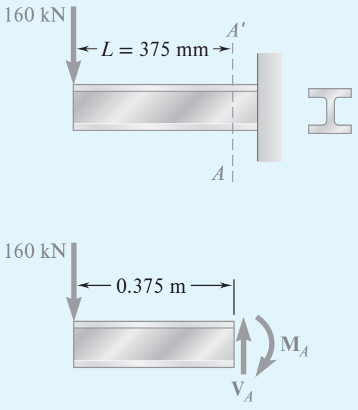


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga con sección en *A-A'*.

MODELAR y ANALIZAR:

Fuerza cortante y momento flector. En la sección A-A' se tiene

$$M_A = (160 \text{ kN})(0.375 \text{ m}) = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$V_A = 160 \text{ kN}$$

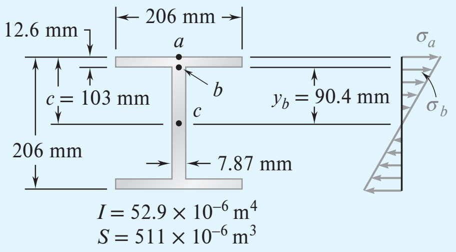


Figura 2 Dimensiones de la sección transversal y distribución del esfuerzo normal.

Esfuerzos normales en el plano transversal. Con referencia a la tabla de *Propiedades de perfiles de acero laminado* en el apéndice C, se obtienen los datos mostrados y con ellos se determinan los esfuerzos σ_a y σ_b (figura 2).

En el punto a:

$$\sigma_a = \frac{M_A}{S} = \frac{60 \text{ kN}\cdot\text{m}}{511 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 117.4 \text{ MPa}$$

En el punto b:

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (117.4 \text{ MPa})\frac{90.4 \text{ mm}}{103 \text{ mm}} = 103.0 \text{ MPa}$$

Se observa que todos los esfuerzos normales sobre el plano transversal son menores a 150 MPa.

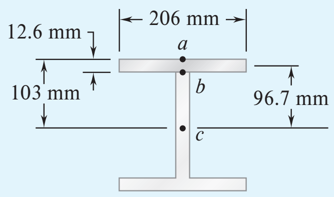


Figura 3 Dimensiones para evaluar Q en el punto b.

Esfuerzos cortantes sobre el plano transversal. Con referencia a la figura 3, se obtienen los datos necesarios para evaluar Q y después se determinan los esfuerzos τ_a y τ_b.

En el punto a:

$$Q = 0 \qquad \tau_a = 0$$

En el punto b:

$$Q = (206 \times 12.6)(96.7) = 251.0 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 251.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_b = \frac{V_A Q}{It} = \frac{(160 \text{ kN})(251.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(52.9 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.00787 \text{ m})} = 96.5 \text{ MPa}$$

Esfuerzos principales en el punto *b*. El estado de los esfuerzos en el punto b consiste en el esfuerzo normal $\sigma_b = 103.0$ MPa y el esfuerzo cortante $\tau_b = 96.5$ MPa. Se dibuja el círculo de Mohr (figura 4) y se encuentra que

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{1}{2}\sigma_b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_b\right)^2 + \tau_b^2}$$

$$= \frac{103.0}{2} + \sqrt{\left(\frac{103.0}{2}\right)^2 + (96.5)^2}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 160.9 \text{ MPa}$$

La especificación $\sigma_{\text{máx}} \leq 150$ MPa, *no* se satisface ◄

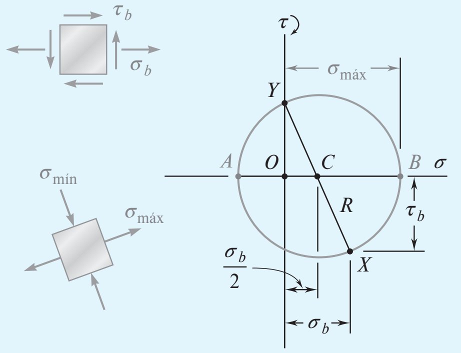


Figura 4 Elemento de esfuerzo para las orientaciones coordenada y principal en el punto b; círculo de Mohr para el punto b.

REVISAR y PENSAR: Para esta viga y carga, el esfuerzo principal en el punto b es 36% mayor que el esfuerzo normal en el punto a. Para $L \geq 881$ mm (figura 5), el esfuerzo normal máximo ocurriría en el punto a.

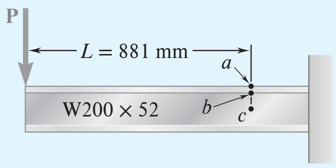
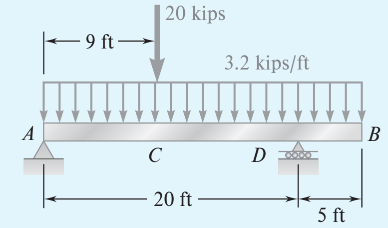


Figura 5 Condiciones donde el esfuerzo máximo en el punto a empieza a exceder en el punto b.



Problema modelo 8.2

La viga colgante *AB* soporta una carga de 3.2 kips/ft uniformemente distribuida y una carga concentrada de 20 kips en *C*. Si se sabe que para el grado de acero que se usará $\sigma_{perm} = 24$ ksi y $\tau_{perm} = 14.5$ ksi, seleccione la forma del perfil de patín ancho que debe usarse.

ESTRATEGIA: Dibuje los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para determinar sus valores máximos. Con base en el momento flector máximo, se puede encontrar el módulo de sección requerido y utilizarlo para seleccionar la forma de patín ancho más ligera disponible. A continuación, se puede verificar que el esfuerzo cortante máximo en el alma y el esfuerzo principal máximo en la unión de la aleta y el alma no exceden los esfuerzos permisibles dados.

MODELAR y ANALIZAR:

Reacciones en *A* y en *D*. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 1). De las ecuaciones de equilibrio $\Sigma M_D = 0$ y $\Sigma M_A = 0$ los valores de R_A y R_D son los mostrados.

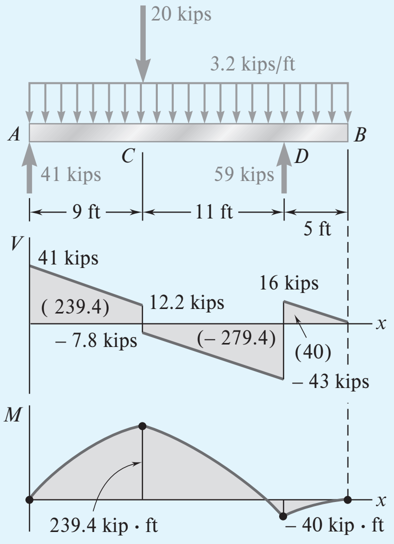


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga; diagramas de cortante y momento flector.

Diagramas de cortante y momento flector. Usando los métodos estudiados en las secciones 5.1 y 5.2, se dibujan los diagramas (figura 1) y se observa que

$$|M|_{máx} = 239.4 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 2\,873 \text{ kip} \cdot \text{in} \qquad |V|_{máx} = 43 \text{ kips}$$

Módulo de la sección. Para $|M|_{máx} = 2\,873$ kip · in y $\sigma_{perm} = 24$ ksi, el módulo de sección mínimo aceptable de la forma de acero laminado es

$$S_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{2\,873 \text{ kip} \cdot \text{in}}{24 \text{ ksi}} = 119.7 \text{ in}^3$$

Selección del perfil de patín ancho. Se elige de la tabla *Propiedades de perfiles de acero laminado* del apéndice C, los perfiles más ligeros de una profundidad dada que tienen un módulo de sección mayor que $S_{mín}$.

Perfil	S(in^3)
W24 × 68	154
W21 × 68	127
W18 × 68	146
W16 × 68	134
W14 × 68	123
W12 × 68	131

El perfil más ligero disponible es W21 × 62 ◀

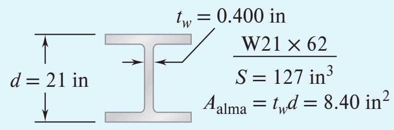


Figura 2 Propiedades de la sección transversal en forma de I.

Esfuerzo cortante. Para el diseño de viga, se supone que el esfuerzo cortante máximo está uniformemente distribuido sobre el área del alma de un perfil W21 × 62 (figura 2). Se escribe

$$\tau_m = \frac{V_{máx}}{A_{alma}} = \frac{43 \text{ kips}}{8.40 \text{ in}^2} = 5.12 \text{ ksi} < 14.5 \text{ ksi} \qquad \text{(OK)}$$

Esfuerzo principal en el punto *b*. El esfuerzo principal máximo en el punto *b* de la sección crítica, donde *M* es máximo, no debe exceder $\sigma_{perm} = 24$ ksi. Con referencia a la figura 3, se escribe

$$\sigma_a = \frac{M_{máx}}{S} = \frac{2\,873 \text{ kip} \cdot \text{in}}{127 \text{ in}^3} = 22.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (22.6 \text{ ksi}) \frac{9.88 \text{ in}}{10.50 \text{ in}} = 21.3 \text{ ksi}$$

De manera conservadora, $\tau_b = \dfrac{V}{A_{alma}} = \dfrac{12.2 \text{ kips}}{8.40 \text{ in}^2} = 1.45 \text{ ksi}$

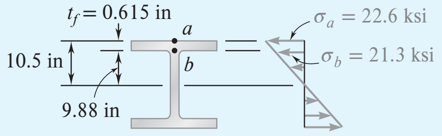


Figura 3 Ubicaciones clave para el análisis de esfuerzos y distribución del esfuerzo normal.

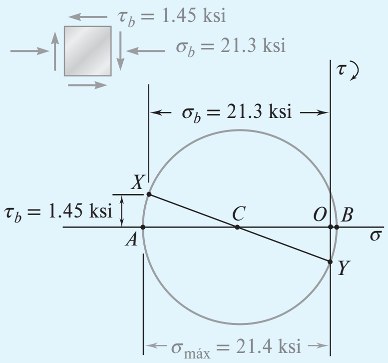


Figura 4 Elemento de esfuerzo en el punto *b* y círculo de Mohr para el punto *b*.

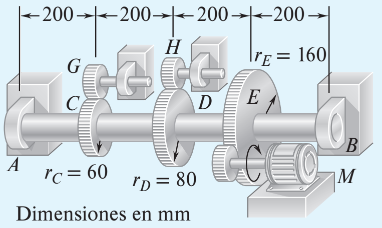
Se dibuja el círculo de Mohr (figura 4) y se encuentra que

$$\sigma_{máx} = \tfrac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{21.3 \text{ ksi}}{2} + \sqrt{\left(\frac{21.3 \text{ ksi}}{2}\right)^2 + (1.45 \text{ ksi})^2}$$

$$\sigma_{máx} = 21.4 \text{ ksi} \leq 24 \text{ ksi} \quad \text{(OK)}$$

Problema modelo 8.3

El eje sólido *AB* gira a 480 rpm y transmite 30 kW del motor *M* a las máquinas herramienta conectadas a los engranes *G* y *H*; se extraen 20 kW en el engrane *G* y 10 kW en el engrane *H*. Si se sabe que $\tau_{perm} = 50$ MPa, determine el menor diámetro permisible para el eje *AB*.



ESTRATEGIA: Después de determinar las fuerzas y momentos ejercidos sobre el eje, se pueden obtener sus diagramas de momento flector y par. Utilizando estos diagramas para identificar la sección transversal crítica, es posible determinar el diámetro de eje requerido.

MODELAR:

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del eje y los engranes (figura 1). Se observa que $f = 480$ rpm $= 8$ Hz, por lo que el par de torsión ejercido sobre el engrane *E* es

$$T_E = \frac{P}{2\pi f} = \frac{30 \text{ kW}}{2\pi (8 \text{ Hz})} = 597 \text{ N} \cdot \text{m}$$

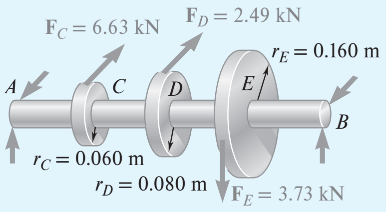


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del eje *AB* y sus engranes.

La fuerza tangencial correspondiente que actúa sobre el engrane es

$$F_E = \frac{T_E}{r_E} = \frac{597 \text{ N·m}}{0.16 \text{ m}} = 3.73 \text{ kN}$$

Un análisis semejante de los engranes C y D produce

$$T_C = \frac{20 \text{ kW}}{2\pi (8 \text{ Hz})} = 398 \text{ N} \cdot \text{m} \quad F_C = 6.63 \text{ kN}$$

$$T_D = \frac{10 \text{ kW}}{2\pi (8 \text{ Hz})} = 199 \text{ N} \cdot \text{m} \quad F_D = 2.49 \text{ kN}$$

Ahora, se reemplazan las fuerzas en los engranes por sistemas fuerza-momento equivalentes, como se muestra en la figura 2.

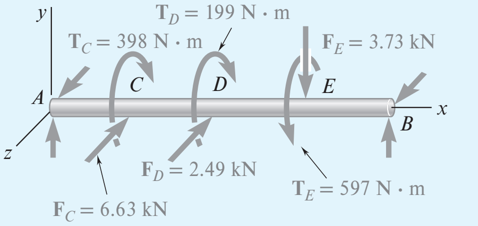


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del eje *AB*, con las fuerzas de engrane reemplazadas por sistemas fuerza-momento equivalentes.

ANALIZAR:

Diagramas de momento flector y de par de torsión (figura 3)

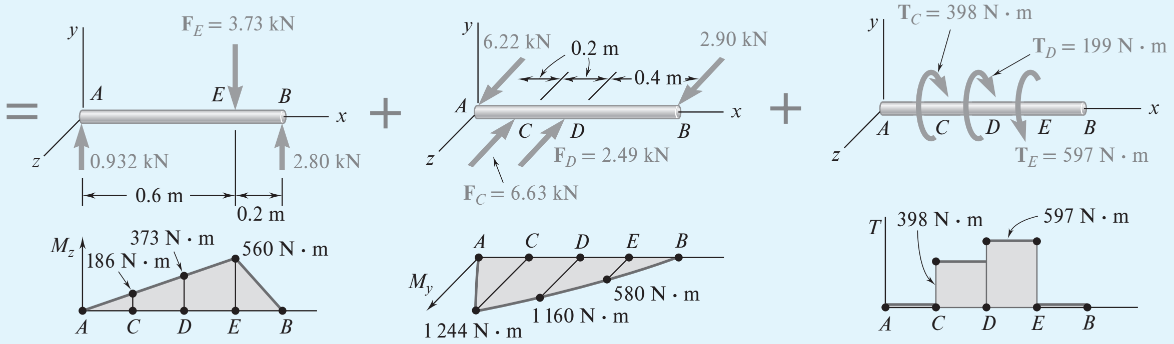


Figura 3 El análisis del diagrama de cuerpo libre del eje *AB* solo con cargas equivalentes de fuerza-momento es equivalente a la superposición de momentos flectores provenientes de las cargas verticales, las cargas horizontales y los pares de torsión aplicados.

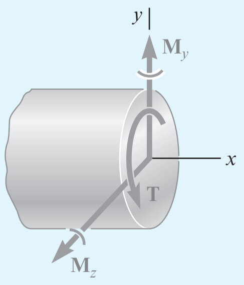


Figura 4 Componentes del momento flector y el par de torsión en la sección crítica.

Sección transversal crítica. Al calcular $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ en todas las secciones potencialmente críticas (figura 4), se encuentra que su valor máximo ocurre justo a la derecha de D:

$$\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}_{\text{máx}} = \sqrt{(1\,160)^2 + (373)^2 + (597)^2} = 1\,357 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Diámetro del eje. Para $\tau_{\text{perm}} = 50$ MPa, la ecuación (7.32) conduce a

$$\frac{J}{c} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}_{\text{máx}}}{\tau_{\text{todos}}} = \frac{1\,357 \text{ N} \cdot \text{m}}{50 \text{ MPa}} = 27.14 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Para un eje sólido circular de radio c,

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2} c^3 = 27.14 \times 10^{-6} \qquad c = 0.02585 \text{ m} = 25.85 \text{ mm}$$

$$\text{Diámetro} = 2c = 51.7 \text{ mm}$$

Problemas

8.1 Una viga de acero laminado W10 × 39 soporta una carga **P**, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 45$ kips, $a = 10$ in y $\sigma_{perm} = 18$ ksi, determine *a*) el máximo valor del esfuerzo normal σ_m en la viga, *b*) el máximo valor del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con la aleta, *c*) si la forma especificada es aceptable en lo que concierne a estos dos esfuerzos.

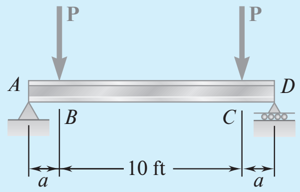


Figura P8.1

8.2 Resuelva el problema 8.1, pero ahora suponga que $P = 22.5$ kips y $a = 20$ in.

8.3 Una viga colgante W920 × 449 de acero laminado soporta una carga **P** como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 700$ kN, $a = 2.5$ m y $\sigma_{perm} = 100$ MPa, determine *a*) el valor máximo del esfuerzo normal σ_m en la viga, *b*) el valor máximo del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con la aleta, *c*) si la forma especificada es aceptable en lo referente a estos dos esfuerzos.

8.4 Resuelva el problema 8.3, pero ahora suponga que $P = 850$ kN y $a = 2.0$ m.

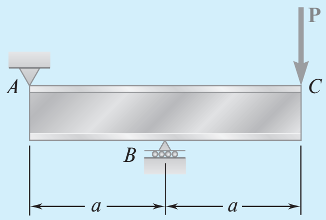


Figura P8.3

8.5 y 8.6 *a*) Si se sabe que $\sigma_{perm} = 160$ MPa y $\tau_{perm} = 100$ MPa, seleccione el perfil métrico de patín ancho más económico que debe emplearse para soportar la carga que se indica en la figura. *b*) Determine los valores esperados para σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con la aleta de la viga seleccionada.

8.7 y 8.8 *a*) Si se sabe que $\sigma_{perm} = 24$ ksi y $\tau_{perm} = 14.5$ ksi, seleccione el perfil de patín ancho más económico que debe usarse para sostener la carga que se muestra en la figura. *b*) Determine los valores esperados de σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la junta del alma con la aleta de la viga seleccionada.

8.9 a 8.14 Cada uno de los siguientes problemas se refiere a un perfil de acero laminado seleccionado en un problema del capítulo 5 para sostener una carga dada a costo mínimo a fin de satisfacer el requerimiento de que $\sigma_m \leq \sigma_{perm}$. Para el diseño seleccionado, determine *a*) el valor real de σ_m en la viga, *b*) el máximo valor del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con la aleta.

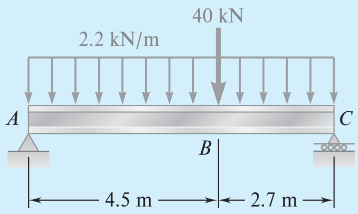


Figura P8.5

8.9 La carga del problema 5.73 y el perfil seleccionado W530 × 92.

8.10 La carga del problema 5.74 y el perfil seleccionado W250 × 28.4.

8.11 La carga del problema 5.75 y el perfil seleccionado S12 × 31.8.

8.12 La carga del problema 5.76 y el perfil seleccionado S15 × 42.9.

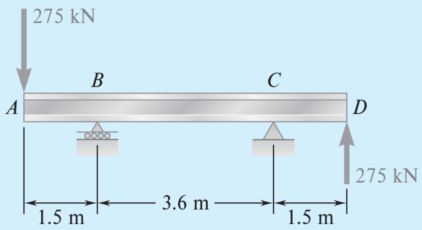


Figura P8.6

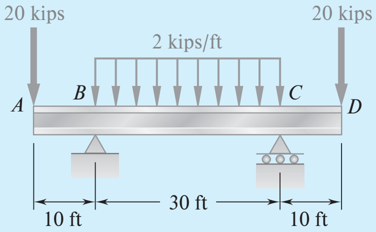


Figura *P8.7*

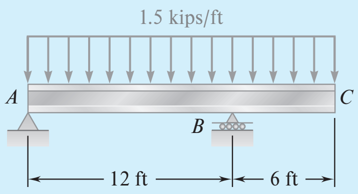


Figura *P8.8*

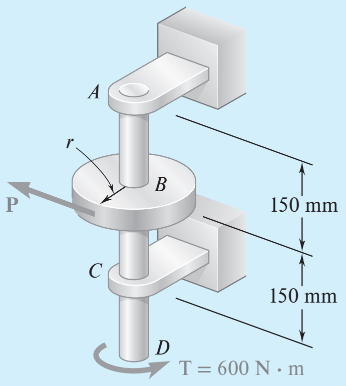


Figura P8.15 y *P8.16*

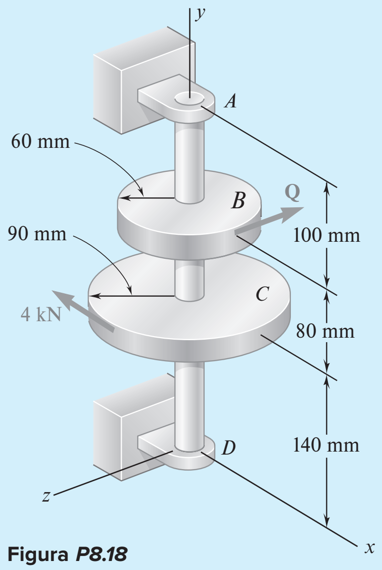


Figura *P8.18*

8.13 La carga del problema 5.77 y el perfil seleccionado S510 × 98.2.

8.14 La carga del problema 5.78 y el perfil seleccionado S460 × 81.4.

8.15 Determine el diámetro mínimo permisible del eje sólido *ABCD*, si se sabe que $\tau_{perm} = 60$ MPa y que el radio del disco *B* es $r = 80$ mm.

8.16 Determine el diámetro mínimo permisible del eje sólido *ABCD*, si se sabe que $\tau_{perm} = 60$ MPa y que el radio del disco *B* es $r = 120$ mm.

8.17 Utilice la notación de la sección 8.2 y desprecie el efecto que tienen los esfuerzos cortantes ocasionados por las cargas transversales, para demostrar que el esfuerzo normal máximo en un eje circular puede expresarse como

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{c}{J}\left[(M_y^2 + M_z^2)^{\frac{1}{2}} + (M_y^2 + M_z^2 + T^2)^{\frac{1}{2}}\right]_{\text{máx}}$$

8.18 La fuerza de 4 kN es paralela al eje *x*, y la fuerza **Q** es paralela al eje *z*. El eje *AD* es hueco. Si se sabe que el diámetro interior es la mitad del diámetro exterior y que $\tau_{perm} = 60$ MPa, determine el diámetro exterior mínimo permisible para el eje.

8.19 La fuerza vertical $\mathbf{P}_1$ y la fuerza horizontal $\mathbf{P}_2$ se aplican a los discos soldados al eje sólido *AD* como se muestra en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje es de 1.75 in y que $\tau_{perm} = 8$ ksi, determine la magnitud máxima permisible de la fuerza $\mathbf{P}_2$.

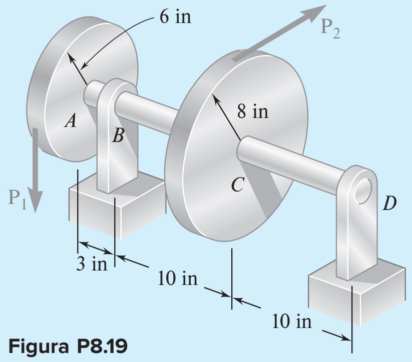


Figura P8.19

8.20 Las dos fuerzas de 500 lb son verticales y la fuerza **P** es paralela al eje *z*. Si $\tau_{perm} = 8$ ksi, determine el diámetro mínimo permisible del eje sólido *AE*.

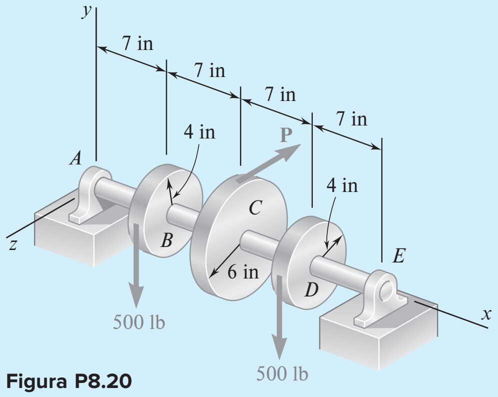


Figura P8.20

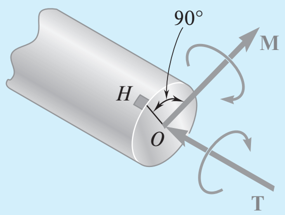
8.21 En la sección 8.2 se estableció que los esfuerzos cortantes producidos en un eje por cargas transversales, generalmente son mucho más pequeños que los producidos por los pares de torsión. En los problemas precedentes se ignoró su efecto y se supuso que el esfuerzo cortante máximo en una sección ocurría en el punto *H* (figura P8.21*a*) y era igual a la expresión obtenida para la ecuación (8.5), a saber

$$\tau_H = \frac{c}{J}\sqrt{M^2 + T^2}$$

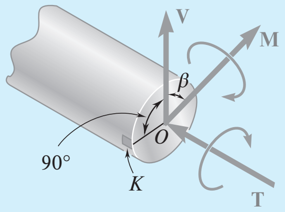
Demuestre que el esfuerzo cortante máximo en el punto *K* (figura P8.21*b*), donde el efecto del cortante *V* es máximo, puede expresarse como

$$\tau_K = \frac{c}{J}\sqrt{(M\cos\beta)^2 + \left(\frac{2}{3}cV + T\right)^2}$$

donde β es el ángulo entre los vectores **V** y **M**. Es evidente que el efecto de la fuerza cortante *V* no puede ignorarse cuando $\tau_K \geq \tau_H$. (*Sugerencia:* Considere que solo la componente de **M** a lo largo de **V** contribuye al esfuerzo cortante en *K*).



a)



b)

Figura P8.21

8.22 Suponga que las magnitudes de las fuerzas aplicadas a los discos *A* y *C* del problema 8.19 son, respectivamente, P_1 = 1 080 lb y P_2 = 810 lb; además use las expresiones dadas en el problema 8.21 para determinar los valores de τ_H y τ_K en una sección *a*) justo a la izquierda de *B*, *b*) justo a la izquierda de *C*.

8.23 El eje sólido *AB* gira a 600 rpm y transmite 80 kW del motor *M* a una máquina herramienta conectada al engrane *F*. Si se sabe que τ_{perm} = 60 MPa, determine el diámetro mínimo permisible para el eje *AB*.

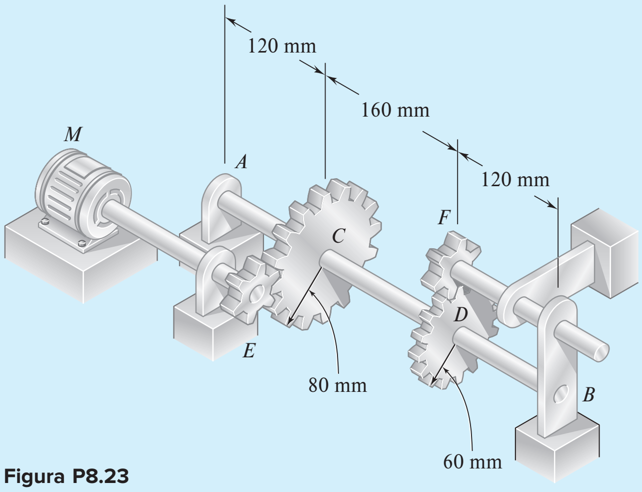


Figura P8.23

8.24 Resuelva el problema 8.23 suponiendo que el eje *AB* gira a 720 rpm.

8.25 Los ejes sólidos *ABC* y *DEF*, así como los engranes que se muestran en la figura, se utilizan para transmitir 20 hp del motor *M* a una máquina herramienta conectada al eje *DEF*. Si se sabe que el motor gira a 240 rpm y que τ_{perm} = 7.5 ksi, determine el diámetro mínimo permisible *a*) del eje *ABC*, *b*) del eje *DEF*.

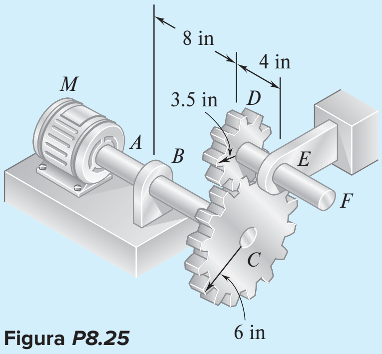


Figura *P8.25*

8.26 Resuelva el problema 8.25 suponiendo que el motor gira a 360 rpm.

8.27 El eje sólido *ABC* y los engranes mostrados en la figura se utilizan para transmitir 10 kW del motor *M* a una máquina herramienta conectada al engrane *D*. Si se sabe que el motor gira a 240 rpm y que $\tau_{perm} = 60$ MPa, determine el diámetro mínimo permisible del eje *ABC*.

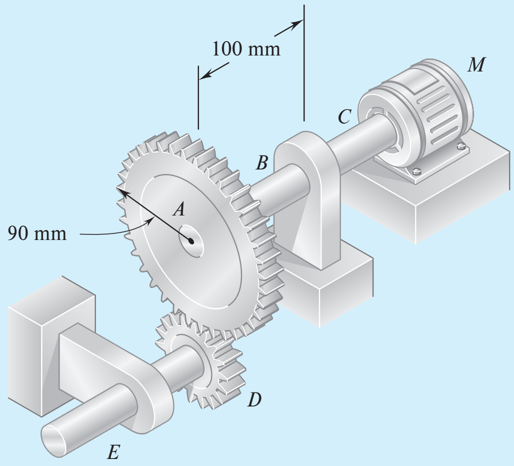


Figura P8.27

8.28 Suponga que el eje *ABC* del problema 8.27 es hueco y tiene un diámetro exterior de 50 mm, determine su máximo diámetro interior permisible.

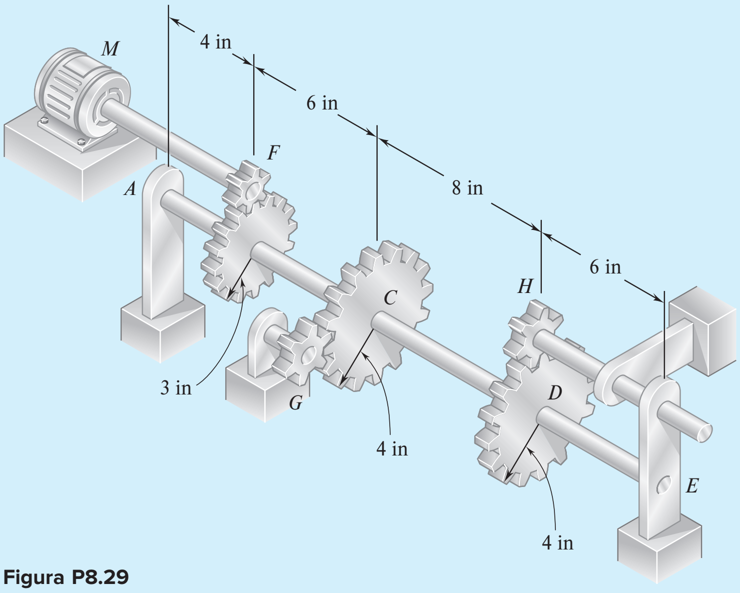


Figura P8.29

8.29 El eje sólido *AE* gira a 600 rpm y transmite 60 hp del motor *M* a las máquinas herramienta conectadas a los engranes *G* y *H*. Si se sabe que $\tau_{perm} = 8$ ksi y que se extraen 40 hp en el engrane *G* y 20 hp en el engrane *H*, determine el diámetro mínimo permisible para el eje *AE*.

8.30 Resuelva el problema 8.29, pero ahora suponga que se extraen 30 hp en el engrane *G* y 30 hp en el engrane *H*.

8.3 ESFUERZOS BAJO CARGAS COMBINADAS

En los capítulos 1 y 2 aprendió a determinar los esfuerzos causados por una carga axial céntrica. En el capítulo 3 analizó la distribución de esfuerzos en un elemento cilíndrico sometido a un momento de torsión. En el capítulo 4 se determinaron los esfuerzos ocasionados por momentos flectores y, en los capítulos 5 y 6, los esfuerzos que producen cargas transversales. Como se verá enseguida, es posible combinar los conocimientos adquiridos para determinar los esfuerzos en elementos estructurales esbeltos o en componentes de máquina sometidos a casi cualquier condición de carga. Por ejemplo, el elemento curvo *ABDE* de sección transversal circular está sometido a varias fuerzas (figura 8.15). Con objeto de determinar los esfuerzos en los puntos *H* o *K*, primero se pasa una sección por dichos puntos y se determina el sistema fuerza-momento en el centroide *C* de la sección que se requiere para conservar el equilibrio de la porción *ABC*.† Este sistema representa las fuerzas internas en la sección y consta de tres componentes de fuerza y tres vectores de momento que se suponen dirigidos como se muestra en la figura 8.16.

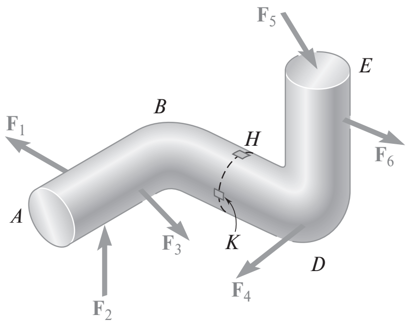


Figura 8.15 Elemento *ABDE* sometido a varias fuerzas.

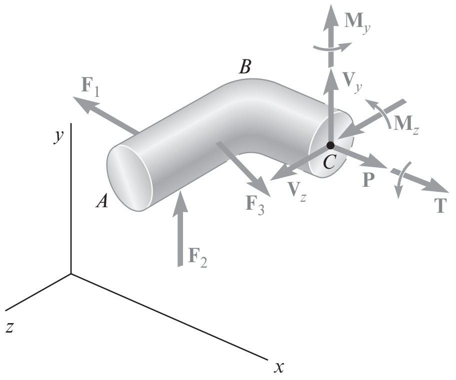


Figura 8.16 Diagrama de cuerpo libre del segmento *ABC* para determinar las fuerzas y los momentos internos en la sección transversal *C*.

La fuerza **P** es axial céntrica que produce esfuerzos normales en la sección. Los vectores de momento $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ provocan que el elemento se flexione y también producen esfuerzos normales en la sección. Por lo tanto, se agrupan en la figura 8.17*a* y las sumas σ_x de los esfuerzos normales producidos en los puntos *H* y *K* se muestran en la figura 8.18*a*. Estos esfuerzos se pueden determinar como se vio en la sección 4.9.

Por otro lado, el momento de torsión **T** y las fuerzas cortantes $\mathbf{V}_y$ y $\mathbf{V}_z$ producen esfuerzos cortantes en la sección, como se muestra en la figura 8.17*b*. Las sumas τ_{xy} y

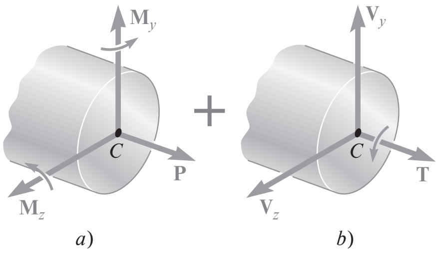


Figura 8.17 Fuerzas internas y vectores de momento separados en *a*) aquellos que causan esfuerzos normales y *b*) los que ocasionan esfuerzos cortantes.

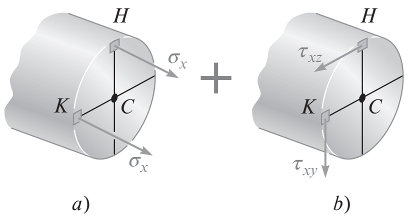


Figura 8.18 Esfuerzos normales y cortantes en los puntos *H* y *K*.

† El sistema fuerza-momento en *C* también puede definirse como *equivalente a las fuerzas que actúan sobre la porción del elemento localizado a la derecha de la sección* (vea la Aplicación de conceptos 8.1).

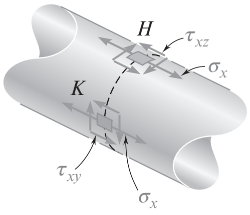


Figura 8.19 Elementos en los puntos *H* y *K* que muestran esfuerzos combinados.

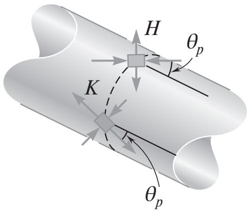


Figura 8.20 Elementos en los puntos *H* y *K* que muestran los esfuerzos principales.

τ_{xz} de las componentes de los esfuerzos cortantes producidos en los puntos *H* y *K* se muestran en la figura 8.18*b* y pueden determinarse como se indica en las secciones 3.1C y 6.1B.† Los esfuerzos normales y cortantes que se muestran en las partes *a* y *b* pueden combinarse ahora y dibujarse en los puntos *H* y *K* sobre la superficie del elemento (figura 8.19).

Los esfuerzos principales y la orientación de los planos principales en los puntos *H* y *K* se determinan a partir de σ_x, τ_{xy} y τ_{xz} en cada uno de estos puntos, mediante alguno de los métodos que se presentaron en el capítulo 7 (figura 8.20). Los valores del esfuerzo cortante máximo en cada uno de estos puntos y los planos correspondientes se pueden encontrar en una forma similar.

Los resultados obtenidos en esta sección son válidos solo si se satisfacen las condiciones de aplicabilidad del principio de superposición (sección 2.5) y el principio de Saint-Venant (sección 2.10):

1. Los esfuerzos involucrados no deben exceder el límite proporcional del material.
2. Las deformaciones debidas a alguna de las cargas no deben afectar la determinación de los esfuerzos debidas a las demás.
3. La sección utilizada en el análisis no debe estar demasiado cerca de los puntos de aplicación de las fuerzas dadas.

El primero de estos requisitos muestra que el método presentado aquí no es aplicable a las deformaciones plásticas.

† Note que el conocimiento que posee en este momento le permite calcular el efecto del momento de torsión **T** solo en ejes circulares, elementos con sección transversal rectangular (sección 3.9), o elementos huecos de pared delgada (sección 3.10).

Aplicación de conceptos 8.1

Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de magnitudes $P_1 = 15$ kN y $P_2 = 18$ kN, al extremo *A* de la barra *AB*, la cual está soldada a un elemento cilíndrico *BD* de radio $c = 20$ mm, como se muestra en la figura 8.21*a*. Si se sabe que la distancia desde *A* hasta el eje del elemento *BD* es $a = 50$ mm, suponga que todos los esfuerzos permanecen por abajo del límite proporcional del material, y determine *a*) los esfuerzos normal y cortante en el punto *K* de la sección transversal del elemento *BD* localizado a una distancia $b = 60$ mm del extremo *B*, *b*) los ejes y esfuerzos principales en *K*, y *c*) el esfuerzo cortante máximo en *K*.

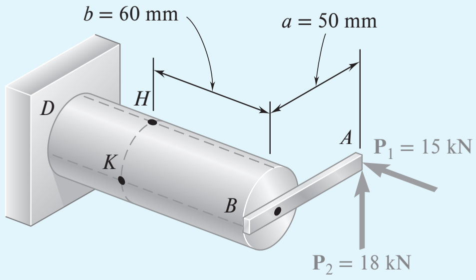


Figura 8.21 Elemento cilíndrico bajo cargas combinadas. *a*) Dimensiones y cargas.

Fuerzas internas en una sección dada. Se reemplazan las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ por un sistema equivalente de fuerzas y momentos aplicados en el centro *C* de la sección que contiene al punto *K* (figura 8.21*b*). Este sistema representa las fuerzas internas en la sección y consiste en las siguientes fuerzas y momentos:

1. Una fuerza axial céntrica **F** igual a la fuerza $\mathbf{P}_1$ con la magnitud

$$F = P_1 = 15 \text{ kN}$$

2. Una fuerza cortante **V** igual a la fuerza $\mathbf{P}_2$ de magnitud

$$V = P_2 = 18 \text{ kN}$$

3. Un momento de torsión **T** de par T igual al momento de $\mathbf{P}_2$ con respecto al eje del elemento BD:

$$T = P_2 a = (18 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$$

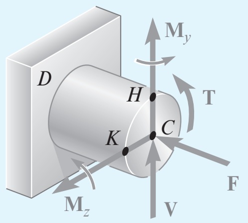
4. Un momento de flexión $\mathbf{M}_y$ de momento M_y igual al momento de $\mathbf{P}_1$ con respecto a un eje vertical que pasa a través de C:

$$M_y = P_1 a = (15 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

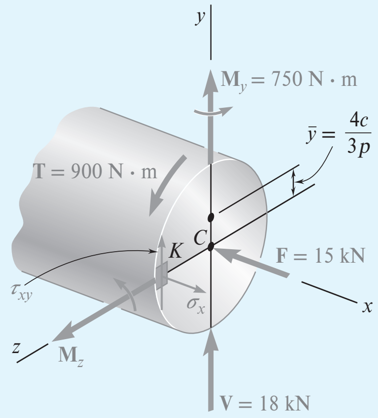
5. Un momento de flexión $\mathbf{M}_z$ de momento M_z igual al momento de $\mathbf{P}_2$ con respecto a un eje horizontal y transversal que pasa por C:

$$M_z = P_2 b = (18 \text{ kN})(60 \text{ mm}) = 1\,080 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Los resultados se muestran en la figura 8.21*c*.



b)



c)

Figura 8.21 (*cont.*) *b*) Fuerzas internas y momentos en la sección que contiene los puntos *H* y *K*. *c*) Valores de las fuerzas y los momentos que producen esfuerzos en el punto *K*, así como la dimensión necesaria para calcular el primer momento de área.

***a*) Esfuerzos normal y cortante en el punto *K*.** Cada una de las fuerzas y momentos que se aprecian en la figura 8.21*c* producen un esfuerzo normal o cortante en el punto K. Se calculan por separado cada uno de estos esfuerzos para después sumar los esfuerzos normales y los cortantes.

Propiedades geométricas de la sección. Para los datos dados, se tiene:

$$A = \pi c^2 = \pi(0.020 \text{ m})^2 = 1.257 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(0.020 \text{ m})^4 = 125.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_C = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(0.020 \text{ m})^4 = 251.3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

También se determinan el primer momento Q y el ancho t del área de la sección transversal localizada por encima del eje z. Teniendo presente que $\bar{y} = 4c/3\pi$ para un semicírculo de radio c, resulta

$$Q = A'\bar{y} = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0.020 \text{ m})^3$$
$$= 5.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

y

$$t = 2c = 2(0.020 \text{ m}) = 0.040 \text{ m}$$

Esfuerzos normales. Los esfuerzos normales se producen en K debido a la fuerza céntrica **F** y al momento de flexión $\mathbf{M}_y$. Sin embargo, el momento $\mathbf{M}_z$ no produce ningún esfuerzo en K, puesto que K se ubica sobre el eje neutro que corresponde a dicho momento. Al determinar cada signo en la figura 8.21*c*, se obtiene

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y c}{I_y} = -11.9 \text{ MPa} + \frac{(750 \text{ N} \cdot \text{m})(0.020 \text{ m})}{125.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$
$$= -11.9 \text{ MPa} + 119.3 \text{ MPa}$$
$$\sigma_x = +107.4 \text{ MPa}$$

Esfuerzos cortantes. El esfuerzo cortante $(\tau_{xy})_V$ se debe a la fuerza cortante vertical **V**, y el esfuerzo cortante $(\tau_{xy})_{\text{giro}}$ ocasionado por el par de torsión **T**. Si se usan los valores para Q, t, I_z y J_C,

$$(\tau_{xy})_V = +\frac{VQ}{I_z t} = +\frac{(18 \times 10^3 \text{ N})(5.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(125.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(0.040 \text{ m})}$$

$$= +19.1 \text{ MPa}$$

$$(\tau_{xy})_{\text{giro}} = -\frac{Tc}{J_C} = -\frac{(900 \text{ N}\cdot\text{m})(0.020 \text{ m})}{251.3 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = -71.6 \text{ MPa}$$

Al sumar estas dos expresiones, se obtiene τ_{xy} en el punto K.

$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_V + (\tau_{xy})_{\text{giro}} = +19.1 \text{ MPa} - 71.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -52.5 \text{ MPa}$$

En la figura 8.21*d*, el esfuerzo normal σ_x y los esfuerzos cortantes τ_{xy} actúan sobre un elemento cuadrado que se localiza en K sobre la superficie del elemento cilíndrico. Observe que se incluyen los esfuerzos cortantes que actúan sobre los lados longitudinales del elemento.

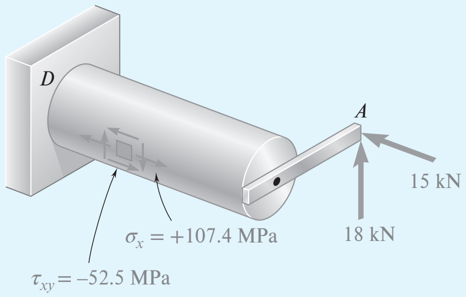


Figura 8.21 (*cont.*) *d*) Elemento que muestra los esfuerzos combinados en el punto *K*.

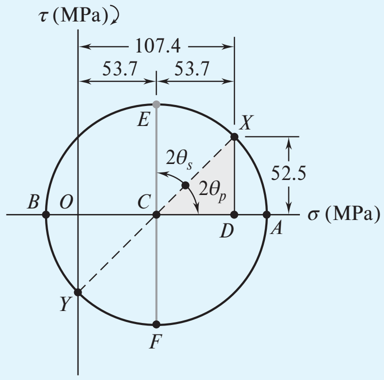


Figura 8.21 (*cont.*) *e*) Círculo de Mohr para esfuerzos en el punto *K*.

***b*) Planos y esfuerzos principales en el punto *K*.** Puede usarse cualquiera de los dos métodos del capítulo 7 para determinar los planos y esfuerzos principales en K. Se selecciona el círculo de Mohr para graficar el punto X de las coordenadas $\sigma_x = +107.4$ MPa y $-\tau_{xy} = +52.5$ MPa y el punto Y de las coordenadas $\sigma_y = 0$ y $+\tau_{xy} = -52.5$ MPa, y se dibuja el círculo de diámetro XY (figura 8.21*e*). Se observa que

$$OC = CD = \tfrac{1}{2}(107.4) = 53.7 \text{ MPa} \qquad DX = 52.5 \text{ MPa}$$

se determina la orientación de los planos principales:

$$\tan 2\theta_p = \frac{DX}{CD} = \frac{52.5}{53.7} = 0.97765 \qquad 2\theta_p = 44.4^\circ \circlearrowright$$

$$\theta_p = 22.2^\circ \circlearrowright$$

El radio del círculo es

$$R = \sqrt{(53.7)^2 + (52.5)^2} = 75.1 \text{ MPa}$$

y los esfuerzos principales son

$$\sigma_{\text{máx}} = OC + R = 53.7 + 75.1 = 128.8 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{\text{min}} = OC - R = 53.7 - 75.1 = -21.4 \text{ MPa}$$

Los resultados se muestran en la figura 8.21*f*.

c) Esfuerzo cortante máximo en el punto *K*. Este esfuerzo corresponde a los puntos E y F de la figura 8.21*e*.

$$\tau_{\text{máx}} = CE = R = 75.1 \text{ MPa}$$

Se observa que $2\theta_s = 90° - 2\theta_p = 90° - 44.4° = 45.6°$, los planos del esfuerzo cortante máximo forman un ángulo $\theta_s = 22.8°$ ↺ con la horizontal. En la figura 8.21*g* se presenta el elemento correspondiente. Observe que los esfuerzos normales que actúan sobre este elemento están representados por OC en la figura 8.21*e* y son iguales a +53.7 MPa.

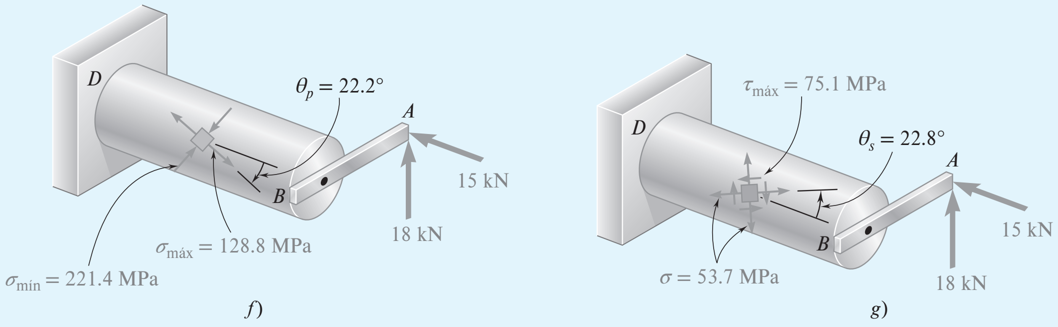


Figura 8.21 (*cont.*) *f*) Elemento de esfuerzo principal en el punto *K*. *g*) Elemento de esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

Problema modelo 8.4

Una fuerza horizontal de 500 lb actúa en el punto D de un cigüeñal AB, que se mantiene en equilibrio estático mediante un par de torsión **T** y las reacciones en A y B. Si se sabe que los cojinetes son autoalineantes y no ejercen momentos sobre el eje, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos H, J, K y L, que se ubican en los extremos de los diámetros vertical y horizontal de una sección transversal localizada a 2.5 in. a la izquierda del cojinete B.

ESTRATEGIA: Comience por la determinación de las fuerzas internas y los momentos que actúan sobre la sección transversal que contiene los puntos de interés, y después evalúe los esfuerzos en dichos puntos debido a cada acción interna. Al combinar estos resultados se obtendrá el estado de esfuerzos total en cada punto.

MODELAR:
Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del cigüeñal (figura 1). Encuentre $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 250$ lb

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad -(500 \text{ lb})(1.8 \text{ in}) + T = 0 \qquad T = 900 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

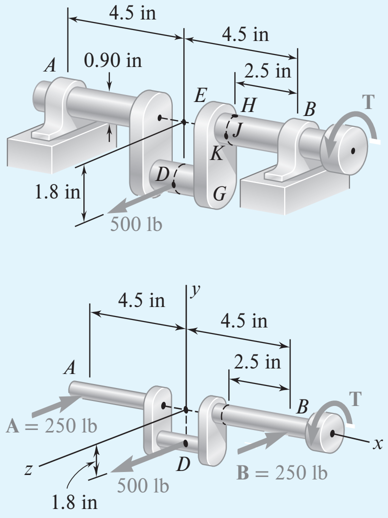


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del cigüeñal.

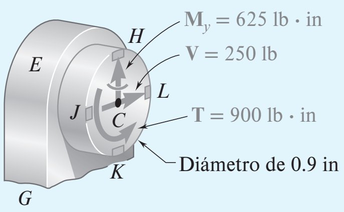


Figura 2 Sistema fuerza-momento resultante en la sección que contiene a los puntos H, J, K y L.

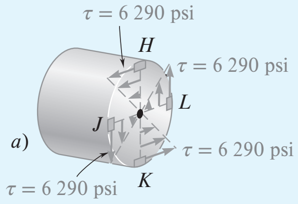


Figura 3 Esfuerzos cortantes que resultan del par de torsión T.

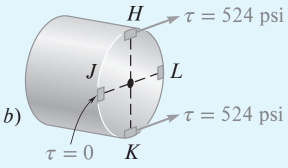


Figura 4 Esfuerzos cortantes que resultan de la fuerza cortante V.

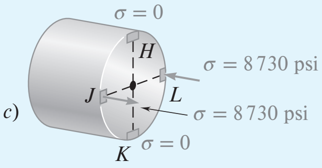


Figura 5 Esfuerzos normales que resultan del momento flector M_y.

ANALIZAR:

Fuerzas internas en la sección transversal. Se reemplaza la reacción **B** y el par de torsión **T** por un sistema fuerza-momento equivalente en el centro C de la sección transversal que contiene a H, J, K y L (figura 2).

$$V = B = 250 \text{ lb} \qquad T = 900 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

$$M_y = (250 \text{ lb})(2.5 \text{ in}) = 625 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

Las propiedades geométricas de la sección de 0.9 in de diámetro son

$$A = \pi(0.45 \text{ in})^2 = 0.636 \text{ in}^2 \qquad I = \tfrac{1}{4}\pi(0.45 \text{ in})^4 = 32.2 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

$$J = \tfrac{1}{2}\pi(0.45 \text{ in})^4 = 64.4 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

Esfuerzos producidos por el momento de torsión T. Usando la ecuación (3.10), se determinan los esfuerzos cortantes en los puntos H, J, K y L, y se ilustran en la figura 3.

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(900 \text{ lb} \cdot \text{in})(0.45 \text{ in})}{64.4 \times 10^{-3} \text{in}^4} = 6\,290 \text{ psi}$$

Esfuerzos producidos por la fuerza cortante V. La fuerza cortante **V** no produce esfuerzos cortantes en los puntos J y L. Primero se calcula Q en los puntos H y K para un semicírculo respecto de un diámetro vertical y después se calcula el esfuerzo cortante producido por la fuerza cortante $V = 250$ lb. Estos esfuerzos se muestran en la figura 4.

$$Q = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0.45 \text{ in})^3 = 60.7 \times 10^{-3} \text{ in}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(250 \text{ lb})(60.7 \times 10^{-3} \text{ in}^3)}{(32.2 \times 10^{-3} \text{ in}^4)(0.9 \text{ in})} = 524 \text{ psi}$$

Esfuerzos producidos por el momento flector M_y. Como el momento flector **M***y* actúa en un plano horizontal, no produce esfuerzos en H y K. Con el uso de la ecuación (4.15) se determinan los esfuerzos normales en los puntos J y L y se muestran en la figura 5.

$$\sigma = \frac{|M_y|c}{I} = \frac{(625 \text{ lb} \cdot \text{in})(0.45 \text{ in})}{32.2 \times 10^{-3} \text{ in}^4} = 8\,730 \text{ psi}$$

Resumen. Se suman los esfuerzos que se muestran y se obtienen los esfuerzos totales normal y cortante en los puntos H, J, K y L (figura 6).

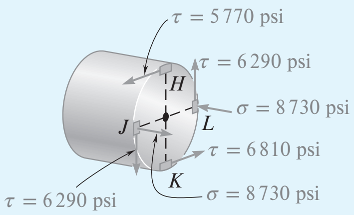
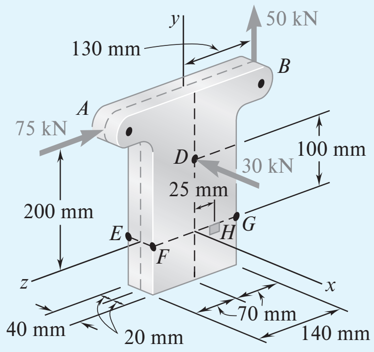


Figura 6 Componentes de esfuerzo en los puntos H, J, K y L al combinar todas las cargas.

Problema modelo 8.5

Se aplican tres fuerzas en los puntos *A*, *B* y *D* de un poste corto de acero, como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal horizontal del poste es un rectángulo de 40 × 140 mm, determine los esfuerzos y planos principales, así como el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.



ESTRATEGIA: Se comienza por determinar las fuerzas y momentos que actúan sobre la sección que contiene el punto de interés y después se usan estos resultados para calcular los esfuerzos normales y cortantes que actúan en el punto. Con base en el círculo de Mohr, estos esfuerzos se pueden transformar para obtener los esfuerzos principales, los planos principales y el esfuerzo cortante máximo.

MODELAR y ANALIZAR:

Fuerzas internas en la sección *EFG*. Se reemplazan las tres fuerzas aplicadas por un sistema fuerza-momento equivalente en el centro *C* de la sección rectangular *EFG* (figura 1).

$$V_x = -30 \text{ kN} \qquad P = 50 \text{ kN} \qquad V_z = -75 \text{ kN}$$

$$M_x = (50 \text{ kN})(0.130 \text{ m}) - (75 \text{ kN})(0.200 \text{ m}) = -8.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 0 \qquad M_z = (30 \text{ kN})(0.100 \text{ m}) = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

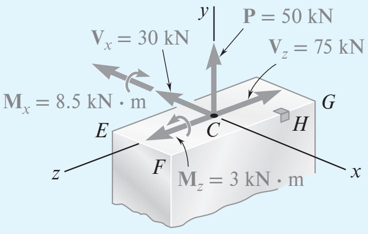


Figura 1 Sistema fuerza-momento equivalente en la sección que contiene los puntos *E*, *F*, *G* y *H*.

Se observa que no existe un momento de torsión con respecto al eje *y*. Las propiedades geométricas de la sección rectangular son

$$A = (0.040 \text{ m})(0.140 \text{ m}) = 5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \tfrac{1}{12}(0.040 \text{ m})(0.140 \text{ m})^3 = 9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = \tfrac{1}{12}(0.140 \text{ m})(0.040 \text{ m})^3 = 0.747 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Esfuerzo normal en *H*. Los esfuerzos normales σ_y son producidos por la fuerza céntrica **P** y los momentos flectores $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$. Se determina el signo de cada esfuerzo por medio del examen cuidadoso del esquema del sistema fuerza-momento en *C* (figura 2).

$$\sigma_y = +\frac{P}{A} + \frac{|M_z|a}{I_z} - \frac{|M_x|b}{I_x}$$

$$= \frac{50 \text{ kN}}{5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(3 \text{ kN}\cdot\text{m})(0.020 \text{ m})}{0.747 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(8.5 \text{ kN}\cdot\text{m})(0.025 \text{ m})}{9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_y = 8.93 \text{ MPa} + 80.3 \text{ MPa} - 23.2 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 66.0 \text{ MPa}$$ ◀

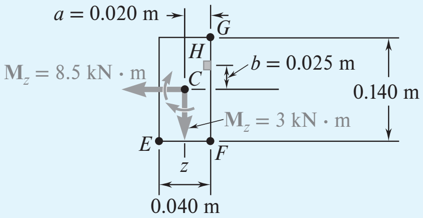


Figura 2 Dimensiones y momentos flectores usados para determinar los esfuerzos normales.

Esfuerzo cortante en *H*. Si se considera la fuerza cortante $\mathbf{V}_x$, se observa que $Q = 0$ con respecto al eje z, puesto que H se encuentra sobre el borde de la sección transversal. Entonces, $\mathbf{V}_x$ no produce esfuerzo cortante en H. La fuerza cortante $\mathbf{V}_z$ sí produce un esfuerzo cortante en H (figura 3).

$$Q = A_1\bar{y}_1 = [(0.040 \text{ m})(0.045 \text{ m})](0.0475 \text{ m}) = 85.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{yz} = \frac{V_z Q}{I_x t} = \frac{(75 \text{ kN})(85.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.040 \text{ m})} \qquad \tau_{yz} = 17.52 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

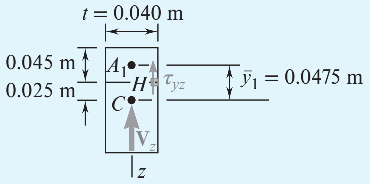


Figura 3 Dimensiones y fuerza cortante usados para determinar el esfuerzo cortante transversal.

Esfuerzos principales, planos principales y esfuerzo cortante máximo en *H*. Se dibuja el círculo de Mohr para los esfuerzos en el punto H (figura 4).

$$\tan 2\theta_p = \frac{17.52}{33.0} \qquad 2\theta_p = 27.96° \qquad \theta_p = 13.98° \blacktriangleleft$$

$$R = \sqrt{(33.0)^2 + (17.52)^2} = 37.4 \text{ MPa} \qquad \tau_{\text{máx}} = 37.4 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{\text{máx}} = OA = OC + R = 33.0 + 37.4 \qquad \sigma_{\text{máx}} = 70.4 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{\text{mín}} = OB = OC - R = 33.0 - 37.4 \qquad \sigma_{\text{mín}} = -7.4 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

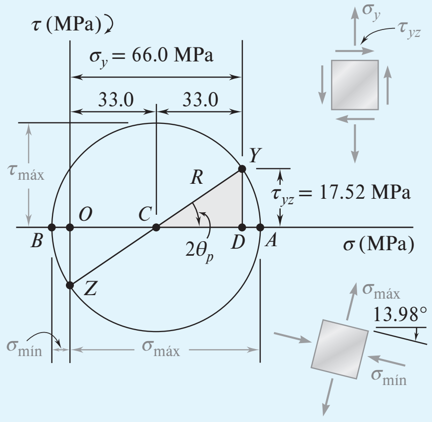


Figura 4 Círculo de Mohr en el punto H usado para encontrar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, así como su orientación.

Problemas

8.31 Se aplican dos fuerzas de 1.2 kips a un elemento de máquina *AB* en forma de L, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

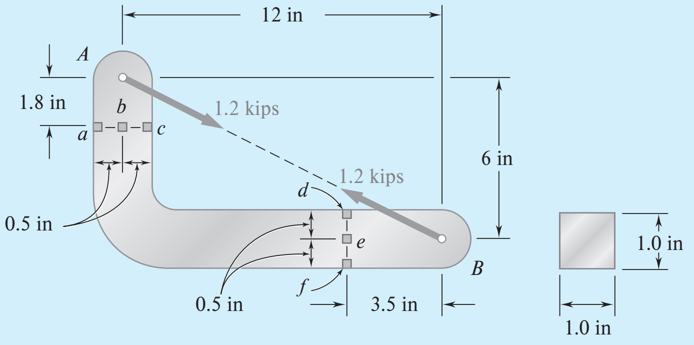


Figura P8.31 y P8.32

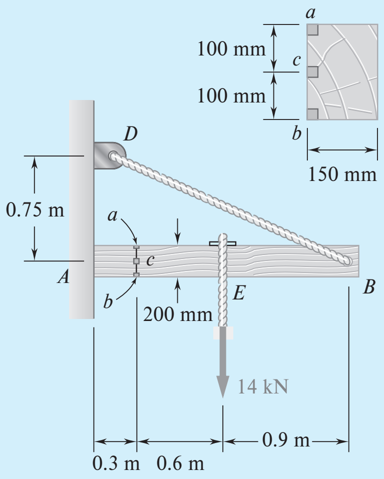


Figura *P8.33*

8.32 Se aplican dos fuerzas de 1.2 kips a un elemento de máquina *AB* en forma de L, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *d*, *b*) el punto *e*, *c*) el punto *f*.

8.33 La viga en voladizo *AB* tiene una sección transversal rectangular de 150 × 200 mm. Si se sabe que la tensión en el cable *BD* es de 10.4 kN y se desprecia el peso de la viga, determine los esfuerzos normal y cortante en los tres puntos indicados.

***8.34* a 8.36** El elemento *AB* tiene una sección transversal uniforme de 10 × 24 mm. Para la carga que se muestra en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

8.37 Se aplica una fuerza de 1.5 kips y un momento de 9 kip · in en la parte superior del poste de hierro fundido con 2.5 in de diámetro que se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

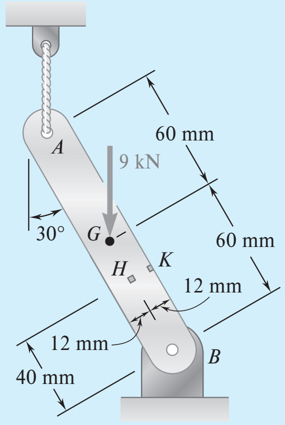


Figura *P8.34*

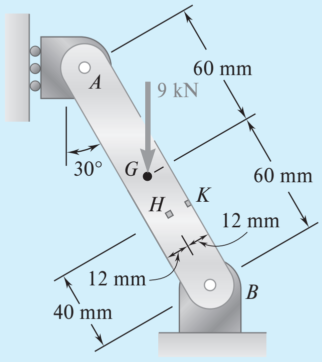


Figura P8.35

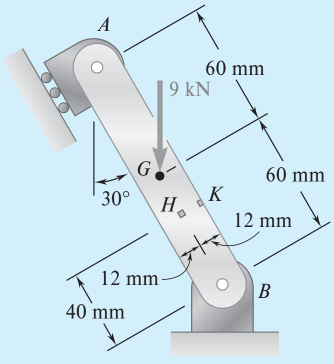


Figura P8.36

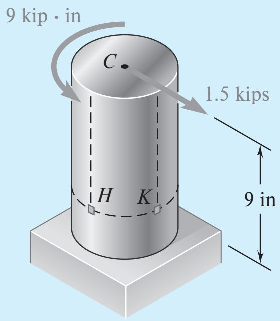


Figura P8.37

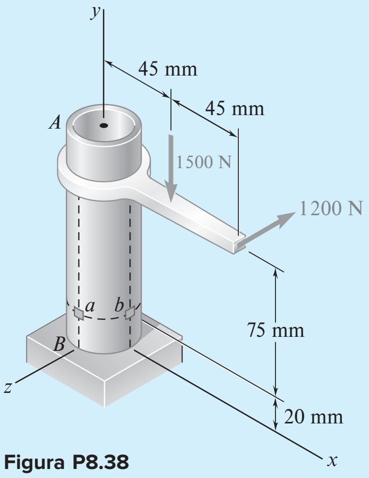


Figura P8.38

8.38 Se aplican dos fuerzas al tubo *AB* como se muestra en la figura. Si se sabe que el tubo tiene un diámetro interior de 35 mm y un diámetro exterior de 42 mm, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

8.39 Se aplican varias fuerzas sobre el ensamble de tubos que se muestra en la figura. Si se sabe que el tubo tiene diámetros interior y exterior de 1.61 y 1.90 in, respectivamente, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

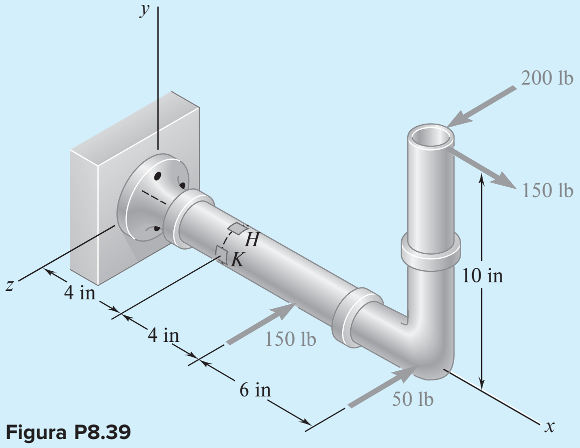


Figura P8.39

8.40 El tubo de acero *AB* tiene 100 mm de diámetro exterior y 8 mm de espesor de pared. Si se sabe que la tensión en el cable es de 40 kN, determine los esfuerzos normal y cortante en el punto *H*.

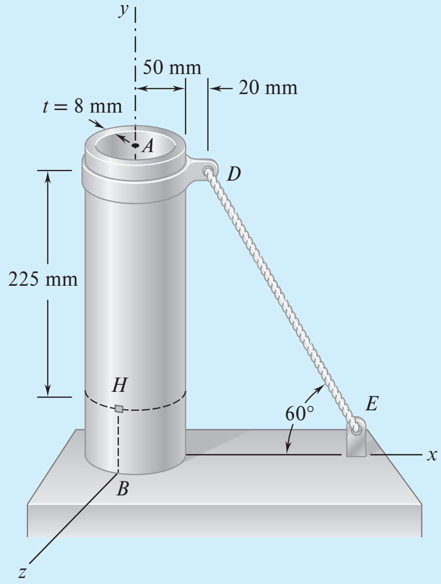


Figura P8.40

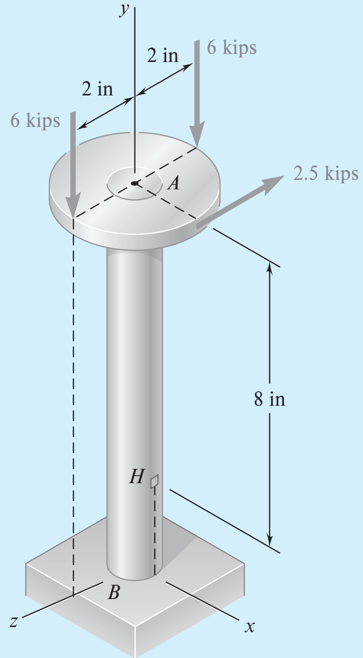


Figura *P8.41*

8.41 Se aplican tres fuerzas a una placa de 4 in de diámetro unida al eje sólido *AB* con diámetro de 1.8 in. En el punto *H*, determine *a*) los esfuerzos y planos principales, *b*) el esfuerzo cortante máximo.

8.42 El tubo de acero *AB* tiene 72 mm de diámetro exterior y 5 mm de espesor de pared. Si se sabe que el brazo *CDE* está unido rígidamente al tubo, determine los esfuerzos y planos principales, y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

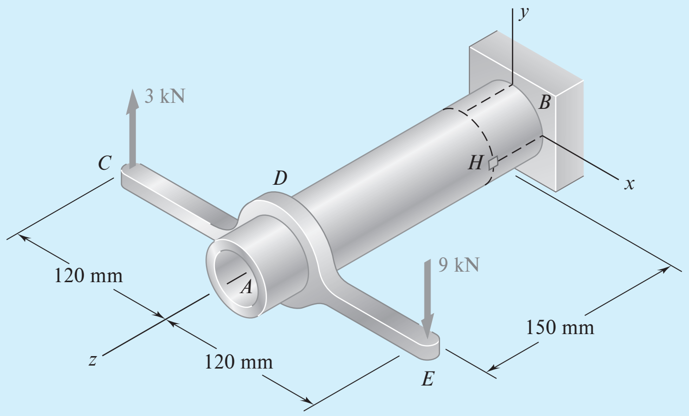


Figura P8.42

8.43 Se aplica una fuerza de 13 kN al poste de hierro fundido *ABD* de 60 mm de diámetro que se muestra en la figura. Determine, para el punto *H*, *a*) los esfuerzos y planos principales, *b*) el esfuerzo cortante máximo.

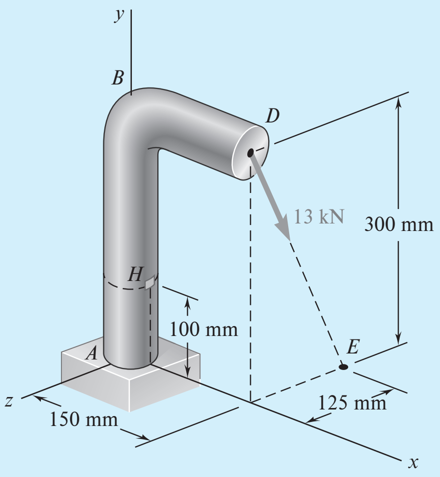


Figura P8.43

8.44 Se aplica una fuerza vertical **P** de 60 lb de magnitud sobre el punto *A* de la manivela. Si se sabe que el eje *BDE* tiene un diámetro de 0.75 in, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H* localizado en la parte superior del eje, 2 in a la derecha del apoyo *D*.

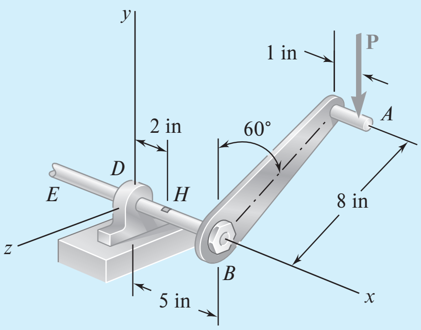


Figura ***P8.44***

8.45 Se aplican tres fuerzas a la barra mostrada en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

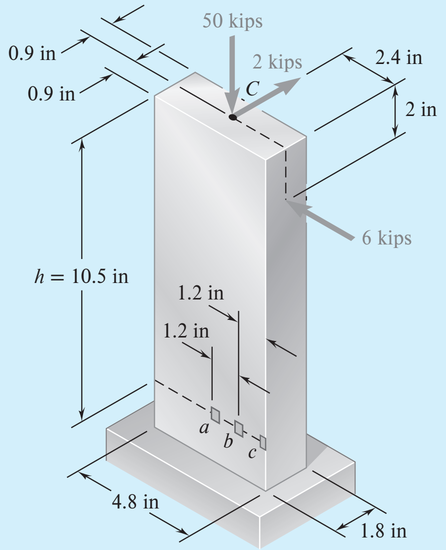


Figura *P8.45*

8.46 Resuelva el problema 8.45, pero ahora suponga que $h = 12$ in.

8.47 Se aplican tres fuerzas a la barra que se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

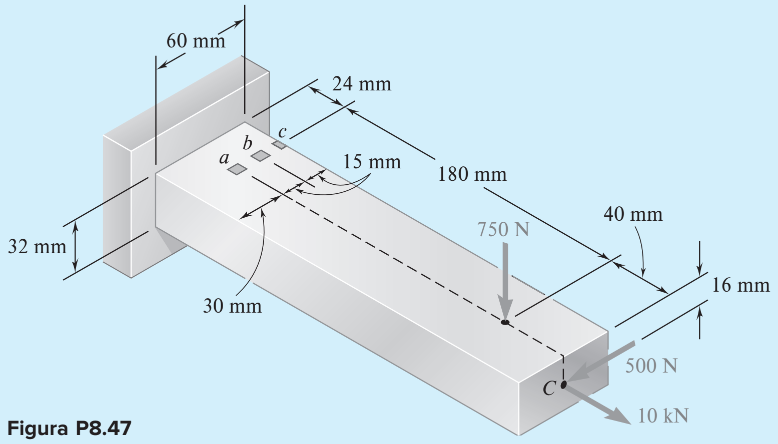


Figura P8.47

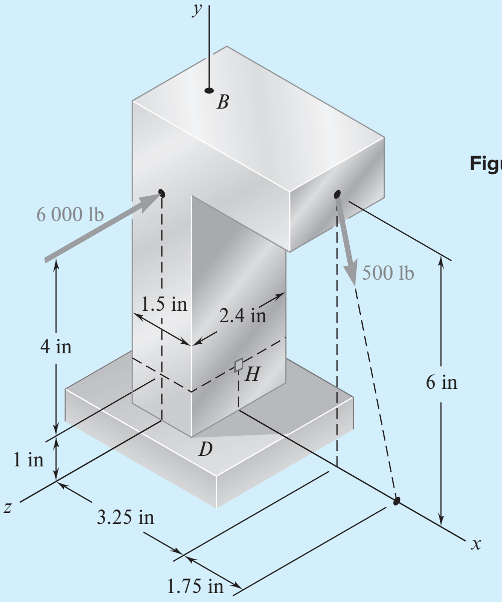


Figura P8.49

8.48 Resuelva el problema 8.47, pero ahora suponga que la fuerza de 750 N se dirige verticalmente hacia arriba.

8.49 Se aplican dos fuerzas al pequeño poste *BD* como se muestra en la figura. Si se sabe que la porción vertical del poste tiene una sección transversal de 1.5 × 2.4 in, determine los esfuerzos principales, los planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

8.50 Resuelva el problema 8.49, pero ahora suponga que la magnitud de la fuerza de 6 000 lb se reduce a 1 500 lb.

8.51 Se aplican tres fuerzas al componente de máquina *ABD* como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal que

contiene al punto *H* es un rectángulo de 20 × 40 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

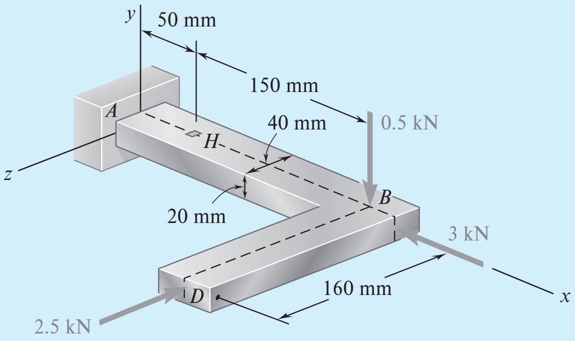


Figura P8.51

8.52 Resuelva el problema 8.51, pero ahora suponga que la magnitud de la fuerza de 2.5 kN aumenta a 10 kN.

8.53 Tres placas de acero, cada una de 13 mm de espesor, se sueldan para formar una viga en voladizo. Para las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos *a* y *b*.

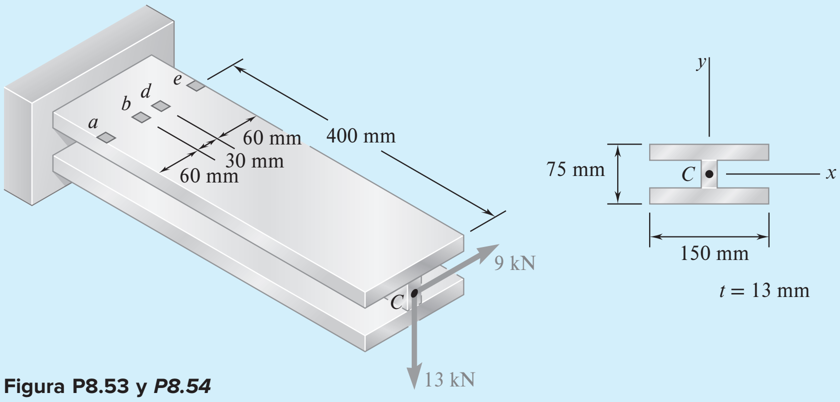


Figura P8.53 y *P8.54*

8.54 Tres placas de acero, cada una de 13 mm de espesor, se sueldan para formar una viga en voladizo. Para las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos *d* y *e*.

8.55 Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ en direcciones perpendiculares al eje longitudinal de una viga W310 × 60, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\mathbf{P}_1 = 25$ kN y $\mathbf{P}_2 = 24$ kN, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *a*.

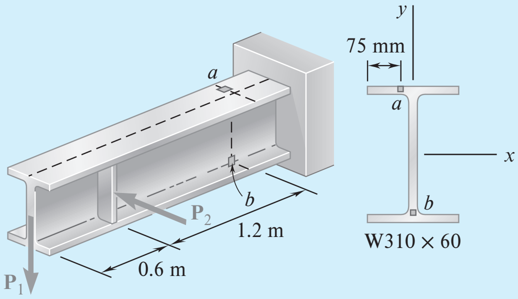


Figura P8.55 y *P8.56*

8.56 Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ en direcciones perpendiculares al eje longitudinal de una viga W310 × 60, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\mathbf{P}_1 = 25$ kN y $\mathbf{P}_2 = 24$ kN, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo y cortante máximo en el punto *b*.

8.57 Se aplican cuatro fuerzas a una viga de acero laminado W8 × 28, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *a*.

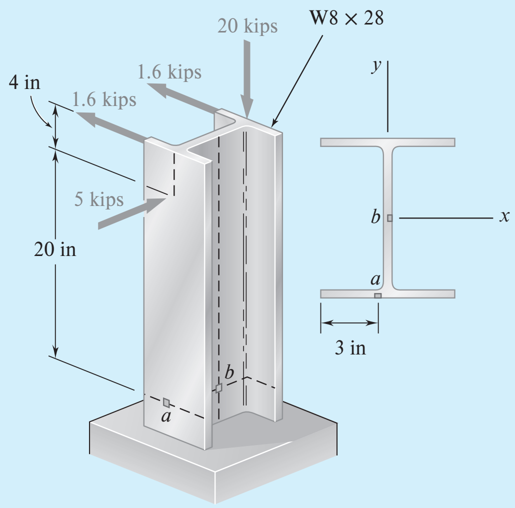


Figura P8.57 y P8.58

8.58 Se aplican cuatro fuerzas a una viga de acero laminado W8 × 28, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *b*.

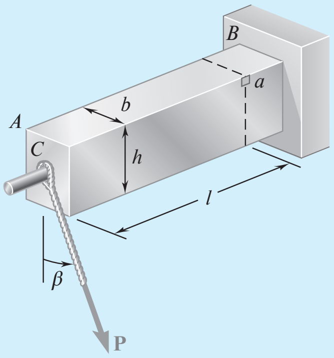


Figura *P8.59*

8.59 Se aplica una fuerza **P** a una viga en voladizo por medio de un cable unido a un perno ubicado en el centro de su extremo libre. Si se sabe que **P** actúa en una dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga, determine *a*) el esfuerzo normal en el punto *a* en términos de *P*, *b*, *h*, *l* y β, *b*) los valores de β para los cuales el esfuerzo normal en *a* es igual a cero.

8.60 Se aplica una fuerza vertical **P** en el centro del extremo libre de una viga en voladizo *AB*. *a*) Si la viga se instala con el alma vertical ($\beta = 0$) y con su eje longitudinal *AB* en posición horizontal, determine la magnitud de la fuerza **P** para la cual el esfuerzo normal en el punto *a* es igual a +120 MPa. *b*) Resuelva el inciso *a*, suponiendo que la viga se encuentra instalada con $\beta = 3°$.

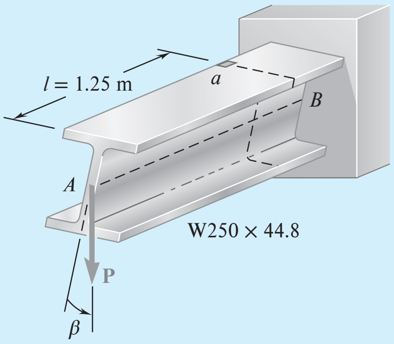


Figura P8.60

***8.61** Se aplica una fuerza **P** de 5 kN a un alambre enrollado alrededor de la barra *AB*, como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal de la barra es un cuadrado cuyos lados miden $d = 40$ mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *a*.

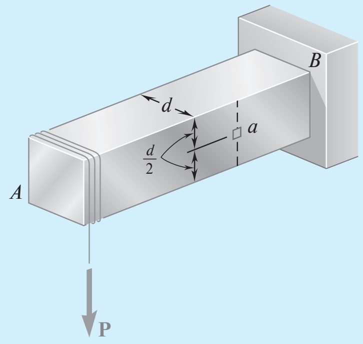


Figura P8.61

***8.62** Si se sabe que el tubo estructural mostrado en la figura tiene una pared con espesor uniforme de 0.3 in, determine los esfuerzos y planos principales, y el esfuerzo cortante máximo en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

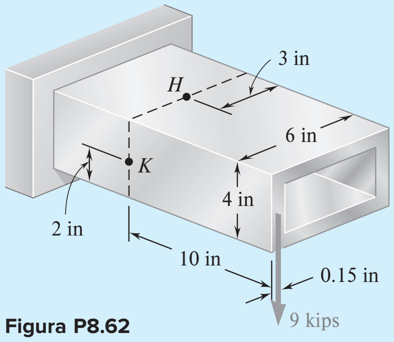


Figura P8.62

***8.63** El tubo estructural que se muestra en la figura tiene un espesor de pared uniforme de 0.3 in. Si se sabe que la carga de 15 kips se aplica 0.15 in por encima de la base del tubo, determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

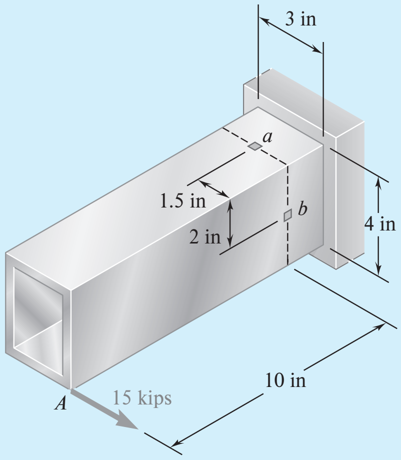


Figura *P8.63*

***8.64** Para el tubo y la carga del problema 8.63, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *b*.

Repaso y resumen

Esfuerzos normales y cortantes en una viga

Las dos relaciones fundamentales para el esfuerzo normal σ_x y el esfuerzo cortante τ_{xy} en cualquier punto dado de la sección transversal de una viga prismática son

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad (8.1)$$

y

$$\tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \qquad (8.2)$$

donde V = fuerza cortante en la sección
M = momento flector en la sección
y = distancia del punto a la superficie neutra
I = momento de inercia centroidal de la sección transversal
Q = primer momento con respecto al eje neutro de la parte de la sección transversal localizada por encima del punto dado
t = ancho de la sección transversal en el punto dado

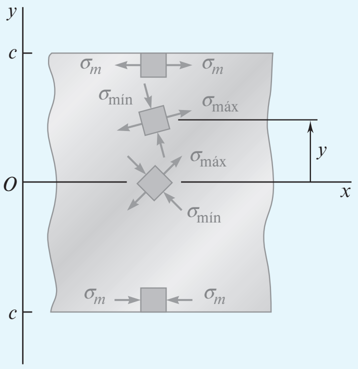


Figura 8.22 Elementos de esfuerzo principal en puntos seleccionados de una viga.

Planos y esfuerzos principales en una viga

Con el uso de uno de los métodos del capítulo 7 para la transformación de esfuerzos, se obtuvieron los planos y esfuerzos principales en diversos puntos (figura 8.22).

Se investigó la distribución de los esfuerzos principales en una viga en voladizo, angosta y rectangular sujeta a una carga **P** concentrada en su extremo libre, y se halló que en cualquier sección transversal (excepto en la vecindad del punto de aplicación de la carga) el máximo esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ no excedía al esfuerzo normal máximo σ_m que ocurre en la superficie de la viga.

Aunque esto es cierto para muchas vigas cuya sección transversal no es rectangular, no se cumple para vigas W o vigas S, en las que $\sigma_{máx}$ en las uniones b y d del alma con las aletas de la viga (figura 8.23) puede exceder el valor de σ_m que ocurre en los puntos a y e. Por consiguiente, el diseño de una viga de acero laminado debe incluir el cálculo del esfuerzo principal máximo en dichos puntos.

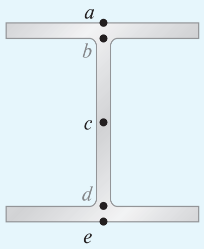


Figura 8.23 Ubicaciones clave para la determinación de esfuerzos en vigas de forma I.

Diseño de ejes de transmisión bajo cargas transversales

El diseño de *ejes de transmisión* sometidos a *cargas transversales* y a pares de torsión debe tomar en cuenta tanto los esfuerzos normales debidos al momento flector M, como los esfuerzos cortantes debidos al par de torsión T. En cualquier sección transversal dada de un eje cilíndrico (sólido o hueco), el valor mínimo permisible de la razón J/c para la sección transversal es:

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M^2 + T^2})_{\text{máx}}}{\tau_{\text{perm}}} \qquad (8.6)$$

Esfuerzos bajo condiciones generales de carga

En los capítulos anteriores aprendió a determinar los esfuerzos en elementos prismáticos, ocasionados por cargas axiales (capítulos 1 y 2), torsión (capítulo 3), flexión (capítulo 4) y cargas transversales (capítulos 5 y 6). En la segunda parte de este capítulo (sección 8.3) se combinaron estos conocimientos para calcular los esfuerzos en condiciones más generales de carga.

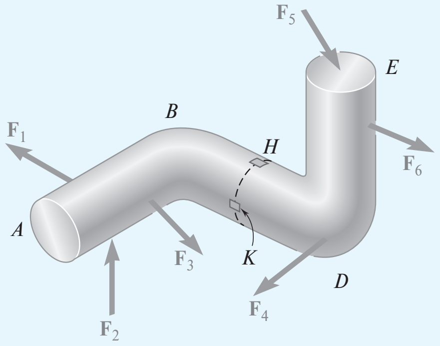


Figura 8.24 Elemento *ABCD* sometido a varias cargas.

Por ejemplo, para determinar los esfuerzos en los puntos H o K del elemento doblado que se muestra en la figura 8.24, se pasó una sección a través de dichos puntos y se reemplazaron las cargas aplicadas por un sistema equivalente fuerza-momento en el centroide C de la sección (figura 8.25). Los esfuerzos normal y cortante producidos en H o K por cada una de las fuerzas y momentos ejercidos en C se calcularon y luego se combinaron para obtener los esfuerzos normal σ_x y cortante τ_{xy} y τ_{xz} resultantes en H o K. Los esfuerzos principales, la orientación de los planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto H o en el K, se determinan entonces mediante alguno de los métodos presentados en el capítulo 7.

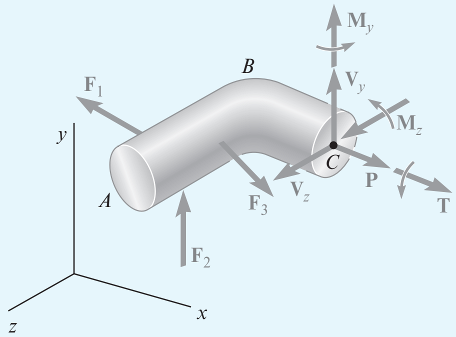


Figura 8.25 Diagrama de cuerpo libre del segmento *ABC* para determinar las fuerzas internas y momentos en la sección transversal *C*.

Problemas de repaso

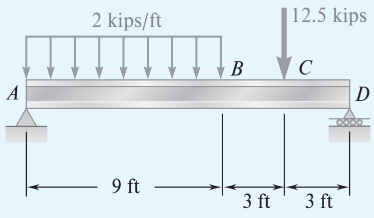


Figura P8.65

8.65 *a*) Si se sabe que $\sigma_{perm} = 24$ ksi y $\tau_{perm} = 14.5$ ksi, seleccione el perfil de patín ancho más económico que debe usarse para soportar la carga mostrada en la figura. *b*) Determine los valores que se esperan de σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la junta del alma con la aleta de la viga seleccionada.

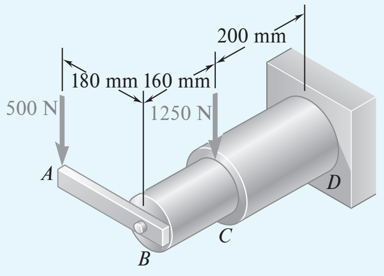


Figura P8.66 y *P8.67*

8.66 Determine los diámetros mínimos permisibles para las varillas sólidas *BC* y *CD* que se muestran en la figura. Utilice $\tau_{perm} = 60$ MPa y desprecie el efecto de los filetes y de las concentraciones de esfuerzo.

8.67 Si se sabe que las varillas *BC* y *CD* tienen diámetros de 24 mm y 36 mm respectivamente, determine el esfuerzo cortante máximo en cada varilla. Desprecie el efecto de los filetes y de las concentraciones de esfuerzo.

8.68 El eje sólido *AB* gira a 450 rpm y transmite 20 kW del motor *M* a las herramientas de máquina conectadas a los engranes *F* y *G*. Si se sabe que $\tau_{perm} = 55$ MPa y se supone que se extraen 8 kW en el engrane *F* y 12 kW en el engrane *G*, determine el diámetro mínimo permisible para el eje *AB*.

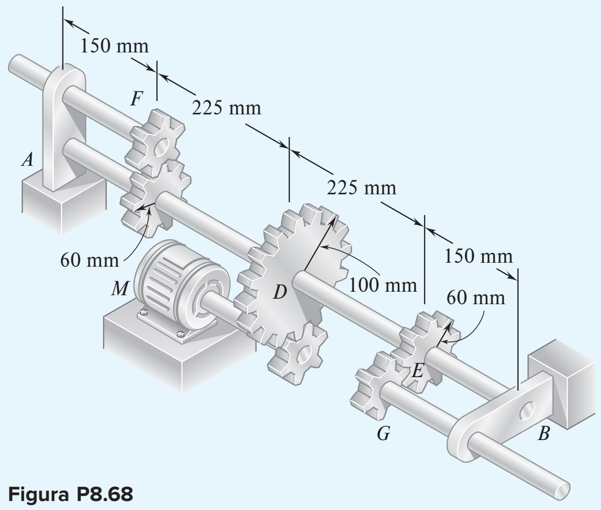


Figura P8.68

8.69 Una fuerza de 6 kips se aplica al elemento de máquina *AB* de la manera mostrada en la figura. Si se sabe que el elemento tiene un espesor uniforme de 0.8 in, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

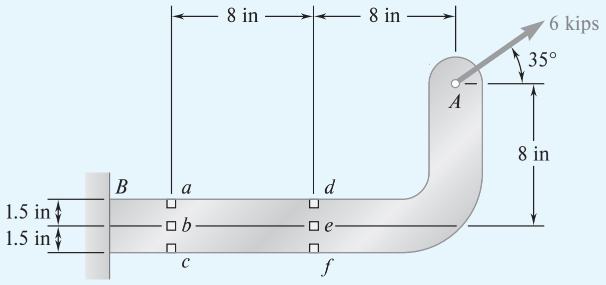


Figura P8.69

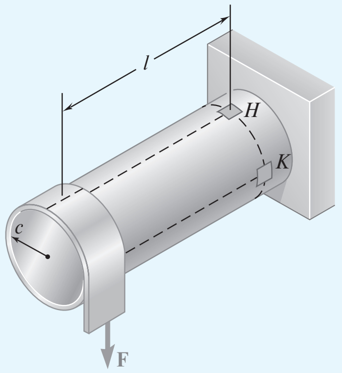


Figura *P8.70*

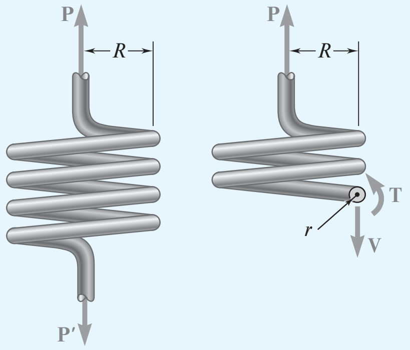


Figura P8.71

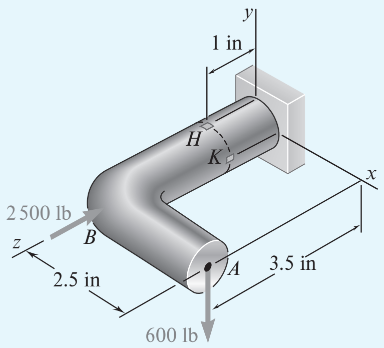


Figura *P8.72*

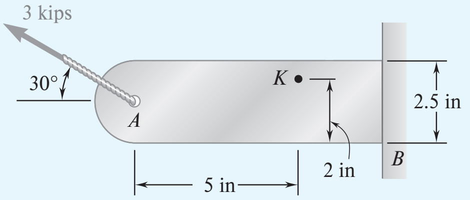


Figura *P8.73*

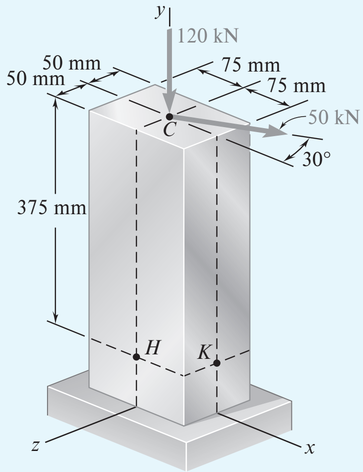


Figura P8.74

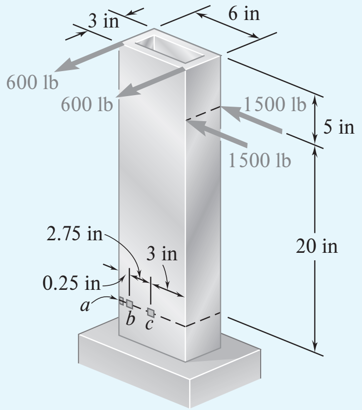


Figura P8.75

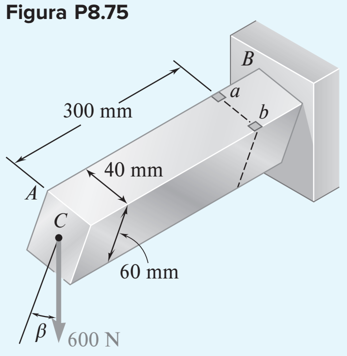


Figura P8.76

8.70 Una tira delgada se enrolla alrededor de una varilla sólida con radio $c = 20$ mm, como se muestra en la figura. Si se sabe que $l = 100$ mm y $F = 5$ kN, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

8.71 Un resorte en espiral cerrada está hecho con un alambre circular de radio *r* que a su vez forma una hélice de radio *R*. Determine el esfuerzo cortante máximo producido por las dos fuerzas iguales y opuestas **P** y **P**′. (*Sugerencia:* Primero determine el cortante **V** y el par de torsión **T** en una sección transversal cruzada).

8.72 Se aplican fuerzas en los puntos *A* y *B* de la ménsula sólida de hierro fundido que se muestra en la figura. Si se sabe que la ménsula tiene un diámetro de 0.8 in, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo *a*) en el punto *H*, *b*) en el punto *K*.

8.73 Si se sabe que la ménsula *AB* tiene un espesor uniforme de $\frac{5}{8}$ in, determine *a*) los planos y los esfuerzos principales en el punto *K*, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

8.74 Para el poste y las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos principales, los planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

8.75 Si se sabe que el tubo estructural mostrado en la figura tiene una pared con espesor uniforme de 0.25 in, determine los esfuerzos normal y cortante en los tres puntos indicados.

8.76 La viga en voladizo *AB* se instalará de manera que el lado de 60 mm forme un ángulo β entre 0 y 90° con la vertical. Si se sabe que la fuerza vertical de 600 N se aplica en el centro del extremo libre de la viga, determine el esfuerzo normal en el punto *a* cuando *a*) $\beta = 0$, *b*) $\beta = 90°$. *c*) También determine el valor de β para el cual el esfuerzo normal en el punto *a* es máximo y encuentre el valor correspondiente de dicho esfuerzo.

Problemas de computadora

Los siguientes problemas fueron diseñados para resolverse con ayuda de una computadora.

8.C1 Suponga que la fuerza cortante V y el momento flector M han sido determinados en cierta sección de una viga de acero laminado. Escriba un programa para computadora que calcule en dicha sección, a partir de los datos disponibles en el apéndice C, *a*) el esfuerzo normal máximo σ_m, *b*) el esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la unión de la aleta con el alma. Use el programa para resolver los incisos *a*) y *b*) de los siguientes problemas:

1. Problema 8.1 (utilice $V = 45$ kips y $M = 450$ kip · in)
2. Problema 8.2 (utilice $V = 22.5$ kips y $M = 450$ kip · in)
3. Problema 8.3 (utilice $V = 700$ kN y $M = 1\,750$ kN · m)
4. Problema 8.4 (utilice $V = 850$ kN y $M = 1\,700$ kN · m)

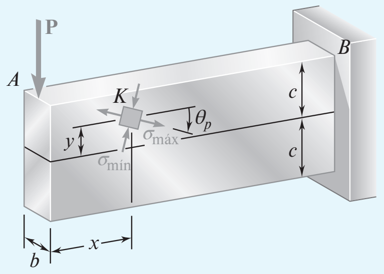


Figura P8.C2

8.C2 Una viga en voladizo AB con sección transversal rectangular de ancho b y profundidad $2c$ soporta una sola carga concentrada **P** en su extremo A. Escriba un programa para computadora que calcule, para cualesquiera valores de x/c y y/c, *a*) las razones $\sigma_{\text{máx}}/\sigma_m$ y $\sigma_{\text{mín}}/\sigma_m$, donde $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ son los esfuerzos principales en el punto $K(x, y)$ y σ_m es el esfuerzo normal máximo en la misma sección transversal, *b*) el ángulo θ_p que forman, en K, los planos principales con un plano transversal y otro horizontal que pasan por K. Use el programa para verificar los valores mostrados en la figura 8.8 y confirmar que $\sigma_{\text{máx}}$ excede σ_m si $x \leq 0.544c$, como se indica en la segunda nota al pie de la página 491.

8.C3 Los discos $D_1, D_2, \ldots, D_n$ están unidos, como se muestra en la figura 8.C3, al eje sólido AB de longitud L, diámetro uniforme d y esfuerzo cortante permisible τ_{perm}. Las fuerzas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ son de magnitud conocida (excepto una de ellas) y se aplican a los discos, ya sea por encima o por debajo de su diámetro vertical, o en el extremo izquierdo o derecho de su diámetro horizontal. Si r_i denota el radio del disco D_i y c_i su distancia al apoyo situado en A, escriba un programa para computadora que calcule *a*) la magnitud de la fuerza desconocida $\mathbf{P}_i$, *b*) el valor mínimo permisible del diámetro d del eje AB. Utilice el programa para resolver el problema 8.18.

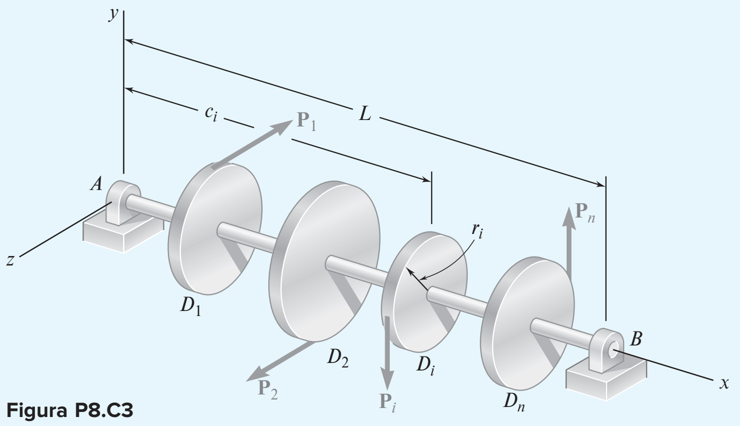


Figura P8.C3

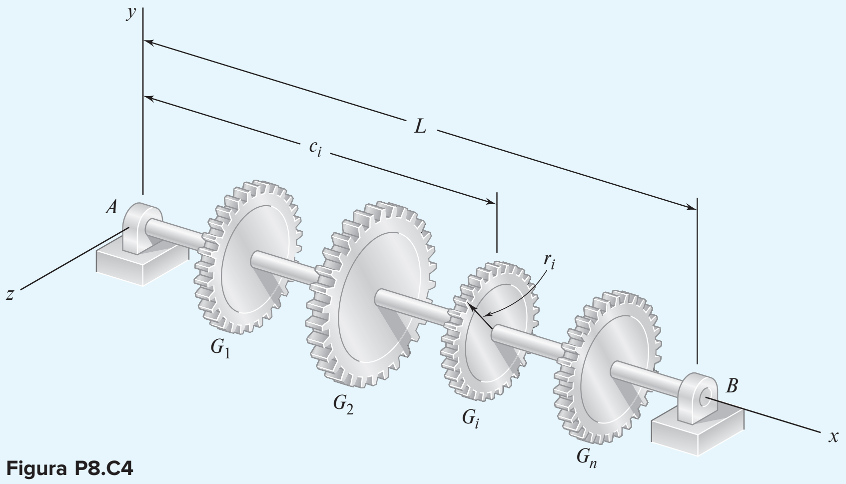


Figura P8.C4

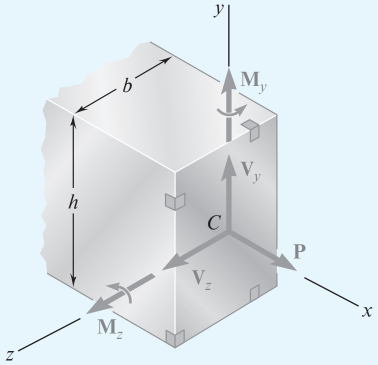


Figura P8.C5

8.C4 El eje sólido *AB* de longitud *L*, diámetro uniforme *d* y esfuerzo cortante permisible τ_{perm}, gira a una velocidad dada que se mide en rpm (figura P8.C4). Los engranes G_1, G_2,..., G_n están unidos al eje y cada uno de ellos embona con otro engrane (que no se muestra en la figura), ya sea por encima o por debajo de su diámetro vertical, o en el extremo izquierdo o derecho de su diámetro horizontal. Uno de estos otros engranes se conecta a un motor y el resto a distintos elementos de máquinas. Si r_i denota el radio del engrane G_i, c_i su distancia al apoyo en *A* y P_i la potencia transmitida a (signo +) o extraída de (signo –) dicho engrane, escriba un programa para computadora que calcule el valor más pequeño permisible del diámetro *d* del eje *AB*. Utilice el programa para resolver los problemas 8.27 y 8.68.

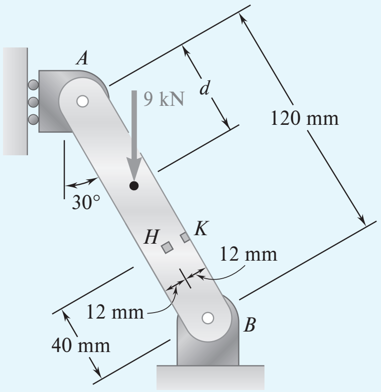


Figura P8.C6

8.C5 Escriba un programa para computadora que se pueda usar para calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos con coordenadas *y* y *z* dadas, localizados en la superficie de una pieza de máquina con sección transversal rectangular. Se sabe que las fuerzas internas son equivalentes al sistema fuerza-momento mostrado en la figura. Escriba el programa de manera que las cargas y dimensiones puedan expresarse tanto en unidades del SI como unidades de uso común en Estados Unidos. Utilice el programa para resolver *a*) el problema 8.45*b*, *b*) el problema 8.47*a*.

8.C6 El elemento *AB* tiene una sección transversal rectangular de 10 × 24 mm. Para la carga que se muestra en la figura, escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos *H* y *K* para valores de *d* entre 0 y 120 mm, con incrementos de 15 mm. Utilice el programa para resolver el problema 8.35.

***8.C7** El tubo estructural que se muestra en la figura tiene una pared con espesor uniforme de 0.3 in. Se aplica una fuerza de 9 kips a una barra (que no se muestra en la figura) soldada al extremo del tubo. Escriba un programa de computadora que pueda usarse para determinar, para cualquier valor dado de *c*, los esfuerzos principales, los planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H* para valores de *d* entre –3 in y 3 in, con incrementos de 1 in. Use el programa para resolver el problema 8.62*a*.

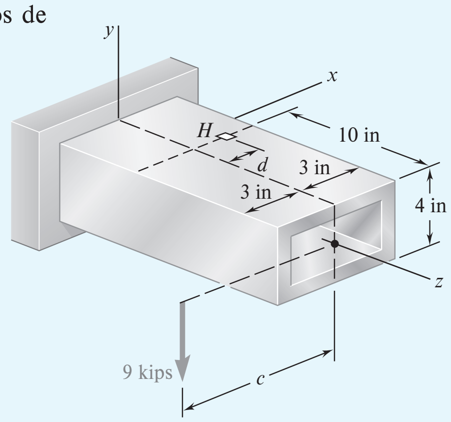
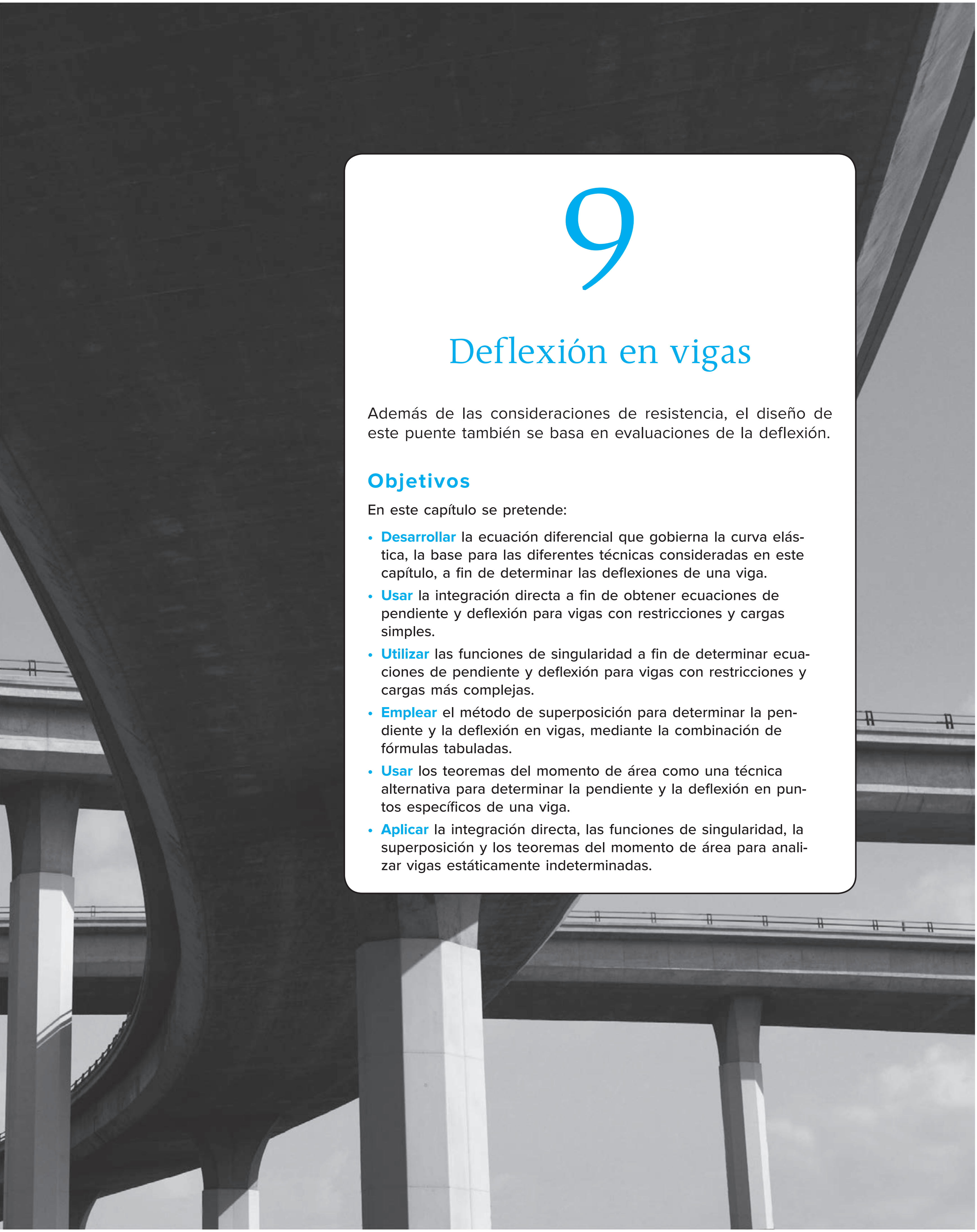


Figura P8.C7



9

Deflexión en vigas

Además de las consideraciones de resistencia, el diseño de este puente también se basa en evaluaciones de la deflexión.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Desarrollar** la ecuación diferencial que gobierna la curva elástica, la base para las diferentes técnicas consideradas en este capítulo, a fin de determinar las deflexiones de una viga.
- **Usar** la integración directa a fin de obtener ecuaciones de pendiente y deflexión para vigas con restricciones y cargas simples.
- **Utilizar** las funciones de singularidad a fin de determinar ecuaciones de pendiente y deflexión para vigas con restricciones y cargas más complejas.
- **Emplear** el método de superposición para determinar la pendiente y la deflexión en vigas, mediante la combinación de fórmulas tabuladas.
- **Usar** los teoremas del momento de área como una técnica alternativa para determinar la pendiente y la deflexión en puntos específicos de una viga.
- **Aplicar** la integración directa, las funciones de singularidad, la superposición y los teoremas del momento de área para analizar vigas estáticamente indeterminadas.

Introducción

9.1 Deformación bajo carga transversal
9.1A Ecuación de la curva elástica
***9.1B** Determinación de la curva elástica a partir de la distribución de carga
9.2 Vigas estáticamente indeterminadas
***9.3 Funciones de singularidad para determinar la pendiente y la deflexión**
9.4 Método de superposición
9.4A Vigas estáticamente determinadas
9.4B Vigas estáticamente indeterminadas
***9.5 Teoremas del momento de área**
***9.5A** Principios generales
***9.5B** Vigas en voladizo y vigas con cargas simétricas
***9.5C** Diagramas de momento flector por partes
***9.6 Aplicación de los teoremas del momento de área a vigas con cargas asimétricas**
***9.6A** Principios generales
***9.6B** Deflexión máxima
***9.6C** Vigas estáticamente indeterminadas

Introducción

En el capítulo anterior se estudió el diseño de vigas para la resistencia. En este capítulo se analizará otro aspecto del diseño de vigas: la determinación de la *deflexión*. La *deflexión máxima* de una viga bajo una carga dada es de interés particular, ya que las especificaciones de diseño de una viga incluyen generalmente un valor máximo permisible para la deflexión. También se requiere conocer las deflexiones para analizar las *vigas indeterminadas*, en las cuales el número de reacciones en los apoyos excede el número de las ecuaciones de equilibrio de que se dispone para determinar las incógnitas.

Recuerde, de la sección 4.2, que una viga prismática sometida a flexión pura se flexiona en forma de arco y que, dentro del rango elástico, la curvatura de la superficie neutra es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (4.21)$$

donde M es el momento flector, E el módulo de elasticidad e I el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro.

Cuando una viga se somete a carga transversal, la ecuación (4.21) permanece válida para cualquier sección transversal, siempre que el principio de Saint-Venant sea aplicable. Sin embargo, el momento flector y la curvatura de la superficie neutra variarán en las diversas secciones. Si x es la distancia de la sección al extremo izquierdo de la viga, se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \qquad (9.1)$$

Si se conoce la curvatura en varios puntos de la viga, será posible deducir algunas conclusiones generales con respecto a la deformación de la viga bajo carga (sección 9.1).

Para determinar la pendiente y la deflexión de la viga en cualquier punto, la ecuación diferencial lineal de segundo orden que gobierna la *curva elástica* y que caracteriza la forma de la viga deformada (sección 9.1A), se da de la siguiente manera:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Si el momento flector puede representarse para todos los valores de x, por una sola expresión $M(x)$ como se muestra en la figura 9.1, la pendiente $\theta = dy/dx$ y la deflexión y, en cualquier punto de la viga pueden obtenerse mediante dos integraciones sucesivas. Las dos constantes de integración introducidas en el proceso se determinarán a partir de las condiciones de frontera.

Sin embargo, si se requieren diferentes funciones para representar el momento flector en las distintas porciones de la viga, se requerirán también diferentes ecuaciones diferenciales, que conducirán a distintas funciones definiendo la curva elástica en las

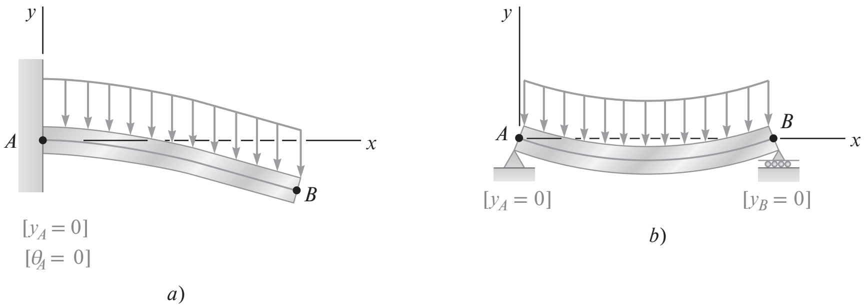


Figura 9.1 Situaciones donde el momento flector puede expresarse mediante una sola función $M(x)$. *a*) Viga en voladizo cargada uniformemente. *b*) Viga simplemente apoyada cargada de manera uniforme.

diversas porciones de la viga. Para la viga y la carga de la figura 9.2, por ejemplo, se requieren dos ecuaciones diferenciales, una para la porción *AD* y otra para *DB*. La primera produce las funciones θ_1 y y_1, y la segunda, las funciones θ_2 y y_2. En conjunto deben determinarse cuatro constantes de integración: dos se obtendrán considerando que la deflexión es cero en *A* y en *B*; las otras dos, expresando que las porciones *AD* y *DB* tienen igual pendiente y deflexión en *D*.

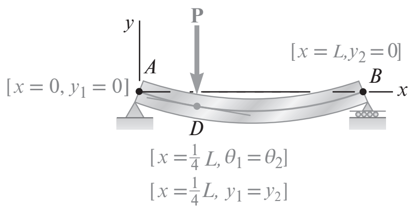


Figura 9.2 Situación donde se requieren dos conjuntos de ecuaciones.

En la sección 9.1B se muestra que en una viga que soporta una carga distribuida $w(x)$, la curva elástica puede obtenerse directamente de $w(x)$ mediante cuatro integraciones sucesivas. Las constantes introducidas en este proceso se determinarán a partir de los valores de V, M, θ y y.

En la sección 9.2 se estudiarán las *vigas estáticamente indeterminadas*, donde las reacciones en los apoyos implican cuatro o más incógnitas. Las tres ecuaciones de equilibrio deben complementarse con ecuaciones deducidas de las condiciones límite impuestas por los apoyos.

La determinación de la curvatura elástica cuando se requieren varias funciones para el momento flector M, puede ser muy laboriosa, ya que requiere ajustar pendientes y deflexiones en cada punto de transición. En la sección 9.3 se utilizan las *funciones de singularidad* para simplificar el cálculo de θ y de y en cualquier punto de la viga.

El *método de superposición* consiste en determinar por separado la pendiente y deflexión causadas por diferentes cargas aplicadas a la viga, para después sumarlas (sección 9.4). Este método se simplifica al usar la tabla del apéndice D, que muestra las pendientes y las deflexiones de las vigas para diversas cargas y tipos de apoyo.

En la sección 9.5 se usarán ciertas propiedades geométricas de la curva elástica para determinar la deflexión y pendiente de una viga en un punto dado. En lugar de expresar el momento flector como una función $M(x)$ e integrarla analíticamente, se dibujará el diagrama que representa la variación de M/EI a lo largo de la longitud de la viga y se deducirán dos teoremas del momento de área. El *teorema del primer momento de área* permitirá calcular el ángulo entre las tangentes de la viga en dos puntos diferentes. El *teorema del segundo momento de área* se usará para calcular la distancia vertical desde un punto sobre la viga hasta la tangente en un segundo punto.

Los teoremas del momento de área se emplearán en la sección 9.5B para determinar la pendiente y la deflexión en puntos seleccionados de vigas en voladizo y vigas con cargas simétricas. En la sección 9.5C se encontrará que las áreas y momentos definidos por el diagrama M/EI pueden determinarse con más facilidad si se dibuja el *diagrama de momento flector por partes.* Este método es particularmente efectivo para las *vigas de sección transversal variable.*

Las vigas con cargas asimétricas y vigas salientes se estudiarán en la sección 9.6A. Puesto que en las vigas con cargas asimétricas la deflexión máxima no ocurre en el centro de la viga, en la sección 9.6B se muestra cómo localizar el punto en el que la tangente es horizontal, con el propósito de determinar la *deflexión máxima.* La sección 9.6C se dedicará a la solución de problemas que involucran *vigas estáticamente indeterminadas.*

9.1 DEFORMACIÓN BAJO CARGA TRANSVERSAL

Recuerde que la ecuación (4.21) relaciona la curvatura de la superficie neutra con el momento flector en una viga sometida a flexión pura. Esta ecuación es válida para cualquier sección transversal dada de una viga sometida a una carga transversal, siempre que aplique el principio de Saint-Venant. Sin embargo, el momento flector y la curvatura de la superficie neutra variarán en las diversas secciones. Si x es la distancia de la sección al extremo izquierdo de la viga,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

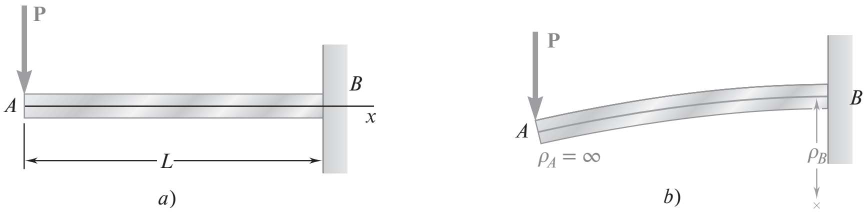


Figura 9.3 *a*) Viga en voladizo con carga concentrada. *b*) Viga deformada que muestra la curvatura en sus extremos.

Considere, por ejemplo, una viga en voladizo AB de longitud L sometida a una carga concentrada **P** en su extremo libre A (figura 9.3*a*). Se tiene que $M(x) = -Px$, y al sustituir en la ecuación (9.1) se obtiene,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{Px}{EI}$$

lo que muestra que la curvatura de la superficie neutra varía linealmente con x, desde cero en A, donde ρ_A es infinito, hasta $-PL/EI$ en B, donde $|\rho_B| = EI/PL$ (figura 9.3*b*).

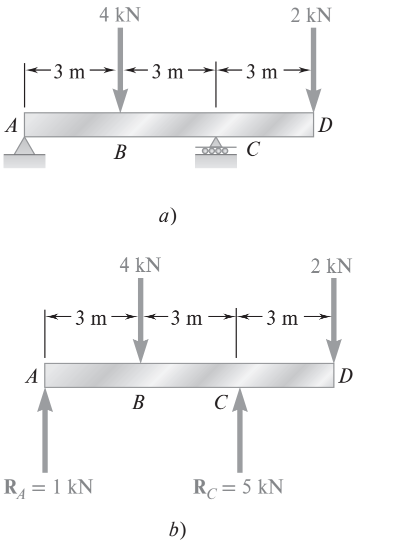


Fig. 9.4 *a*) Viga saliente con dos cargas concentradas. *b*) Diagrama de cuerpo libre que muestra fuerzas de reacción.

Considere ahora la viga AD de la figura 9.4*a*, que soporta dos cargas concentradas. Del diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.4*b*) las reacciones en los apoyos son $R_A = 1$ kN y $R_C = 5$ kN. En la figura 9.5*a* se muestra el diagrama de momento flector correspondiente. Note, a partir del diagrama, que M y la curvatura de la viga son cero en cada extremo y en un punto E situado en $x = 4$ m. Entre A y E el momento flector es positivo y la viga es cóncava hacia arriba. Entre E y D el momento flector es negativo y la viga es cóncava hacia abajo (figura 9.5*b*). El máximo valor de la curvatura (es decir, el mínimo valor del radio de curvatura) ocurre en el apoyo C, donde $|M|$ es máximo.

El perfil de la viga deformada se obtiene a partir de la información sobre su curvatura. No obstante, el análisis y diseño de una viga requieren información más precisa sobre la *deflexión* y la *pendiente* en varios puntos. De particular importancia es la deflexión máxima de la viga. En la próxima sección se utilizará la ecuación (9.1) para obtener la relación entre la deflexión y, medida en un punto dado Q en el eje de la viga, y la distancia x desde ese punto hasta algún origen fijo (figura 9.6). La relación obtenida es la ecuación de la *curva elástica*, en la que el eje de la viga se transforma bajo la carga dada (figura 9.6*b*).[†]

9.1A Ecuación de la curva elástica

Recuerde, del cálculo elemental, que la curvatura de una curva plana en un punto $Q(x, y)$ es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{9.2}$$

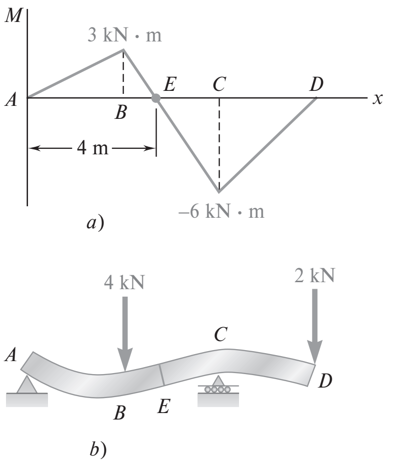


Figura 9.5 Viga de la figura 9.4. *a*)Diagrama de momento flector. *b*) Perfil deformado.

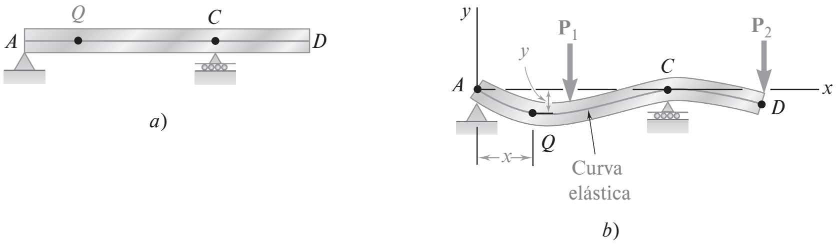


Figura 9.6 Viga de la figura 9.4. *a*) Sin deformar. *b*) Deformada.

[†] En este capítulo, y representa un desplazamiento vertical. En capítulos anteriores se utilizó para representar la distancia a un punto dado, en una sección transversal, desde el eje neutro de esa sección.

donde dy/dx y d^2y/dx^2 son la primera y segunda derivadas de la función $y(x)$ representada por esa curva. Para la curva elástica de una viga, sin embargo, la pendiente dy/dx es muy pequeña y su cuadrado es despreciable comparado con la unidad. Entonces,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{9.3}$$

Al sustituir por $1/\rho$ de la ecuación (9.3) en la ecuación (9.1),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

Esta expresión es una ecuación lineal diferencial de segundo orden; es la ecuación diferencial que gobierna la curva elástica.

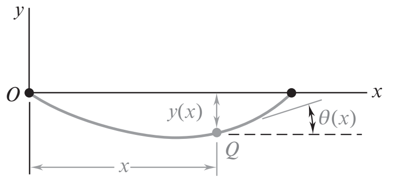


Figura 9.7 Pendiente $\theta(x)$ de la tangente a la curva elástica.

El producto EI se conoce como *rigidez a la flexión* y si varía a lo largo de la viga, como en el caso de una viga de sección variable, debe expresarse como una función de x antes de integrar la ecuación (9.4). Sin embargo, para una viga prismática, la rigidez a la flexión es constante. Pueden multiplicarse ambos miembros de la ecuación (9.4) por EI e integrar respecto a x para obtener

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5a}$$

donde C_1 es una constante de integración. Si $\theta(x)$ es el ángulo, medido en radianes, que la tangente a la curva elástica forma con la horizontal en Q (figura 9.7), y al recordar que este ángulo es pequeño,

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \simeq \theta(x)$$

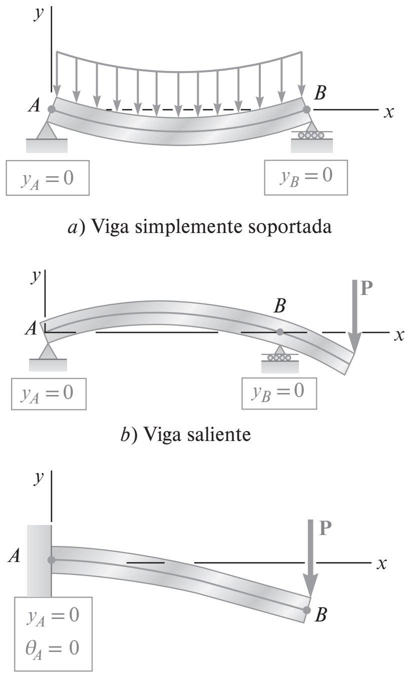
En consecuencia, la ecuación (9.5*a*) en la forma alternativa es

$$EI\,\theta(x) = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5b}$$

Al integrar la ecuación (9.5) en x,

$$EI\,y = \int_0^x \left[\int_0^x M(x)\,dx + C_1\right] dx + C_2$$

$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.6}$$



c) Viga en voladizo

Figura 9.8 Condiciones de frontera conocidas para vigas estáticamente determinadas.

donde C_2 es una segunda constante y el primer término del miembro derecho representa la función de x obtenida integrando dos veces respecto a x el momento flector $M(x)$. Aunque las constantes C_1 y C_2 permanecen indeterminadas, la ecuación (9.6) define la deflexión de la viga en cualquier punto dado Q y las ecuaciones (9.5*a*) o (9.5*b*) definen del mismo modo la pendiente de la viga en Q.

Las constantes C_1 y C_2 se determinan a partir de las *condiciones de frontera* o, dicho con mayor precisión, de las condiciones impuestas en la viga por sus apoyos. Al limitar el análisis a *vigas estáticamente determinadas*, que están apoyadas para que las reacciones en los apoyos puedan obtenerse mediante el método de la estática, solo pueden considerarse aquí tres tipos de vigas (figura 9.8): *a*) la *viga simplemente apoyada*, *b*) la *viga saliente* y *c*) la *viga en voladizo.*

En la figura 9.8*a* y *b*, los apoyos consisten en un pasador y una ménsula en A y un rodillo en B y requieren que la deflexión sea cero en cada uno de estos puntos. Si $x = x_A$, $y = y_A = 0$ en la ecuación (9.6) y luego $x = x_B$, $y = y_B = 0$ en la misma ecuación, se obtienen dos ecuaciones que pueden resolverse para C_1 y C_2. Para la viga en voladizo (figura 9.8*c*), tanto la pendiente como la deflexión en A deben ser cero. Si $x = x_A$, $y = y_A = 0$ en la ecuación (9.6) y $x = x_A$, $\theta = \theta_A = 0$ en la ecuación (9.5*b*) se obtienen de nuevo dos ecuaciones que pueden resolverse para C_1 y C_2.

Aplicación de conceptos 9.1

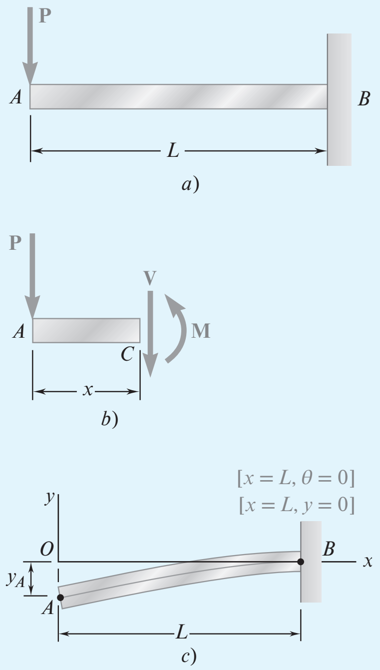


Figura 9.9 *a*) Viga en voladizo con carga en el extremo. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la sección *AC*. *c*) Perfil deformado y condiciones de frontera.

La viga en voladizo AB tiene una sección transversal uniforme y soporta una carga **P** en su extremo libre A (figura 9.9*a*). Determine las ecuaciones de la curva elástica, la deflexión y la pendiente en A.

Con base en el diagrama de cuerpo libre de la porción AC de la viga (figura 9.9*b*), donde C se localiza a una distancia x del extremo A,

$$M = -Px \tag{1}$$

Al sustituir M en la ecuación (9.4) y multiplicar por la constante EI se obtiene,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Px$$

Al integrar respecto a x,

$$EI\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}Px^2 + C_1 \tag{2}$$

Se observa ahora el extremo fijo B donde $x = L$ y $\theta = dy/dx = 0$ (figura 9.9*c*). Al sustituir estos valores en la ecuación (2) y despejar C_1, se tiene,

$$C_1 = \tfrac{1}{2}PL^2$$

que se sustituye en la ecuación (2):

$$EI\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}Px^2 + \tfrac{1}{2}PL^2 \tag{3}$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación (3),

$$EIy = -\tfrac{1}{6}Px^3 + \tfrac{1}{2}PL^2x + C_2 \tag{4}$$

Pero en B, $x = L$, $y = 0$. Al sustituir en la ecuación (4),

$$0 = -\tfrac{1}{6}PL^3 + \tfrac{1}{2}PL^3 + C_2$$
$$C_2 = -\tfrac{1}{3}PL^3$$

Al llevar el valor de C_2 a la ecuación (4), la ecuación de la curva elástica es

$$EIy = -\tfrac{1}{6}Px^3 + \tfrac{1}{2}PL^2x - \tfrac{1}{3}PL^3$$

o

$$y = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \tag{5}$$

La deflexión y la pendiente en A se obtiene haciendo $x = 0$ en las ecuaciones (3) y (5).

$$y_A = -\frac{PL^3}{3EI} \quad \text{y} \quad \theta_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{PL^2}{2EI}$$

Aplicación de conceptos 9.2

La viga prismática simplemente apoyada AB soporta una carga uniformemente distribuida w por unidad de longitud (figura 9.10*a*). Determine la ecuación de la curva elástica y la deflexión máxima de la viga.

Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la porción AD de la viga (figura 9.10*b*) y sume los momentos con respecto a D; se obtiene

$$M = \tfrac{1}{2}wLx - \tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (1)$$

Al sustituir M en la ecuación (9.4) y multiplicar ambos miembros de esta ecuación por la constante EI, da

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx \qquad (2)$$

Al integrar dos veces en x,

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_1 \qquad (3)$$

$$EIy = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_1x + C_2 \qquad (4)$$

Al observar que $y = 0$ en ambos extremos de la viga (figura 9.10*c*), se hace $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación (4) y se obtiene $C_2 = 0$. Luego se hace $x = L$ y $y = 0$ en la misma ecuación, de modo que

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{12}wL^4 + C_1L$$

$$C_1 = -\tfrac{1}{24}wL^3$$

Al llevar los valores de C_1 y C_2 a la ecuación (9.4) la curva elástica es

$$EIy = -\tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{12}wLx^3 - \tfrac{1}{24}wL^3x$$

o

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \qquad (5)$$

Al sustituir el valor de C_1 en la ecuación (3), se verifica que la pendiente de la viga es cero para $x = L/2$ y, por lo tanto, que la curva elástica tiene un mínimo en el punto medio C (figura 9.10*d*). Al hacer $x = L/2$ en la ecuación (5),

$$y_C = \frac{w}{24EI}\left(-\frac{L^4}{16} + 2L\frac{L^3}{8} - L^3\frac{L}{2}\right) = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

La deflexión máxima (el máximo valor absoluto) es

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

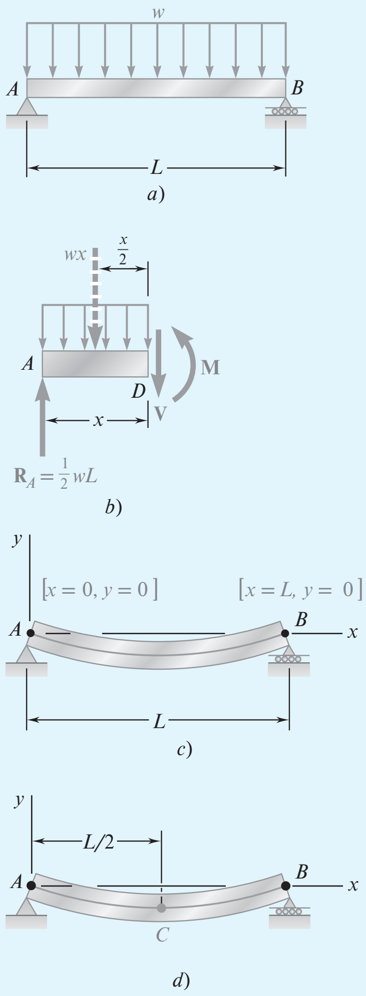


Figura 9.10 *a*) Viga simplemente apoyada con una carga uniformemente distribuida. *b*) Diagrama de cuerpo libre del segmento *AD*. *c*) Condiciones de frontera. *d*) Punto de deflexión máxima.

Fotografía 9.1 Se requiere una función *M*(*x*) diferente en cada porción de las vigas cuando un vehículo cruza el puente.

En las dos aplicaciones de conceptos consideradas hasta ahora, solo fue necesario un diagrama de cuerpo libre para determinar el momento flector en la viga. En consecuencia, solo se utilizó una función de x para representar a M a lo largo de la viga. Sin embargo, las cargas concentradas, las reacciones en los apoyos o las discontinuidades en una carga distribuida hacen que sea necesario dividir la viga en varias porciones y representar el momento flector mediante una función diferente $M(x)$ en cada una de ellas. Por ejemplo, en la fotografía 9.1 se muestra una carretera elevada soportada por vigas, las cuales a su vez están sometidas a cargas concentradas de vehículos que cruzan el puente. Cada función $M(x)$ conducirá a una expresión diferente para la pendiente $\theta(x)$ y la deflexión $y(x)$. Como cada expresión debe contener dos constantes de integración, debe determinarse una gran cantidad de constantes. Como se estudiará en la siguiente aplicación de conceptos, las condiciones adicionales de frontera requeridas pueden obtenerse observando que aunque la fuerza cortante y el momento flector pueden ser discontinuos en varios puntos de una viga, la *deflexión* y la *pendiente* de la viga *no pueden ser discontinuas* en ningún punto.

Aplicación de conceptos 9.3

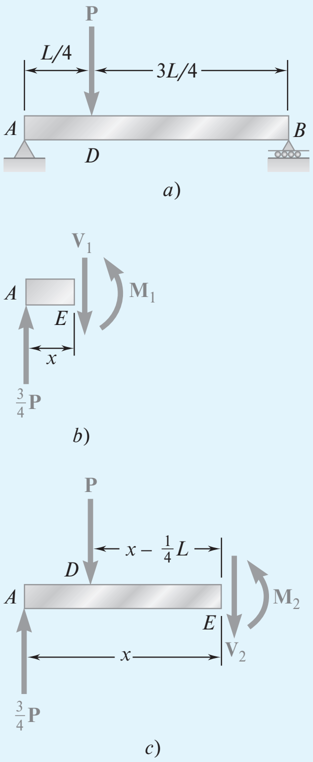


Figura 9.11 *a*) Viga simplemente apoyada con la carga transversal *P*. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la porción *AE* para encontrar el momento a la izquierda de la carga *P*. *c*) Diagrama de cuerpo libre de la porción *AE* para encontrar el momento a la derecha de la carga *P*.

Para la viga prismática y la carga mostradas (figura 9.11*a*) determine la pendiente y la deflexión en el punto *D*.

Divida la viga en dos porciones, *AD* y *DB*, y determine la función $y(x)$ que define la curva elástica para cada una de estas porciones.

1. De *A* a *D* ($x < L/4$). Dibuje el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga *AE* de longitud $x < L/4$ (figura 9.11*b*). Se suman los momentos con respecto a *E*, para obtener

$$M_1 = \frac{3P}{4}x \qquad (1)$$

y, de la ecuación (9.4), se escribe

$$EI\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{3}{4}Px \qquad (2)$$

donde $y_1(x)$ es la función que define la curva elástica *para la porción AD de la viga*. Al integrar respecto a x,

$$EI\,\theta_1 = EI\frac{dy_1}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 + C_1 \qquad (3)$$

$$EIy_1 = \frac{1}{8}Px^3 + C_1x + C_2 \qquad (4)$$

2. De *D* a *B* ($x > L/4$). Ahora dibuje el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga *AE* de longitud $x > L/4$ (figura 9.11*c*) y escriba

$$M_2 = \frac{3P}{4}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) \qquad (5)$$

de la ecuación (9.4) y reordenando términos, se tiene

$$EI\frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{1}{4}Px + \frac{1}{4}PL \qquad (6)$$

donde $y_2(x)$ es la función que define la curva elástica *para la porción DB de la viga*. Al integrar respecto a x,

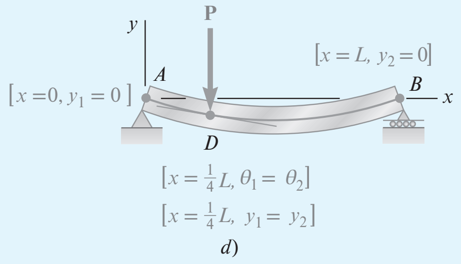


Figura 9.11 (*cont.*) *d*) Condiciones de frontera.

$$EI\theta_2 = EI\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{8}Px^2 + \frac{1}{4}PLx + C_3 \qquad (7)$$

$$EIy_2 = -\frac{1}{24}Px^3 + \frac{1}{8}PLx^2 + C_3x + C_4 \qquad (8)$$

Determinación de las constantes de integración. Las condiciones que satisfacen las constantes de integración se resumen en la figura 9.11*d*. En el apoyo A, donde la deflexión se define mediante la ecuación (4), $x = 0$ y $y_1 = 0$. En el apoyo B, donde la deflexión está definida por la ecuación (8), $x = L$ y $y_2 = 0$. También, puesto que no debe haber cambio en la deflexión o en la pendiente en el punto D, se requiere que $y_1 = y_2$ y $\theta_1 = \theta_2$, cuando $x = L/4$. Por lo tanto,

$[x = 0, y_1 = 0]$, ecuación (4): $\qquad 0 = C_2 \qquad$ (9)

$[x = L, y_2 = 0]$, ecuación (8): $\qquad 0 = \frac{1}{12}PL^3 + C_3L + C_4 \qquad$ (10)

$[x = L/4, \theta_1 = \theta_2]$, ecuaciones (3) y (7):

$$\frac{3}{128}PL^2 + C_1 = \frac{7}{128}PL^2 + C_3 \qquad (11)$$

$[x = L/4, y_1 = y_2]$, ecuaciones (4) y (8):

$$\frac{PL^3}{512} + C_1\frac{L}{4} = \frac{11PL^3}{1\,536} + C_3\frac{L}{4} + C_4 \qquad (12)$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente,

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{11PL^2}{128}, \quad C_4 = \frac{PL^3}{384}$$

Al sustituir C_1 y C_2 en las ecuaciones (3) y (4), $x \le L/4$ es

$$EI\theta_1 = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{7PL^2}{128} \qquad (13)$$

$$EIy_1 = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{7PL^2}{128}x \qquad (14)$$

Al hacer $x = L/4$ en cada una de estas ecuaciones, la pendiente y la deflexión en el punto D son

$$\theta_D = -\frac{PL^2}{32EI} \quad \text{y} \quad y_D = -\frac{3PL^3}{256EI}$$

Note que como $\theta_D \neq 0$, la deflexión en D *no* es la máxima deflexión de la viga.

*9.1B Determinación de la curva elástica a partir de la distribución de carga

En la sección 9.1A se mostró que la ecuación de la curva elástica puede obtenerse integrando dos veces la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

donde $M(x)$ es el momento flector de la viga. Recuerde, de la sección 5.2, que cuando una viga soporta una carga distribuida $w(x)$, se tiene $dM/dx = V$ y $dV/dx = -w$ en cualquier punto de la viga. Al derivar ambos miembros de la ecuación (9.4) con respecto a x y suponiendo que EI es constante,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}\frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \tag{9.7}$$

y derivando de nuevo,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI}\frac{dV}{dx} = -\frac{w(x)}{EI}$$

Por consiguiente, cuando una viga prismática soporta una carga distribuida $w(x)$, su curva elástica está regida por la ecuación diferencial lineal de cuarto orden

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} \tag{9.8}$$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación (9.8) por la constante EI y se integra cuatro veces para obtener:

$$\begin{aligned}
EI\frac{d^4y}{dx^4} &= -w(x)\\
EI\frac{d^3y}{dx^3} &= V(x) = -\int w(x)\,dx + C_1\\
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= M(x) = -\int dx\int w(x)\,dx + C_1x + C_2\\
EI\frac{dy}{dx} &= EI\,\theta(x) = -\int dx\int dx\int w(x)\,dx + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3\\
EIy(x) &= -\int dx\int dx\int dx\int w(x)\,dx + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4
\end{aligned} \tag{9.9}$$

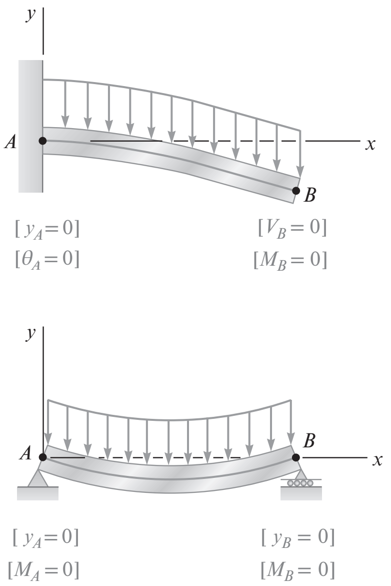


Figura 9.12 Condiciones de frontera para *a*) una viga en voladizo, *b*) una viga simplemente apoyada.

Las cuatro constantes de integración se determinan de las condiciones de frontera. Éstas incluyen *a*) las condiciones impuestas en la deflexión o pendiente de la viga por sus apoyos (vea la sección 9.1A) y *b*) la condición de que V y M sean cero en el extremo libre de una viga en voladizo o que M sea cero en ambos extremos de una viga simplemente apoyada (vea sección 5.2). Esto se ilustra en la figura 9.12.

Este método puede usarse eficientemente en vigas en voladizo o vigas simplemente apoyadas que soportan cargas distribuidas. En el caso de vigas salientes, las reacciones en los apoyos causarán discontinuidades en la fuerza cortante (es decir, en la tercera derivada de y), y se requerirán diferentes funciones para definir la curva elástica en toda la viga.

Aplicación de conceptos 9.4

La viga prismática simplemente apoyada AB soporta una carga uniformemente distribuida w por unidad de longitud (figura 9.13*a*). Determine las ecuaciones de la

curva elástica y de la deflexión máxima de la viga. (Esta viga es la misma de la Aplicación de conceptos 9.2).

Como w = constante, las primeras tres de las ecuaciones (9.9) dan

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = -wx + C_1$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \qquad (1)$$

Puesto que las condiciones de frontera requieren que $M = 0$ en ambos extremos de la viga (figura 9.13*b*), sean $x = 0$ y $M = 0$ en la ecuación (1) y se obtiene $C_2 = 0$. Después se hace $x = L$ y $M = 0$ en la misma ecuación, para obtener $C_1 = \frac{1}{2}wL$.

Se llevan los valores de C_1 y C_2 a la ecuación (1) y se integra dos veces para obtener:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_3$$

$$EIy = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_3x + C_4 \qquad (2)$$

Pero las condiciones de frontera también requieren que $y = 0$ en ambos extremos de la viga. Si $x = 0$, y $y = 0$ en la ecuación (2), $C_4 = 0$. Si $x = L$ y $y = 0$ en la misma ecuación, se escribe

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{12}wL^4 + C_3L$$

$$C_3 = -\tfrac{1}{24}wL^3$$

Al llevar los valores de C_3 y C_4 a la ecuación (2) y dividiendo ambos miembros por EI, la ecuación de la curva elástica es

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \qquad (3)$$

La máxima deflexión se obtiene haciendo $x = L/2$ en la ecuación (3).

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

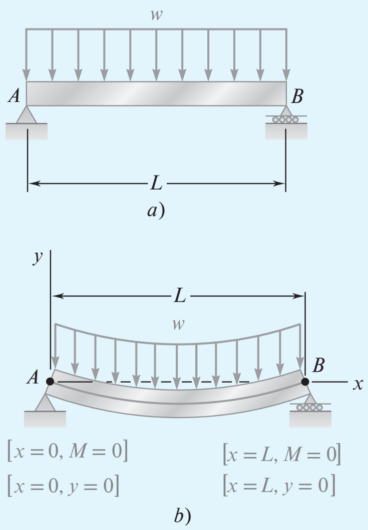


Figura 9.13 *a*) Viga simplemente apoyada con una carga uniformemente distribuida. *b*) Condiciones de frontera.

9.2 VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

En las secciones anteriores, el análisis se limitó a vigas estáticamente determinadas. Considere ahora la viga prismática AB (figura 9.14*a*) que tiene un extremo fijo en A y se apoya sobre un rodillo en B. Al dibujar el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.14*b*), las reacciones incluyen cuatro incógnitas, con solo tres ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad (9.10)$$

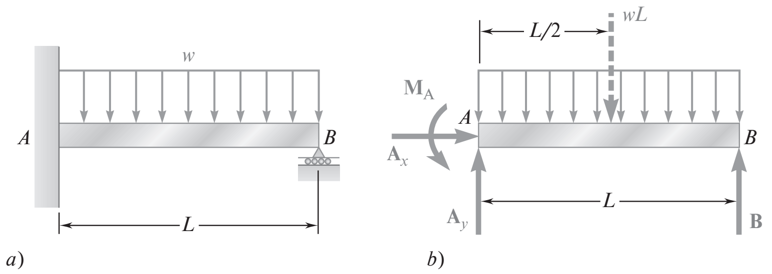


Figura 9.14 *a*) Viga estáticamente indeterminada con una carga uniformemente distribuida. *b*) Diagrama de cuerpo libre con cuatro reacciones desconocidas.

Como solo A_x puede determinarse mediante estas ecuaciones, la viga es *estáticamente indeterminada.*

Recuerde de los capítulos 2 y 3 que, en un problema estáticamente indeterminado, pueden obtenerse las reacciones considerando las *deformaciones* de la estructura. Por lo tanto, se procede con el cálculo de la pendiente y la deformación a lo largo de la viga. Siguiendo el método de la sección 9.1A, el momento flector $M(x)$ en cualquier punto de AB se expresa en función de la distancia x desde A, la carga dada y las reacciones desconocidas. Al integrar respecto a x, se obtienen expresiones para θ y y. Éstas contienen dos incógnitas adicionales: las constantes de integración C_1 y C_2. Pero hay seis ecuaciones disponibles para determinar las reacciones y las constantes C_1 y C_2; son las tres ecuaciones de equilibrio (9.10) y las tres ecuaciones que expresan que las condiciones de frontera se satisfacen [es decir, que la pendiente y deflexión en A son nulas y que la deflexión en B es cero (figura 9.15)]. En consecuencia, se pueden determinar las reacciones en los apoyos y se puede obtener la ecuación de la curva elástica.

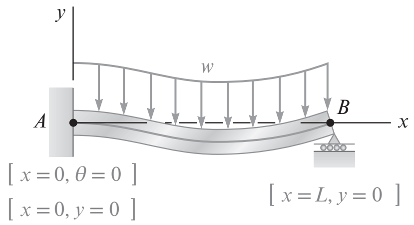


Figura 9.15 Condiciones de frontera para la viga de la figura 9.14.

Aplicación de conceptos 9.5

Determine las reacciones en los apoyos para la viga prismática de la figura 9.14*a*.

Ecuaciones de equilibrio. Del diagrama de cuerpo libre de la figura 9.14*b*,

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y + B - wL = 0 \qquad (1)$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad M_A + BL - \tfrac{1}{2}wL^2 = 0$$

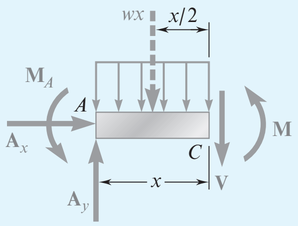


Figura 9.16 Diagrama de cuerpo libre de la porción *AC* de la viga.

Ecuación de la curva elástica. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga AC (figura 9.16) para obtener

$$+\circlearrowleft\Sigma M_C = 0: \qquad M + \tfrac{1}{2}wx^2 + M_A - A_y x = 0 \qquad (2)$$

Al resolver la ecuación (2) para M y llevando este valor a la ecuación (9.4),

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + A_y x - M_A$$

Al integrar respecto a x, da

$$EI\theta = EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}A_y x^2 - M_A x + C_1 \qquad (3)$$

$$EIy = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}A_y x^3 - \frac{1}{2}M_A x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (4)$$

Refiriéndose a las condiciones de frontera de la figura 9.15, $x = 0$, $\theta = 0$ en la ecuación (3), $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (4) y se concluye que $C_1 = C_2 = 0$. Así, la ecuación (4) puede reescribirse como sigue:

$$EI\,y = -\tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{6}A_y x^3 - \tfrac{1}{2}M_A x^2 \qquad \textbf{(5)}$$

Pero la tercera condición de frontera requiere que $y = 0$ para $x = L$. Llevando estos valores a la ecuación (5),

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{6}A_y L^3 - \tfrac{1}{2}M_A L^2$$

o

$$3M_A - A_y L + \tfrac{1}{4}wL^2 = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

Al resolver esta ecuación simultáneamente con las tres ecuaciones de equilibrio (1), las reacciones en los apoyos son

$$A_x = 0 \qquad A_y = \tfrac{5}{8}wL \qquad M_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad B = \tfrac{3}{8}wL$$

En la Aplicación de conceptos anterior, hubo una reacción redundante (es decir, una más de la que se podría determinar a partir de las ecuaciones de equilibrio solamente). La viga correspondiente es *estáticamente indeterminada al primer grado*. Otro ejemplo de una viga indeterminada al primer grado se proporciona en el Problema modelo 9.3. Si los soportes de viga son tales que dos reacciones son redundantes (figura 9.17*a*), la viga es *indeterminada al segundo grado*. Si bien existen ahora cinco reacciones desconocidas (figura 9.17*b*), se pueden obtener cuatro ecuaciones a partir de las condiciones de frontera (figura 9.17*c*). Así, siete ecuaciones están disponibles para determinar las cinco reacciones y las dos constantes de integración.

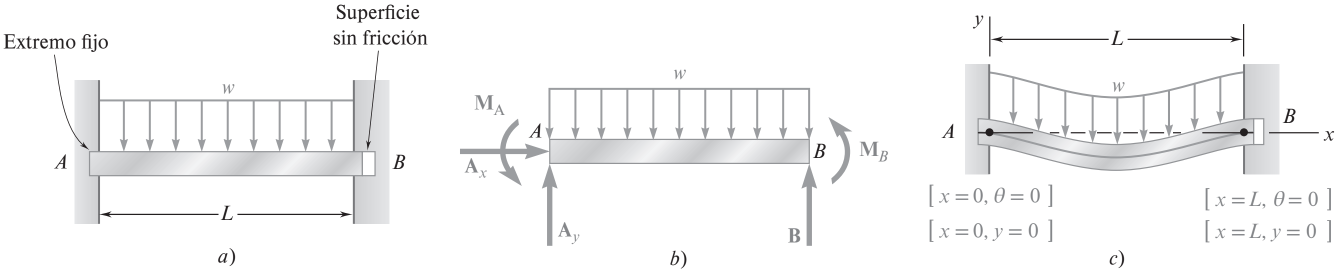
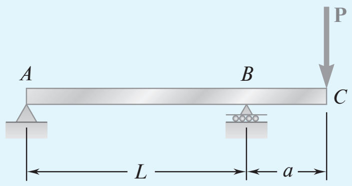


Figura 9.17 *a*) Viga estáticamente indeterminada al segundo grado. *b*) Diagrama de cuerpo libre. *c*) Condiciones de frontera.

Problema modelo 9.1

La viga saliente *ABC* está hecha de acero y soporta una carga concentrada **P** en el extremo *C*. Para la porción *AB* de la viga, *a*) obtenga la ecuación de la curva elástica, *b*) determine la deflexión máxima, *c*) calcule $y_{máx}$ para los siguientes datos:

W14 × 68	$I = 722\ \text{in}^4$	$E = 29 \times 10^6$ psi
$P = 50$ kips	$L = 15$ ft $= 180$ in	$a = 4$ ft $= 48$ in



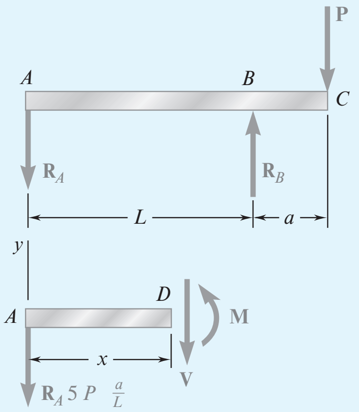


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre de la viga y de la porción *AD*.

ESTRATEGIA: Debe comenzar por determinar la ecuación de momento de flexión para la porción de interés. Al sustituir esta en la ecuación diferencial de la curva elástica, integrando dos veces, y aplicando las condiciones de frontera, se puede obtener la ecuación de la curva elástica. Utilice esta ecuación para encontrar las deflexiones deseadas.

MODELAR: Usando el diagrama de cuerpo libre de toda la viga (figura 1) se obtienen las reacciones: $\mathbf{R}_A = Pa/L\downarrow$, $\mathbf{R}_B = P(1 + a/L)\uparrow$. El diagrama de cuerpo libre de la porción de viga *AD* con longitud x (figura 1) da

$$M = -P\frac{a}{L}x \qquad (0 < x < L)$$

ANALIZAR:

Ecuación diferencial de la curva elástica. Utilizando la ecuación (9.4) da

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -P\frac{a}{L}x$$

Al notar que la rigidez a la flexión EI es constante, se integra dos veces y se encuentra

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIy = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

Determinación de constantes. Para las condiciones de frontera mostradas (figura 2),

$[x = 0, y = 0]$: De la ecuación (2), $C_2 = 0$
$[x = L, y = 0]$: Usando nuevamente la ecuación (2),

$$EI(0) = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}L^3 + C_1L \qquad C_1 = +\frac{1}{6}PaL$$

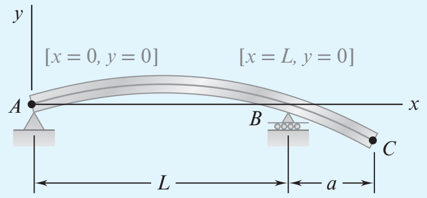


Figura 2 Condiciones de frontera.

***a*) Ecuación de la curva elástica.** Al sustituir C_1 y C_2 en las ecuaciones (1) y (2),

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + \frac{1}{6}PaL \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{PaL}{6EI}\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \qquad (3)$$

$$EIy = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + \frac{1}{6}PaLx \qquad y = \frac{PaL^2}{6EI}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \qquad (4) \blacktriangleleft$$

***b*) Deflexión máxima en la porción *AB*.** La deflexión máxima $y_{\text{máx}}$ ocurre en el punto *E*, donde la pendiente de la curva elástica es cero (figura 3). Al hacer $dy/dx = 0$ en la ecuación (3), la abscisa x_m del punto *E* es

$$0 = \frac{PaL}{6EI}\left[1 - 3\left(\frac{x_m}{L}\right)^2\right] \qquad x_m = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0.577L$$

Al sustituir $x_m/L = 0.577$ en la ecuación (4):

$$y_{máx} = \frac{PaL^2}{6EI}[(0.577) - (0.577)^3] \qquad y_{máx} = 0.0642\frac{PaL^2}{EI}$$

c) Evaluación de $y_{máx}$. Para los datos dados, el valor de $y_{máx}$ es

$$y_{máx} = 0.0642\frac{(50 \text{ kips})(48 \text{ in})(180 \text{ in})^2}{(29 \times 10^6 \text{ psi})(722 \text{ in}^4)} \qquad y_{máx} = 0.238 \text{ in}$$

REVISAR y PENSAR: Debido a que la deflexión máxima es positiva, tiene una dirección hacia arriba. Como comprobación, se observa que esto es consistente con la forma desviada prevista para esta carga (figura 3).

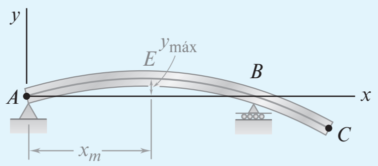
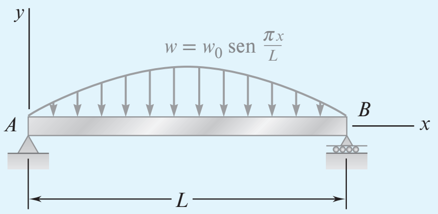


Figura 3 Curva elástica deformada con la ubicación de la deflexión máxima.

Problema modelo 9.2

Para la viga y carga mostradas, determine: *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión máxima.



ESTRATEGIA: Se determina la curva elástica directamente de la distribución de carga usando la ecuación (9.8), aplicando las condiciones de frontera apropiadas. Se utilizará esta ecuación para encontrar la pendiente y la deflexión deseadas.

MODELAR y ANALIZAR:

Ecuación diferencial de la curva elástica. De la ecuación (9.8),

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x) = -w_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \qquad (1)$$

Al integrar la ecuación (1) dos veces:

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V = +w_0\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} + C_1 \qquad (2)$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = +w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_1x + C_2 \qquad (3)$$

Condiciones de frontera. Con referencia a la figura 1.

$[x = 0, M = 0]$: De la ecuación (3), $C_2 = 0$

$[x = L, M = 0]$: Usando de nuevo la ecuación (3),

$$0 = w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi + C_1L \qquad C_1 = 0$$

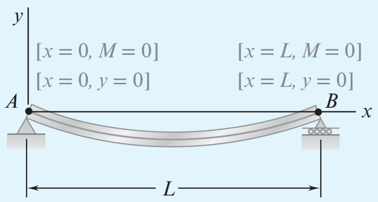


Figura 1 Condiciones de frontera.

Así,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = +w_0\frac{L^2}{\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L} \qquad \textbf{(4)}$$

Al integrar dos veces la ecuación (4):

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\theta = -w_0\frac{L^3}{\pi^3}\cos\frac{\pi x}{L} + C_3 \qquad \textbf{(5)}$$

$$EI\,y = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L} + C_3x + C_4 \qquad \textbf{(6)}$$

Condiciones de frontera. Con referencia a la figura 1.

$[x = 0, y = 0]$:	Usando la ecuación (6),	$C_4 = 0$
$[x = L, y = 0]$:	De nuevo usando la ecuación (6),	$C_3 = 0$

***a*) Ecuación de la curva elástica.** $EIy = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}$ ◀

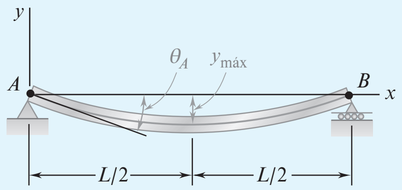


Figura 2 Curva elástica deformada que demuestra la pendiente en *A* y la deflexión máxima.

***b*) Pendiente en el extremo A.** Con referencia a la figura 2. Para $x = 0$,

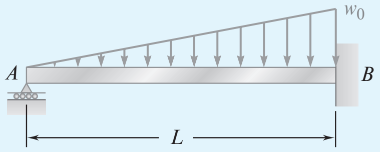
$$EI\theta_A = -w_0\frac{L^3}{p^3}\cos 0 \qquad \theta_A = \frac{w_0L^3}{\pi^3EI} \measuredangle \quad ◀$$

c) Deflexión máxima. Con referencia a la figura 2, para $x = \frac{1}{2}L$,

$$ELy_{\text{máx}} = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} \qquad y_{\text{máx}} = \frac{w_0L^4}{\pi^4EI}\downarrow \quad ◀$$

REVISAR y PENSAR: Como comprobación, se observa que las direcciones de la pendiente en el extremo *A* y de la deflexión máxima son consistentes con la forma de deflexión prevista para esta carga (figura 1).

Problema modelo 9.3



Para la viga uniforme *AB*, *a*) determine la reacción en *A*, *b*) obtenga la ecuación de la curva elástica, *c*) halle la pendiente en *A*. (Note que la viga es estáticamente indeterminada al primer grado).

ESTRATEGIA: La viga es estáticamente indeterminada al primer grado. Tratando la reacción en *A* como redundante, escriba la ecuación del momento flector como una función de esta reacción redundante y la carga existente. Después de sustituir la ecuación de momento flector por la ecuación diferencial de la curva elástica, integrando dos veces y aplicando las condiciones de frontera, se puede determinar la reacción. Utilice la ecuación de la curva elástica para encontrar la pendiente deseada.

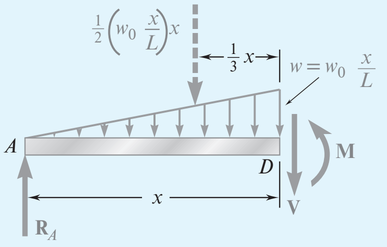


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre de la porción *AD* de la viga.

MODELAR: Mediante el cuerpo libre mostrado en la figura 1, obtenga el diagrama de momento flector:

$$+\circlearrowleft\Sigma M_D = 0: \quad R_Ax - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0x^2}{L}\right)\frac{x}{3} - M = 0 \qquad M = R_Ax - \frac{w_0x^3}{6L}$$

ANALIZAR:

Ecuación diferencial de la curva elástica. Se utiliza la ecuación (9.4) para

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_Ax - \frac{w_0x^3}{6L}$$

Al notar que la rigidez a la flexión EI es constante, se integra dos veces y se obtiene

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\theta = \frac{1}{2}R_Ax^2 - \frac{w_0x^4}{24L} + C_1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$EIy = \frac{1}{6}R_Ax^3 - \frac{w_0x^5}{120L} + C_1x + C_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Condiciones de frontera. En la figura 2 se muestran las tres condiciones de frontera que deben satisfacerse

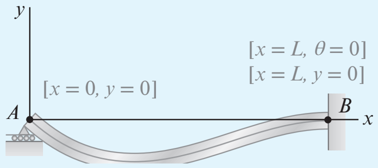


Figura 2 Condiciones de frontera.

$[x = 0, y = 0]$: $\quad C_2 = 0 \qquad \textbf{(3)}$

$[x = L, \theta = 0]$: $\quad \frac{1}{2}R_AL^2 - \frac{w_0L^3}{24} + C_1 = 0 \qquad \textbf{(4)}$

$[x = L, y = 0]$: $\quad \frac{1}{6}R_AL^3 - \frac{w_0L^4}{120} + C_1L + C_2 = 0 \qquad \textbf{(5)}$

***a)* Reacción en *A*.** Al multiplicar la ecuación (4) por L, restar miembro a miembro la ecuación (5) de la ecuación obtenida, y notar que $C_2 = 0$, se tiene

$$\tfrac{1}{3}R_AL^3 - \tfrac{1}{30}w_0L^4 = 0 \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{1}{10}w_0L\uparrow \quad ◀$$

La reacción es independiente de E y de I. Al sustituir $RA = \frac{1}{10}w_0L$ en la ecuación (4),

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{10}w_0L)L^2 - \tfrac{1}{24}w_0L^3 + C_1 = 0 \qquad C_1 = -\tfrac{1}{120}w_0L^3$$

***b)* Ecuación de la curva elástica.** Al sustituir R_A, C_1 y C_2 en la ecuación (2),

$$EIy = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}w_0L\right)x^3 - \frac{w_0x^5}{120L} - \left(\frac{1}{120}w_0L^3\right)x$$

$$y = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x) \quad ◀$$

***c)* Pendiente en *A* (figura 3).** Al derivar la ecuación de la curva elástica con respecto a x,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{120EIL}(-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4)$$

Al hacer $x = 0$,
$$\theta_A = -\frac{w_0L^3}{120EI} \qquad \theta_A = \frac{w_0L^3}{120EI} ⦩ \quad ◀$$

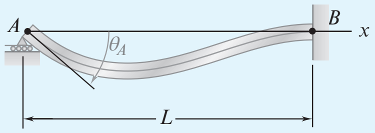


Figura 3 Curva elástica deformada que muestra la pendiente en *A*.

Problemas

En los siguientes problemas suponga que la rigidez a la flexión EI de cada viga es constante.

9.1 a 9.4 Para la carga mostrada en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para la viga en voladizo AB, *b*) la deflexión en el extremo libre, *c*) la pendiente en el extremo libre.

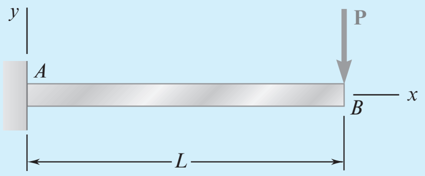


Figura P9.1

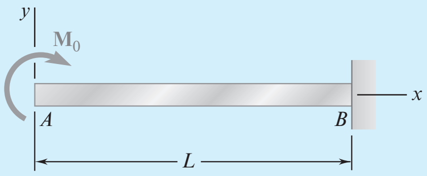


Figura P9.2

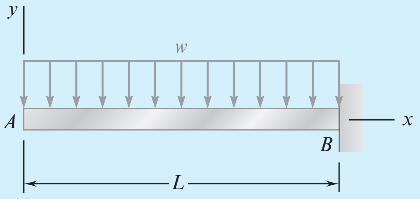


Figura P9.3

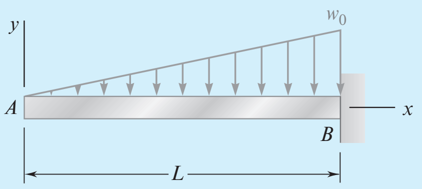


Figura P9.4

9.5 y 9.6 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo AB de la viga, *b*) la deflexión en B, *c*) la pendiente en B.

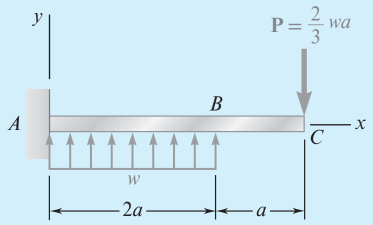


Figura P9.5

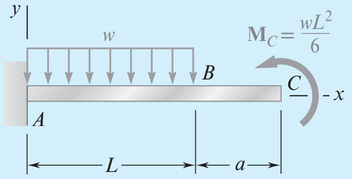


Figura *P9.6*

9.7 Para la viga y la carga que se muestran en la figura determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo AB de la viga, *b*) la deflexión en el punto medio del claro, *c*) la pendiente en B.

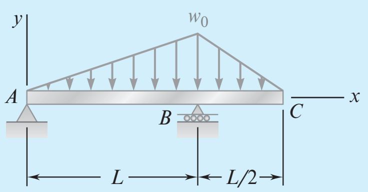


Figura P9.7

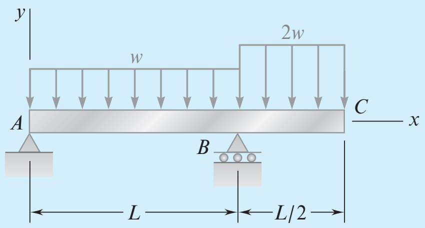


Figura *P9.8*

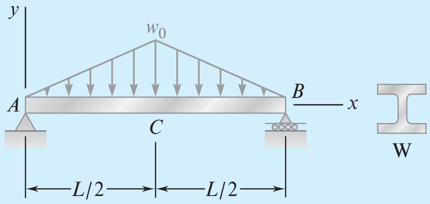


Figura P9.9

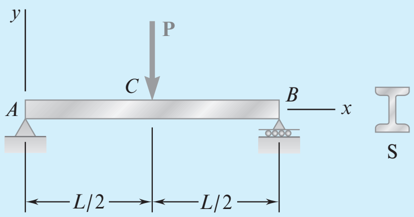


Figura P9.10

9.8 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *AB* de la viga, *b*) la pendiente en *A*, *c*) la pendiente en *B*.

9.9 Si se sabe que la viga *AB* es de un perfil laminado W10 × 33 y que $w_0 = 3$ kips/ft, $L = 12$ ft y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la pendiente en *A*, *b*) la deflexión en *C*.

9.10 Si se sabe que la viga *AB* es de un perfil laminado S200 × 34 y que $P = 60$ kN, $L = 2$ m y $E = 200$ GPa, determine *a*) la pendiente en *A*, *b*) la deflexión en *C*.

9.11 Para la viga y la carga mostradas, *a*) exprese la magnitud y la ubicación de la deflexión máxima en términos de w_0, *L*, *E* e *I*. *b*) Calcule el valor de la deflexión máxima, suponiendo que la viga *AB* es un perfil laminado W18 × 50 y que $w_0 = 4.5$ kips/ft, $L = 18$ ft y $E = 29 \times 10^6$ psi.

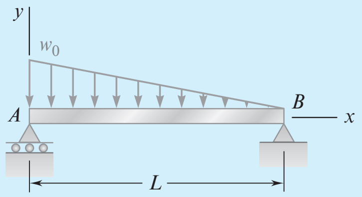


Figura P9.11

9.12 *a*) Determine la ubicación y la magnitud de la deflexión máxima absoluta en *AB* entre *A* y el centro de la viga. *b*) Suponga que la viga *AB* es una W460 × 113, $M0 = 224$ kN · m, y $E = 200$ GPa; determine la máxima longitud permisible *L* de la viga, si la deflexión máxima no debe exceder 1.2 mm.

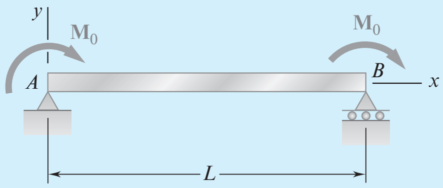


Figura P9.12

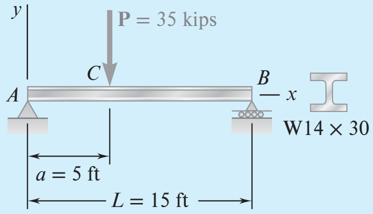


Figura P9.13

9.13 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.14 Si se sabe que la viga *AB* es de un perfil laminado W360 × 101 y que $M_0 = 310$ kN · m, $L = 2.4$ m, $a = 0.5$ m, y $E = 200$ GPa, determine *a*) la ecuación de la curva elástica del tramo *BD*, *b*) la deflexión en el punto *C*.

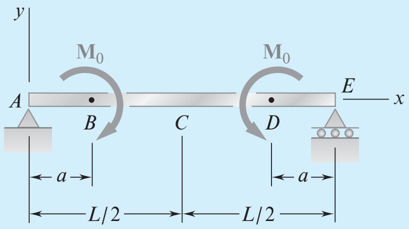


Figura *P9.14*

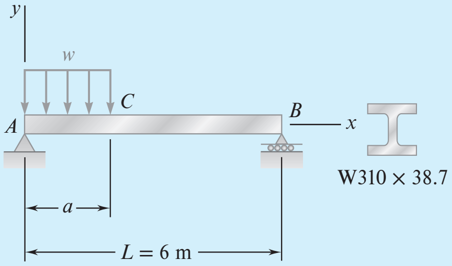


Figura *P9.15*

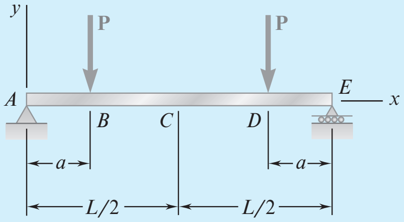


Figura P9.16

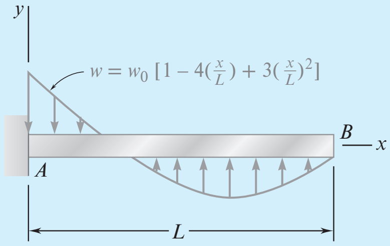


Figura P9.17

9.15 Para la viga y la carga mostradas en la figura se sabe que $a = 2$ m, $w = 50$ kN/m y $E = 200$ GPa. Determine *a*) la pendiente en el apoyo *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*.

9.16 Si se sabe que la viga *AE* es un perfil laminado S200 × 27.4 y que $P = 17.5$ kN, $L = 2.5$ m, $a = 0.8$ m, y $E = 200$ GPa, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *BD*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

9.17 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el extremo libre.

9.18 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto medio del claro.

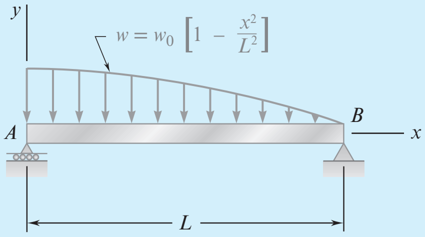


Figura P9.18

9.19 a 9.22 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la reacción en el soporte de rodillos.

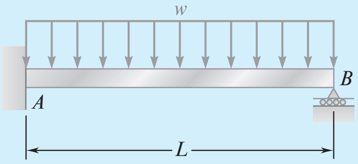


Figura P9.19

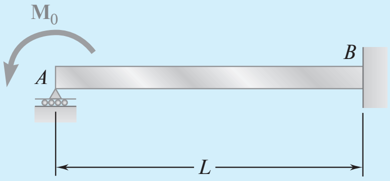


Figura P9.20

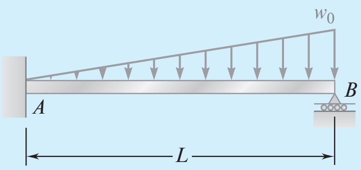


Figura *P9.21*

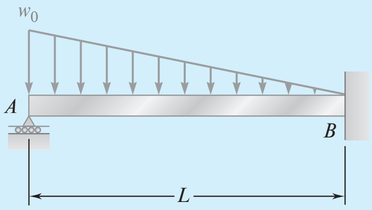


Figura *P9.22*

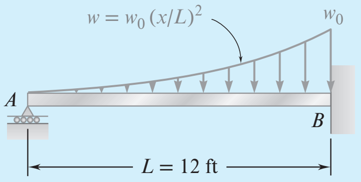


Figura P9.23

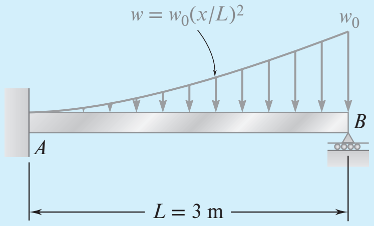


Figura P9.24

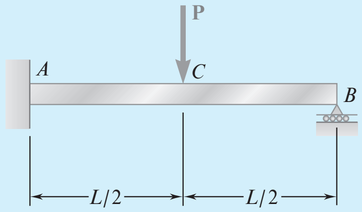


Figura P9.25

9.23 Para la viga que se muestra en la figura, determine la reacción en el soporte de rodillos cuando $w_0 = 6$ kips/ft.

9.24 Para la viga que se muestra en la figura, determine la reacción en el soporte de rodillos cuando $w_0 = 15$ kN/m.

9.25 a 9.28 Determine la reacción en el soporte de rodillos y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en las figuras.

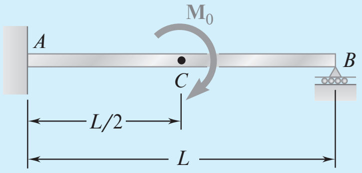


Figura P9.26

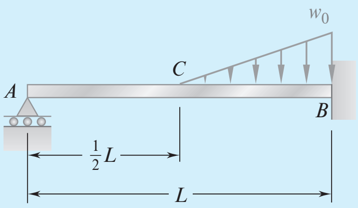


Figura P9.27

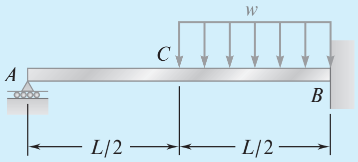


Figura P9.28

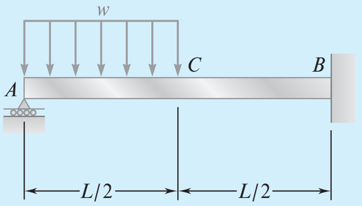


Figura *P9.29*

9.29 y 9.30 Determine la reacción en el soporte de rodillos y la deflexión en el punto *C*.

9.31 y 9.32 Determine la reacción en el soporte de rodillos y la deflexión en el punto *D*, si se sabe que *a* es igual a $L/3$.

9.33 y 9.34 Determine la reacción en *A* y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en las figuras.

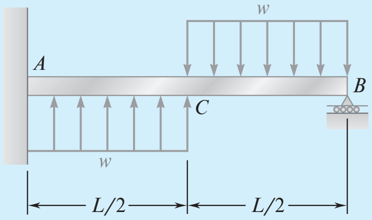


Figura P9.30

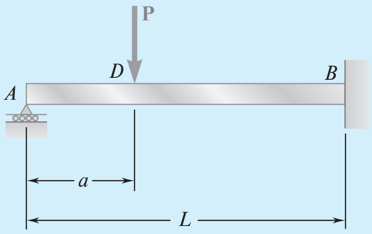


Figura *P9.31*

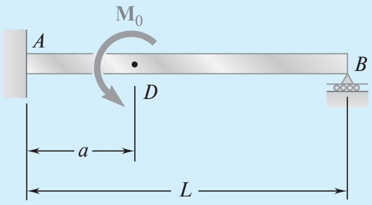


Figura P9.32

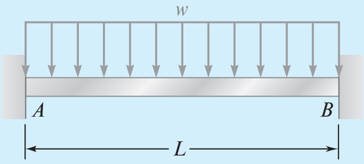


Figura P9.33

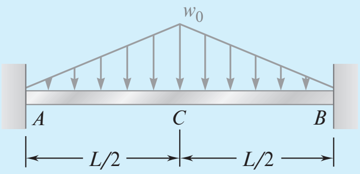


Figura P9.34

*9.3 FUNCIONES DE SINGULARIDAD PARA DETERMINAR LA PENDIENTE Y LA DEFLEXIÓN

El método de integración proporciona un modo conveniente y efectivo de calcular la pendiente y la deflexión en cualquier punto de una viga prismática, *siempre que pueda representarse el momento flector mediante una función analítica única* $M(x)$. Sin embargo, cuando la carga de la viga exige dos funciones diferentes para representar el momento flector en toda la viga, como en la Aplicación de conceptos 9.3 (figura 9.11*a*), se requieren cuatro constantes de integración y un número igual de ecuaciones que expresen continuidad en el punto D, así como condiciones de frontera en los apoyos A y B, para determinar estas constantes. Si se requieren tres o más funciones para representar el momento flector, aumenta el número de constantes y de ecuaciones adicionales, lo que da como resultado el uso de cálculos extensos. Este es el caso de la viga mostrada en la fotografía 9.2. En la presente sección se simplifican los cálculos en estas situaciones, mediante el uso de las funciones de singularidad analizadas en la sección 5.4.

Fotografía 9.2 En esta estructura de techo, cada uno de los travesaños aplica una carga concentrada a la viga en que se apoya.

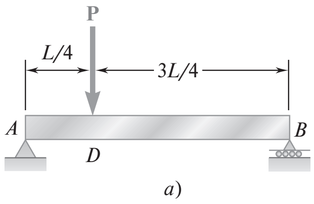


Figura 9.11 (*repetida*) Viga simplemente apoyada con la carga transversal **P**.

Considere de nuevo la viga y carga de la Aplicación de conceptos 9.3 (figura 9.11) y dibuje el diagrama de cuerpo libre de esa viga (figura 9.18). Use la función de singularidad apropiada (sección 5.4), para representar la contribución a la cortante de la carga concentrada **P**, se escribe

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^0$$

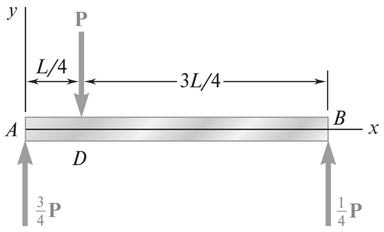


Figura 9.18 Diagrama de cuerpo libre para la viga de la figura 9.11.

Al integrar respecto a x y recordar de la sección 5.4 que, en ausencia de momentos concentrados, la expresión obtenida para el momento flector no tendrá términos constantes, entonces

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \quad \textbf{(9.11)}$$

Al sustituir $M(x)$ de la ecuación (9.11) en la ecuación (9.4),

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \quad \textbf{(9.12)}$$

e integrar respecto a x,

$$EI\theta = EI\frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{1}{2}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + C_1 \qquad \textbf{(9.13)}$$

$$EIy = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{1}{6}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad \textbf{(9.14)}^\dagger$$

Las constantes C_1 y C_2 se pueden determinar mediante las condiciones de frontera mostradas en la figura 9.19. Al hacer $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación (9.14),

$$0 = 0 - \frac{1}{6}P\langle 0 - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + 0 + C_2$$

que se reduce a $C_2 = 0$, ya que cualquier paréntesis triangular que contenga una cantidad negativa es igual a cero. Al hacer ahora $x = L$, $y = 0$ y $C_2 = 0$ en la ecuación (9.14),

$$0 = \frac{1}{8}PL^3 - \frac{1}{6}P\langle \tfrac{3}{4}L\rangle^3 + C_1L$$

Como la cantidad entre paréntesis triangulares es positiva, estos pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios. Al resolver C_1, se obtiene

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}$$

Las expresiones obtenidas para las constantes C_1 y C_2 son las mismas encontradas antes en la Aplicación de conceptos 9.3. Pero se ha eliminado la necesidad de las constantes adicionales C_3 y C_4, y no se requiere escribir ecuaciones que expresen que la pendiente y la deflexión son continuas en el punto D.

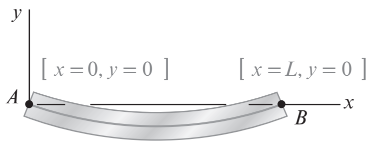


Figura 9.19 Condiciones de frontera para la viga de la figura 9.11.

† Las condiciones de continuidad para la pendiente y la deflexión en D están "incluidas" en las ecuaciones (9.13) y (9.14). Ciertamente, la diferencia entre las expresiones para la pendiente θ_1 en AD y la pendiente θ_2 en DB está representada por el término $-\frac{1}{2}P\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^2$ en la ecuación (9.13), y este término es igual a cero en D. De manera similar, la diferencia entre las expresiones para la deflexión y_1 en AD y la deflexión y_2 en DB está representada por $-\frac{1}{6}P\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^3$ en la ecuación (9.14), y este término es también igual a cero en D.

Aplicación de conceptos 9.6

Para la viga y las cargas mostradas (figura 9.20*a*) y usando funciones de singularidad, *a*) exprese la pendiente y la deflexión como funciones de la distancia x desde el apoyo en A, *b*) determine la deflexión en el punto medio D. Utilice $E = 200$ GPa e $I = 6.87 \times 10^{-6}$ m^4.

a) La viga está cargada y apoyada de la misma manera que la viga de la Aplicación de conceptos 5.5. Recuerde que la carga distribuida se reemplazó por dos cargas equivalentes de extremo abierto, mostradas en la figura 9.20*b*. Las expresiones para la cortante y el momento flector son:

$$V(x) = -1.5\langle x - 0.6\rangle^1 + 1.5\langle x - 1.8\rangle^1 + 2.6 - 1.2\langle x - 0.6\rangle^0$$
$$M(x) = -0.75\langle x - 0.6\rangle^2 + 0.75\langle x - 1.8\rangle^2 + 2.6x - 1.2\langle x - 0.6\rangle^1 - 1.44\langle x - 2.6\rangle^0$$

Al integrar dos veces la última expresión, se obtiene

$$EI\theta = -0.25\langle x - 0.6\rangle^3 + 0.25\langle x - 1.8\rangle^3 + 1.3x^2 - 0.6\langle x - 0.6\rangle^2 - 1.44\langle x - 2.6\rangle^1 + C_1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$EIy = -0.0625\langle x - 0.6\rangle^4 + 0.0625\langle x - 1.8\rangle^4 + 0.4333x^3 - 0.2\langle x - 0.6\rangle^3 - 0.72\langle x - 2.6\rangle^2 + C_1x + C_2 \qquad \textbf{(2)}$$

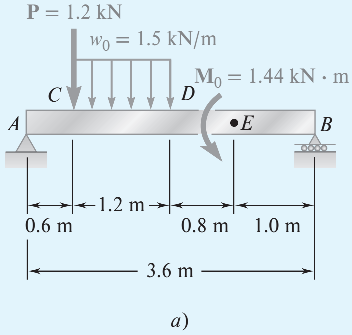
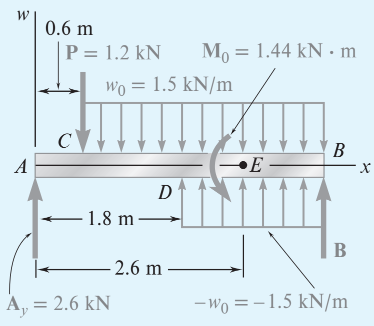
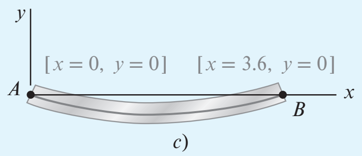


Figura 9.20 *a*) Viga simplemente apoyada con cargas múltiples.



b)



c)

Figura 9.20 (*cont.*) *b*) Diagrama de cuerpo libre de la viga que muestra el sistema de cargas equivalente. *c*) Condiciones de frontera.

Las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera mostradas en la figura 9.20*c*. Al hacer $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación (2) y notar que todos los paréntesis triangulares contienen cantidades negativas y que, por consiguiente, son iguales a cero, se concluye que $C_2 = 0$. Si $x = 3.6$, $y = 0$ y $C_2 = 0$ en la ecuación (2), resulta

$$0 = -0.0625\langle 3.0\rangle^4 + 0.0625\langle 1.8\rangle^4 + 0.4333(3.6)^3 - 0.2\langle 3.0\rangle^3 - 0.72\langle 1.0\rangle^2 + C_1(3.6) + 0$$

Puesto que todas las cantidades entre paréntesis triangulares son positivas, estos pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios. Al despejar C_1, se encuentra $C_1 = -2.692$.

b) Al sustituir C_1 y C_2 en la ecuación (2) y haciendo $x = x_D = 1.8$ m, se encuentra que la deflexión en el punto D está definida por la relación

$$EIy_D = -0.0625\langle 1.2\rangle^4 + 0.0625\langle 0\rangle^4 + 0.4333(1.8)^3 - 0.2\langle 1.2\rangle^3 - 0.72\langle -0.8\rangle^2 - 2.692(1.8)$$

El último paréntesis triangular contiene una cantidad negativa y, por lo tanto, es igual a cero. Todos los demás paréntesis triangulares contienen cantidades positivas y pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios.

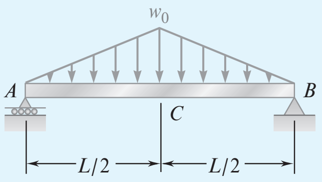
$$EIy_D = -0.0625(1.2)^4 + 0.0625(0)^4 + 0.4333(1.8)^3 - 0.2(1.2)^3 - 0 - 2.692(1.8) = -2.794$$

Al recordar los valores numéricos dados de E e I,

$$(200 \text{ GPa})(6.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4)y_D = -2.794 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$y_D = -13.64 \times 10^{-3} \text{ m} = -2.03 \text{ mm}$$

Problema modelo 9.4



Para la viga prismática y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en A, *c*) la deflexión máxima.

ESTRATEGIA: Se puede iniciar con la determinación de la ecuación de momento flector de la viga, utilizando una función de singularidad para cualquier transición en la carga. Al sustituir esto en la ecuación diferencial de la curva elástica, al integrar dos veces, y al aplicar las condiciones de frontera, es posible obtener la ecuación de la curva elástica. Se utilizará esta ecuación para encontrar la pendiente y la deflexión deseadas.

MODELAR: La ecuación que define el momento flector de la viga se obtuvo en el Problema modelo 5.9. Usando el diagrama de carga modificado que se muestra en la figura, se obtuvo la ecuación (3)

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0 Lx$$

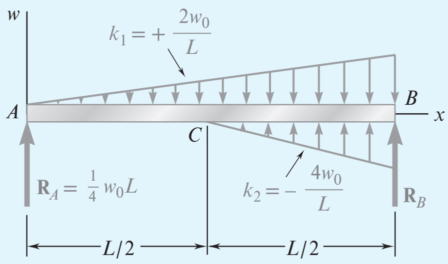


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre que muestra la carga modificada.

ANALIZAR:

***a*) Ecuación de la curva elástica.** Al usar la ecuación (9.4),

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0 Lx \qquad (1)$$

y al integrar dos veces respecto a x,

$$EI\theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^4 + \frac{w_0 L}{8}x^2 + C_1 \qquad (2)$$

$$EIy = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 + C_1 x + C_2 \qquad (3)$$

Condiciones de frontera. Con referencia a la figura 2, $[x = 0, y = 0]$: al usar la ecuación (3) y observar que cada paréntesis triangular $\langle\ \rangle$ contiene una cantidad negativa y que, por lo tanto, es igual a cero, $C_2 = 0$.

$[x = L, y = 0]$: al usar de nuevo la ecuación (3),

$$0 = -\frac{w_0 L^4}{60} + \frac{w_0}{30L}\left(\frac{L}{2}\right)^5 + \frac{w_0 L^4}{24} + C_1 L \qquad C_1 = -\frac{5}{192}w_0 L^3$$

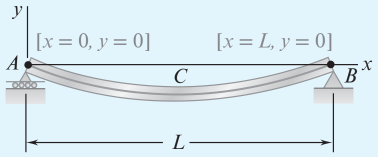


Figura 2 Condiciones de frontera.

Al sustituir C_1 y C_2 en las ecuaciones (2) y (3),

$$EI\ \theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^4 + \frac{w_0 L}{8}x^2 - \frac{5}{192}w_0 L^3 \qquad (4)$$

$$EIy = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 - \frac{5}{192}w_0 L^3 x \qquad (5)$$ ◀

***b*) Pendiente en *A* (figura 3).** Al sustituir $x = 0$ en la ecuación (4),

$$EI\theta_A = -\frac{5}{192}w_0 L^3 \qquad \theta_A = \frac{5w_0 L^3}{192EI} ↻$$ ◀

***c*) Deflexión máxima (figura 3).** Debido a la simetría de los apoyos y la carga, la deflexión máxima ocurre en el punto C, donde $x = \frac{1}{2}L$. Al sustituir en la ecuación (5),

$$EIy_{\text{máx}} = w_0 L^4\left[-\frac{1}{60(32)} + 0 + \frac{1}{24(8)} - \frac{5}{192(2)}\right] = -\frac{w_0 L^4}{120}$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{w_0 L^4}{120EI}\downarrow$$ ◀

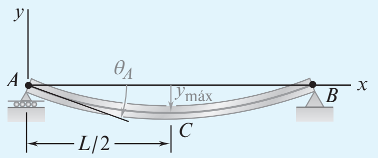
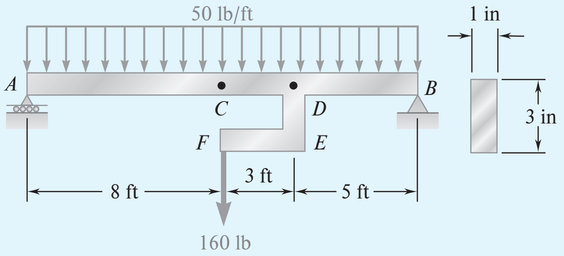


Figura 3 Curva elástica deformada que muestra la pendiente en *A* y la deflexión máxima en *C*.

Problema modelo 9.5

La barra rígida *DEF* está soldada en el punto *D* a la barra uniforme de acero *AB*. Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica de la viga, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.



ESTRATEGIA: Se iniciará con la determinación de la ecuación del momento flector de la viga *ADB*, utilizando una función de singularidad para cualquier transición en la carga. Al sustituir esto en la ecuación diferencial de la curva elástica, integrando dos veces, y aplicando las condiciones de contorno, puede obtenerse la ecuación de la curva elástica. Se utilizará esta ecuación para encontrar la deflexión deseada.

MODELAR: La ecuación que define el momento flector se obtuvo en el Problema modelo 5.10. Usando el diagrama de carga modificado que se muestra en la figura y expresando *x* en pies, la ecuación (3) es

$$M(x) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}$$

ANALIZAR:

***a*) Ecuación de la curva elástica.** Al usar la ecuación (9.4),

$$EI(d^2y/dx^2) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \quad \text{lb} \cdot \text{ft} \qquad (1)$$

e integrar dos veces respecto a *x*,

$$EI\,\theta = -8.333x^3 + 240x^2 - 80\langle x - 11\rangle^2 - 480\langle x - 11\rangle^1 + C_1 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^2 \qquad (2)$$

$$EI\,y = -2.083x^4 + 80x^3 - 26.67\langle x - 11\rangle^3 - 240\langle x - 11\rangle^2 + C_1 x + C_2 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^3 \qquad (3a)$$

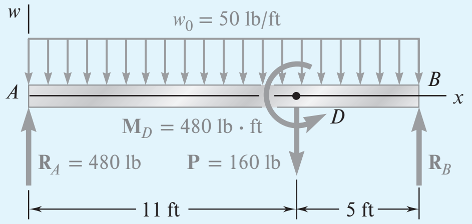


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre que muestra el sistema fuerza-momento equivalente.

Condiciones de frontera. Con referencia a la figura 2, $[x = 0, y = 0]$: al usar la ecuación (3) y observar que cada paréntesis triangular ⟨ ⟩ contiene una cantidad negativa y, en consecuencia, es igual a cero, se encuentra $C_2 = 0$.

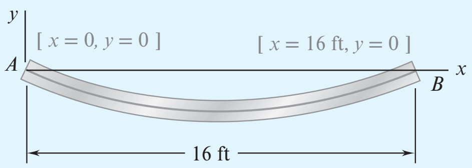


Figura 2 Condiciones de frontera.

[x = 16 ft, y = 0]: al usar de nuevo la ecuación (3) y teniendo en cuenta que cada paréntesis triangular contiene una cantidad positiva y, por lo tanto, puede reemplazarse por un paréntesis ordinario:

$$0 = -2.083(16)^4 + 80(16)^3 - 26.67(5)^3 - 240(5)^2 + C_1(16)$$

$$C_1 = -11.36 \times 10^3$$

Al sustituir los valores hallados para C_1 y C_2 en la ecuación (3), se tiene

$$EIy = -2.083x^4 + 80x^3 - 26.67\langle x - 11\rangle^3 - 240\langle x - 11\rangle^2 - 11.36 \times 10^3 x \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^3 \qquad \textbf{(3b)}$$

Para determinar EI recuerde que $E = 29 \times 10^6$ psi y calcule

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(1\text{ in})(3\text{ in})^3 = 2.25\text{ in}^4$$

$$EI = (29 \times 10^6\text{ psi})(2.25\text{ in}^4) = 65.25 \times 10^6\text{ lb} \cdot \text{in}^2$$

Sin embargo, como todos los cálculos anteriores se realizaron tomando pies como las unidades de longitud, se escribe

$$EI = (65.25 \times 10^6\text{ lb} \cdot \text{in}^2)(1\text{ ft}/12\text{ in})^2 = 453.1 \times 10^3\text{ lb} \cdot \text{ft}^2$$

***b*) Deflexión en el punto medio C (figura 3).** Al hacer x = 8 ft en la ecuación (3*b*), se tiene

$$EI_{y_C} = -2.083(8)^4 + 80(8)^3 - 26.67\langle -3\rangle^3 - 240\langle -3\rangle^2 - 11.36 \times 10^3(8)$$

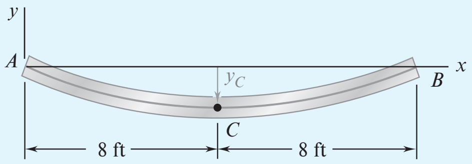


Figura 3 Curva elástica deformada que muestra el desplazamiento en el punto medio *C*.

Al observar que cada paréntesis triangular es igual a cero y al sustituir EI por su valor numérico, se escribe

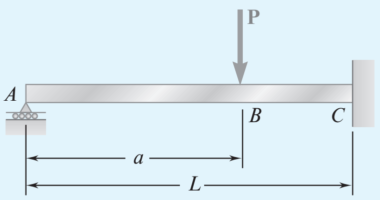
$$(453.1 \times 10^3\text{ lb} \cdot \text{ft}^2)y_C = -58.45 \times 10^3\text{ lb} \cdot \text{ft}^3$$

y, al despejar y_C: $\quad y_C = -0.1290$ ft $\qquad y_C = -1.548$ in

REVISAR y PENSAR: Note que la deflexión obtenida en el punto medio C *no* es la deflexión máxima.

Problema modelo 9.6

Para la viga uniforme *ABC*, *a*) exprese la reacción en *A* en términos de *P*, *L*, *a*, *E* e *I*, *b*) determine la reacción en *A* y la deflexión bajo la carga cuando $a = L/2$.



ESTRATEGIA: La viga es estáticamente indeterminada al primer grado. Usando funciones de singularidad, se puede escribir la ecuación de momento flector para la viga, incluyendo la reacción desconocida en *A* como parte de la expresión. Después de sustituir esta ecuación en la ecuación diferencial de la curva elástica, al integrar dos veces y aplicar las condiciones de frontera, es posible determinar la reacción en *A* para después encontrar la deflexión deseada.

MODELAR:

Reacciones. Para la carga vertical **P**, las reacciones son como se muestran en la figura 1. Se observa que son estáticamente indeterminadas.

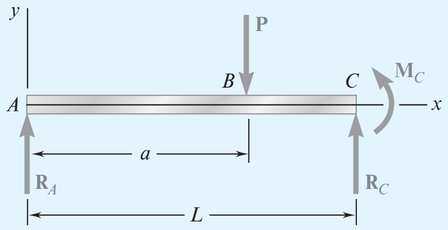


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre.

Fuerza cortante y momento flector. Usando una función de escalón para representar la contribución de **P** a la fuerza cortante,

$$V(x) = R_A - P\langle x - a\rangle^0$$

Al integrar respecto a *x*, se obtiene el momento flector:

$$M(x) = R_A x - P\langle x - a\rangle^1$$

ANALIZAR:

Ecuación de la curva elástica. Al usar la ecuación (9.4),

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - P\langle x - a\rangle^1$$

Al integrar dos veces respecto a *x*,

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\theta = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{1}{2}P\langle x - a\rangle^2 + C_1$$

$$EIy = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{6}P\langle x - a\rangle^3 + C_1 x + C_2$$

Condiciones de frontera. Con referencia a la figura 2 y al notar que la expresión $\langle x - a \rangle$ es igual a cero para $x = 0$, y a $(L - a)$ para $x = L$,

$$[x = 0, y = 0]: \quad C_2 = 0 \tag{1}$$

$$[x = L, \theta = 0]: \quad \tfrac{1}{2}R_A L^2 - \tfrac{1}{2}P(L - a)^2 + C_1 = 0 \tag{2}$$

$$[x = L, y = 0]: \quad \tfrac{1}{6}R_A L^3 - \tfrac{1}{6}P(L - a)^3 + C_1 L + C_2 = 0 \tag{3}$$

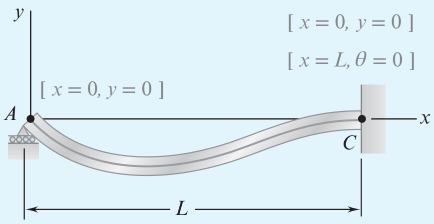


Figura 2 Condiciones de frontera.

***a)* Reacción en *A*.** Al multiplicar la ecuación (2) por L, restando miembro a miembro la ecuación (3) de la ecuación obtenida y observar que $C_2 = 0$, se obtiene

$$\frac{1}{3}R_A L^3 - \frac{1}{6}P(L - a)^2[3L - (L - a)] = 0$$

$$\mathbf{R}_A = P\left(1 - \frac{a}{L}\right)^2\left(1 + \frac{a}{2L}\right)\uparrow \quad ◀$$

La reacción es independiente de E e I.

***b)* Reacción en *A* y deflexión en *B* cuando $a = \frac{1}{2}L$ (figura 3).** Al hacer $a = \frac{1}{2}L$ en la expresión obtenida para R_A,

$$R_A = P(1 - \tfrac{1}{2})^2(1 + \tfrac{1}{4}) = 5P/16 \qquad \mathbf{R}_A = \frac{5}{16}P\uparrow \quad ◀$$

Al sustituir $a = L/2$ y $R_A = 5P/16$ en la ecuación (2), y resolviendo C_1, se halla $C_1 = -PL^2/32$. Si se hace $x = L/2$, $C_1 = -PL^2/32$ y $C_2 = 0$ en la expresión obtenida para y,

$$y_B = -\frac{7PL^3}{768EI} \qquad y_B = \frac{7PL^3}{768EI}\downarrow \quad ◀$$

REVISAR y PENSAR: Note que la deflexión obtenida en B *no* es la deflexión máxima.

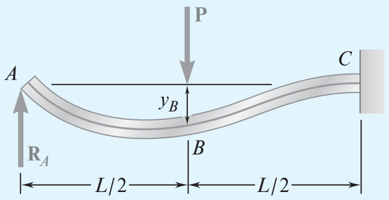


Figura 3 Curva elástica deformada que muestra la deflexión en *B*.

Problemas

Use funciones de singularidad para resolver los siguientes problemas y suponga que la rigidez a la flexión EI de cada viga es constante.

9.35 y 9.36 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

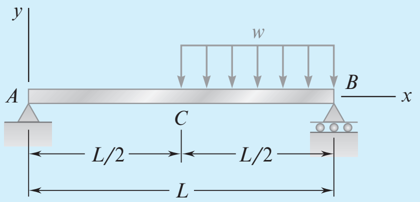


Figura P9.35

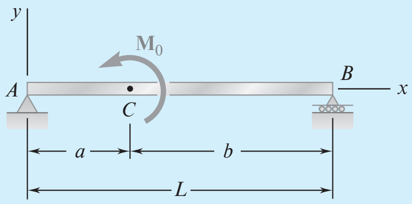


Figura P9.36

9.37 y 9.38 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine la deflexión *a*) en el punto *B*, *b*) en el punto *C*, *c*) en el punto *D*.

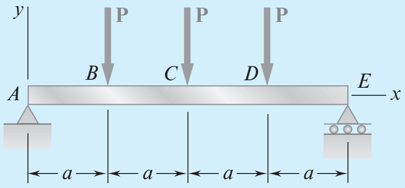


Figura P9.37

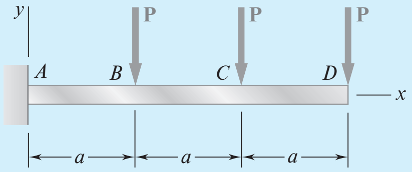


Figura P9.38

9.39* y *9.40 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine *a*) la deflexión en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*, *c*) la pendiente en el extremo *D*.

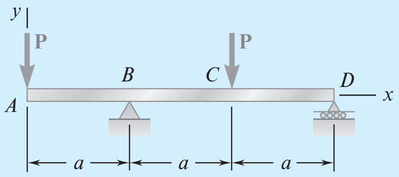


Figura *P9.39*

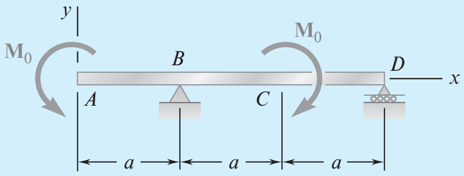


Figura *P9.40*

9.41 y *9.42* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto medio *C*.

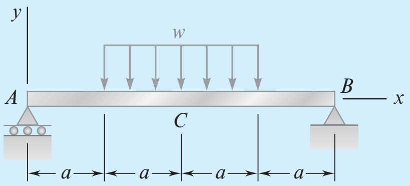


Figura P9.41

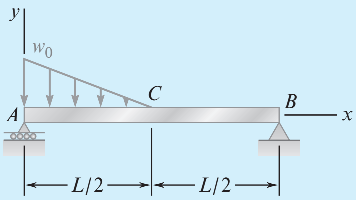


Figura *P9.42*

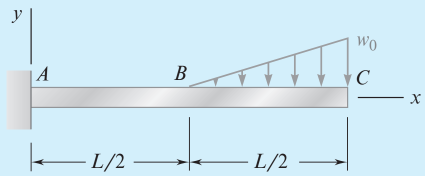


Figura P9.43

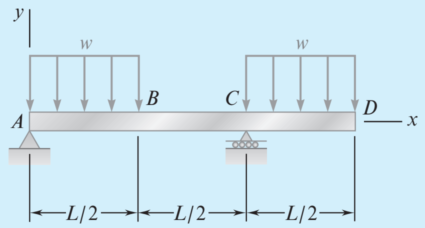


Figura P9.44

9.43 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

9.44 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el punto *D*.

9.45 Para la viga de madera y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 12$ GPa.

9.46 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.47 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.48 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

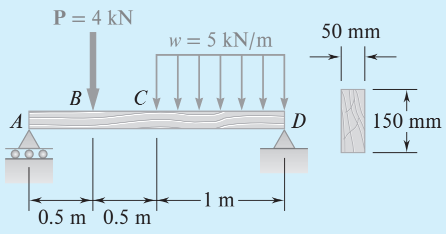


Figura P9.45

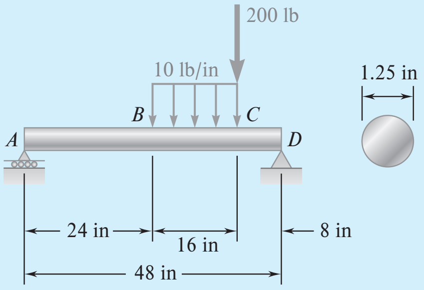


Figura P9.46

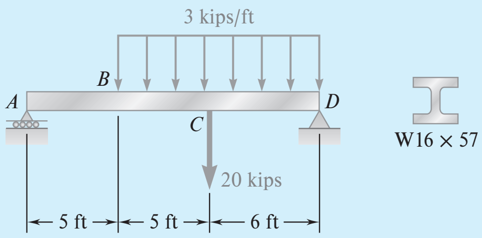


Figura *P9.47*

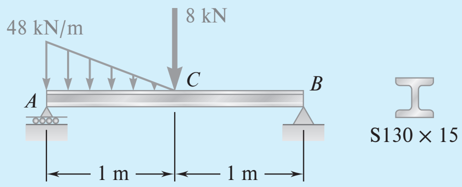


Figura P9.48

https://www.facebook.com/groups/Technologies.CAD.CAM.CAE.CIM/

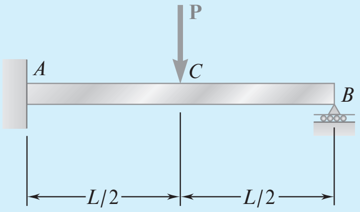


Figura P9.49

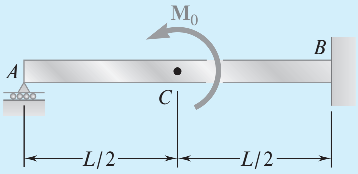


Figura P9.50

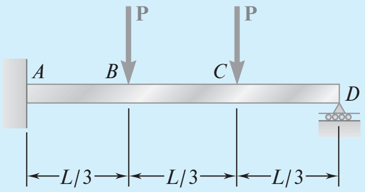


Figura P9.51

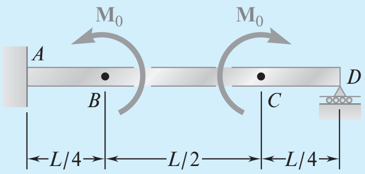


Figura *P9.52*

9.49 y 9.50 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el soporte de rodillos, *b*) la deflexión en el punto *C*.

9.51 y *9.52* Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el soporte de rodillos, *b*) la deflexión en el punto *B*.

9.53 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 200$ GPa.

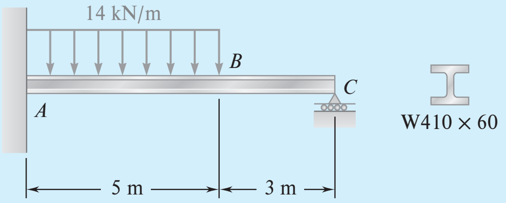


Figura P9.53

9.54 Para la viga mostrada, y si se sabe que $P = 40$ kN, determine *a*) la reacción en el punto *E*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

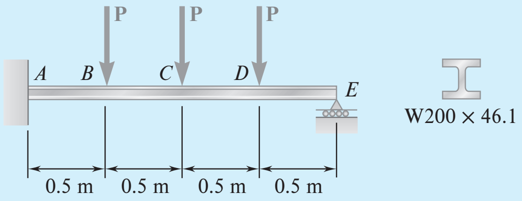


Figura P9.54

***9.55* y 9.56** Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

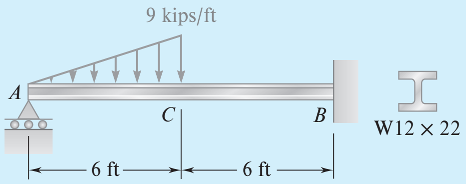


Figura *P9.55*

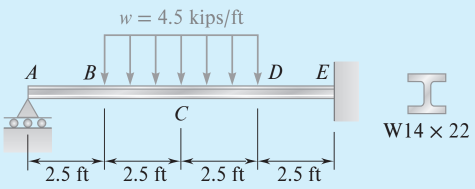


Figura P9.56

9.57 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *D*.

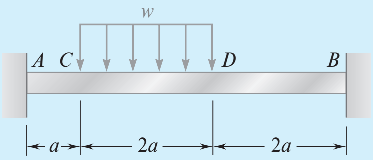


Figura P9.57

9.58 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*.

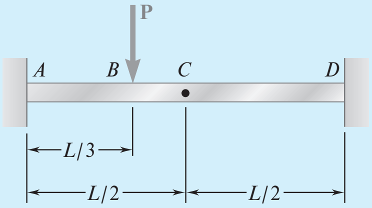


Figura P9.58

9.59 a 9.62 Para la viga y las cargas indicadas, determine la magnitud y la ubicación de la mayor deflexión hacia abajo.

9.59 La viga y las cargas del problema 9.45.
9.60 La viga y las cargas del problema 9.46.
9.61 La viga y las cargas del problema 9.47.
9.62 La viga y las cargas del problema 9.48.

9.63 Las barras rígidas *BF* y *DH* están soldadas a la viga de acero laminado *AE*, como se muestra en la figura. Para la carga mostrada, determine *a*) la deflexión en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 200$ GPa.

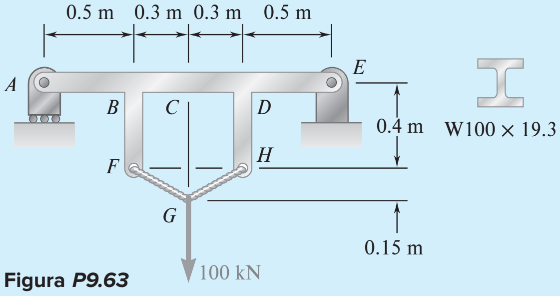


Figura *P9.63*

9.64 La barra rígida *DEF* está soldada en el punto *D* a la viga de acero laminado *AB*. Para las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E =$ 200 GPa.

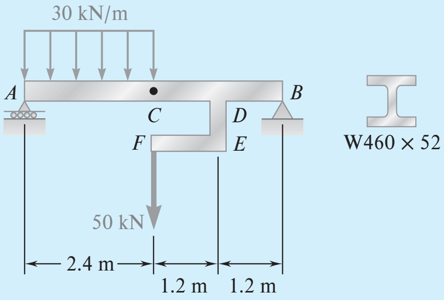


Figura *P9.64*

9.4 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

9.4A Vigas estáticamente determinadas

Cuando una viga se somete a varias cargas concentradas o distribuidas, es conveniente calcular por separado la pendiente y la deflexión causadas por cada una de las cargas dadas. La pendiente y la deflexión debidas a las cargas combinadas se obtienen aplicando el principio de superposición (sección 2.5) y sumando los valores de la pendiente o la deflexión correspondiente a las diversas cargas.

Aplicación de conceptos 9.7

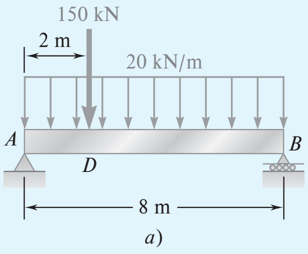


Figura 9.21 *a*) Viga simplemente apoyada que soporta cargas distribuidas y concentradas.

Determine la pendiente y la deflexión en D para la viga y las cargas mostradas (figura 9.21*a*), si se sabe que la rigidez a la flexión de la viga es $EI = 100 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$.

La pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga pueden obtenerse superponiendo las pendientes y deflexiones causadas por la carga concentrada y por la carga distribuida (figura 9.21*b*).

Como la carga concentrada de la figura 9.21*c* se aplica a un cuarto del claro, se pueden usar los resultados obtenidos para la viga y la carga de la Aplicación de conceptos 9.3 para escribir

$$(\theta_D)_P = -\frac{PL^2}{32EI} = -\frac{(150\times 10^3)(8)^2}{32(100\times 10^6)} = -3\times 10^{-3}\text{ rad}$$

$$(y_D)_P = -\frac{3PL^3}{256EI} = -\frac{3(150\times 10^3)(8)^3}{256(100\times 10^6)} = -9\times 10^{-3}\text{ m}$$

$$= -9\text{ mm}$$

Por otra parte, al recordar la ecuación de la curva elástica obtenida para la carga uniformemente distribuida en la Aplicación de conceptos 9.2, la deflexión en la figura 9.21*d* es

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \tag{1}$$

Al derivar con respecto a x, se obtiene

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI}(-4x^3 + 6Lx^2 - L^3) \tag{2}$$

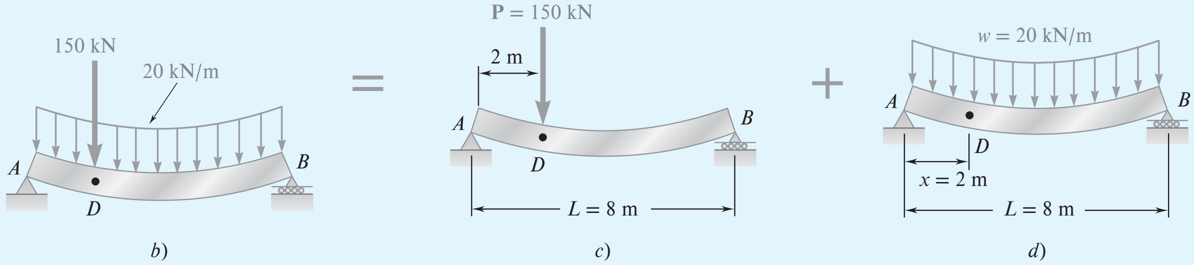


Figura 9.21 *b*) Las cargas de la viga se pueden obtener mediante la superposición de deflexiones debidas a *c*) la carga concentrada y *d*) la carga distribuida.

Si se hace $w = 20$ kN/m, $x = 2$ m y $L = 8$ m, en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$(\theta_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-352) = -2.93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(y_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-912) = -7.60 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= -7.60 \text{ mm}$$

Al combinar las pendientes y las deflexiones producidas por las cargas concentradas y distribuidas, resulta

$$\theta_D = (\theta_D)_P + (\theta_D)_w = -3 \times 10^{-3} - 2.93 \times 10^{-3}$$

$$= -5.93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$y_D = (y_D)_P + (y_D)_w = -9 \text{ mm} - 7.60 \text{ mm} = -16.60 \text{ mm}$$

Para facilitar el trabajo de los ingenieros practicantes, la mayoría de los manuales de ingeniería estructural y mecánica incluyen tablas con las deflexiones y pendientes de vigas para diversas cargas y tipos de apoyos. En el apéndice D se encuentra una de estas tablas. La pendiente y la deflexión de la viga de la figura 9.21*a* hubieran podido determinarse a partir de esa tabla. De hecho, mediante el uso de la información dada en los casos 5 y 6, pudo haberse expresado la deflexión de la viga para cualquier valor $x \leq L/4$. Tomando la derivada de la expresión obtenida, se habría determinado la pendiente de la viga en el mismo intervalo. También se observa que la pendiente en ambos extremos de la viga puede obtenerse sumando los valores correspondientes de la tabla. Sin embargo, la deflexión máxima de la viga de la figura 9.21*a* *no puede* obtenerse sumando las deflexiones máximas de los casos 5 y 6, pues éstas ocurren en puntos diferentes de la viga.[†]

9.4B Vigas estáticamente indeterminadas

Con frecuencia resulta conveniente usar el método de superposición para determinar las reacciones en los apoyos de una viga estáticamente indeterminada. Considerando primero una viga indeterminada al primer grado, como la que se muestra en la fotografía 9.3, se seguirá el método descrito en la sección 2.9. Se escoge una de las reacciones como redundante y se elimina o modifica el apoyo correspondiente. La reacción redundante se trata como una carga desconocida que, junto con las otras, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. La pendiente o la deflexión donde el apo yo se ha modificado o eliminado se obtiene calculando las deformaciones causadas por las cargas dadas y la reacción redundante, para después superponer los resultados. Una vez calculadas las reacciones en los apoyos, pueden determinarse la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga.

Fotografía 9.3 Las vigas continuas que soportan este puente de autopista tienen tres apoyos y, por consiguiente, son estáticamente indeterminadas.

[†] Un valor aproximado de la deflexión máxima de la viga puede obtenerse elaborando la gráfica de los valores de y correspondientes a diferentes valores de x. La determinación de la localización exacta y magnitud de la deflexión máxima requiere igualar a cero la expresión de la pendiente de la viga y resolver esta ecuación para x.

Aplicación de conceptos 9.8

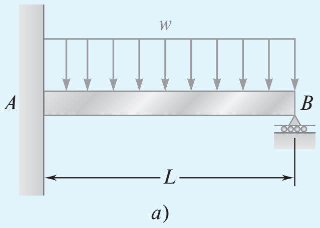


Figura 9.22 *a*) Viga estáticamente indeterminada con una carga uniformemente distribuida.

Determine las reacciones en los apoyos de la viga prismática y la carga mostradas en la figura 9.22*a* (esta es la misma viga de la Aplicación de conceptos 9.5).

La reacción en B se considera redundante y se libera la viga de ese apoyo. La reacción $\mathbf{R}_B$ se establece ahora como una carga desconocida (figura 9.22*b*) y se determinará a partir de la condición de que la deflexión de la viga en B debe ser cero. La solución se efectúa tomando por separado la deflexión $(y_B)_w$ producida en B por la carga uniformemente distribuida w (figura 9.22*c*) y la deflexión $(y_B)_R$ producida en el mismo punto por la reacción redundante **R***B* (figura 9.22*d*).

Con base en la tabla del apéndice D (casos 2 y 1),

$$(y_B)_w = -\frac{wL^4}{8EI} \qquad (y_B)_R = +\frac{R_B L^3}{3EI}$$

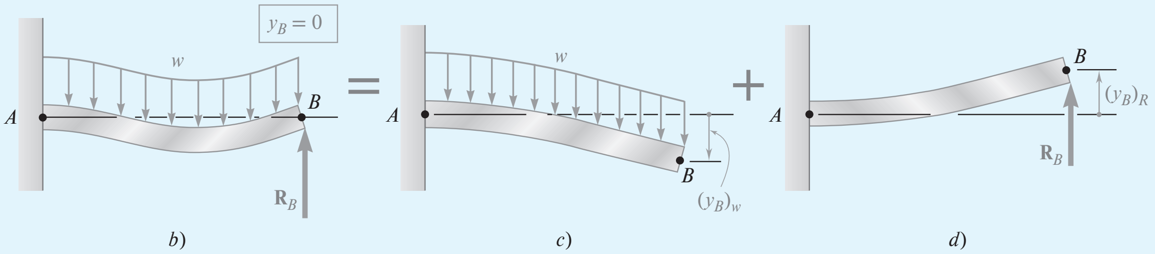


Figura 9.22 *b*) Análisis de la viga indeterminada mediante la superposición de dos vigas en voladizo determinadas, sometidas a *c*) una carga uniformemente distribuida, *d*) la reacción redundante.

Si se escribe que la deflexión en B es la suma de estas dos cantidades y que debe ser cero, se tiene

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R = 0$$

$$y_B = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

y al despejar R_B, $\qquad R_B = \frac{3}{8}wL \qquad \mathbf{R}_B = \frac{3}{8}wL\uparrow$

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.22*e*) y escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes,

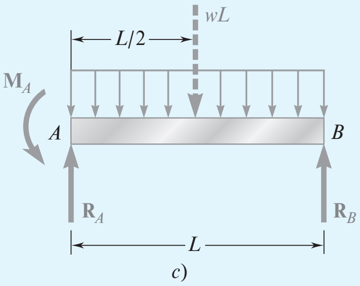


Figura 9.22 e) Diagrama de cuerpo libre de la viga indeterminada.

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\qquad R_A + R_B - wL = 0 \qquad$ **(1)**

$$R_A = wL - R_B = wL - \tfrac{3}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$

$$\mathbf{R}_A = \tfrac{5}{8}wL\uparrow$$

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$: $\qquad M_A + R_B L - (wL)(\tfrac{1}{2}L) = 0 \qquad$ **(2)**

$$M_A = \tfrac{1}{2}wL^2 - R_B L = \tfrac{1}{2}wL^2 - \tfrac{3}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}wL^2$$

$$\mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2\circlearrowleft$$

Solución alternativa. El momento ejercido en el extremo fijo A puede considerarse redundante y, entonces, reemplazar el extremo fijo por una articulación y un apoyo simple. El momento $\mathbf{M}_A$ se considera ahora una carga desconocida (figura 9.22*f*) y se determinará a partir de la condición de que la pendiente en A debe ser cero. La solución se obtiene considerando separadamente la pendiente $(\theta_A)_w$ producida en A por

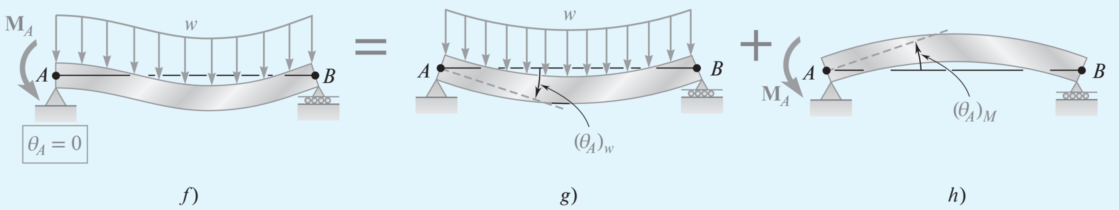


Figura 9.22 *f*) Análisis de la viga indeterminada mediante la superposición de dos vigas determinadas simplemente apoyadas, sometidas a *g*) una carga uniformemente distribuida, *h*) la reacción redundante.

la carga uniformemente distribuida w (figura 9.22*g*) y la pendiente $(\theta_A)_M$ causada en el mismo punto por el momento desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.22*h*).

Mediante el uso de la tabla del apéndice D (casos 6 y 7) y observando que A y B deben intercambiarse en el caso 7,

$$(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} \qquad (\theta_A)_M = \frac{M_A L}{3EI}$$

Si se escribe que la pendiente en A es la suma de estas dos cantidades y que debe ser cero, resulta

$$\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_M = 0$$

$$\theta_A = -\frac{wL^3}{25EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0$$

donde M_A es

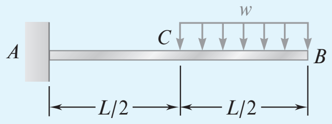
$$M_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \circlearrowleft$$

Los valores de R_A y R_B se encuentran mediante el uso de las ecuaciones de equilibrio (1) y (2).

La viga considerada en la Aplicación de conceptos anterior fue indeterminada al primer grado. En el caso de una viga indeterminada al segundo grado (vea la sección 9.2), se deben designar dos reacciones como redundantes y eliminar o modificar los apoyos correspondientes de la manera apropiada. Las reacciones redundantes se tratan entonces como cargas desconocidas que, junto con las demás cargas, deben producir deformaciones compatibles con los apoyos originales (vea el Problema modelo 9.9).

Problema modelo 9.7

Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el punto B.



ESTRATEGIA: Mediante el uso del método de superposición, es posible modelar el problema dado usando una sumatoria de las porciones de la viga para las cuales se pueden obtener fórmulas de deflexión con facilidad.

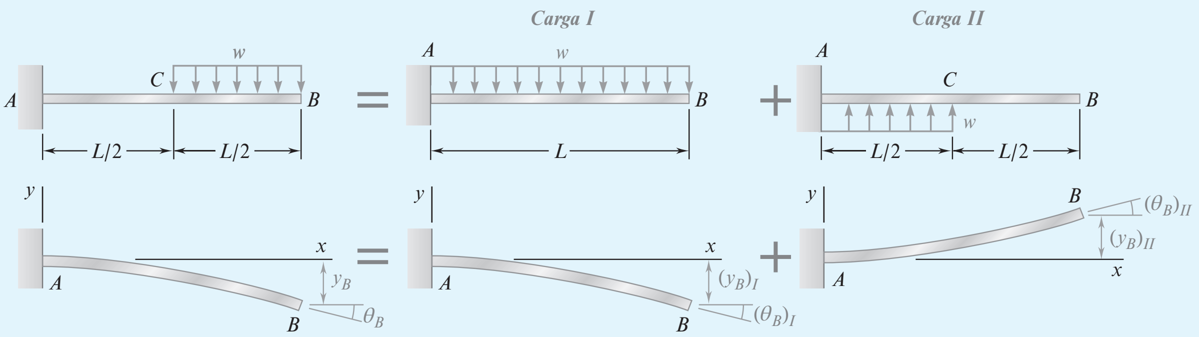


Figura 1 La carga real es equivalente a la superposición de dos cargas distribuidas.

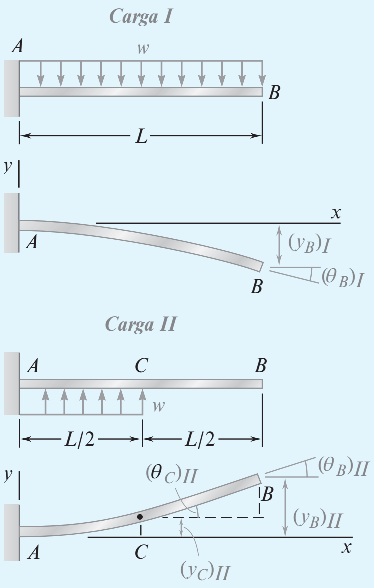


Figura 2 Detalles de la deformación de las cargas I y II superpuestas.

MODELAR: A través del principio de superposición, la carga dada puede obtenerse superponiendo las cargas mostradas en la siguiente ilustración de ecuaciones de la figura 1. La viga *AB* es la misma en cada parte de la figura.

ANALIZAR: Para cada una de las cargas I y II (más detalladas en la figura 2), se determina la pendiente y la deflexión en *B* usando la tabla de *Deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

Carga I

$$(\theta_B)_I = -\frac{wL^3}{6EI} \qquad (y_B)_I = -\frac{wL^4}{8EI}$$

Carga II

$$(\theta_C)_{II} = +\frac{w(L/2)^3}{6EI} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_C)_{II} = +\frac{w(L/2)^4}{8EI} = +\frac{wL^4}{128EI}$$

En la porción *CB*, el momento flector para la carga II es cero. Por lo tanto, la curva elástica es una línea recta.

$$(\theta_B)_{II} = (\theta_C)_{II} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_B)_{II} = (y_C)_{II} + (\theta_C)_{II}\frac{L}{2}$$

$$= \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^3}{48EI}\frac{L}{2} = +\frac{7wL^4}{384EI}$$

Pendiente en el punto *B*

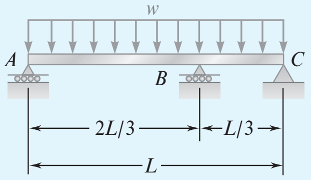
$$\theta_B = (\theta_B)_I + (\theta_B)_{II} = -\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{48EI} = -\frac{7wL^3}{48EI} \qquad \theta_B = \frac{7wL^3}{48EI} \measuredangle \blacktriangleleft$$

Deflexión en *B*

$$y_B = (y_B)_I + (y_B)_{II} = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{7wL^4}{384EI} = -\frac{41wL^4}{384EI} \qquad y_B = \frac{41wL^4}{384EI}\downarrow \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Note que a veces las fórmulas para una porción de la viga pueden extenderse a fin de obtener la deflexión deseada de otra porción, como puede verse aquí para la carga II.

Problema modelo 9.8



Para la viga y la carga uniformes que se muestran en la figura, determine *a*) la reacción en cada apoyo, *b*) la pendiente en el extremo *A*.

ESTRATEGIA: La viga es estáticamente indeterminada al primer grado. Al seleccionar estratégicamente la reacción en *B* como redundante, es posible usar el método de superposición para modelar el problema dado usando una sumatoria de los casos de carga para los cuales se pueden obtener fórmulas de deflexión con facilidad.

MODELAR: La reacción $\mathbf{R}_B$ se escoge como redundante y se considera como una carga desconocida. Al aplicar el principio de superposición, las deflexiones debidas a la carga distribuida y a la reacción $\mathbf{R}_B$ se examinan por separado, como se muestra en la figura 1.

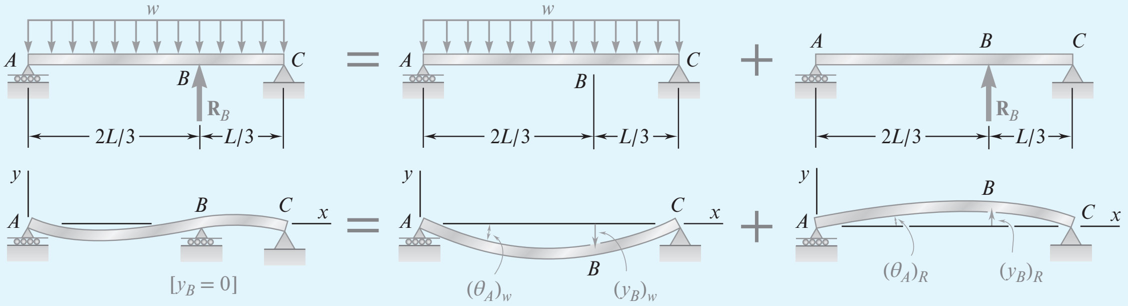


Figura 1 Viga indeterminada que se modela como la superposición de dos vigas determinadas, en las que la reacción en *B* se considera redundante.

ANALIZAR: Para cada caso de carga, la deflexión en el punto *B* se encuentra usando la tabla de *deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

Carga distribuida. Se utiliza el caso 6 del apéndice D:

$$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

En el punto *B*, $x = \frac{2}{3}L$:

$$(y_B)_w = -\frac{w}{24EI}\left[\left(\frac{2}{3}L\right)^4 - 2L\left(\frac{2}{3}L\right)^3 + L^3\left(\frac{2}{3}L\right)\right] = -0.01132\frac{wL^4}{EI}$$

Carga por la reacción redundante. Del caso 5, apéndice D, con $a = \frac{2}{3}L$ y $b = \frac{1}{3}L$,

$$(y_B)_R = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL} = +\frac{R_B}{3EIL}\left(\frac{2}{3}L\right)^2\left(\frac{L}{3}\right)^2 = 0.01\,646\frac{R_BL^3}{EI}$$

***a*) Reacciones en los apoyos.** Al recordar que $y_B = 0$,

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R$$

$$= -0.01132\frac{wL^4}{EI} + 0.01646\frac{R_BL^3}{EI} \qquad \mathbf{R}_B = 0.688wL\uparrow \ ◀$$

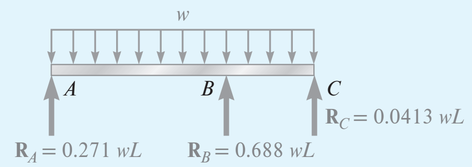


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la viga con el cálculo de las reacciones.

Como la reacción R_B ahora es conocida, se utiliza el método de la estática para determinar las otras reacciones (figura 2):

$$\mathbf{R}_A = 0.271wL \uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 0.0413wL \uparrow \quad ◀$$

***b*) Pendiente en el extremo *A*.** De nuevo con referencia al apéndice D,

Carga distribuida. $(\theta_A)_w = -\dfrac{wL^3}{24EI} = -0.04167\dfrac{wL^3}{EI}$

Carga de la reacción redundante. Para $P = -R_B = -0.688wL$ y $b = \frac{1}{3}L$,

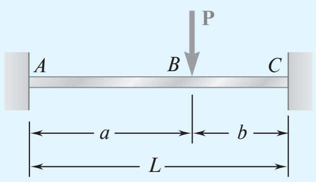
$$(\theta_A)_R = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL} = +\frac{0.688wL}{6EIL}\left(\frac{L}{3}\right)\left[L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2\right] (\theta_A)_R = 0.03398\frac{wL^3}{EI}$$

Finalmente, $\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_R$

$$\theta_A = -0.04167\frac{wL^3}{EI} + 0.03398\frac{wL^3}{EI} = -0.00769\frac{wL^3}{EI}$$

$$\theta_A = 0.00769\frac{wL^3}{EI} \ \circlearrowright \quad ◀$$

Problema modelo 9.9



Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine la reacción en el apoyo fijo *C*.

ESTRATEGIA: La viga es estáticamente indeterminada al segundo grado. Seleccionando estratégicamente las reacciones en *C* como redundantes, es posible usar el método de superposición y modelar el problema dado usando una sumatoria de los casos de carga para los cuales las fórmulas de deflexión se pueden obtener con facilidad.

MODELAR: Suponiendo que la carga axial en la viga es cero, la viga *ABC* es indeterminada al segundo grado y se escogen como redundantes la fuerza vertical $\mathbf{R}_C$ y el momento $\mathbf{M}_C$. Las deformaciones producidas por la carga **P**, la fuerza $\mathbf{R}_C$ y el momento $\mathbf{M}_C$ se consideran por separado como se muestra en la figura 1.

ANALIZAR: Para cada carga, la pendiente y la deflexión en *C* se encuentran en la tabla de *deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

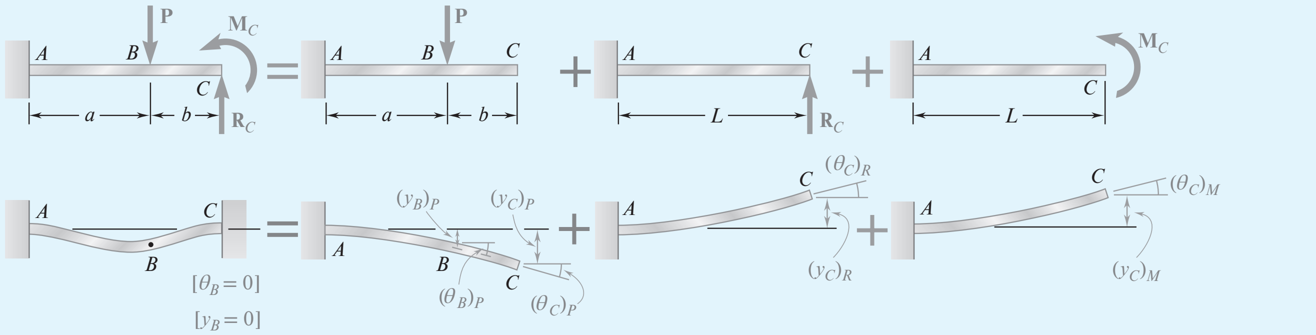


Figura 1 Viga indeterminada que se modela como la superposición de tres casos determinados, incluyendo uno para cada dos reacciones redundantes.

Carga P. Para esta carga, la porción BC de la viga es recta.

$$(\theta_C)_P = (\theta_B)_P = -\frac{Pa^2}{2EI} \qquad (y_C)_P = (y_B)_P + (\theta_B)_p\, b$$

$$= -\frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI}b = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b)$$

Fuerza R_C. $(\theta_C)_R = +\dfrac{R_C L^2}{2EI} \qquad (y_C)_R = +\dfrac{R_C L^3}{3EI}$

Momento M_C. $(\theta_C)_M = +\dfrac{M_C L}{EI} \qquad (y_C)_M = +\dfrac{M_C L^2}{2EI}$

Condiciones de frontera. En el extremo C, la pendiente y la deflexión deben ser cero.

$$[x = L, \theta_C = 0]: \qquad \theta_C = (\theta_C)_P + (\theta_C)_R + (\theta_C)_M$$

$$0 = -\frac{Pa^2}{2EI} + \frac{R_C L^2}{2EI} + \frac{M_C L}{EI} \qquad (1)$$

$$[x = L, y_C = 0]: \qquad y_C = (y_C)_P + (y_C)_R + (y_C)_M$$

$$0 = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b) + \frac{R_C L^3}{3EI} + \frac{M_C L^2}{2EI} \qquad (2)$$

Componentes de la reacción en C. Si se resuelven simultáneamente las ecuaciones (1) y (2), resulta

$$R_C = +\frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \qquad \mathbf{R}_C = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)\uparrow \quad ◀$$

$$M_C = -\frac{Pa^2 b}{L^2} \qquad \mathbf{M}_C = \frac{Pa^2 b}{L^2} \circlearrowright \quad ◀$$

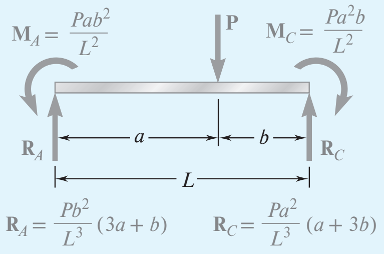


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre que muestra las reacciones resultantes.

La reacción en A, que se muestra en la figura 2, se determina usando los métodos de la estática.

REVISAR y PENSAR: Note que una estrategia alternativa que podría haberse usado en este problema particular es tratar como redundantes las reacciones de momento en los extremos. La aplicación de la superposición involucraría entonces una viga simplemente apoyada, para la cual las fórmulas de deflexión también pueden obtenerse con facilidad.

Problemas

Utilice el método de superposición para resolver los siguientes problemas y suponga que la rigidez a la flexión EI de cada viga es constante.

9.65 a 9.68 Para la viga en voladizo y las cargas mostradas en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el extremo libre.

***9.69* a 9.72** Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la deflexión en el punto *C*, *b*) la pendiente en el extremo *A*.

9.73 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el extremo *C*. Use $E = 200$ GPa.

9.74 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el punto *B*. Use $E = 200$ GPa.

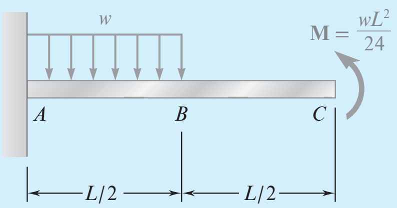


Figura P9.65

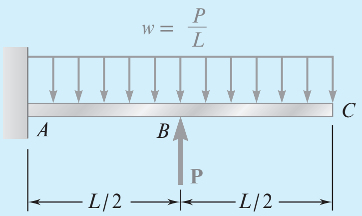


Figura P9.66

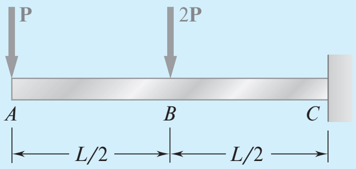


Figura P9.67

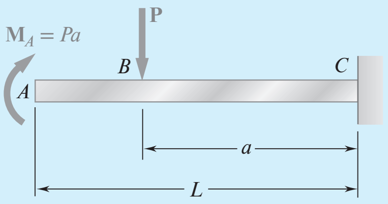


Figura P9.68

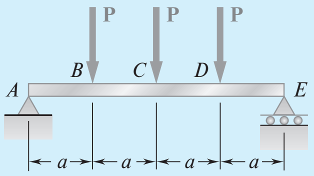


Figura *P9.69*

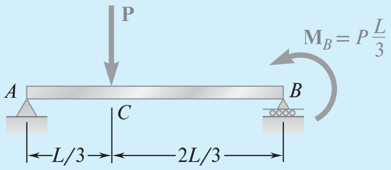


Figura *P9.70*

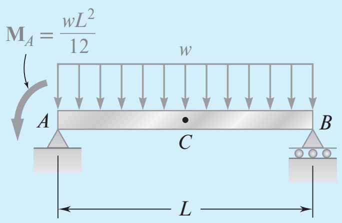


Figura P9.71

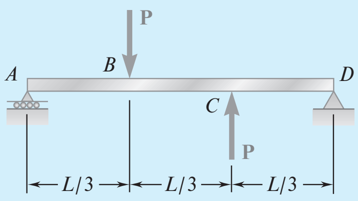


Figura P9.72

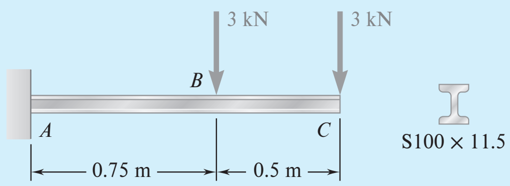
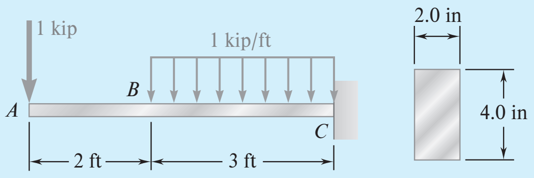


Figura P9.73 y *P9.74*



Figuras P9.75 y P9.76

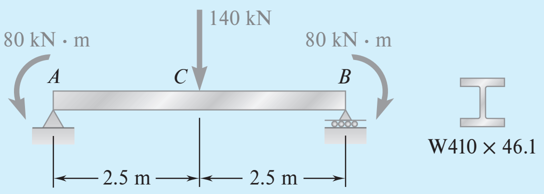


Figura P9.77

9.75 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el extremo A. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.76 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el punto B. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.77 y *9.78* Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la deflexión en el punto C. Utilice $E =$ 200 GPa.

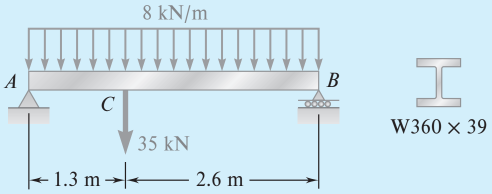


Figura *P9.78*

9.79 y 9.80 Para la viga uniforme que se muestra en la figura, determine *a*) la reacción en A, *b*) la reacción en B.

9.81 y 9.82 Para la viga uniforme que se muestra en la figura, determine la reacción en cada uno de los tres apoyos.

9.83 y 9.84 Para la viga que se muestra en la figura, determine la reacción en B.

9.85 La viga DE descansa sobre la viga en voladizo AC, como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa una varilla cuadrada con 10 mm de lado, determine la deflexión en el extremo C si el momento de 25 N · m se aplica *a*) en el extremo E de la viga DE, *b*) en el extremo C de la viga AC. Utilice $E = 200$ GPa.

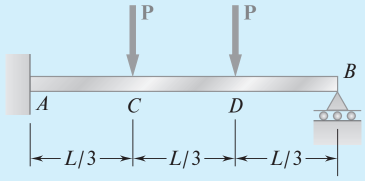


Figura P9.79

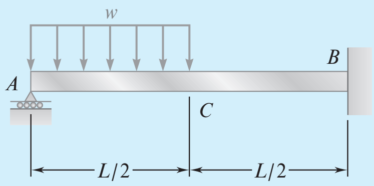


Figura P9.80

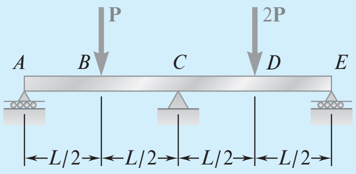


Figura *P9.81*

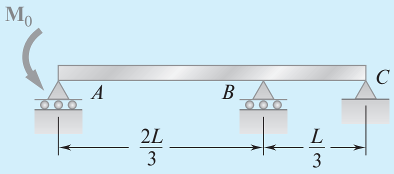


Figura P9.82

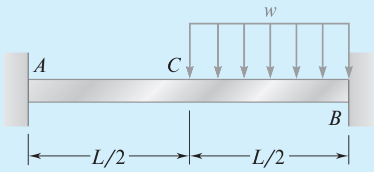


Figura *P9.83*

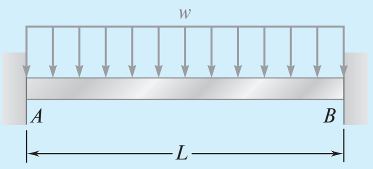


Figura P9.84

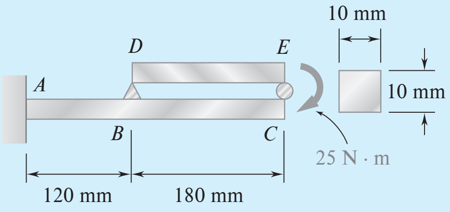


Figura P9.85

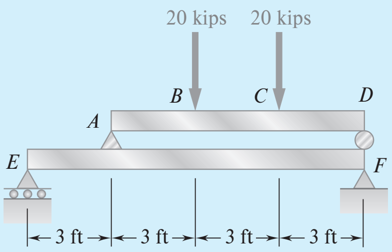


Figura P9.86

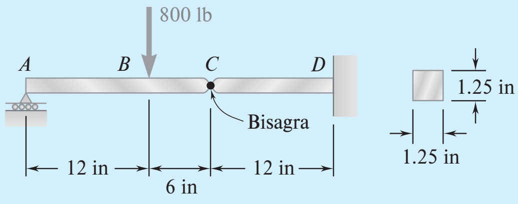


Figura P9.87

9.86 La viga AD descansa sobre la viga EC, como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa un perfil de acero laminado W12 × 26, determine para las cargas mostradas la deflexión en los puntos B y C. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.87 Las dos vigas que se muestran en la figura tienen la misma sección transversal y están unidas mediante una bisagra en C. Para las cargas mostradas, determine *a*) la pendiente en el punto A, *b*) la deflexión en el punto B. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.88 Una viga central BD está unida por medio de bisagras a dos vigas en voladizo AB y DE. Todas las vigas tienen la sección transversal que se indica. Para la carga que se muestra en la figura, determine el máximo valor de w de modo que la deflexión en C no exceda 3 mm. Utilice $E = 200$ GPa.

9.89 Las vigas AB y DE que se muestran en la figura tienen la misma rigidez a la flexión. Para la carga mostrada, determine la reacción *a*) en B, *b*) en E.

9.90 Antes de aplicar la carga **P**, había un espacio $\delta_0 = 0.5$ mm entre la viga en voladizo AC y el apoyo en B. Si $E = 200$ GPa, determine la magnitud de **P** para la cual la deflexión en C es de 1 mm.

9.91 Si se sabe que la varilla ABC y el alambre BD están hechos de acero, determine *a*) la deflexión en B, *b*) la reacción en A. Utilice $E = 200$ GPa.

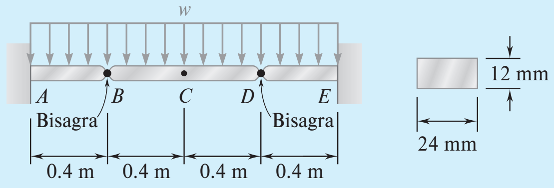


Figura P9.88

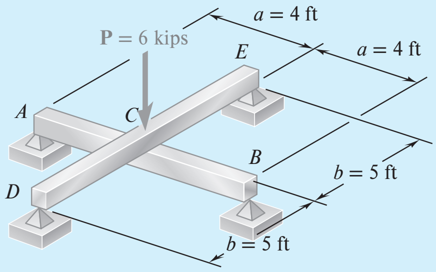


Figura *P9.89*

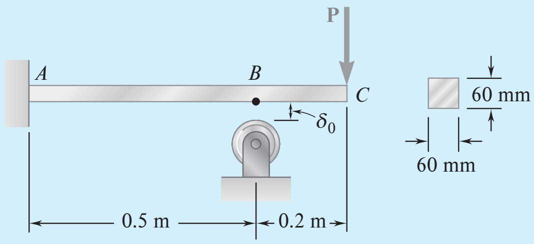


Figura P9.90

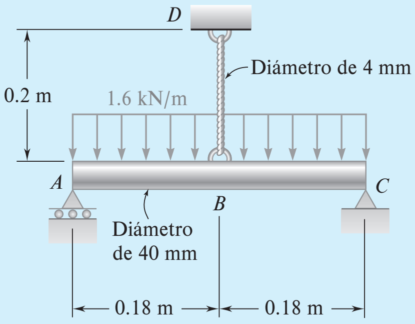


Figura P9.91

9.92 Antes de aplicar la carga de 2 kips/ft, había un espacio $\delta_0 = 0.8$ in, entre la viga W16 × 40 y el apoyo en C. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la reacción en cada apoyo después de aplicar la carga uniformemente distribuida.

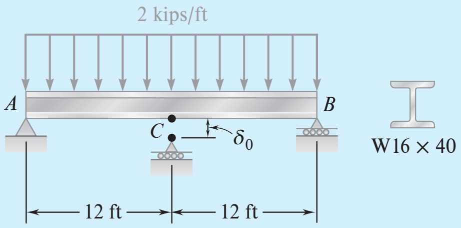


Figura *P9.92*

9.93 Una varilla BC con $\frac{7}{8}$ in, de diámetro está unida a la palanca AB y al apoyo fijo en C. La palanca AB tiene una sección transversal uniforme de $\frac{3}{8}$ in, de espesor y 1 in, de profundidad. Para la carga que se muestra en la figura, determine la deflexión en el punto A. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

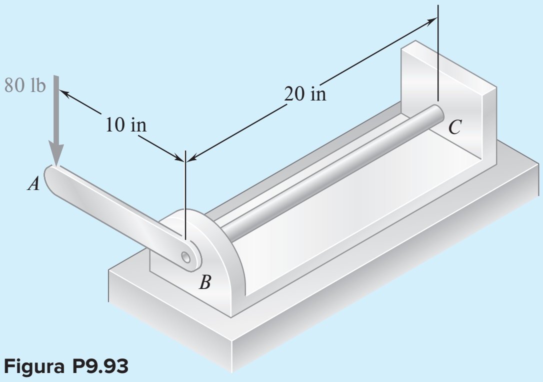


Figura P9.93

9.94 Una varilla de 16 mm de diámetro se dobla en la forma mostrada en la figura. Determine la deflexión del extremo C después de aplicar la fuerza de 200 N. Utilice $E = 200$ GPa y $G = 80$ GPa.

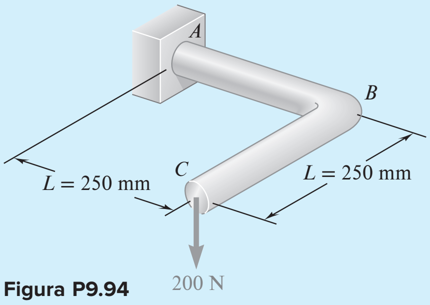


Figura P9.94

*9.5 TEOREMAS DEL MOMENTO DE ÁREA

*9.5A Principios generales

De la sección 9.1 a la 9.3 se usó un método matemático basado en la integración de ecuaciones diferenciales para determinar la deflexión y la pendiente de una viga en cualquier punto dado. El momento flector se expresó como una función $M(x)$ de la distancia x medida a lo largo de la viga, y dos integraciones sucesivas condujeron a las funciones $\theta(x)$ y $y(x)$ que representan, respectivamente, la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga. En esta sección se verá cómo pueden usarse las propiedades geométricas de la curva elástica para determinar la deflexión y la pendiente de una viga en un punto específico (fotografía 9.4).

Fotografía 9.4 La deflexión máxima de cada una de las vigas que soportan los pisos de un edificio debe tomarse en cuenta en el proceso de diseño.

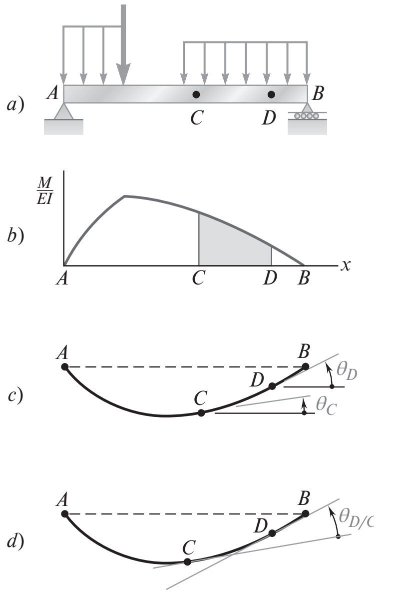


Figura 9.23 Teorema del primer momento de área. *a*) Viga sometida a una carga arbitraria. *b*) Gráfica de la curva *M/EI*. *c*) Curva elástica que muestra la pendiente en *D* con respecto a *C*.

Teorema del primer momento de área. Considere una viga AB sometida a alguna carga arbitraria (figura 9.23*a*). Se dibuja el diagrama que representa la variación de la cantidad M/EI a lo largo de la viga, que se obtuvo dividiendo el momento flector M entre la rigidez de flexión EI (figura 9.23*b*). Excepto por una diferencia en la escala de las ordenadas, este diagrama es el mismo que el del momento flector si la rigidez a la flexión de la viga es constante.

Al recordar la ecuación (9.4) y que $dy/dx = \theta$,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

o bien

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \qquad \textbf{(9.15)}^{\dagger}$$

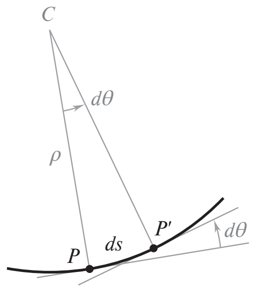


Figura 9.24 Geometría de la curva elástica usada para definir la pendiente en el punto *P′* con respecto a *P*.

† Esta relación también puede obtenerse al notar que el ángulo $d\theta$ formado por las tangentes a la curva elástica en P y P' (figura 9.24), también es el ángulo que forman las normales correspondientes a dicha curva. Entonces $d\theta = ds/\rho$, donde ds es la longitud del arco PP' y ρ es el radio de curvatura en P. Al sustituir $1/\rho$ de la ecuación (4.21), y observar que, como la pendiente en P es muy pequeña, ds es igual en una primera aproximación a la distancia horizontal dx entre P y P', entonces se obtiene de nuevo la ecuación (9.15).

Enseguida se consideran dos puntos arbitrarios C y D en la viga y se integran ambos miembros de la ecuación (9.15) de C a D:

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx$$

o bien

$$\theta_D = \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.16}$$

donde θ_C y θ_D denotan la pendiente en los puntos C y D (figura 9.24*c*). Pero el miembro del lado derecho de la ecuación (9.16) representa el área bajo el diagrama M/EI entre C y D, y el miembro del lado izquierdo es el ángulo entre las tangentes a la curva elástica en C y D (figura 9.23*d*). Este ángulo está dado como

$$\theta_{D/C} = \text{área bajo el diagrama } M/EI \text{ entre } C \text{ y } D \tag{9.17}$$

Este es el *teorema del primer momento de área*.

Se observa que el ángulo $\theta_{D/C}$ y el área bajo el diagrama M/EI tienen el mismo signo. Esta área positiva (es decir, localizada por encima del eje x) corresponde a una rotación en contra de las manecillas del reloj de la tangente a la curva elástica conforme se pasa de C a D, y un área negativa corresponde a una rotación en el sentido de las manecillas del reloj.

Teorema del segundo momento de área. Ahora considere dos puntos P y P' localizados entre C y D y a una distancia dx uno del otro (figura 9.25). Las tangentes a la curva elástica dibujadas en P y P' intersecan un segmento de longitud dt sobre la vertical a través del punto C. Dado que la pendiente θ en P y el ángulo $d\theta$ formado por las tangentes en P y P' son cantidades pequeñas, se puede suponer que dt es igual al arco de círculo de radio x_1 que subtiende el ángulo $d\theta$. Por lo tanto

$$dt = x_1\,d\theta$$

o, al sustituir $d\theta$ de la ecuación (9.15),

$$dt = x_1 \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.18}$$

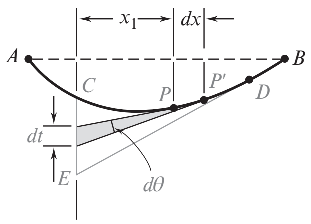


Figura 9.25 Geometría usada para determinar la desviación tangencial de *C* con respecto a *D*.

Ahora, se integra la ecuación (9.18) desde C hasta D. Conforme el punto P describe la curva elástica desde C hasta D, la tangente en P recorre la vertical que pasa a través de C, desde C hasta E. Así, la integral del miembro del lado izquierdo, entonces, es igual a la distancia vertical de C a la tangente en D. Esta distancia se denota por $t_{C/D}$ y se llama *desviación tangencial de C con respecto a D*. Por consiguiente,

$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.19}$$

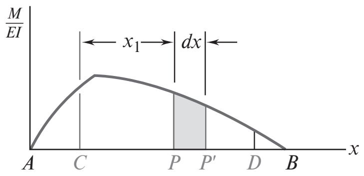


Figura 9.26 La expresión $x_1(M/EI)dx$ es el primer momento del área sombreada con respecto a *C*.

Se observa que $(M/EI)\,dx$ representa un elemento de área bajo el diagrama (M/EI), y $x_1(M/EI)\,dx$ es el primer momento de ese elemento con respecto al eje vertical que pasa por C (figura 9.26). El miembro del lado derecho de la ecuación (9.19) representa el primer momento del área localizada bajo el diagrama M/EI entre C y D, con respecto a dicho eje.

Por lo tanto, es posible establecer el *teorema del segundo momento de área* como sigue: *La desviación tangencial $t_{C/D}$ de C con respecto a D es igual al primer momento del área bajo el diagrama (M/EI) entre C y D con respecto a un eje vertical que pasa por C.*

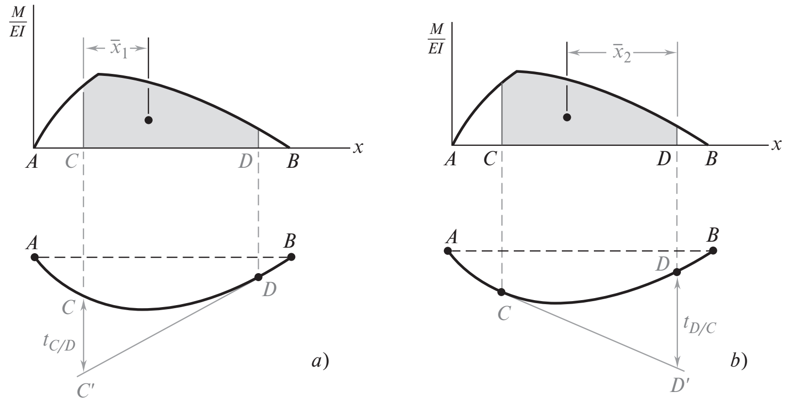


Figura 9.27 Ilustración del teorema del segundo momento de área. *a*) Evaluación de $t_{C/D}$. *b*) Evaluación de $t_{D/C}$.

Si se tiene presente que el primer momento de un área con respecto a un eje es igual al producto del área por la distancia de su centroide a dicho eje, también puede establecerse el teorema del segundo momento de área como:

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\ \bar{x}_1 \tag{9.20}$$

donde el área se refiere al área bajo el diagrama M/EI, y $\bar{x}_1$ es la distancia desde el centroide del área hasta el eje vertical que pasa por C (figura 9.27*a*).

Es necesario distinguir entre la desviación tangencial de C con respecto a D ($t_{C/D}$) y la desviación tangencial de D con respecto a C ($t_{D/C}$). La desviación tangencial $t_{D/C}$ representa la distancia vertical de D a la tangente a la curva elástica en C, y se obtiene multiplicando el área bajo el diagrama (M/EI) por la distancia $\bar{x}_2$ desde su centroide hasta el eje vertical que pasa por D (figura 9.27*b*):

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\ \bar{x}_2 \tag{9.21}$$

Se observa que, si el área bajo el diagrama M/EI se localiza por encima del eje x, su primer momento con respecto al eje vertical será positivo; si se localiza debajo del eje x, su primer momento será negativo. En la figura 9.27 se observa que un punto con una desviación tangencial *positiva* se localiza *por encima* de la tangente correspondiente, mientras que un punto con una desviación tangencial *negativa* se localiza *debajo* de esa tangente.

*9.5B Vigas en voladizo y vigas con cargas simétricas

Se recuerda que el teorema del primer momento de área define el ángulo $\theta_{D/C}$ *entre* las tangentes en dos puntos C y D de la curva elástica. Entonces, el ángulo θ_D que forma la tangente en D con la horizontal (es decir, la pendiente en D) puede obtenerse solo si se conoce la pendiente en C. En forma similar, el teorema del segundo momento de área define la distancia vertical de un punto de la curva elástica desde la tangente en otro punto. Por consiguiente, la desviación tangencial $t_{D/C}$ ayuda a localizar el punto D solo si se conoce la tangente en C. Entonces, los dos teoremas de momento de área se pueden aplicar eficazmente a la determinación de pendientes y deflexiones solo si se ha determinado una cierta *tangente de referencia* a la curva elástica.

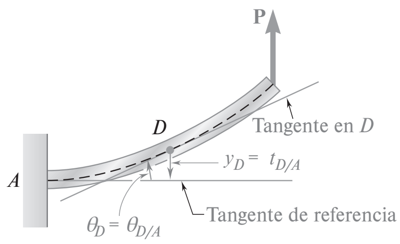


Figura 9.28 Aplicación del método del momento de área a vigas en voladizo.

En el caso de las *vigas en voladizo* (figura 9.28), se conoce la tangente a la curva elástica en el extremo fijo A y puede usarse como la tangente de referencia. Como $\theta_A = 0$, la pendiente de la viga en cualquier punto D es $\theta_D = \theta_{D/A}$ y puede obtenerse por medio del teorema del primer momento de área. Por otro lado, la deflexión y_D del

punto D es igual a la desviación tangencial $t_{D/A}$ medida desde la tangente de referencia horizontal en A y puede obtenerse por medio del teorema del segundo momento de área.

En el caso de una viga AB simplemente apoyada con una *carga simétrica* (figura 9.29*a*) o en el caso de una viga simétrica saliente con carga simétrica (vea el problema modelo 9.11), la tangente en el centro C de la viga debe ser horizontal (en razón de la simetría) y puede usarse como la tangente de referencia (figura 9.29*b*). Como $\theta_C = 0$, la pendiente en el apoyo B es $\theta_B = \theta_{B/C}$ y puede obtenerse por medio del teorema del primer momento de área. También se observa que $|y|_{\text{máx}}$ es igual a la desviación tangencial $t_{B/C}$ y puede obtenerse por medio del teorema del segundo momento de área. La pendiente en cualquier otro punto D de la viga (figura 9.29*c*) se encuentra de manera similar, y la deflexión D es $y_D = t_{D/C} - t_{B/C}$.

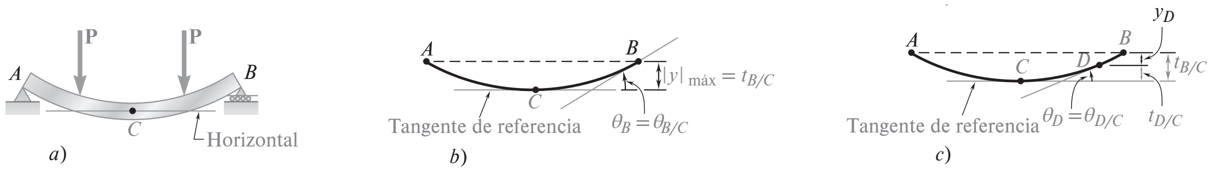


Figura 9.29 Aplicación del método del momento de área a vigas simplemente apoyadas con cargas simétricas. *a*) Vigas y cargas. *b*) Deflexión máxima y pendiente en el punto *B*. *c*) Deflexión y pendiente en un punto *D* arbitrario.

Aplicación de conceptos 9.9

Determine la pendiente y la deflexión en el extremo B de la viga prismática en voladizo AB cuando está cargada como se indica (figura 9.30*a*), si se sabe que la rigidez a la flexión de la viga es $EI = 10\ \text{MN} \cdot \text{m}^2$.

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.30*b*). Al sumar las componentes verticales y los momentos con respecto a A, la reacción en el extremo fijo A consta de una componente de fuerza vertical $\mathbf{R}_A$ de 50 kN y un momento $\mathbf{M}_A$ de 60 kN · m en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Enseguida, se dibuja el diagrama de momento flector (figura 9.30*c*) y se determina, a partir de triángulos semejantes, la distancia x_D desde el extremo A hasta el punto D de la viga, donde $M = 0$:

$$\frac{x_D}{60} = \frac{3 - x_D}{90} = \frac{3}{150} \qquad x_D = 1.2\ \text{m}$$

Al dividir los valores obtenidos para M por la rigidez a la flexión EI, se dibuja el diagrama M/EI (figura 9.30*d*) y se calculan las áreas correspondientes, respectivamente, a los segmentos AD y DB, asignándose signo positivo al área localizada por encima del eje x, y signo negativo a la ubicada debajo de ese eje. A partir del teorema del primer momento de área, se obtiene

$$\begin{aligned}\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A &= \text{área de } A \text{ a } B = A_1 + A_2\\ &= -\tfrac{1}{2}(1.2\ \text{m})(6 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1}) + \tfrac{1}{2}(1.8\ \text{m})(9 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})\\ &= -3.6 \times 10^{-3} + 8.1 \times 10^{-3}\\ &= +4.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

y, como $\theta A = 0$,

$$\theta_B = +4.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

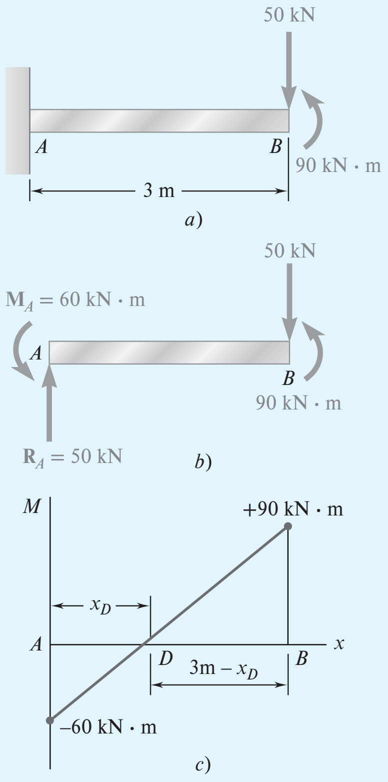


Figura 9.30 *a*) Viga en voladizo con cargas en el extremo. *b*) Diagrama de cuerpo libre con reacciones. *c*) Diagrama de momento.

Al emplear el teorema del segundo momento de área, la desviación tangencial $t_{B/A}$ es igual al primer momento respecto a un eje vertical que pasa por B del área total entre A y B. El momento de cada área parcial es el producto de dicha área por la distancia desde su centroide hasta el eje que pasa por B:

$$
\begin{aligned}
t_{B/A} &= A_1(2.6 \text{ m}) + A_2(0.6 \text{ m}) \\
&= (-3.6 \times 10^{-3})(2.6 \text{ m}) + (8.1 \times 10^{-3})(0.6 \text{ m}) \\
&= -9.36 \text{ mm} + 4.86 \text{ mm} = -4.50 \text{ mm}
\end{aligned}
$$

Como la tangente de referencia en A es horizontal, la deflexión en B es igual a $t_{B/A}$, entonces

$$y_B = t_{B/A} = -4.50 \text{ mm}$$

En la figura 9.30*e* se muestra la viga una vez deflectada.

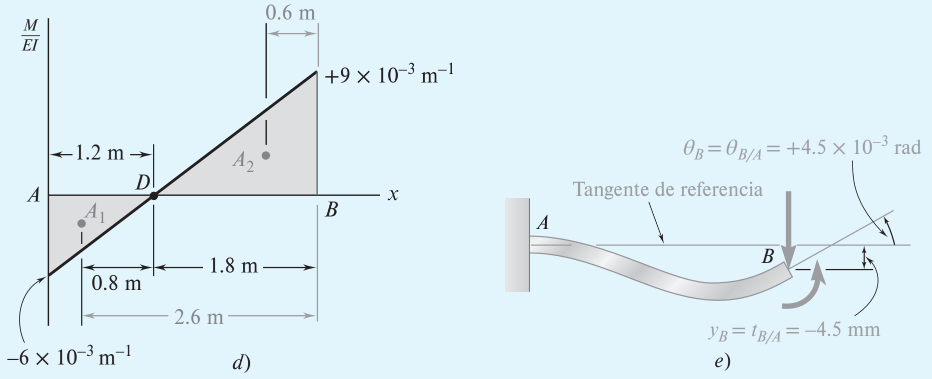


Figura 9.30 *d*) Gráfica de *M*/*EI* que muestra las ubicaciones de los centroides de área. e) Viga deflectada que muestra la pendiente y la deflexión resultantes en el extremo *B*.

*9.5C Diagramas de momento flector por partes

En muchas aplicaciones, el ángulo $\theta_{D/C}$ y la desviación tangencial $t_{D/C}$ son más fáciles de determinar si el efecto de cada carga se evalúa en forma independiente. Se dibuja un diagrama M/EI distinto para cada carga, y se obtiene el ángulo $\theta_{D/C}$ al sumar algebraicamente las áreas bajo los distintos diagramas. En forma similar, la desviación tangencial $t_{D/C}$ se obtiene con la suma de los primeros momentos de estas áreas respecto a un eje vertical que pasa por D. Se dice que un diagrama M/EI graficado de esta forma fue *dibujado por partes*.

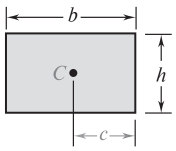
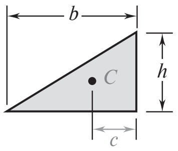
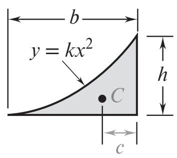
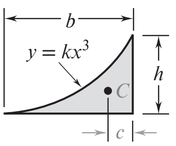
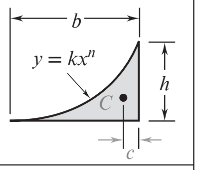
Forma	Rectángulo	Triángulo	Segmento parabólico	Segmento cúbico	Segmento general
					
Área	bh	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh}{3}$	$\frac{bh}{4}$	$\frac{bh}{n+1}$
c	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{5}$	$\frac{b}{n+2}$

Figura 9.31 Áreas y centroides de formas comunes.

Cuando se dibuja por partes un diagrama M/EI, las áreas definidas consisten en formas geométricas simples como rectángulos, triángulos y segmentos parabólicos. En la figura 9.31 se muestran las áreas y los centroides de algunas de estas formas.

Aplicación de conceptos 9.10

Determine la pendiente y la deflexión en el extremo B de la viga prismática de la Aplicación de conceptos 9.9, y dibuje el diagrama de momento flector por partes.

Se reemplaza la carga dada por dos cargas equivalentes, como se muestra en la figura 9.32a, y se dibujan los correspondientes diagramas de momento flector y M/EI de derecha a izquierda, comenzando en el extremo libre B.

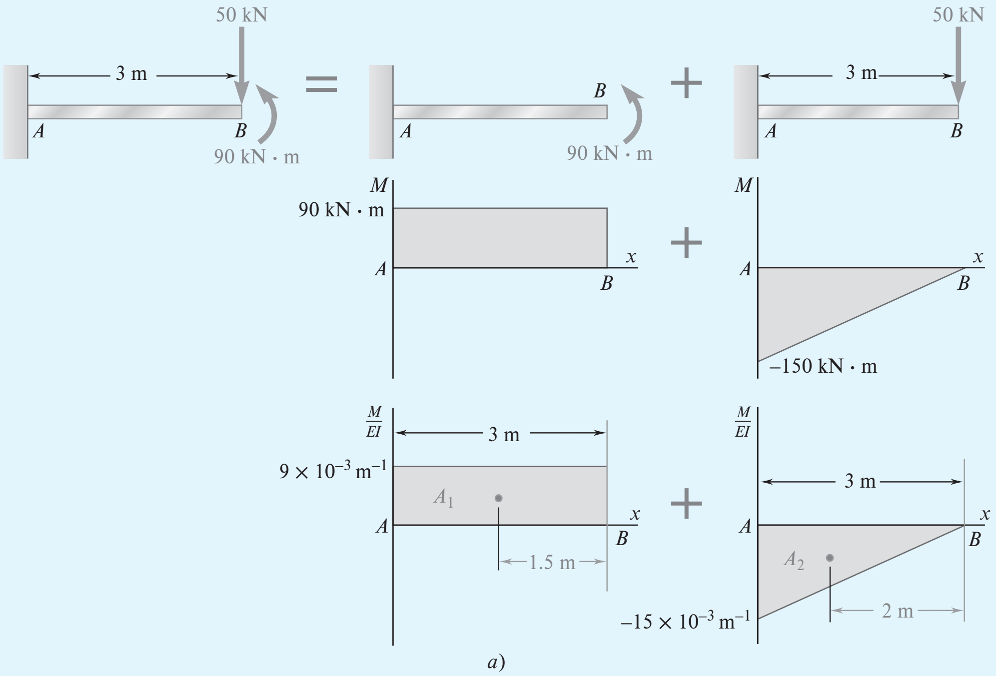


Figura 9.32 *a*) Superposición de cargas y sus diagramas de momento flector y *M/EI* resultantes.

Al aplicar el teorema del primer de momento de área, y al recordar que $\theta_A = 0$

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta_{B/A} &= A_1 + A_2\\ &= (9 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})(3\ \text{m}) - \tfrac{1}{2}(15 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})(3\ \text{m})\\ &= 27 \times 10^{-3} - 22.5 \times 10^{-3} = 4.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

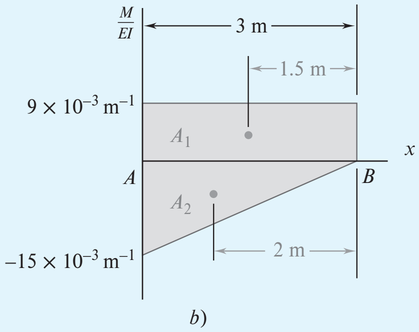


Figura 9.32 *b*) Diagramas *M/EI* combinados en un solo dibujo.

Si se aplica el teorema del segundo momento de área, es posible calcular el primer momento de cada área con respecto a un eje vertical que pase por B y se escribe

$$\begin{aligned}y_B = t_{B/A} &= A_1(1.5\ \text{m}) + A_2(2\ \text{m})\\ &= (27 \times 10^{-3})(1.5\ \text{m}) - (22.5 \times 10^{-3})(2\ \text{m})\\ &= 40.5\ \text{mm} - 45\ \text{mm} = -4.5\ \text{mm}\end{aligned}$$

En la práctica es conveniente combinar en un solo dibujo las dos partes del diagrama M/EI (figura 9.32b).

Aplicación de conceptos 9.11

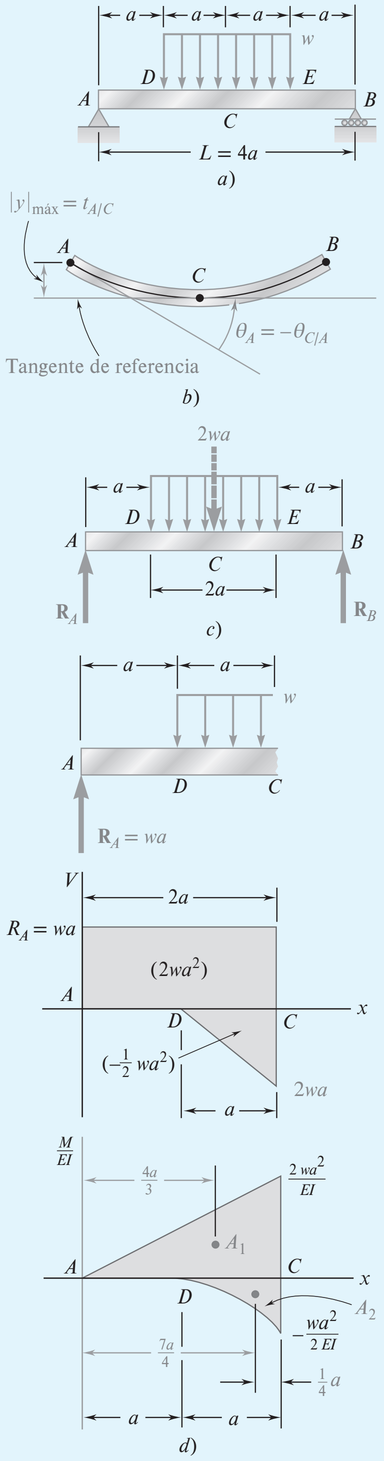


Figura 9.33 *a*) Viga simplemente apoyada con cargas distribuidas simétricamente. *b*) Curva elástica que muestra la máxima deflexión y la pendiente en el punto *A*. *c*) Diagrama de cuerpo libre de la viga. *d*) Diagramas de cortante y *M*/*EI* para la mitad izquierda de la viga.

Para la viga prismática *AB* y la carga que se muestra en la figura 9.33*a*, determine la pendiente en el apoyo y la deflexión máxima.

Primero se bosqueja la viga deflectada (figura 9.33*b*). Como la tangente en el centro *C* de la viga es horizontal, se usará como tangente de referencia, y $|y|_{\text{máx}} = t_{A/C}$. Pero como $\theta_C = 0$,

$$\theta_{C/A} = \theta_C - \theta_A = -\theta_A \qquad \text{o bien} \qquad \theta_A = \theta_{C/A}$$

El diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.33*c*) muestra que

$$R_A = R_B = wa$$

A continuación, se dibujan los diagramas de cortante y de momento flector para la porción *AC* de la viga. Estos diagramas se dibujan por partes, considerando por separado los efectos de la reacción $\mathbf{R}_A$ y de la carga distribuida. Sin embargo, por conveniencia, las dos partes de cada diagrama se grafican juntas en la figura 9.33*d*. Recuerde, que al estar uniformemente distribuida la carga, las partes correspondientes de los diagramas de fuerza cortante y momento flector serán lineal y parabólica, respectivamente. Las áreas y centroides del triángulo y del segmento parabólico pueden obtenerse de la figura 9.31, y son,

$$A_1 = \frac{1}{2}(2a)\left(\frac{2wa^2}{EI}\right) = \frac{2wa^3}{EI}$$

y

$$A_2 = -\frac{1}{3}(a)\left(\frac{wa^2}{2EI}\right) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Al aplicar el teorema del primer momento de área,

$$\theta_{C/A} = A_1 + A_2 = \frac{2wa^3}{EI} - \frac{wa^3}{6EI} = \frac{11wa^3}{6EI}$$

Recuerde de las figuras 9.33*a* y *b* que $a = \frac{1}{4}L$ y $\theta_A = -\theta_{C/A}$, por lo que

$$\theta_A = -\frac{11wa^3}{6EI} = -\frac{11wL^3}{384EI}$$

Al aplicar el teorema del segundo momento de área resulta,

$$t_{A/C} = A_1\frac{4a}{3} = A_2\frac{7a}{4} = \left(\frac{2wa^3}{EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\frac{7a}{4} = \frac{19wa^4}{8EI}$$

y

$$|y|_{\text{máx}} = t_{A/C} = \frac{19wa^4}{8EI} = \frac{19wL^4}{2\,048EI}$$

Problema modelo 9.10

Las barras prismáticas AD y DB están soldadas entre sí para formar la viga en voladizo ADB. Si se sabe que la rigidez a la flexión es EI en la porción AD de la viga, y $2EI$ en el tramo DB, determine la pendiente y la deflexión en el extremo A para la carga que se muestra en la figura.

ESTRATEGIA: Para aplicar los teoremas de momento de área, primero se debe obtener el diagrama M/EI de la viga. Para una viga en voladizo es conveniente colocar la tangente de referencia en el extremo fijo, puesto que se sabe que es horizontal.

MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama (*M/EI*). Con referencia a la figura 1, se dibuja el diagrama de momento flector para la viga y después se obtiene el diagrama M/EI dividiendo el valor de M en cada punto de la viga entre el valor correspondiente de rigidez a la flexión.

Tangente de referencia. Con referencia a la figura 2, se elige la tangente horizontal en el extremo fijo B como la tangente de referencia. Como $\theta_B = 0$ y $y_B = 0$,

$$\theta_A = -\theta_{B/A} \qquad y_A = t_{A/B}$$

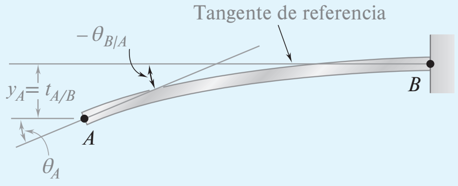


Figura 2 Pendiente y deflexión en el extremo *A*, en relación con la tangente de referencia en el extremo fijo *B*.

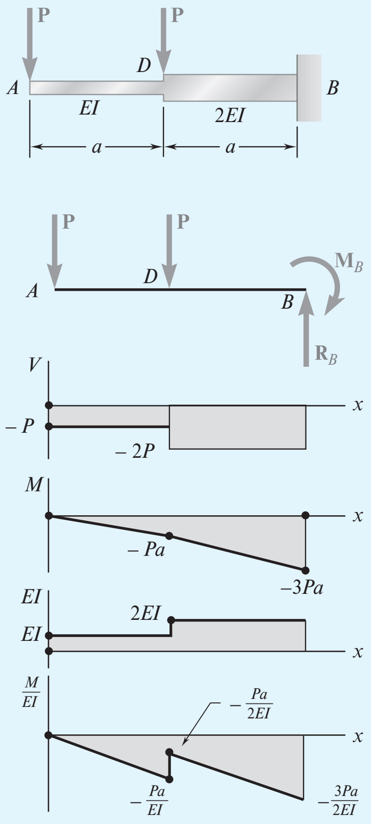


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre y construcción del diagrama *M/EI*.

Pendiente en *A*. Al dividir el diagrama M/EI en las tres porciones triangulares que se muestran en la figura 3, se tiene

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{EI}a = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{2EI}a = -\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\frac{3Pa}{2EI}a = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$

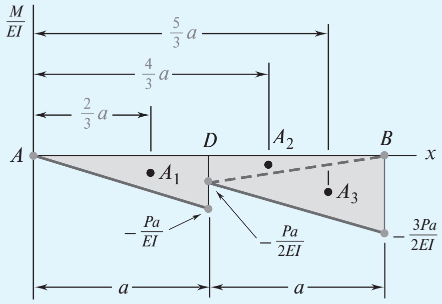


Figura 3 Áreas y centroides del diagrama de momento de área usado para encontrar la pendiente y la deflexión.

Si se usa el teorema del primer momento de área,

$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} - \frac{3Pa^2}{4EI} = -\frac{3Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_A = -\theta_{B/A} = +\frac{3Pa^2}{2EI} \qquad \theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI} \measuredangle \quad \blacktriangleleft$$

Deflexión en *A*. Con el teorema del segundo momento de área,

$$y_A = t_{A/B} = A_1\left(\frac{2}{3}a\right) + A_2\left(\frac{4}{3}a\right) + A_3\left(\frac{5}{3}a\right)$$

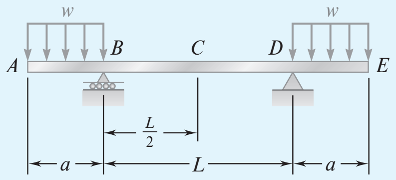
$$= \left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right)\frac{2a}{3} + \left(-\frac{Pa^2}{4EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{3Pa^2}{4EI}\right)\frac{5a}{3}$$

$$y_A = -\frac{23Pa^3}{12EI} \qquad y_A = \frac{23Pa^3}{12EI}\downarrow \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Este ejemplo demuestra que los teoremas del momento de área pueden usarse con tanta facilidad para las vigas no prismáticas como para las prismáticas.

Problema modelo 9.11

Para la viga prismática y la carga que se muestra en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el extremo *E*.



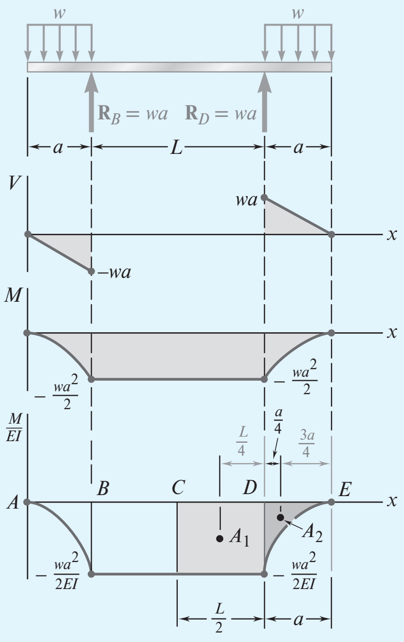


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre y construcción del diagrama de momento de área.

ESTRATEGIA: Para aplicar los teoremas del momento de área, primero es necesario obtener el diagrama *M*/*EI* de la viga. Debido a la simetría de la viga y de su carga, resulta conveniente colocar la tangente de referencia en el punto medio puesto que se sabe que es horizontal.

MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama *M/EI*. A partir del diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 1), se determinan las reacciones y después se dibujan los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Como la rigidez a la flexión de la viga es constante, se divide cada valor de *M* entre *EI* y se obtiene el diagrama *M*/*EI* mostrado.

Tangente de referencia. En la figura 2, puesto que la viga y su carga son simétricas respecto al punto medio *C*, la tangente en *C* es horizontal y puede utilizarse como tangente de referencia. Con referencia a la figura 2 y como $\theta_C = 0$,

$$\theta_E = \theta_C + \theta_{E/C} = \theta_{E/C} \qquad (1)$$

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} \qquad (2)$$

Pendiente en *E*. Con referencia al diagrama M/EI mostrado en la figura 1 y usando el teorema del primer momento de área,

$$A_1 = -\frac{wa^2}{2EI}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{wa^2L}{4EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{wa^2}{2EI}\right)(a) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Mediante el uso de la ecuación (1),

$$\theta_E = \theta_{E/C} = A_1 + A_2 = -\frac{wa^2L}{4EI} - \frac{wa^3}{6EI}$$

$$\theta_E = -\frac{wa^2}{12EI}(3L + 2a) \qquad \theta_E = \frac{wa^2}{12EI}(3L + 2a) \circlearrowright \blacktriangleleft$$

Deflexión en *E*. Si se emplea el teorema del segundo momento de área, se puede escribir

$$t_{D/C} = A_1\frac{L}{4} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\frac{L}{4} = -\frac{wa^2L^2}{16EI}$$

$$t_{E/C} = A_1\left(a + \frac{L}{4}\right) + A_2\left(\frac{3a}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\left(a + \frac{L}{4}\right) + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\left(\frac{3a}{4}\right)$$

$$= -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^2L^2}{16EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

Mediante el uso de la ecuación (2), se obtiene

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} = -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

$$y_E = -\frac{wa^3}{8EI}(2L + a) \qquad y_E = \frac{wa^3}{8EI}(2L + a)\downarrow \blacktriangleleft$$

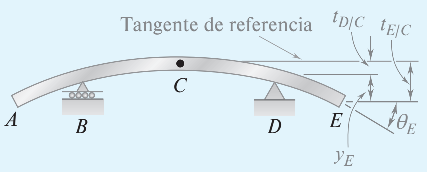


Figura 2 Debido a la simetría, la tangente de referencia en el punto medio *C* es horizontal. Se muestra la pendiente y la deflexión en el extremo *E*, en relación con esta tangente de referencia.

Problemas

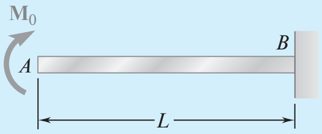


Figura P9.95

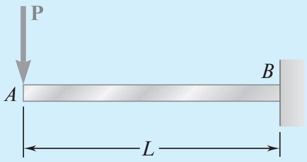


Figura P9.96

Utilice el método del momento de área para resolver los siguientes problemas.

9.95 a 9.98 Para la viga en voladizo uniforme y las cargas que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo libre, *b*) la deflexión en el extremo libre.

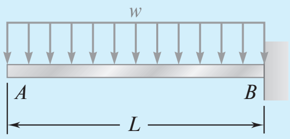


Figura P9.97

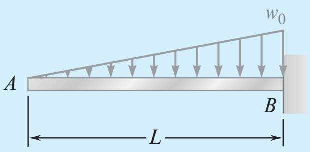


Figura P9.98

9.99* y *9.100 Para la viga uniforme en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine la pendiente y la deflexión en *a*) el punto *B*, *b*) el punto *C*.

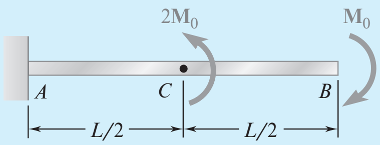


Figura *P9.99*

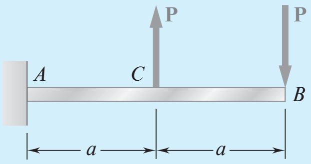


Figura *P9.100*

9.101 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

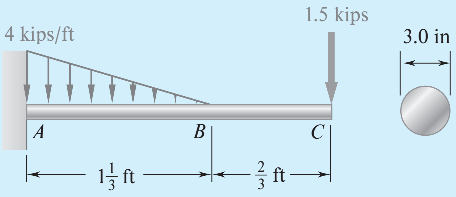


Figura P9.101

9.102 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

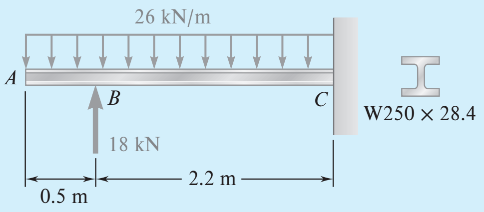


Figura P9.102

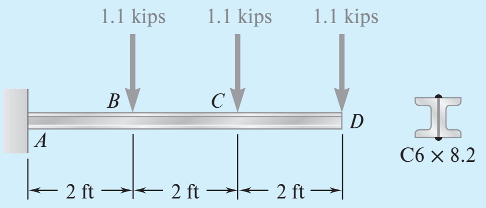


Figura P9.103

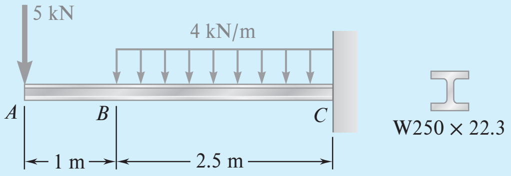


Figura P9.104

9.103 Dos canales C6 × 8.2 están soldados por su parte posterior y soportan las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la pendiente en el punto *D*, *b*) la deflexión en el punto *D*.

9.104 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

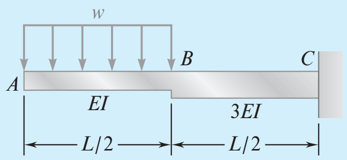


Figura P9.105

9.105 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*.

9.106 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine la deflexión y la pendiente en el extremo *A* ocasionadas por el momento $\mathbf{M}_0$.

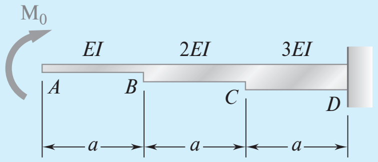


Figura P9.106

9.107 Dos placas de recubrimiento están soldadas a una viga de acero laminado como se muestra en la figura. Si $E = 200$ GPa, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el extremo *A*.

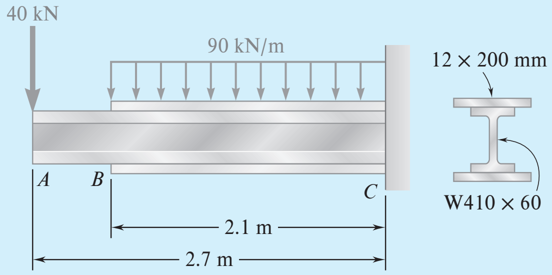


Figura P9.107

9.108 Dos placas de recubrimiento están soldadas a una viga de acero laminado como se muestra en la figura. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la pendiente en el extremo *C*, *b*) la deflexión en el extremo *C*.

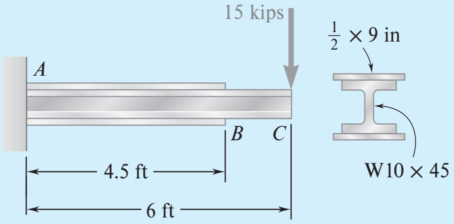


Figura *P9.108*

9.109 a *9.114* Para la viga prismática y las cargas que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

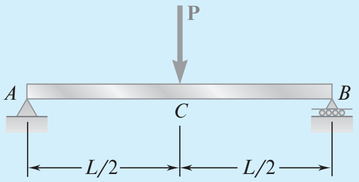


Figura P9.109

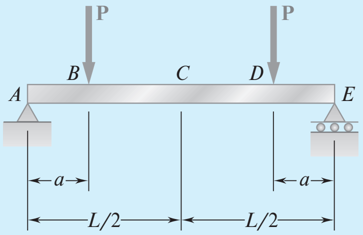


Figura P9.110

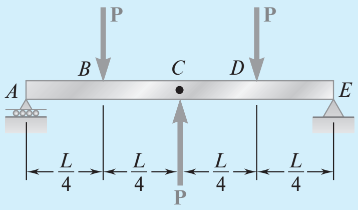


Figura P9.111

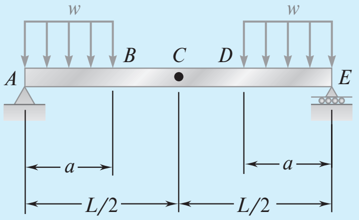


Figura P9.112

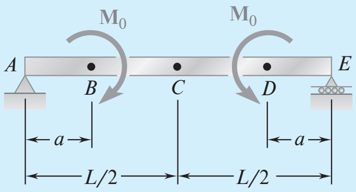


Figura P9.113

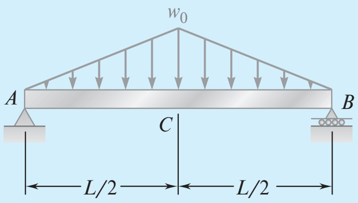


Figura *P9.114*

9.115 y *9.116* Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

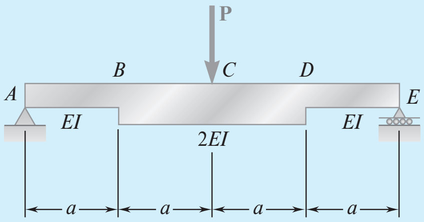


Figura P9.115

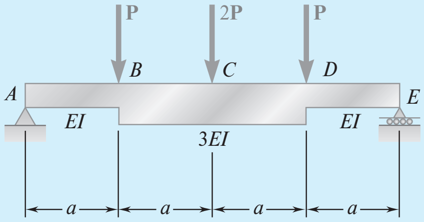


Figura *P9.116*

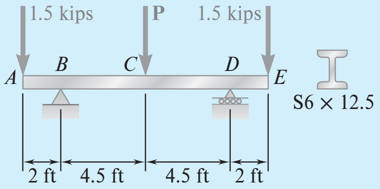


Figura *P9.117*

9.117 Si se sabe que la magnitud de la carga **P** es de 7 kips, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.118 y 9.119 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio de la viga. Use $E = 200$ GPa.

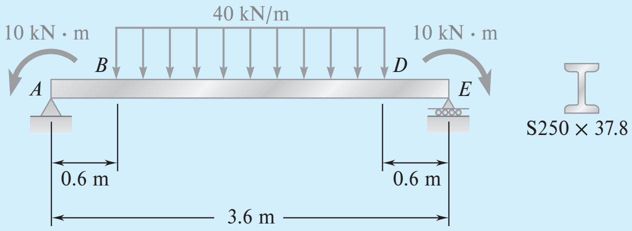


Figura P9.118

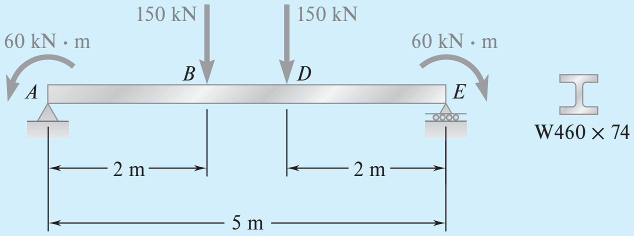


Figura P9.119

9.120 Si se sabe que $w = 8$ kN/m, determine para la viga y las cargas mostradas en la figura *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

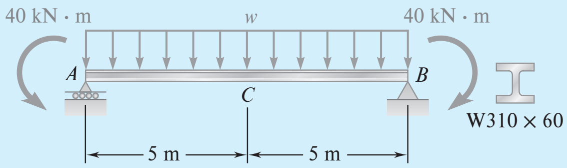


Figura P9.120

9.121 Para la viga y las cargas del problema 9.117, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión es cero en el punto medio *C* de la viga, *b*) la deflexión correspondiente en el extremo *A*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.122 Para la viga y las cargas del problema 9.120, determine el valor de *w* para el cual la deflexión es cero en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 200$ GPa.

***9.123** Una varilla uniforme *AE* debe apoyarse en dos puntos *B* y *D*. Determine la distancia *a* para la cual la pendiente en los extremos *A* y *E* es igual a cero.

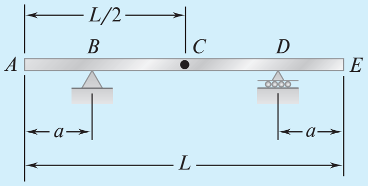


Figura P9.123 y P9.124

***9.124** Una varilla uniforme *AE* debe apoyarse en dos puntos *B* y *D*. Determine la distancia *a* desde los extremos de la varilla hasta los puntos de apoyo, si las deflexiones descendentes en los puntos *A*, *C* y *E* deben ser iguales.

*9.6 APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DEL MOMENTO DE ÁREA A VIGAS CON CARGAS ASIMÉTRICAS

*9.6A Principios generales

Cuando una viga saliente o simplemente apoyada soporta una carga simétrica, la tangente al centro *C* de la viga es horizontal y puede usarse como la tangente de referencia (sección 9.6). Cuando una viga saliente o simplemente apoyada soporta una carga asimétrica, en general no es posible determinar por inspección el punto de la viga donde la tangente es horizontal. Se deben emplear otros medios para localizar una tangente de referencia (es decir, una tangente de pendiente conocida para aplicar de cualquiera de los dos teoremas del momento de área).

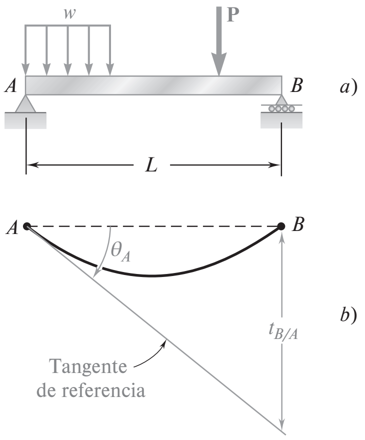


Figura 9.34 *a*) Cargas asimétricas. *b*) Aplicación del método del momento de área para encontrar la pendiente en el punto *A*.

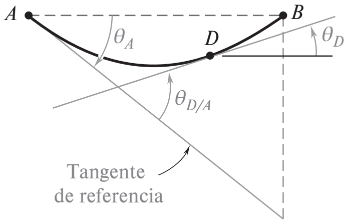


Figura 9.35 La determinación de la desviación tangencial entre apoyos proporciona una tangente de referencia conveniente para evaluar las pendientes.

Por lo general resulta conveniente seleccionar la tangente de referencia en uno de los apoyos de la viga. Por ejemplo, si se considera la tangente en el apoyo *A* de la viga simplemente apoyada *AB* (figura 9.34), su pendiente puede determinarse al calcular la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo *B* con respecto de *A*, y al dividir $t_{B/A}$ por la distancia *L* entre los apoyos. Si se recuerda que la desviación tangencial de un punto localizado por encima de la tangente es positiva,

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} \tag{9.22}$$

Una vez que se ha encontrado la pendiente de la tangente de referencia, es posible determinar la pendiente θ_D de la viga en cualquier punto *D* (figura 9.35) mediante el uso del teorema del primer momento de área para obtener $\theta_{D/A}$, y entonces se escribe:

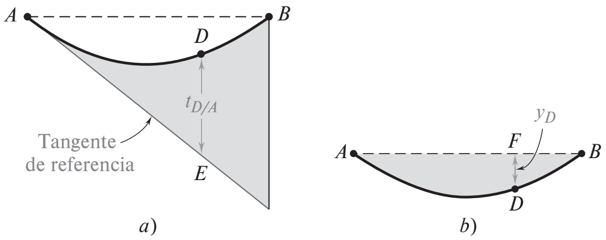
$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} \tag{9.23}$$

La desviación tangencial $t_{D/A}$ de *D* con respecto al apoyo *A* se puede obtener a partir del teorema del segundo momento de área. Se observa que $t_{D/A}$ es igual al segmento *ED* (figura 9.36*a*) y representa la distancia vertical desde *D hasta la tangente de referencia*. Por otro lado, la deflexión y_D del punto *D* representa la distancia vertical *desde D hasta la línea horizontal AB* (figura 9.36*b*). Como y_D es igual en magnitud al segmento *FD*, puede expresarse como la diferencia entre *EF* y *ED* (figura 9.36*c*). Si se observa en los triángulos semejantes *AFE* y *ABH* que

$$\frac{EF}{x} = \frac{HB}{L} \quad \text{o} \quad EF = \frac{x}{L} t_{B/A}$$

y al recordar las convenciones de signos usados para las deflexiones y las desviaciones tangenciales,

$$y_D = ED - EF = t_{D/A} - \frac{x}{L} t_{B/A} \tag{9.24}$$



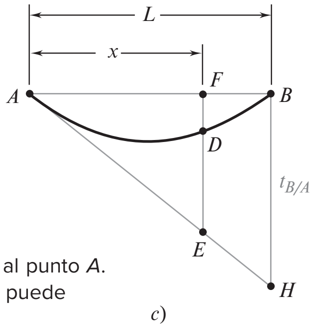


Figura 9.36 *a*) Desviación tangencial del punto *D* con respecto al punto *A*. *b*) Deflexión del punto *D*. *c*) Al conocer *HB* a través de $t_{B/A}$, *EF* se puede encontrar por triángulos semejantes.

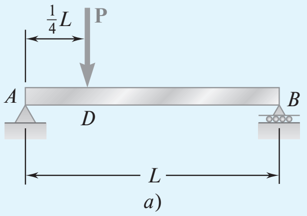


Figura 9.37 *a*) Viga simplemente apoyada con carga asimétrica.

Aplicación de conceptos 9.12

Para la viga prismática y la carga que se muestran (figura 9.37*a*), determine la pendiente y la deflexión en el punto *D*.

Tangente de referencia en el apoyo *A*. Se calculan las reacciones en los apoyos y se dibuja el diagrama *M*/*EI* (figura 9.37*b*). Se encuentra la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo *B* con respecto al apoyo *A*, aplicando el teorema del segundo momento de área y calculando los momentos de las áreas A_1 y A_2 con respecto a un eje vertical que pasa por *B*.

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{L}{4}\frac{3PL}{16EI} = \frac{3PL^2}{128EI} \qquad A_2 = \frac{1}{2}\frac{3L}{4}\frac{3PL}{16EI} = \frac{9PL^2}{128EI}$$

$$t_{B/A} = A_1\left(\frac{L}{12} + \frac{3L}{4}\right) + A_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{3PL^2}{128EI}\frac{10L}{12} + \frac{9PL^2}{128EI}\frac{L}{2} = \frac{7PL^3}{128EI}$$

La pendiente de la tangente de referencia en A (figura 9.37c) es

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\frac{7PL^2}{128EI}$$

Pendiente en *D*. Al aplicar el teorema del primer momento de área de A a D,

$$\theta_{D/A} = A_1 = \frac{3PL^2}{128EI}$$

Entonces, la pendiente en D es

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} = -\frac{PL^2}{32EI}$$

Deflexión en *D*. Se encuentra la desviación tangencial $DE = t_{D/A}$ mediante el cálculo del momento del área A_1 con respecto a un eje vertical que pasa por D:

$$DE = t_{D/A} = A_1\left(\frac{L}{12}\right) = \frac{3PL^2}{128EI}\frac{L}{12} = \frac{PL^3}{512EI}$$

La deflexión en D es igual a la diferencia entre los segmentos DE y EF (figura 9.37c). Así que

$$y_D = DE - EF = t_{D/A} - \tfrac{1}{4}t_{B/A}$$

$$= \frac{PL^3}{512EI} - \frac{1}{4}\frac{7PL^3}{128EI}$$

$$y_D = -\frac{3PL^3}{256EI} = -0.01172\ PL^3/EI$$

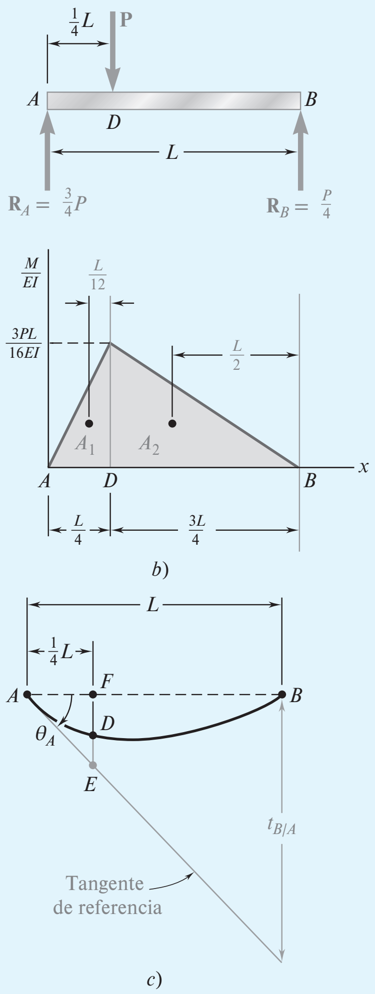


Figura 9.37 (*cont.*) *b*) Diagrama de cuerpo libre y diagrama *M*/*EI*. *c*) Tangente de referencia y geometría para determinar la pendiente y la deflexión en el punto *D*.

*9.6B Deflexión máxima

Cuando una viga saliente o simplemente apoyada soporta una carga asimétrica, la deflexión máxima no suele ocurrir en el centro de la viga. Como se muestra en la fotografía 9.5, el camión aplica cargas sobre el puente en la ubicación de cada eje. Para determinar la deflexión máxima de una viga como la descrita, primero es necesario localizar el punto K de la viga donde la tangente es horizontal. La deflexión en ese punto es la deflexión máxima.

El análisis debe comenzar con la determinación de una tangente de referencia en uno de los apoyos. Si se selecciona el apoyo A, la pendiente θ_A de la tangente en A se obtiene con el cálculo de la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B con respecto a A y dividiendo dicha cantidad entre la distancia L entre los dos apoyos.

Fotografía 9.5 Las deflexiones de las vigas usadas en el puente deben analizarse para las diferentes posiciones posibles del camión.

Como la pendiente θ_K en el punto K es cero (figura 9.38*a*),

$$\theta_{K/A} = \theta_K - \theta_A = 0 - \theta_A = -\theta_A$$

Si se recuerda el teorema del primer momento de área, el punto K puede determinarse a partir del diagrama M/EI, al saber que $\theta_{K/A} = -\theta_A$ (figura 9.38*b*).

Al observar que la deflexión máxima $|y|_{\text{máx}}$ es igual a la desviación tangencial $t_{A/K}$ del apoyo A con respecto a K (figura 9.38*a*), se obtiene $|y|_{\text{máx}}$ mediante el cálculo del primer momento del área A entre A y K con respecto al eje vertical que pasa por A (figura 9.38*b*).

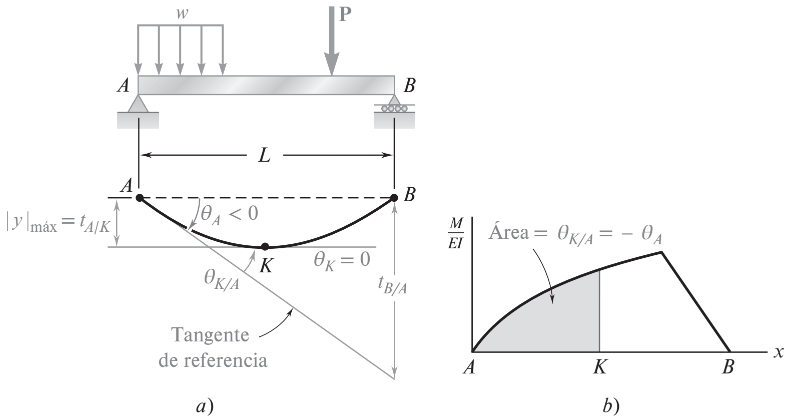


Figura 9.38 Determinación de la deflexión máxima usando el método del momento de área. *a*) La deflexión máxima ocurre en un punto K donde $\theta_K = 0$, para el cual $\theta_{K/A} = -\theta_A$. *b*) Con el punto K localizado de esta manera, la deflexión máxima es igual al primer momento del área sombreada con respecto a A.

Aplicación de conceptos 9.13

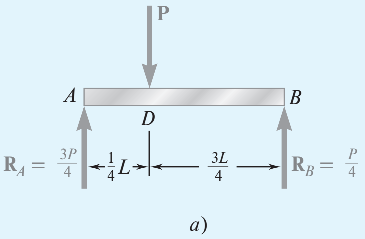


Figura 9.39 *a*) Diagrama de cuerpo libre.

Determine la deflexión máxima de la viga de la Aplicación de conceptos 9.12. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 9.39*a*.

Determinación del punto K donde la pendiente vale cero. Recuerde que la pendiente en el punto D, donde se aplica la carga, es negativa. Se deduce que el punto K, donde la pendiente vale cero, se localiza entre D y el apoyo B (figura 9.39*b*).

Los cálculos se simplifican si la pendiente en K se relaciona con la pendiente en B, en vez de la pendiente en A.

Como la pendiente en A ya se determinó en la Aplicación de conceptos 9.12, la pendiente en B se obtiene con

$$\theta_B = \theta_A + \theta_{B/A} = \theta_A + A_1 + A_2$$

$$\theta_B = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} + \frac{9PL^2}{128EI} = \frac{5PL^2}{128EI}$$

Si se observa que el momento flector a una distancia u del extremo B es $M = \frac{1}{4}Pu$ (figura 9.39*c*), el área A' ubicada entre K y B bajo el diagrama M/EI (figura 9.39*d*) se expresa como

$$A' = \frac{1}{2}\frac{Pu}{4EI}u = \frac{Pu^2}{8EI}$$

Del primer teorema del momento de área se obtiene

$$\theta_{B/K} = \theta_B - \theta_K = A'$$

y como $\theta_K = 0$, $\qquad \theta_B = A'$

Al sustituir los valores obtenidos para θ_B y A',

$$\frac{5PL^2}{128EI} = \frac{Pu^2}{8EI}$$

y, al despejar u, resulta

$$u = \frac{\sqrt{5}}{4}L = 0.559L$$

Por lo tanto, la distancia del apoyo A al punto K es

$$AK = L - 0.559L = 0.441L$$

Deflexión máxima. La deflexión máxima $|y|_{\text{máx}}$ es igual a la desviación tangencial $t_{B/K}$ y, por consiguiente, al primer momento del área A' con respecto a un eje vertical que pasa por B (figura 9.39*b*).

$$|y|_{\text{máx}} = t_{B/K} = A'\left(\frac{2u}{3}\right) = \frac{Pu^2}{8EI}\left(\frac{2u}{3}\right) = \frac{Pu^3}{12EI}$$

Al sustituir el valor obtenido para u, se obtiene

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{P}{12EI}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}L\right)^3 = 0.01456\,PL^3/EI$$

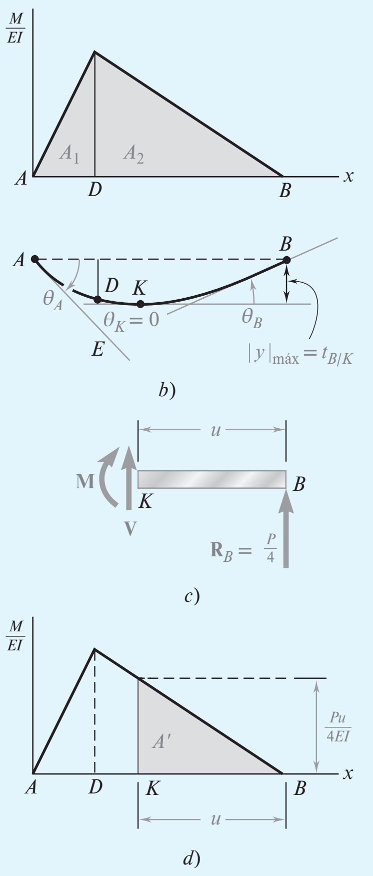


Figura 9.39 (*cont.*) *b*) Diagrama M/EI y geometría para determinar la deflexión máxima. *c*) Diagrama de cuerpo libre de la porción KB. *d*) La deflexión máxima es el primer momento del área sombreada con respecto a B.

*9.6C Vigas estáticamente indeterminadas

Las reacciones en los apoyos de una viga estáticamente indeterminada se pueden determinar mediante el método del momento de área en una forma muy parecida a la que se describió en la sección 9.4. Para una viga indeterminada al primer grado, se designa

una de las reacciones como redundante y se elimina o modifica de acuerdo con el apoyo correspondiente. Luego, la reacción redundante se trata como una carga desconocida que, junto con las demás cargas, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. Esta condición de compatibilidad se expresa casi siempre escribiendo que la desviación tangencial de un apoyo respecto a otro es cero, o tiene un valor predeterminado.

Se dibujan dos diagramas de cuerpo libre de la viga por separado. Uno muestra *las cargas dadas y las reacciones correspondientes* en los apoyos que no hayan sido eliminados; el otro muestra *la reacción redundante y las reacciones correspondientes* en los mismos apoyos (vea la Aplicación de conceptos 9.14). Después se dibuja un diagrama M/EI para cada una de las dos cargas, y las desviaciones tangenciales buscadas se obtienen con el teorema del segundo momento de área. Al superponer los resultados obtenidos, se expresa la condición requerida de compatibilidad y se determina la reacción redundante. Las otras reacciones se obtienen del diagrama de cuerpo libre de la viga.

Una vez determinadas las reacciones en los apoyos, es posible obtener la pendiente y la deflexión por medio del método del momento de área en cualquier otro punto de la viga.

Aplicación de conceptos 9.14

Determine la reacción en los apoyos para la viga prismática y la carga que se muestra (figura 9.40*a*).

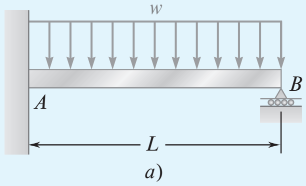


Figura 9.40 *a*) Viga estáticamente indeterminada con una carga uniformemente distribuida.

Se considera que el momento ejercido en el extremo fijo A es redundante y se reemplaza el extremo fijo por un apoyo de pasador y ménsula. Ahora se considera al momento $\mathbf{M}_A$ como una carga desconocida (figura 9.40*b*) y se determinará a partir de la condición de que la tangente a la viga en A debe ser horizontal. Así que esta tangente debe pasar a través del apoyo B y, entonces, la desviación tangencial $t_{B/A}$ de B con respecto a A debe ser cero. Se llega a la solución con el cálculo sepa-

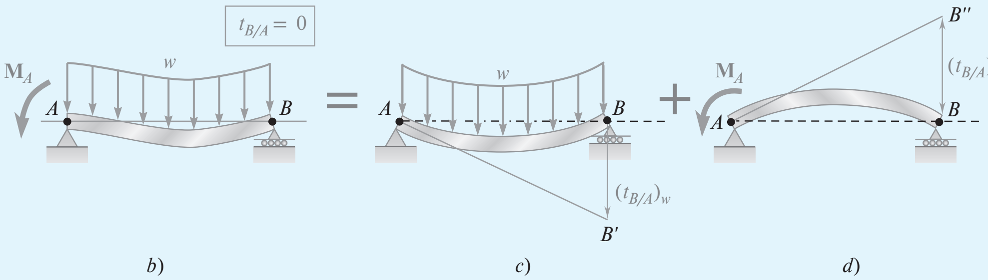


Figura 9.40 *b*) Análisis de la viga indeterminada al superponer dos vigas simplemente apoyadas determinadas, sujetas a *c*) una carga uniformemente distribuida, *d*) la reacción redundante.

rado de la desviación tangencial $(t_{B/A})w$ ocasionada por la carga uniformemente distribuida w (figura 9.40*c*) y la desviación tangencial $(t_{B/A})M$ producida por el momento desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.40*d*).

A partir del diagrama de cuerpo libre de la viga bajo la carga distribuida conocida w (figura 9.40*e*), se determinan las reacciones correspondientes en los apoyos A y B.

$$(\mathbf{R}_A)_1 = (\mathbf{R}_B)_1 = \tfrac{1}{2}wL\uparrow \qquad \textbf{(1)}$$

Ahora se dibujan los diagramas correspondientes de fuerza cortante y de M/EI (figuras 9.40*e*). Al observar que M/EI queda representado por un arco de parábola, y recordar la fórmula $A = \frac{2}{3}\,bh$ para el área bajo una parábola, el primer momento de esta área con respecto a un eje vertical que pasa por B es

$$(t_{B/A})_w = A_1\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}L\frac{wL^2}{8EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{24EI} \qquad \textbf{(2)}$$

Con base en el diagrama de cuerpo libre de la viga cuando está sujeta al momento desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.40*f*), las reacciones correspondientes en A y B son

$$(\mathbf{R}_A)_2 = \frac{M_A}{L}\uparrow \qquad (\mathbf{R}_B)_2 = \frac{M_A}{L}\downarrow \qquad \textbf{(3)}$$

Al dibujar el diagrama M/EI correspondiente (figura 9.40*f*), se aplica el teorema del segundo momento de área para obtener

$$(t_{B/A})_M = A_2\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}L\frac{M_A}{EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{M_AL^2}{3EI} \qquad \textbf{(4)}$$

Al combinar los resultados obtenidos en las ecuaciones (2) y (4), y expresar que la desviación tangencial resultante $t_{B/A}$ debe valer cero (figura 9.40*b*, *c*, *d*),

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

$$\frac{wL^4}{24EI} - \frac{M_AL^2}{3EI} = 0$$

y, al despejar M_A,

$$M_A = +\tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2 ⟲$$

Si se sustituye M_A en la ecuación (3) y se tiene presente la ecuación (1), los valores de R_A y R_B son

$$R_A = (R_A)_1 + (R_A)_2 = \tfrac{1}{2}wL + \tfrac{1}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$
$$R_B = (R_B)_1 + (R_B)_2 = \tfrac{1}{2}wL - \tfrac{1}{8}wL = \tfrac{3}{8}wL$$

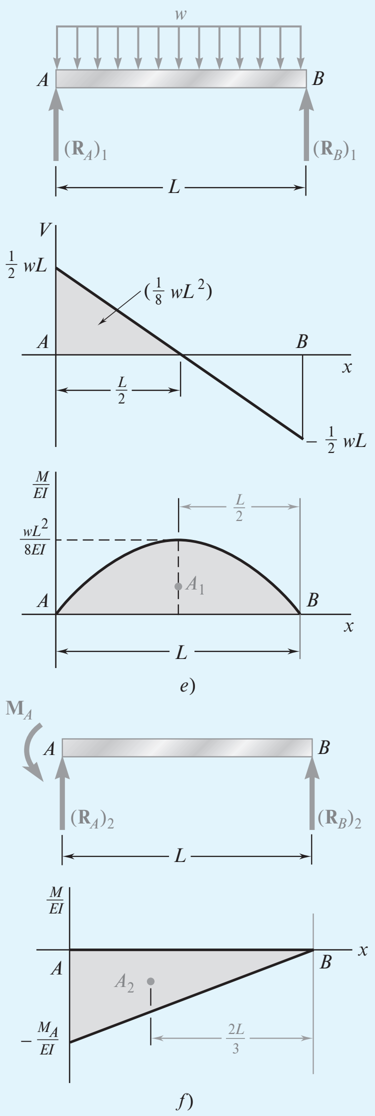


Figura 9.40 (*cont.*) e) Diagrama de cuerpo libre de una viga con carga distribuida, diagrama de fuerza cortante y diagrama *M*/*EI*. *f*) Diagrama de cuerpo libre de una viga con un momento redundante y diagrama *M*/*EI*.

En la Aplicación de conceptos 9.14, solo había una reacción redundante (es decir, la viga era *estáticamente indeterminada al primer grado*). Los *teoremas del momento de área* también pueden usarse cuando hay reacciones redundantes adicionales, pero es necesario escribir ecuaciones adicionales. Por lo tanto, para una viga que es *estáticamente indeterminada al segundo grado*, sería necesario seleccionar dos reacciones redundantes y escribir dos ecuaciones que consideren las *deformaciones* de la estructura en cuestión.

Problema modelo 9.12

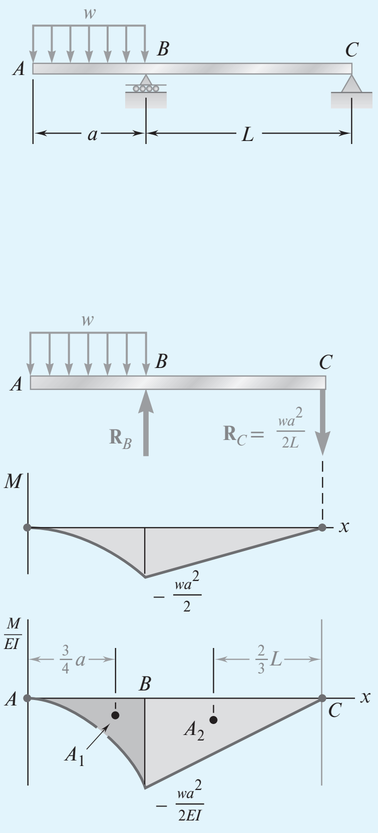


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre, de momento y *M/EI*.

Para la viga y la carga mostradas en la figura, *a*) determine la deflexión en el extremo *A*, *b*) evalúe y_A para los siguientes datos:

W 10 × 33: $I = 171 \text{ in}^4$ $\quad = 29 \times 10^6$ psi

$a = 3$ ft $= 36$ in $\quad L = 5.5$ ft $= 66$ in

$w = 13.5$ kips/ft $= 1\,125$ lb/in

ESTRATEGIA: Para aplicar los teoremas del momento de área, primero debe obtener el diagrama *M/EI* para la viga. Después, mediante la colocación de la tangente de referencia en un apoyo, es posible evaluar las desviaciones tangenciales en otros puntos estratégicos que, a través de la geometría simple, permitirán la determinación de la deflexión deseada.

MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama *M/EI*. Con referencia a la figura 1, se dibuja el diagrama de momento flector. Como la rigidez a la flexión *EI* es constante, se obtiene el diagrama *M/EI* que se muestra, el cual consiste en un segmento parabólico de área A_1 y un triángulo de área A_2.

$$A_1 = \frac{1}{3}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)a = -\frac{wa^3}{6EI}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)L = -\frac{wa^2L}{4EI}$$

Tangente de referencia en *B*. La tangente de referencia se dibuja en el punto *B* de la figura 2. La desviación tangencial de *C* con respecto a *B* se determina mediante el uso del teorema del segundo momento de área:

$$t_{C/B} = A_2\frac{2L}{3} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\frac{2L}{3} = -\frac{wa^2L^2}{6EI}$$

A partir de los triángulos semejantes *A''A'B* y *CC'B*,

$$A''A' = t_{C/B}\left(\frac{a}{L}\right) = -\frac{wa^2L^2}{6EI}\left(\frac{a}{L}\right) = -\frac{wa^3L}{6EI}$$

Usando otra vez el teorema del segundo momento de área,

$$t_{A/B} = A_1\frac{3a}{4} = \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\frac{3a}{4} = -\frac{wa^4}{8EI}$$

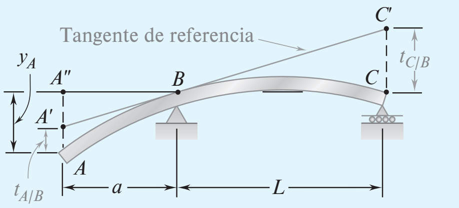


Figura 2 Tangente de referencia y geometría para determinar la deflexión en *A*.

a*) Deflexión en el extremo *A

$$y_A = A''A' + t_{A/B} = -\frac{wa^3L}{6EI} - \frac{wa^4}{8EI} = -\frac{wa^4}{8EI}\left(\frac{4}{3}\frac{L}{a} + 1\right)$$

$$y_A = \frac{wa^4}{8EI}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{L}{a}\right)\downarrow \quad ◀$$

***b*) Evaluación de y_A.** Al sustituir los datos,

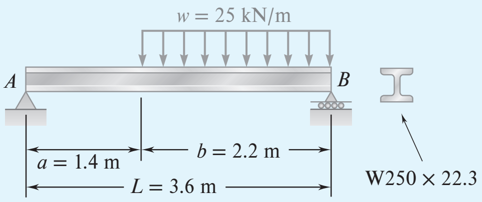
$$y_A = \frac{(1\,125 \text{ lb/in})(36 \text{ in})^4}{8(29 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)(171 \text{ in}^4)}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{66 \text{ in}}{36 \text{ in}}\right)$$

$$y_A = 0.1\,641 \text{ in}\downarrow \quad ◀$$

REVISAR y PENSAR: Observe que una estrategia alterna igualmente efectiva sería dibujar una tangente de referencia en el punto *C*.

Problema modelo 9.13

Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la magnitud y la ubicación de la deflexión más grande. Utilice $E = 200$ GPa.



ESTRATEGIA: Para aplicar los teoremas del momento de área, primero se debe obtener el diagrama *M*/*EI* para la viga. Después, mediante la colocación de la tangente de referencia en un apoyo, es posible evaluar la desviación tangencial en el otro apoyo que, a través de geometría simple y la posterior aplicación de los teoremas del momento de área, permitirá la determinación de la deflexión máxima.

MODELAR: Se utiliza el diagrama de cuerpo libre de la viga completa de la figura 1 para obtener

$$\mathbf{R}_A = 16.81 \text{ kN}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = 38.2 \text{ kN}\uparrow$$

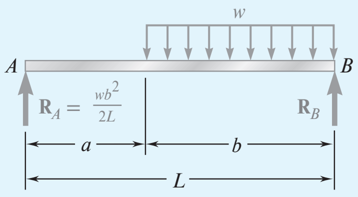


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre.

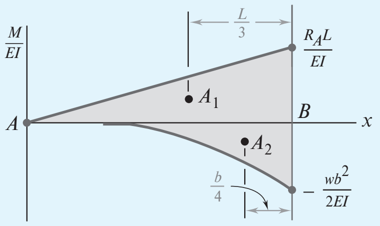


Figura 2 Partes del diagrama *M/EI* con ubicaciones de los centroides.

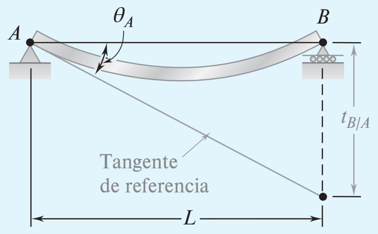


Figura 3 Determinación de θ_A a través de la desviación tangencial $t_{B/A}$.

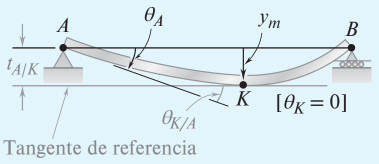


Figura 4 Geometría para determinar la deflexión máxima.

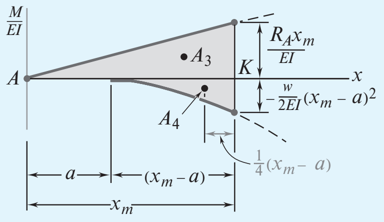


Figura 5 Diagrama *M/EI* entre el punto *A* y la ubicación de la máxima deflexión, el punto *K*.

ANALIZAR:

Diagrama *M/EI*. Se dibuja el diagrama M/EI por partes (figura 2), considerando por separado los efectos de la reacción $\mathbf{R}_A$ y de la carga distribuida. Las áreas del triángulo y del segmento son

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{R_AL}{EI}L = \frac{R_AL^2}{2EI} \qquad A_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{wb^2}{2EI}\right)b = -\frac{wb^3}{6EI}$$

Tangente de referencia. Como se observa en la figura 3. Se elige la tangente a la viga en el apoyo A como tangente de referencia. Mediante el uso del teorema del segundo momento de área se determina que la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B con respecto al apoyo A es

$$t_{B/A} = A_1\frac{L}{3} + A_2\frac{b}{4} = \left(\frac{R_AL^2}{2EI}\right)\frac{L}{3} + \left(-\frac{wb^3}{6EI}\right)\frac{b}{4} = \frac{R_AL^3}{6EI} - \frac{wb^4}{24EI}$$

Pendiente en *A*

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\left(\frac{R_AL^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) \tag{1}$$

Deflexión más grande. Como se observa en la figura 4, la mayor deflexión ocurre en el punto K, donde la pendiente de la viga es cero. Con base en la figura 5 se escribe

$$\theta_K = \theta_A + \theta_{K/A} = 0 \tag{2}$$

pero

$$\theta_{K/A} = A_3 + A_4 = \frac{R_Ax_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI}(x_m - a)^3 \tag{3}$$

Se sustituyen en la ecuación (2) los valores de θ_A y $\theta_{K/A}$ de las ecuaciones (1) y (3):

$$-\left(\frac{R_AL^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) + \left[\frac{R_Ax_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI}(x_m - a)^3\right] = 0$$

Al sustituir los datos numéricos, se obtiene

$$-29.53\frac{10^3}{EI} + 8.405x_m^2\frac{10^3}{EI} - 4.167(x_m - 1.4)^3\frac{10^3}{EI} = 0$$

Al resolver por ensayo y error para x_m, $\qquad x_m = 1.890 \text{ m}$ ◀

Al calcular los momentos de A_3 y A_4 con respecto a un eje vertical que pasa por A, se tiene

$$|y|_m = t_{A/K} = A_3\frac{2x_m}{3} + A_4\left[a + \frac{3}{4}(x_m - a)\right]$$

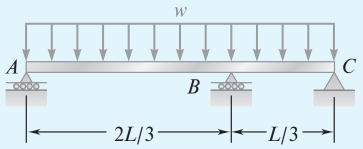
$$= \frac{R_Ax_m^3}{3EI} - \frac{wa}{6EI}(x_m - a)^3 - \frac{w}{8EI}(x_m - a)^4$$

Mediante el uso de los datos dados, $R_A = 16.81$ kN e $I = 28.7 \times 10^{-6}$ m^4,

$y_m = 6.44 \text{ mm}\downarrow$ ◀

Problema modelo 9.14

Para la viga y la carga uniformes que se muestran en la figura, determine la reacción en B.



ESTRATEGIA: Al aplicar el concepto de superposición, es posible modelar este problema estáticamente indeterminado como una sumatoria de los desplazamientos para la carga dada y los casos de carga redundante. Luego, se puede encontrar la reacción redundante al notar que un desplazamiento asociado con los dos casos debe ser consistente con la geometría de la viga original.

MODELAR: La viga es indeterminada al primer grado. Con referencia a la figura 1, se elige $\mathbf{R}_B$ como redundante y se consideran por separado la carga distribuida y la carga de reacción redundante.

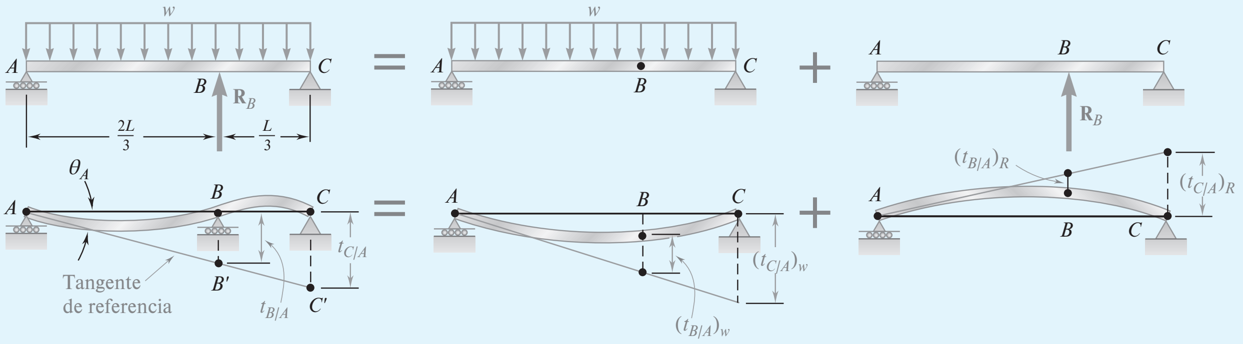


Figura 1 Viga indeterminada modelada como la superposición de dos vigas determinadas, con la reacción en B elegida como redundante.

A continuación se selecciona la tangente en A como tangente de referencia. De los triángulos semejantes ABB' y ACC' se obtiene,

$$\frac{t_{C/A}}{L} = \frac{t_{B/A}}{\frac{2}{3}L} \qquad t_{C/A} = \frac{3}{2}t_{B/A} \tag{1}$$

Para cada carga se dibuja el diagrama M/EI y después se determinan las desviaciones tangenciales de B y C con respecto a A.

ANÁLISIS:

Carga distribuida (figura 2). Al considerar el diagrama M/EI desde el extremo A hasta un punto arbitrario X,

$$(t_{X/A})_w = A_1\frac{x}{3} + A_2\frac{x}{4} = \left(\frac{1}{2}\frac{wLx}{2EI}x\right)\frac{x}{3} + \left(-\frac{1}{3}\frac{wx^2}{2EI}x\right)\frac{x}{4} = \frac{wx^3}{24EI}(2L - x)$$

Al hacer $x = L$, y $x = \frac{2}{3}L$,

$$(t_{C/A})_w = \frac{wL^4}{24EI} \qquad (t_{B/A})_w = \frac{4}{243}\frac{wL^4}{EI}$$

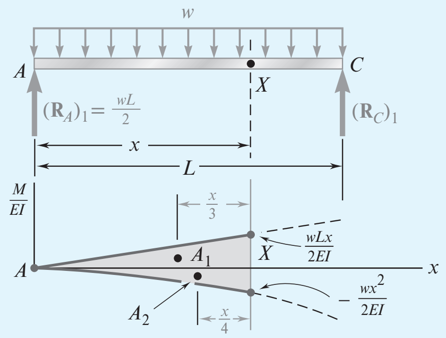


Figura 2 Diagramas de cuerpo libre y *M/EI* para la viga con carga distribuida.

Carga de reacción redundante (figura 3).

$$(t_{C/A})_R = A_3\frac{L}{9} + A_4\frac{L}{3} = \left(\frac{1}{2}\frac{R_BL}{3EI}\frac{L}{3}\right)\frac{L}{9} + \left(-\frac{1}{2}\frac{R_BL}{3EI}L\right)\frac{L}{3} = -\frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI}$$

$$(t_{B/A})_R = A_5\frac{2L}{9} = \left[-\frac{1}{2}\frac{2R_BL}{9EI}\left(\frac{2L}{3}\right)\right]\frac{2L}{9} = -\frac{4}{243}\frac{R_BL^3}{EI}$$

Carga combinada. Al sumar los resultados se tiene

$$t_{C/A} = \frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI} \qquad t_{B/A} = \frac{4}{243}\frac{(wL^4 - R_BL^3)}{EI}$$

Reacción en *B*. Al sustituir $t_{C/A}$ y $t_{B/A}$ en la ecuación (1),

$$\left(\frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{243}\frac{(wL^4 - R_BL^3)}{EI}\right]$$

$$R_B = 0.6875\ wL \qquad\qquad R_B = 0.688\,wL\uparrow$$

REVISAR y PENSAR: Observe que una estrategia alternativa sería determinar las deflexiones en *B* para la carga dada y la reacción redundante, e igualar la suma a cero.

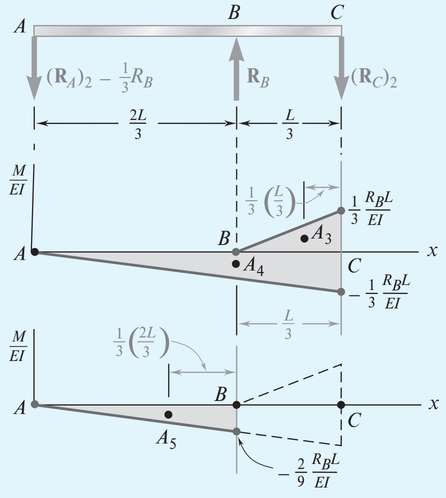


Figura 3 Diagramas de cuerpo libre y *M/EI* para la viga con reacción redundante.

Problemas

Utilice el método del momento de área para resolver los siguientes problemas.

9.125 a 9.128 Para la viga prismática y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la deflexión en el punto *D*, *b*) la pendiente en el extremo *A*.

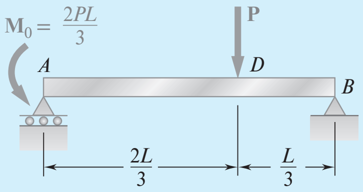


Figura P9.125

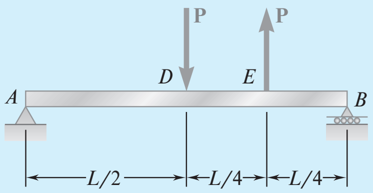


Figura P9.126

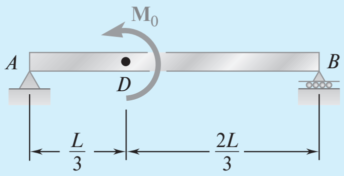


Figura *P9.127*

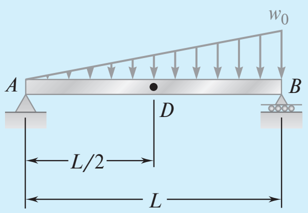


Figura P9.128

9.129 y 9.130 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E =$ 200 GPa.

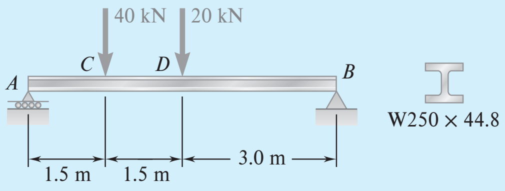


Figura P9.129

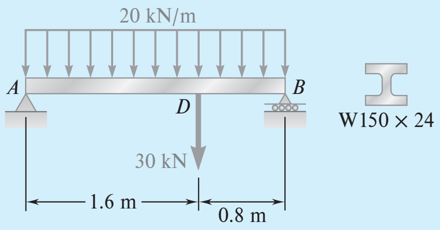


Figura P9.130

9.131 Para la viga de madera y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 1.7 \times 10^6$ psi.

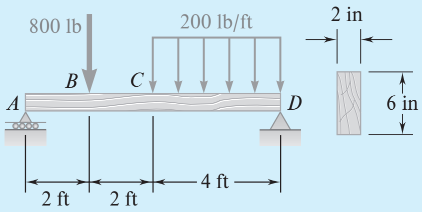


Figura *P9.131*

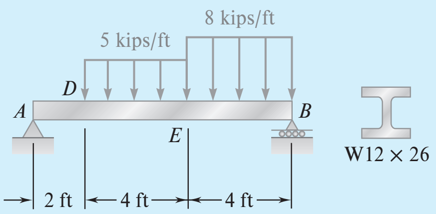


Figura P9.132

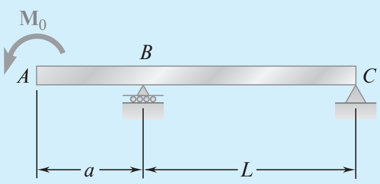


Figura P9.133

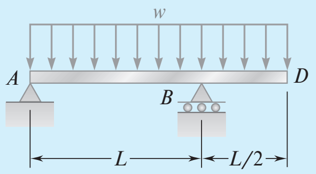


Figura *P9.134*

9.132 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *E*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.133 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*.

9.134 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *D*.

9.135 Si se sabe que la viga *AB* está hecha de una barra de acero sólido con un diámetro $d = 0.75$ in, para las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *D*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

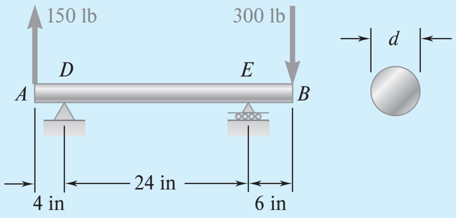


Figura P9.135

9.136 Si se sabe que la viga *AD* está hecha de una barra de acero sólido, determine *a*) la pendiente en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

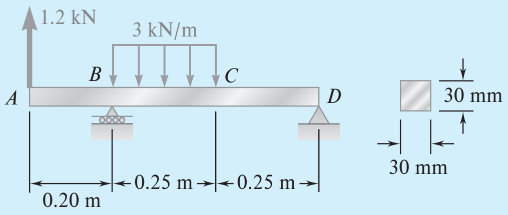


Figura P9.136

9.137 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

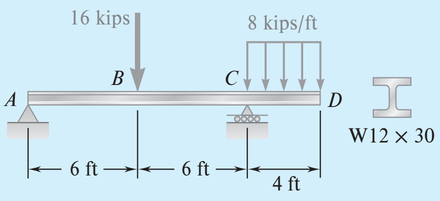


Figura P9.137

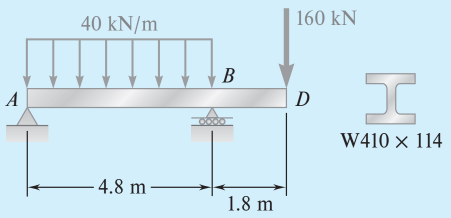


Figura *P9.138*

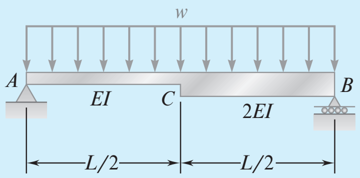


Figura P9.139

9.138 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.139 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la pendiente en el extremo *B*, *c*) la deflexión en el punto medio *C*.

9.140 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine la deflexión *a*) en el punto *D*, *b*) en el punto *E*.

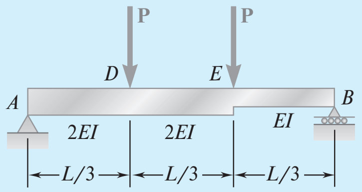


Figura P9.140

***9.141* a 9.144** Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine la magnitud y ubicación de la máxima deflexión hacia abajo.

9.141 La viga y las cargas del problema 9.126.
9.142 La viga y las cargas del problema 9.128.
9.143 La viga y las cargas del problema 9.129.
9.144 La viga y las cargas del problema 9.132.

9.145 Para la viga y las cargas del problema 9.135, determine la máxima deflexión hacia arriba en el claro *DE*.

9.146 Para la viga y las cargas del problema 9.138, determine la máxima deflexión hacia arriba en el claro *AB*.

9.147 a 9.150 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la reacción en el apoyo de rodillo.

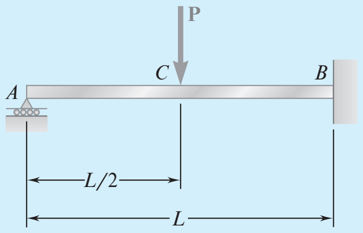


Figura P9.147

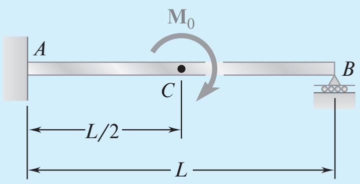


Figura P9.148

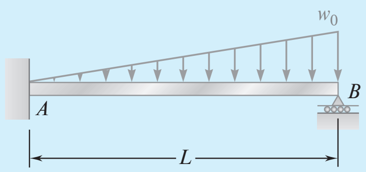


Figura *P9.149*

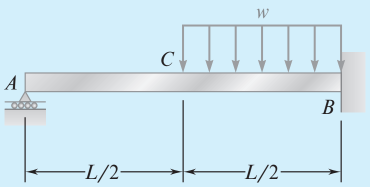


Figura P9.150

9.151 y **9.152** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la reacción en cada apoyo.

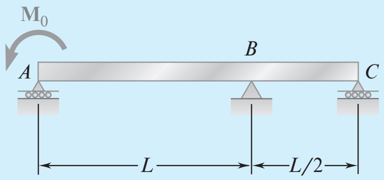


Figura *P9.151*

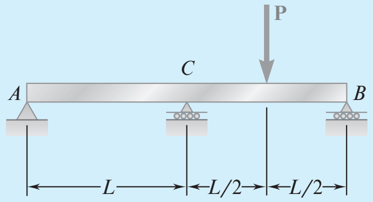


Figura P9.152

9.153 Un gato hidráulico puede usarse para elevar el punto B de la viga en voladizo ABC. Originalmente, la viga era recta, horizontal y sin carga. Después se aplicó una carga de 20 kN en el punto C, lo que ocasionó que dicho punto se desplazara hacia abajo. Determine a) qué tanto debe elevarse el punto B para que el punto C regrese a su posición original, b) el valor final de la reacción en B. Utilice $E = 200$ GPa.

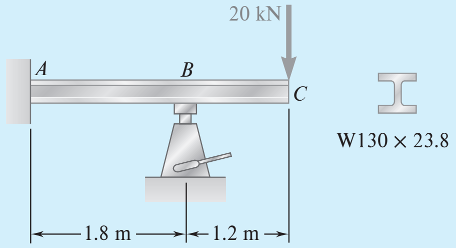


Figura P9.153

9.154 Determine la reacción en el soporte de rodillos y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y las cargas mostradas.

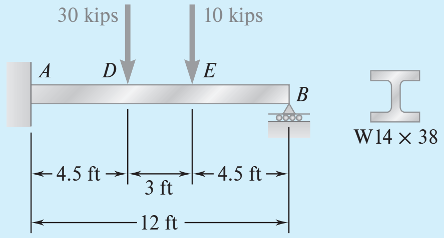


Figura P9.154

9.155 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la constante k del resorte para la cual la fuerza en este es igual a un tercio de la carga total sobre la viga.

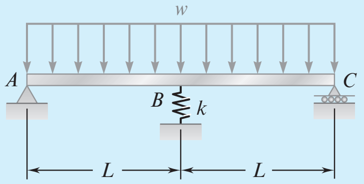


Figura P9.155 y P9.156

9.156 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la constante k del resorte para la cual el momento flector en B es $M_B = -wL^2/10$.

Repaso y resumen

En este capítulo se emplearon dos enfoques para determinar las pendientes y deflexiones de vigas sometidas a cargas transversales. Se usó un método matemático basado en el método de integración de una ecuación diferencial para obtener las pendientes y deflexiones en cualquier punto de la viga. Luego se utilizó el *método del momento de área* para encontrar las pendientes y deflexiones en un punto dado de la viga. Se puso énfasis especial en el cálculo de la deflexión máxima de una viga sometida a una carga dada. También se aplicaron estos métodos para calcular las deflexiones en el análisis de *vigas indeterminadas*, donde el número de reacciones en los apoyos excede al número de ecuaciones de equilibrio disponibles para determinar dichas incógnitas.

Deformación bajo carga transversal

La relación de la curvatura $1/\rho$ de la superficie neutra y el momento flector M en una viga prismática sometida a flexión pura puede aplicarse a una viga bajo carga transversal, pero M y $1/\rho$ variarán de sección a sección. Usando la distancia x desde el extremo izquierdo de la viga,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

Esta ecuación permite determinar el radio de curvatura de la superficie neutra para cualquier valor de x y obtener algunas conclusiones generales en cuanto a la forma de la viga deformada.

Se encontró una relación entre la deflexión y de una viga, medida en un punto dado Q, y la distancia x de ese punto a algún origen fijo (figura 9.41). La ecuación resultante define la *curva elástica* de una viga. Al expresar la curvatura $1/\rho$ en términos de las derivadas de la función $y(x)$ y sustituir en la ecuación (9.1), se obtuvo la ecuación diferencial lineal de segundo orden

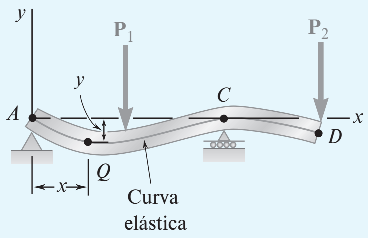


Figura 9.41 Curva elástica para una viga con cargas transversales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

Al integrar esta ecuación dos veces, se obtuvieron las siguientes expresiones que definen la pendiente $\theta(x) = dy/dx$ y la deflexión $y(x)$,

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5}$$

$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.6}$$

El producto EI se conoce como *la rigidez a la flexión* de la viga. Las dos constantes de integración C_1 y C_2 pueden calcularse a partir de las *condiciones de frontera* impuestas en la viga por sus apoyos (figura 9.42). La deflexión máxima se puede obtener determinando primero el valor de x para el cual la pendiente es igual a cero y después calculando el valor correspondiente de y.

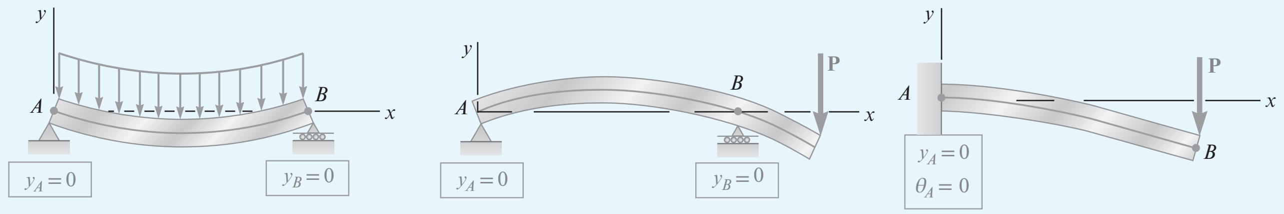


Figura 9.42 Condiciones de frontera conocidas para vigas estáticamente determinadas. *a*) Viga simplemente apoyada. *b*) Viga saliente. *c*) Viga en voladizo.

Curva elástica definida por funciones diferentes

Cuando la carga requiere diferentes funciones analíticas para representar el momento flector en diversas porciones de la viga, también se requieren varias ecuaciones diferenciales para representar la pendiente $\theta(x)$ y la deflexión $y(x)$. Para la viga y las cargas consideradas en la figura 9.43, se necesitan dos ecuaciones diferenciales: una para la porción *AD* de la viga y otra para la porción *DB*. La primera ecuación genera las funciones θ_1 y y_1, y la segunda las funciones θ_2 y y_2. En total deben determinarse cuatro constantes de integración; dos escribiendo que las deflexiones en *A* y *B* son iguales a cero, y las otras dos expresando que, en *D*, la pendiente y la deflexión son las mismas para las porciones *AD* y *DB* de la viga.

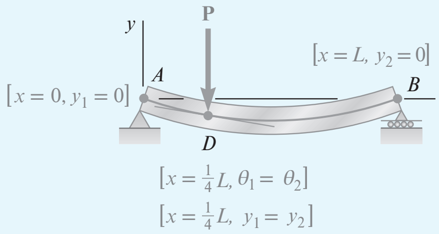


Figura 9.43 Viga simplemente apoyada y condiciones de frontera, donde se requieren dos conjuntos de funciones debido a la discontinuidad de la carga en el punto *D*.

Para una viga que soporta una carga distribuida $w(x)$, la curva elástica puede determinarse directamente de $w(x)$ mediante cuatro integraciones sucesivas que dan V, M, θ y y (en ese orden). Para la viga en voladizo de la figura 9.44*a* y la viga simplemente apoyada de la figura 9.44*b*, las cuatro constantes de integración se pueden obtener de las cuatro condiciones de frontera.

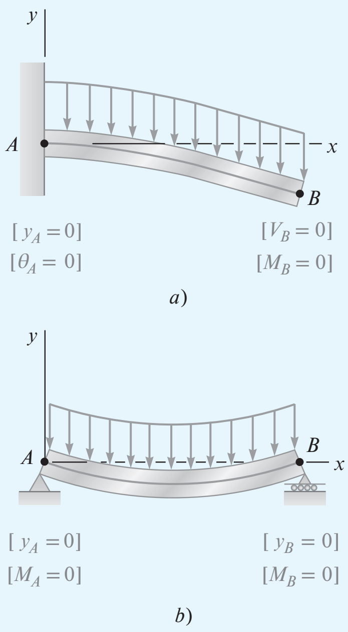


Figura 9.44 Condiciones de frontera para vigas que soportan una carga distribuida. *a*) Viga en voladizo. *b*) Viga simplemente apoyada.

Vigas estáticamente indeterminadas

Las *vigas estáticamente indeterminadas* se apoyan de tal manera que las reacciones en los apoyos incluyen cuatro o más incógnitas. Como solo hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles para determinar estas incógnitas, se complementan con ecuaciones obtenidas de las condiciones de frontera impuestas por los apoyos. Para la viga de la figura 9.45, las reacciones en los apoyos involucran cuatro incógnitas, M_A, A_x, A_y y B. Esta viga es *indeterminada al primer grado*. (Si se involucran cinco incógnitas, la viga será indeterminada *al segundo grado*). Al expresar el momento flector $M(x)$ en términos de las cuatro incógnitas e integrar dos veces, la pendiente $\theta(x)$ y la deflexión $y(x)$ se determinan en función de tales incógnitas y de las constantes de integración C_1 y C_2. Las seis incógnitas se obtienen resolviendo simultáneamente las tres ecua-

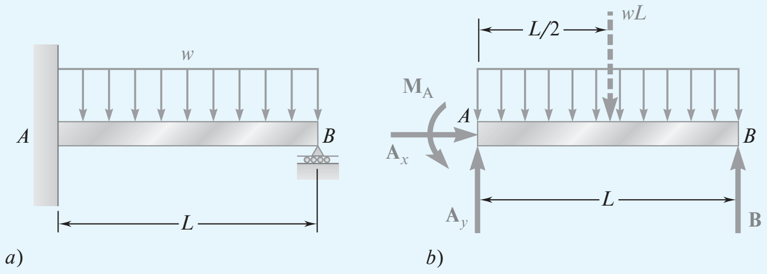


Figura 9.45 *a*) Viga estáticamente indeterminada con una carga distribuida uniformemente. *b*) Diagrama de cuerpo libre con cuatro reacciones desconocidas.

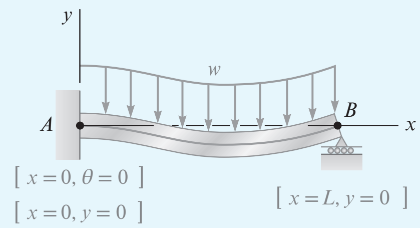


Figura 9.46 Condiciones de frontera para la viga de la figura 9.45.

ciones de equilibrio para el cuerpo libre de la figura 9.45*b* y las tres ecuaciones que expresan que $\theta = 0$, $y = 0$ para $x = 0$, y que $y = 0$ para $x = L$ (figura 9.46).

Uso de las funciones de singularidad

El método de integración proporciona un modo eficiente para determinar la pendiente y la deflexión en cualquier punto de una viga prismática, siempre que el momento flector M pueda representarse por medio de una función analítica única. Sin embargo, cuando se requieren varias funciones para representar a M sobre toda la longitud de la viga, el uso de *funciones de singularidad* simplifica apreciablemente la determinación de θ y de y en cualquier punto de la viga. Considerando la viga de la figura 9.47 y al dibujar su diagrama de cuerpo libre (figura 9.48), la fuerza cortante en cualquier punto de la viga es

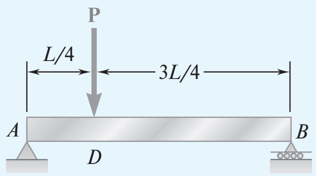


Figura 9.47 Viga simplemente apoyada con una carga concentrada.

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^0$$

donde la función escalón $\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^0$ es igual a cero si la cantidad entre paréntesis triangulares $\langle\ \rangle$ es negativa, e igual a uno en caso contrario. Al integrar tres veces,

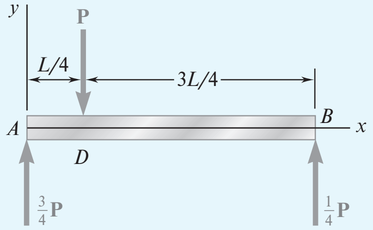


Figura 9.48 Diagrama de cuerpo libre para la viga de la figura 9.47.

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \qquad (9.11)$$

$$EI\theta = EI\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{8}Px^2 - \tfrac{1}{2}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + C_1 \qquad (9.13)$$

$$EIy = \tfrac{1}{8}Px^3 - \tfrac{1}{6}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad (9.14)$$

donde los paréntesis triangulares $\langle\ \rangle$ deben reemplazarse por cero si la cantidad que está en su interior es negativa, y por paréntesis ordinarios en otro caso. Las constantes C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones de frontera mostradas en la figura 9.49.

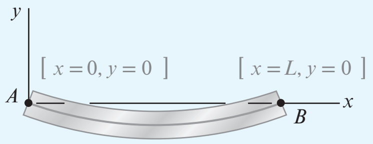


Figura 9.49 Condiciones de frontera para una viga simplemente apoyada.

Método de superposición

El *método de superposición* determina por separado, y después suma, la pendiente y la deflexión causadas por las diferentes cargas aplicadas a una viga. Este procedimiento se facilita mediante el uso de la tabla del apéndice D, que proporciona las pendientes y las deflexiones de viga para diferentes cargas y tipos de apoyo.

Vigas estáticamente indeterminadas por superposición

El método de superposición puede usarse efectivamente con *vigas estáticamente indeterminadas*. Por ejemplo, la viga de la figura 9.50 incluye cuatro reacciones desco-

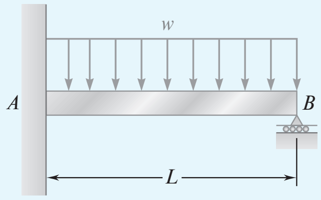


Figura 9.50 Viga indeterminada con carga uniformemente distribuida.

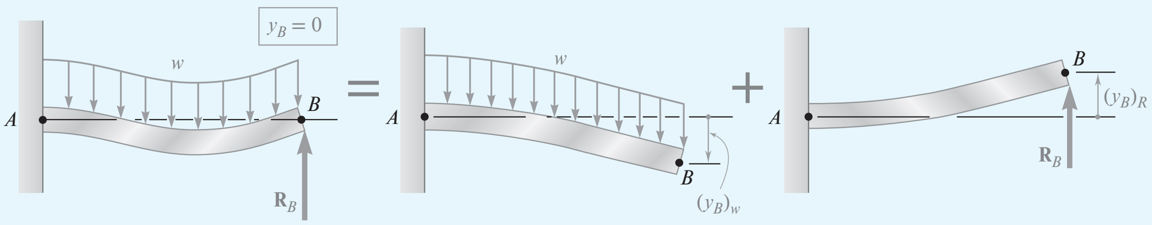


Figura 9.51 *a*) Análisis de una viga indeterminada mediante la superposición de dos vigas determinadas, con *b*) una carga uniformemente distribuida, *c*) la reacción redundante.

nocidas y es indeterminada al *primer grado*, la reacción en *B* se toma como *redundante* y la viga se libera de ese apoyo. Si se trata la reacción $\mathbf{R}_B$ como una carga desconocida y se consideran por separado las deflexiones causadas en *B* por la carga distribuida dada y por $\mathbf{R}_B$, la suma de estas deflexiones es cero (figura 9.51). Para una viga indeterminada al *segundo grado* (es decir, con reacciones en los apoyos que incluyen cinco incógnitas), dos reacciones son redundantes y los apoyos correspondientes deben eliminarse o modificarse en concordancia.

Teorema del primer momento de área

Las deflexiones y las pendientes de vigas también se pueden determinar mediante el *método del momento de área*. Los *teoremas del momento de área* se desarrollaron dibujando un diagrama que representa la variación de la cantidad M/EI a lo largo de la viga, que se obtiene dividiendo el momento flector *M* entre la rigidez a la flexión *EI* (figura 9.52). El *teorema del primer momento de área* establece: *El área bajo el*

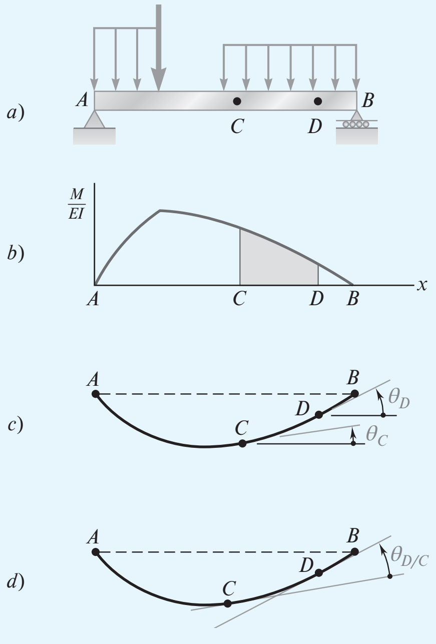


Figura 9.52 Ilustración del teorema del primer momento de área. *a*) Viga sometida a una carga arbitraria. *b*) Diagrama *M*/*EI*. *c*) Curva elástica que muestra la pendiente en *C* y *D*. *d*) Curva elástica que muestra la pendiente en *D* con respecto a *C*.

diagrama (*M*/*EI*) *entre dos puntos es igual al ángulo entre las tangentes a la curva elástica dibujada en dichos puntos*. Al considerar tangentes en *C* y *D*,

$$\theta_{D/C} = \text{área bajo el diagrama } (M/EI) \text{ entre } C \text{ y } D \qquad (9.17)$$

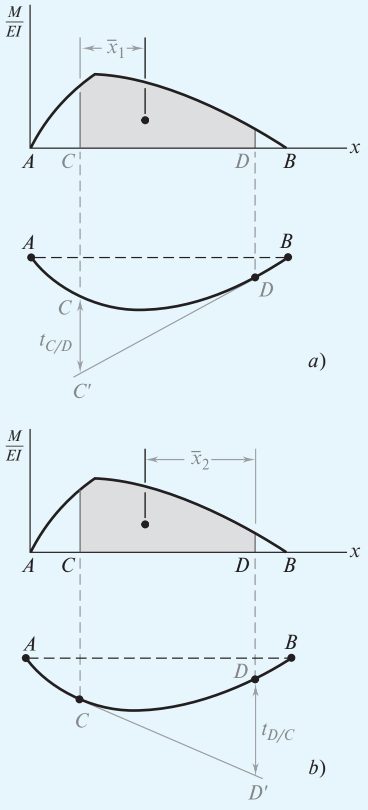


Figura 9.53 Ilustración del teorema del segundo momento de área. *a*) Evaluación de $t_{C/D}$. *b*) Evaluación de $t_{D/C}$.

Teorema del segundo momento de área

Usando de nuevo el diagrama *M*/*EI* y un bosquejo de la viga flexionada (figura 9.53), se dibuja una tangente en el punto *D* y se considera la distancia vertical $t_{C/D}$, que se denomina desviación tangencial de *C* con respecto a *D*. El *teorema del segundo momento de área* se establece como: la *desviación tangencial* $t_{C/D}$ *de C con respecto a D es igual al primer momento, con respecto a un eje vertical que pasa por C del área bajo el diagrama M*/*EI entre C y D*. Es importante distinguir entre la desviación tangencial de *C* con respecto a *D* (figura 9.53*a*), que es

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\bar{x}_1 \qquad (9.20)$$

y la desviación tangencial de *D* con respecto a *C* (figura 9.53*b*), que es

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\bar{x}_2 \qquad (9.21)$$

Vigas en voladizo
Vigas con cargas simétricas

Para determinar la pendiente y la deflexión en puntos de *vigas en voladizo*, la tangente en el apoyo fijo es horizontal (figura 9.54). Para las *vigas cargadas simétricamente*, la tangente es horizontal en el punto medio *C* de la viga (figura 9.55). Si se usa la tangente horizontal como *tangente de referencia*, es posible determinar las pendientes y las deflexiones mediante el uso respectivo de los teoremas del primer y segundo momentos de área. Para encontrar una deflexión que no sea una desviación tangencial (figura 9.55*c*), primero es necesario determinar cuáles desviaciones tangenciales pueden combinarse para obtener la deflexión deseada.

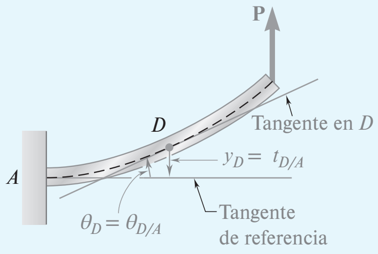


Figura 9.54 Aplicación del método del momento de área a vigas en voladizo.

Diagrama de momento flector por partes

En muchos casos, la aplicación de los teoremas del momento de área se simplifica si se considera separadamente el efecto de cada carga. Para hacer esto, se dibuja el *diagrama M*/*EI por partes* con un diagrama *M*/*EI* distinto para cada carga. Las áreas y los momentos de área bajo los diversos diagramas pueden sumarse para determinar pendientes y desviaciones tangenciales para la viga y la carga originales.

Cargas asimétricas

El método del momento de área también se usó para analizar vigas con *cargas asimétricas*. Por lo general, se observa que la ubicación de una tangente horizontal no

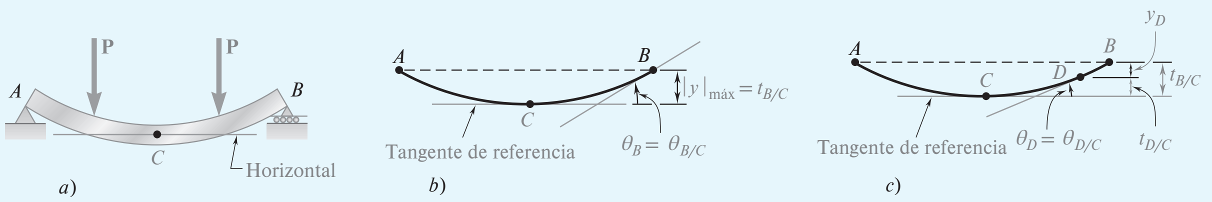


Figura 9.55 Aplicación del método del momento de área a vigas simplemente apoyadas con cargas simétricas. *a*) Viga y cargas. *b*) Deflexión máxima y pendiente en el punto *B*. *c*) Deflexión y pendiente en el punto arbitrario *D*.

es obvia, por lo que se selecciona una tangente de referencia en uno de los apoyos de la viga, ya que la pendiente de dicha tangente puede determinarse con facilidad. Para la viga y la carga mostradas en la figura 9.56, la pendiente de la tangente en A se obtiene calculando la desviación tangencial $t_{B/A}$ y dividiendo la distancia L entre los apoyos A y B. Después, mediante el uso de los dos teoremas de los momentos de área y geometría elemental, se determina la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga.

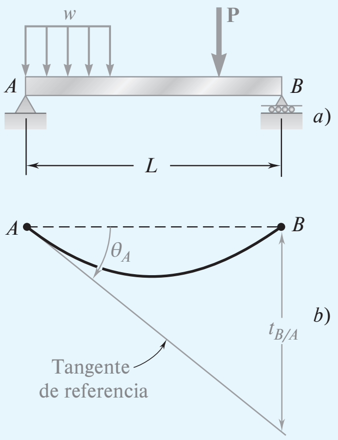


Figura 9.56 La aplicación del método del momento de área a una viga cargada asimétricamente establece una tangente de referencia en un apoyo.

Deflexión máxima

La *deflexión máxima* de una viga cargada en forma asimétrica generalmente no ocurre a la mitad del claro. El enfoque descrito en el párrafo precedente se empleó para determinar el punto K donde se da la deflexión máxima, así como la magnitud de dicha deflexión. Al observar que la pendiente en K es cero (figura 9.57), $\theta_{K/A} = -\theta_A$. Al tener presente el teorema del primer momento de área, se encuentra la localización de K determinando un área bajo el diagrama M/EI igual a $\theta_{K/A}$. Entonces, la deflexión máxima se obtiene al calcular la desviación tangencial $t_{A/K}$.

Vigas estáticamente indeterminadas

El método del momento de área puede usarse para el análisis de *vigas estáticamente indeterminadas*. Como las reacciones para la viga y las cargas que se muestran en la figura 9.58 no pueden determinarse solo con la estática, se designa redundante una de las reacciones en la viga ($\mathbf{M}_A$ en la figura 9.59*a*) y se considera a dicha reacción redundante como una carga desconocida. La desviación tangencial de B con respecto a A se considera en forma separada para la carga distribuida (figura 9.59*b*) y para la reacción redundante (figura 9.59*c*). Al expresar que bajo la acción combinada de la carga distribuida y del momento $\mathbf{M}_A$ la desviación tangencial de B con respecto a A debe ser cero,

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

A partir de esta ecuación, se puede encontrar la magnitud de la reacción redundante $\mathbf{M}_A$.

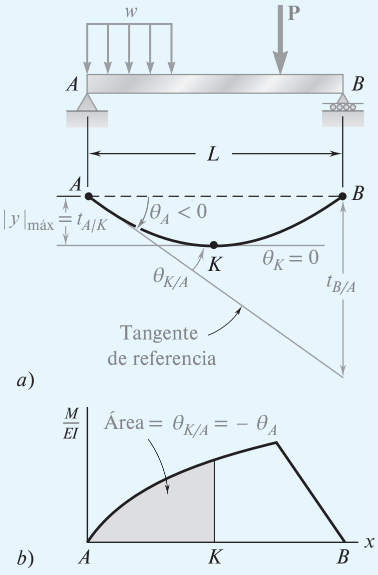


Figura 9.57 Determinación de la deflexión máxima usando el método del momento de área.

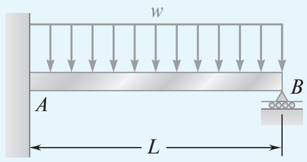


Figura 9.58 Viga estáticamente determinada.

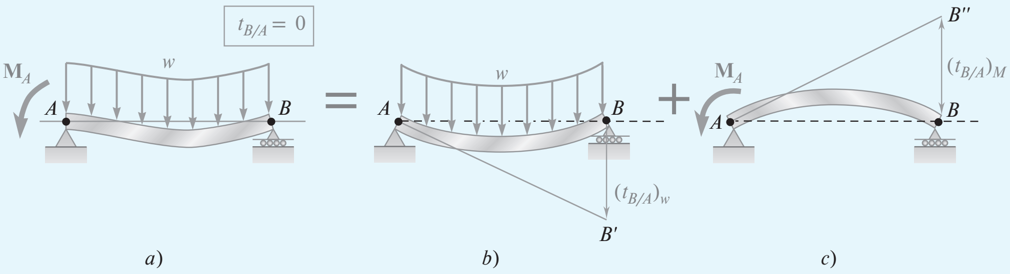


Figura 9.59 Modelado de una viga indeterminada como la superposición de dos casos determinados.

Problemas de repaso

9.157 Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para la viga en voladizo *AB*, *b*) la deflexión en el extremo libre, *c*) la pendiente en el extremo libre.

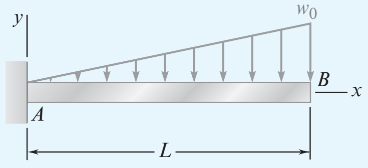


Figura P9.157

9.158 *a*) Determine la ubicación y magnitud de la deflexión máxima de la viga *AB*. *b*) Si se supone que la viga *AB* es una W360 × 64, $L = 3.5$ m y $E = 200$ GPa, calcule el valor máximo permisible del momento aplicado $\mathbf{M}_0$ si la deflexión máxima no debe exceder de 1 mm.

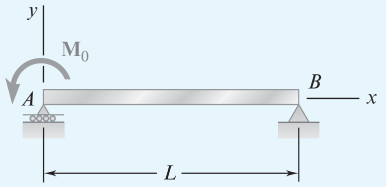


Figura P9.158

9.159 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto medio del claro.

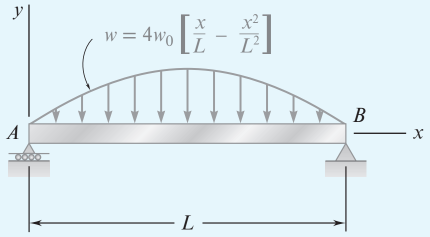


Figura *P9.159*

9.160 Determine la reacción en *A* y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

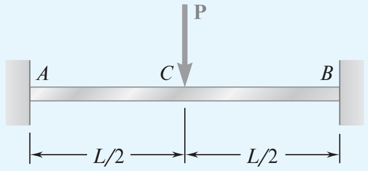


Figura P9.160

9.161 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.162 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

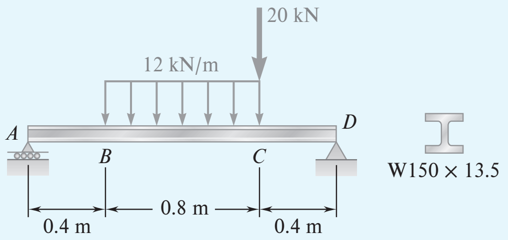


Figura P9.161

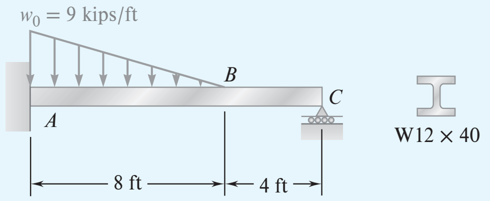


Figura *P9.162*

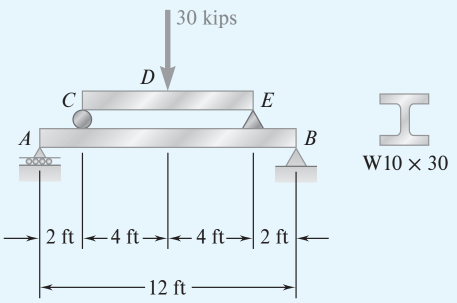


Figura P9.163

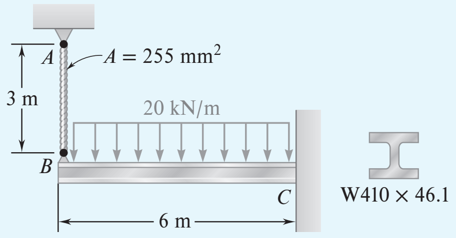


Figura *P9.164*

9.163 La viga *CE* descansa sobre la viga *AB* como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa un perfil de acero laminado W10 × 30, determine para la carga indicada la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.164 La viga en voladizo *BC* está unida al cable de acero *AB* como se muestra en la figura. Si se sabe que el cable estaba inicialmente tenso, determine la tensión en el cable causada por la carga distribuida que se indica. Use $E = 200$ GPa.

9.165 Para la viga en voladizo y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.166 Si se sabe que $P = 4$ kips, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.167 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *D*.

9.168 Determine la reacción en el soporte de rodillos y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y las cargas mostradas.

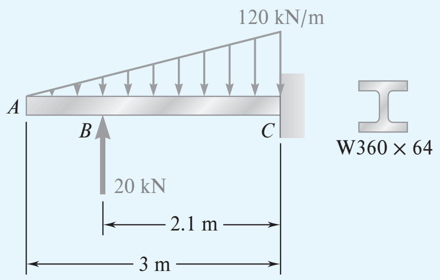


Figura P9.165

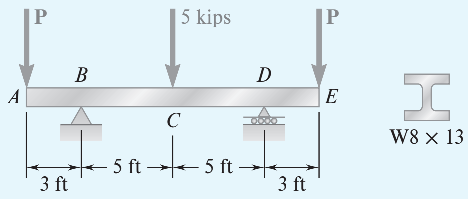


Figura P9.166

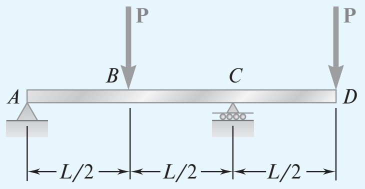


Figura *P9.167*

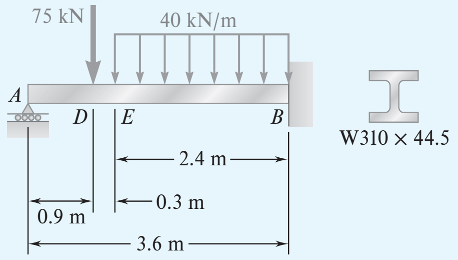


Figura P9.168

Problemas de computadora

Los siguientes problemas fueron diseñados para resolverse con ayuda de una computadora.

9.C1 Varias cargas concentradas pueden aplicarse a la viga en voladizo *AB*. Escriba un programa de computadora para calcular la pendiente y la deflexión de la viga *AB* desde $x = 0$ hasta $x = L$ utilizando incrementos de Δx. Aplique este programa con incrementos de $\Delta x = 50$ mm a la viga y la carga de los problemas 9.73 y 9.74.

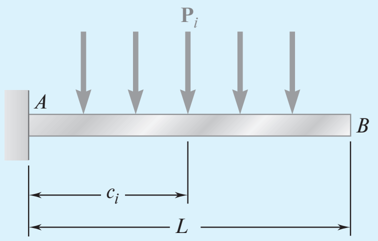


Figura P9.C1

9.C2 La viga *AB* de 22 ft consta de un perfil de acero laminado de W21 × 62 y soporta una carga distribuida de 3.5 kips/ft según se aprecia en la figura. Escriba un programa de cómputo para calcular con valores de *a* desde 0 hasta 22 ft con incrementos de 1 ft, *a*) la pendiente y la deflexión en *D*, *b*) la ubicación y magnitud de la deflexión máxima. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

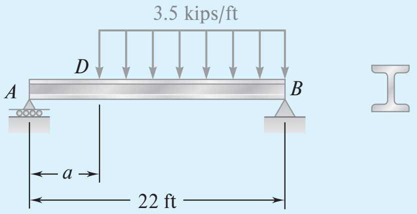


Figura P9.C2

9.C3 La viga en voladizo *AB* soporta las cargas distribuidas que se ilustran en la figura. Escriba un programa de cómputo para calcular la pendiente y la deflexión de la viga *AB* desde $x = 0$ hasta $x = L$ utilizando incrementos de Δx. Aplique el programa con incrementos de $\Delta x = 100$ mm, suponiendo que $L = 2.4$ m, $w = 36$ kN/m y *a*) $a = 0.6$ m, *b*) $a = 1.2$ m, *c*) $a = 1.8$ m. Utilice $E = 200$ GPa.

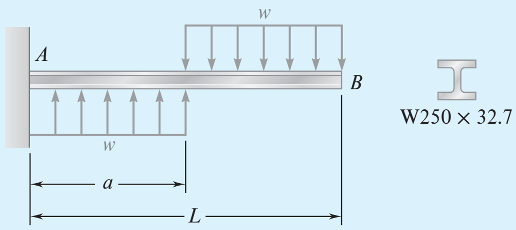


Figura P9.C3

9.C4 La viga simplemente apoyada *AB* tiene una rigidez a la flexión *EI* constante y soporta varias cargas concentradas, como se muestra en la figura. Usando el *método de integración*, escriba un programa para computadora que calcule la pendiente y la deflexión en varios puntos desde $x = 0$ hasta $x = L$ usando incrementos de Δx. Aplique este programa a la viga y la carga de *a*) el problema 9.13 con $\Delta x = 1$ ft, *b*) el problema 9.16 con $\Delta x = 0.05$ m, *c*) el problema 9.129 con $\Delta x = 0.25$ m.

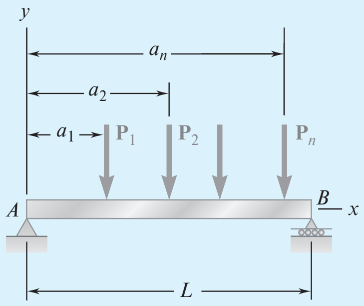


Figura P9.C4

9.C5 Los apoyos de la viga *AB* consisten en un apoyo fijo en *A* y un soporte de rodillo en *D*. Escriba un programa de computadora para calcular la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga para valores de *a* desde 0 hasta *L* en incrementos de Δa. Emplee este programa para calcular la pendiente y la deflexión en el punto *B* en cada uno de los siguientes casos:

L	ΔL	*w*	*E*	Perfil
a) 12 ft	0.5 ft	1.6 k/ft	29×10^6 psi	W16 × 57
b) 3 m	0.2 m	18 kN/m	200 GPa	W460 × 113

9.C6 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, emplee el *método del momento de área* para escribir un programa de computadora que calcule la pendiente y la deflexión en los puntos señalados a lo largo de la viga, desde $x = 0$ hasta $x = L$, utilizando incrementos de Δx. Aplique este programa para calcular la pendiente y la deflexión en cada carga concentrada para la viga de *a*) el problema 9.77 con $\Delta x = 0.5$ m, *b*) el problema 9.119 con $\Delta x = 0.5$ m.

9.C7 Dos cargas de 52 kN se mantienen con una separación de 2.5 m conforme se desplazan lentamente por la viga *AB*. Escriba un programa para computadora que calcule la deflexión en el punto medio *C* de la viga para valores de *x* desde 0 hasta 9 m, usando incrementos de 0.5 m. Utilice $E = 200$ GPa.

9.C8 A la viga en voladizo *AB* se le pueden aplicar una carga *w* uniformemente distribuida y varias cargas concentradas P_i. Escriba un programa de computadora para determinar la reacción en el apoyo móvil y aplique ese programa a las vigas y cargas de *a*) el problema 9.53*a*, *b*) el problema 9.154.

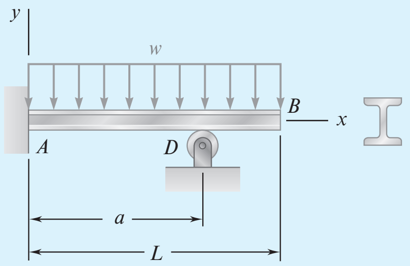


Figura P9.C5

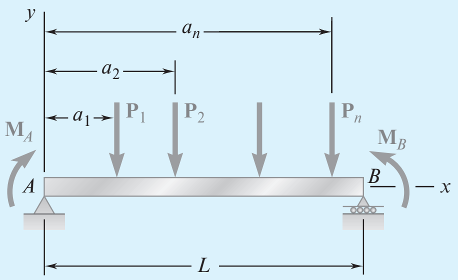


Figura P9.C6

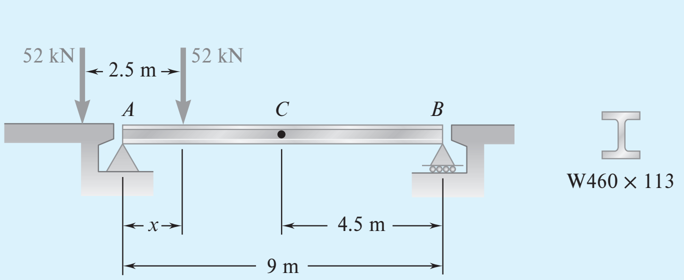


Figura P9.C7

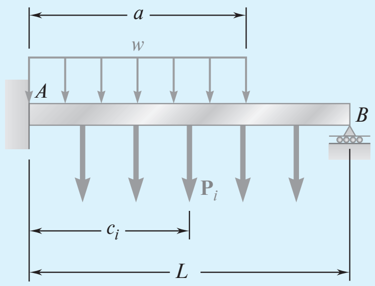
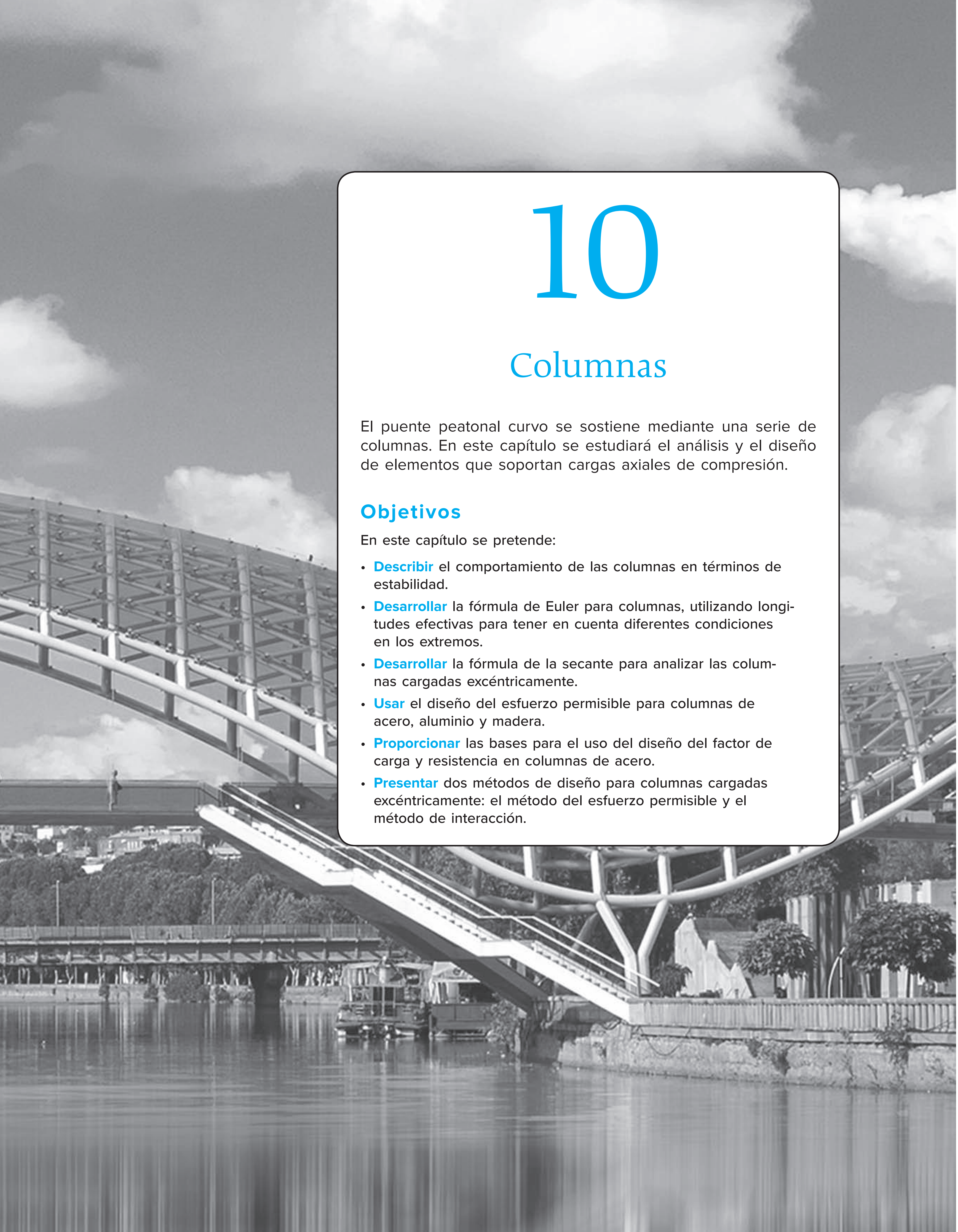


Figura P9.C8



10

Columnas

El puente peatonal curvo se sostiene mediante una serie de columnas. En este capítulo se estudiará el análisis y el diseño de elementos que soportan cargas axiales de compresión.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Describir** el comportamiento de las columnas en términos de estabilidad.
- **Desarrollar** la fórmula de Euler para columnas, utilizando longitudes efectivas para tener en cuenta diferentes condiciones en los extremos.
- **Desarrollar** la fórmula de la secante para analizar las columnas cargadas excéntricamente.
- **Usar** el diseño del esfuerzo permisible para columnas de acero, aluminio y madera.
- **Proporcionar** las bases para el uso del diseño del factor de carga y resistencia en columnas de acero.
- **Presentar** dos métodos de diseño para columnas cargadas excéntricamente: el método del esfuerzo permisible y el método de interacción.

Introducción
10.1 **Estabilidad de estructuras**
10.1A Fórmula de Euler para columnas articuladas en los extremos
10.1B Fórmula de Euler para columnas con otras condiciones en los extremos
*10.2 **Carga excéntrica y fórmula de la secante**
10.3 **Diseño de carga céntrica**
10.3A Diseño del esfuerzo permisible
10.3B Diseño del factor de carga y resistencia
10.4 **Diseño de carga excéntrica**

Introducción

En los capítulos anteriores existían dos preocupaciones primarias: 1) la resistencia de la estructura, es decir, su capacidad para soportar una carga especificada sin experimentar esfuerzo excesivo; 2) la capacidad de la estructura para soportar una carga especificada sin sufrir deformaciones inaceptables. En este capítulo se analizará la estabilidad de la estructura (su capacidad para soportar una carga dada sin experimentar un cambio súbito en su configuración). El estudio se referirá principalmente a las columnas, es decir, al análisis y diseño de elementos prismáticos verticales que soportan cargas axiales.

En la sección 10.1, se examinará la estabilidad de un modelo simplificado, en el que la columna consta de dos barras rígidas conectadas por un pasador y un resorte, y que soportan una carga **P**. Si se perturba su equilibrio, el sistema retornará a su posición original de equilibrio siempre que P no exceda un cierto valor P_{cr}, llamado *carga crítica*, este es un sistema *estable.* Sin embargo, si $P > P_{cr}$, el sistema se alejará de su posición original y adquirirá una nueva posición de equilibrio. Se dice que este sistema es *inestable.*

En la sección 10.1A, la *estabilidad de columnas elásticas* considera una columna con extremos articulados, sometida a una carga axial céntrica. Se obtendrá la *fórmula de Euler* para la carga crítica de la columna, y se determinará el esfuerzo normal crítico en la columna. Al aplicar un factor de seguridad a la carga crítica podrá calcularse la carga permisible que es posible aplicar a la columna con extremos articulados.

En la sección 10.1B se considera el análisis de la estabilidad de columnas con diferentes condiciones en sus extremos, aprendiendo a determinar la *longitud efectiva* de una columna.

En la sección 10.2 se analizan las columnas con carga axial excéntrica. Estas columnas tienen deflexiones transversales para todas las magnitudes de la carga. Se desarrolla una ecuación para la máxima deflexión bajo una carga dada, y se utiliza para calcular el máximo esfuerzo normal en la columna. Por último, se desarrollará la *fórmula de la secante* que relaciona los esfuerzos promedio y máximo en una columna.

En las primeras secciones del capítulo, se supone que cada columna es un prisma recto homogéneo. En la última parte del capítulo se diseñan y analizan columnas reales, usando ecuaciones empíricas dadas por organizaciones profesionales. En la sección 10.3A se presentarán ecuaciones de diseño para determinar el esfuerzo permisible en columnas hechas de acero, aluminio o madera, que están sometidas a una carga céntrica. En la sección 10.3B se describe un enfoque alternativo para las columnas de acero, el método de diseño del factor de carga y resistencia. El diseño de columnas sometidas a una carga axial excéntrica se estudia en la sección 10.4.

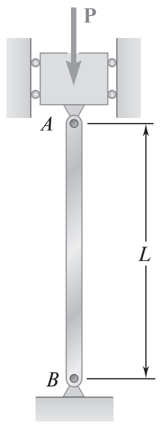


Figura 10.1 Columna cargada axialmente con extremos articulados.

10.1 ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS

Considere el diseño de una columna AB de longitud L, para soportar una carga **P** (figura 10.1). La columna tiene sus dos extremos articulados y **P** es una carga axial céntrica. Si se selecciona el área de la sección transversal A de modo que el valor $\sigma = P/A$ del esfuerzo en la sección transversal es menor que el valor permisible σ_{perm} para el material utilizado y la deformación $\delta = PL/AE$ cae dentro de las especificaciones dadas, podría concluirse que la columna se ha diseñado bien. Sin embargo, puede suceder que al aplicar la carga la columna se *pandee* (figura 10.2). En lugar de permanecer recta, se curvea repentinamente, como se muestra en la fotografía 10.1. Es claro que una columna que se pandea bajo la carga que debe soportar está mal diseñada.

Figura 10.2 Columna pandeada con extremos articulados.

Antes de entrar en el estudio real de la estabilidad de las columnas elásticas, será necesario familiarizarse con el problema considerando un modelo simplificado que consta de dos barras rígidas AC y BC, conectadas en C mediante un pasador y un resorte torsional de constante K (figura 10.3).

Si las dos varillas y las fuerzas **P** y **P**′ están perfectamente alineadas, el sistema permanecerá en la posición de equilibrio que muestra la figura 10.4*a* siempre que no sea perturbado. Pero suponga que C se mueve ligeramente a la derecha, de modo que

Fotografía 10.1 Ensayo de laboratorio que muestra una columna pandeada.

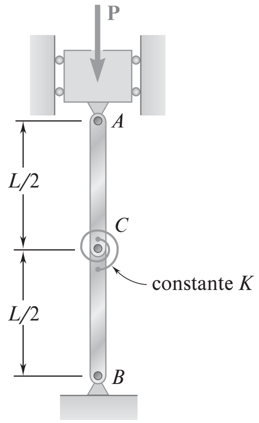


Figura 10.3 Modelo de columna hecha de dos varillas rígidas unidas mediante un resorte de torsión en C.

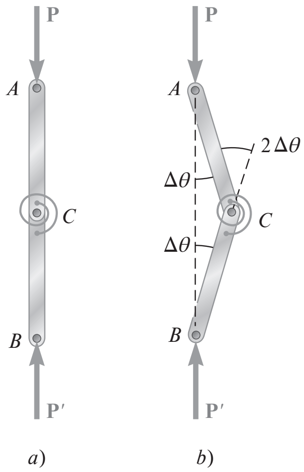


Figura 10.4 Diagrama de cuerpo libre de un modelo de columna *a*) perfectamente alineado, *b*) con el punto C ligeramente fuera de la alineación.

cada varilla forma ahora un pequeño ángulo $\Delta\theta$ con la vertical (figura 10.4*b*). ¿Volverá el sistema a su posición de equilibrio original o se alejará aún más de dicha posición? En el primer caso el sistema es *estable*; en el segundo, es *inestable*.

Para determinar si el sistema de dos varillas es estable o inestable, se consideran las fuerzas que actúan sobre la varilla AC (figura 10.5). Estas fuerzas constan del momento formado por **P** y **P**′, de momento $P(L/2)$ sen $\Delta\theta$, que tiende a alejar la varilla de la vertical y el momento **M**, ejercido por el resorte, que trata de regresar la varilla a su posición vertical inicial. Dado que el ángulo de deflexión del resorte es $2\ \Delta\theta$, el momento de **M** es $M = K(2\ \Delta\theta)$. Si el momento del segundo momento es mayor que el del primero, el sistema tiende a retornar a su posición original de equilibrio; el sistema es estable. Si el momento del primer momento es mayor que el momento del segundo, el sistema tiende a alejarse de su posición original de equilibrio; el sistema es inestable. Cuando los dos momentos son iguales, a la carga se le llama *carga crítica*, P_{cr}, que está dada por

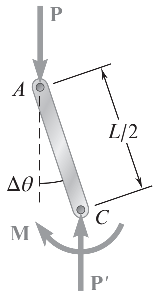


Figura 10.5 Diagrama de cuerpo libre de la barra AC en una posición no alineada.

$$P_{cr}(L/2)\ \text{sen}\ \Delta\theta = K(2\Delta\theta) \tag{10.1}$$

o como sen $\Delta\theta \approx \Delta\theta$, cuando el desplazamiento de C es muy pequeño (en el inicio inmediato del pandeo),

$$P_{cr} = 4K/L \tag{10.2}$$

Claramente el sistema es estable para $P < P_{cr}$, e inestable para $P > P_{cr}$.

Suponga que una carga $P < P_{cr}$ se ha aplicado a las dos varillas de la figura 10.3 y que el sistema ha sido perturbado. Como $P > P_{cr}$, el sistema se alejará de la vertical y, luego de algunas oscilaciones, se establecerá en una nueva posición de equilibrio (figura 10.6*a*). Considerando el equilibrio del cuerpo libre AC (figura 10.6*b*), una ecuación similar a la ecuación (10.1), pero que incluye el ángulo finito θ es

$$P(L/2)\ \text{sen}\ \theta = K(2\theta)$$

o bien

$$\frac{PL}{4K} = \frac{\theta}{\text{sen}\ \theta} \tag{10.3}$$

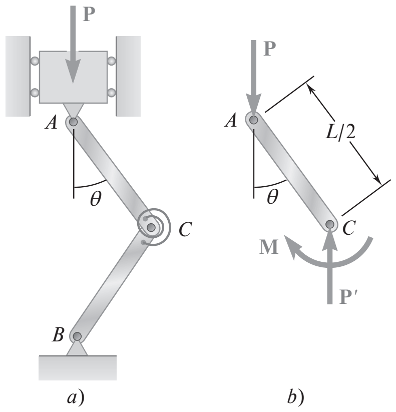


Figura 10.6 *a*) Modelo de columna en posición pandeada, *b*) diagrama de cuerpo libre de la varilla AC.

El valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio de la figura 10.6 se obtiene resolviendo la ecuación (10.3) por prueba y error. Pero para cualquier valor posi-

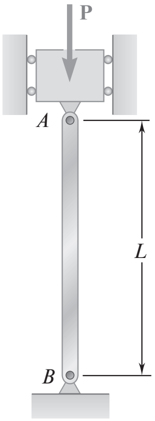


Figura 10.1 (repetida).

Figura 10.2 (repetida).

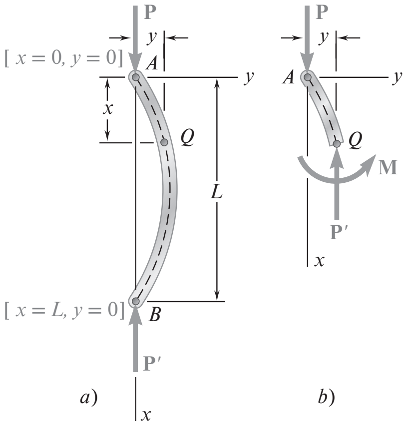


Figura 10.7 Diagramas de cuerpo libre de *a*) una columna pandeada y *b*) la porción *AQ*.

tivo de θ, sen $\theta < \theta$. Así, la ecuación (10.3) da un valor de θ diferente de cero solo cuando el miembro izquierdo de la ecuación es mayor que uno. Al recordar la ecuación (10.2), esto es verdad solo si $P > P_{cr}$. Pero si $P < P_{cr}$, la segunda posición de equilibrio mostrada en la figura 10.6 no existiría y la única posición de equilibrio posible sería la correspondiente a $\theta = 0$. Así, para $P < P_{cr}$, la posición donde $\theta = 0$ debe ser estable.

Esta observación se aplica a estructuras y sistemas mecánicos en general y se usará en la próxima sección, para la estabilidad de las columnas elásticas.

10.1A Fórmula de Euler para columnas articuladas en los extremos

De regreso a la columna AB de la sección anterior (figura 10.1), se propone determinar el valor crítico de la carga **P**, es decir, el valor P_{cr} de la carga para el cual la posición de la figura 10.1 deja de ser estable. Si $P > P_{cr}$ la menor falta de alineación o perturbación provocará que la columna se pandee en una forma curva, como en la figura 10.2.

Este enfoque determina las condiciones para que la configuración de la figura 10.2 sea posible. Dado que una columna es como una viga en posición vertical y bajo carga axial, se procederá como en el capítulo 9 y se denotará con x la distancia desde el extremo A de la columna hasta un punto dado Q de la curva elástica, y con y la deflexión de dicho punto (figura 10.7*a*). El eje x será vertical y dirigido hacia abajo, y el eje y es horizontal y dirigido a la derecha. Considerando el equilibrio del cuerpo libre de AQ (figura 10.7*b*), el momento flector en Q es $M = -Py$. Al sustituir este valor por M en la ecuación (9.4) da,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \tag{10.4}$$

o, trasponiendo el último término,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{10.5}$$

Esta ecuación diferencial es lineal, homogénea, de segundo orden, con coeficientes constantes. Si se establece

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

la ecuación (10.5) se reescribe como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0 \tag{10.7}$$

que es la misma ecuación diferencial que la del movimiento armónico simple, excepto en que la variable independiente es ahora x en lugar de t. La solución general de la ecuación (10.7) es:

$$y = A \text{ sen } px + B \cos px \tag{10.8}$$

y puede verificarse con facilidad, al calcular d^2y/dx^2 y sustituir y y d^2y/dx^2 en la ecuación (10.7).

Si se recuerdan las condiciones de frontera a satisfacer en los extremos A y B de la columna (figura 10.7*a*), se hace $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.8) y se tiene que $B = 0$. Al sustituir $x = L$, $y = 0$, se obtiene

$$A \text{ sen } pL = 0 \tag{10.9}$$

Esta ecuación se satisface si $A = 0$ o si sen $pL = 0$. Si se satisface la primera de estas condiciones, la ecuación (10.8) se reduce a $y = 0$ y la columna es recta (figura 10.1). Si se satisface la segunda condición, $pL = n\pi$ o, al sustituir p en (10.6) y despejando P:

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \tag{10.10}$$

El menor de los valores de P definido por la ecuación (10.10) es el que corresponde a $n = 1$. Entonces,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad \textbf{(10.11a)}$$

Esta expresión se conoce como la *fórmula de Euler,* llamada así en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Al sustituir esta expresión por P en la ecuación (10.6) y el valor para p en la ecuación (10.8), y al recordar que $B = 0$,

$$y = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \qquad \textbf{(10.12)}$$

que es la ecuación de la curva elástica después de haberse pandeado la columna (figura 10.2). Note que la deflexión máxima, $y_m = A$, es indeterminada. Esto se debe a que la ecuación diferencial (10.5) es una aproximación linealizada de la ecuación diferencial para la curva elástica.†

Si $P < P_{cr}$, la condición sen $pL = 0$ no puede satisfacerse, y la solución de la ecuación (10.12) no existe. Debe tenerse entonces $A = 0$ y la única configuración posible para la columna es una línea recta. Así, para $P < P_{cr}$ la forma recta de la figura 10.1 es estable.

En una columna con sección transversal circular o cuadrada, el momento de inercia I es el mismo con respecto a cualquier eje centroidal y es probable que la columna se curvará en un plano u otro (excepto bajo las restricciones que se impongan en las conexiones de los extremos). Para otras formas de la sección transversal, la carga crítica debe calcularse haciendo $I = I_{mín}$ en la ecuación (10.11*a*); si esto ocurre, el pandeo tendrá lugar en un plano perpendicular al correspondiente eje de inercia principal.

El esfuerzo correspondiente a la carga crítica es el *esfuerzo crítico* σ_{cr}. Al retomar la ecuación (10.11*a*) y establecer $I = Ar^2$, donde A es el área de la sección transversal y r el radio de giro, se tiene

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EAr^2}{AL^2}$$

o

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \qquad \textbf{(10.13a)}$$

La cantidad L/r es la *relación de esbeltez* de la columna. El mínimo valor del radio de giro r debe usarse al calcular la relación de esbeltez y el esfuerzo crítico de la columna.

La ecuación (10.13) muestra que el esfuerzo crítico es proporcional al módulo de elasticidad del material e inversamente proporcional al cuadrado de la relación de esbeltez de la columna. La gráfica de σ_{cr} contra L/r se muestra en la figura 10.8 para el acero estructural, suponiendo $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Debe recordarse que al elaborar la gráfica σ_{cr} no se ha usado el factor de seguridad. De igual modo, si σ_{cr} obtenido de la ecuación (10.13*a*) o de la curva de la figura 10.8 es mayor que la resistencia a la cedencia σ_Y, este valor no es de interés, pues la columna cederá a compresión y dejará de ser elástica antes de poder pandearse.

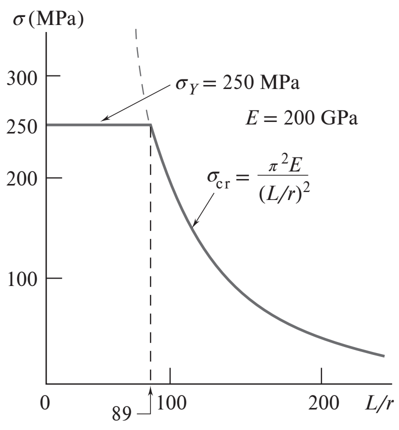


Figura 10.8 Gráfica del esfuerzo crítico.

El análisis del comportamiento de una columna se ha basado en la hipótesis de una carga céntrica perfectamente alineada. En la práctica, este caso es raro por lo que en la sección 10.2 se tendrá en cuenta el efecto de la excentricidad de la carga. Este método conduce a una transición más suave de la falla por pandeo de columnas largas y delgadas a la falla por compresión en columnas cortas y gruesas. También dará una visión más realista entre la relación de esbeltez de una columna y la carga que la hace fallar.

† Recuerde que la ecuación $d^2y/dx^2 = M/EI$ se obtuvo en la sección 9.1A suponiendo que la pendiente dy/dx de la viga podía despreciarse y que la expresión exacta dada en la ecuación (9.3) para la curvatura de una viga, podía reemplazarse por $1/\rho = d^2y/dx^2$.

Aplicación de conceptos 10.1

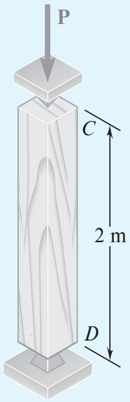


Figura 10.9 Columna de madera articulada en los extremos, con sección transversal cuadrada.

Una columna articulada en los extremos, con 2 m de longitud y sección cuadrada, debe hacerse de madera (figura 10.9). Suponiendo que $E = 13$ GPa y $\sigma_{perm} = 12$ MPa, y usando un factor de seguridad de 2.5 para calcular la carga crítica de Euler para el pandeo, determine el tamaño de la sección transversal si la columna debe soportar: *a*) una carga de 100 kN, *b*) una carga de 200 kN.

***a*) Para la carga de 100 kN.** Use el factor de seguridad dado para obtener

$$P_{cr} = 2.5(100 \text{ kN}) = 250 \text{ kN} \qquad L = 2 \text{ m} \qquad E = 13 \text{ GPa}$$

Utilice la fórmula de Euler, ecuación (10.11*a*) y despeje I:

$$I = \frac{P_{cr}L^2}{\pi^2 E} = \frac{(250 \times 10^3 \text{ N})(2 \text{ m})^2}{\pi^2(13 \times 10^9 \text{ Pa})} = 7.794 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Hay que recordar que, para un cuadrado de lado a, $I = a^4/12$, se escribe

$$\frac{a^4}{12} = 7.794 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \qquad a = 98.3 \text{ mm} \approx 100 \text{ mm}$$

Verifique el valor del esfuerzo normal de la columna:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \text{ kN}}{(0.100 \text{ m})^2} = 10 \text{ MPa}$$

Ya que σ es menor que el esfuerzo permisible, una sección transversal de 100 × 100 mm es aceptable.

***b*) Para la carga de 200 kN.** Al resolver de nuevo la ecuación (10.11*a*) para I, pero haciendo $P_{cr} = 2.5(200) = 500$ kN, se tiene

$$I = 15.588 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\frac{a^4}{12} = 15.588 \times 10^{-6} \qquad a = 116.95 \text{ mm}$$

El valor del esfuerzo normal es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200 \text{ kN}}{(0.11695 \text{ m})^2} = 14.62 \text{ MPa}$$

Dado que esto es mayor que el esfuerzo permisible, las dimensiones obtenidas no son aceptables y debe elegirse la sección transversal con base en su resistencia a la compresión.

$$A = \frac{P}{\sigma_{perm}} = \frac{200 \text{ kN}}{12 \text{ MPa}} = 16.67 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$a^2 = 16.67 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \qquad a = 129.1 \text{ mm}$$

Una sección transversal de 130 × 130 mm es aceptable.

10.1B Fórmula de Euler para columnas con otras condiciones en los extremos

La fórmula de Euler (10.11) se dedujo en la sección precedente para una columna articulada en ambos extremos. Ahora se determinará la carga crítica P_{cr} para columnas con otras condiciones en los extremos.

Una columna con un extremo libre en A que soporta una carga **P** y con un extremo fijo B (figura 10.10*a*), se comporta como la mitad superior de una columna articulada (figura 10.10*b*). Entonces, la carga crítica para la columna de la figura 10.10*a* es igual que para la columna articulada en los extremos de la figura 10.10*b* y puede obtenerse mediante la fórmula de Euler, ecuación (10.11*a*) usando una columna de longitud igual al doble de longitud real L. Se dice que la *longitud efectiva* L_e de la columna de la figura 10.10 es igual a $2L$ y se sustituye $L_e = 2L$ en la fórmula de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \tag{10.11b}$$

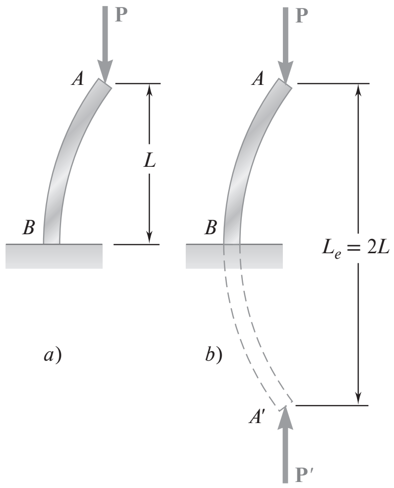


Figura 10.10 La longitud efectiva de una columna con extremos fijos de longitud L es equivalente a la de una columna articulada en los extremos con longitud $2L$.

El esfuerzo crítico es

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \tag{10.13b}$$

La cantidad L_e/r se denomina *relación efectiva de esbeltez* de la columna y para la figura 10.10*a*, es igual a $2L/r$.

Ahora considere una columna con dos extremos fijos A y B que soporta una carga **P** (figura 10.11). La simetría de los apoyos y de la carga con respecto a un eje horizontal a través del punto medio C requiere que la fuerza cortante en C y las componentes horizontales de las reacciones en A y B sean cero (figura 10.12*a*). Por lo tanto, las restricciones impuestas sobre la mitad superior AC de la columna por el soporte en A y por la mitad inferior CB son idénticas (figura 10.13). La porción AC debe ser simétrica con respecto a su punto medio D y éste debe ser un punto de inflexión, con momento flector cero. El momento flector en el punto medio E de la mitad inferior de la columna también debe ser cero (figura 10.14*a*). Puesto que el momento flector en los extremos de una columna articulada es cero, la porción DE de la columna en la figura 10.13*a* debe comportarse como una columna articulada en los extremos (figura 10.14*b*). Así, la longitud efectiva de una columna con dos extremos fijos es $L_e = L/2$.

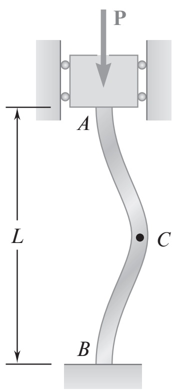


Figura 10.11 Columnas con extremos fijos .

En una columna con un extremo fijo B y un extremo articulado A que sostiene una carga **P** (figura 10.15), deberá resolverse la ecuación diferencial de la curva elástica para determinar la longitud efectiva. En el diagrama de cuerpo libre de la columna entera

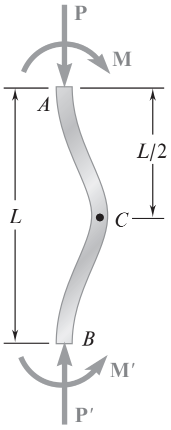


Figura 10.12 Diagrama de cuerpo libre de una columna pandeada con extremos fijos.

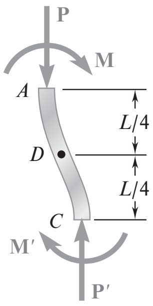


Figura 10.13 Diagrama de cuerpo libre de la mitad superior de la columna con extremos fijos.

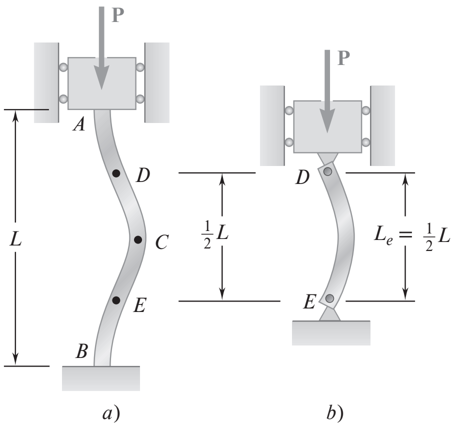


Figura 10.14 La longitud efectiva de una columna de longitud L con extremos fijos es equivalente a una columna con extremos articulados de longitud $L/2$.

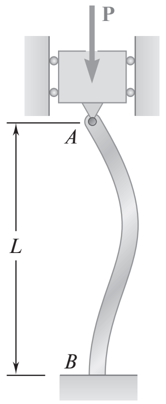


Figura 10.15 Columna con un extremo fijo y otro articulado.

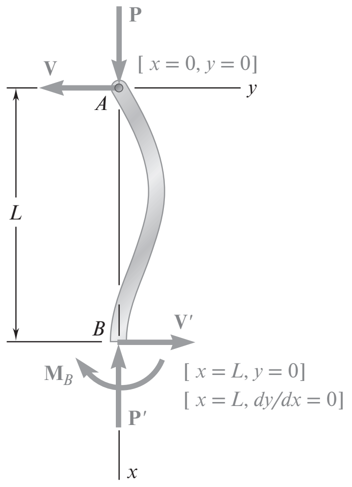


Figura 10.16 Diagrama de cuerpo libre de una columna pandeada con un extremo fijo y otro articulado.

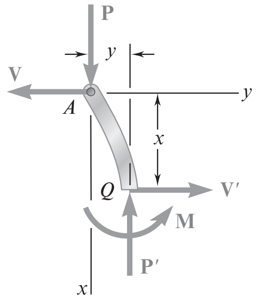


Figura 10.17 Diagrama de cuerpo libre de la porción *AQ* de una columna pandeada con un extremo fijo y otro articulado.

(figura 10.16), se ejerce una fuerza transversal **V** en el extremo *A*, además de la carga axial **P**, y que **V** es estáticamente indeterminada. Considerando el diagrama de cuerpo libre de una porción *AQ* de la columna (figura 10.17), el momento flector en *Q* es

$$M = -Py - Vx$$

Al sustituir este valor en la ecuación (9.4) de la sección 9.1A,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{V}{EI}x$$

Al trasponer el término que contiene a y y haciendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

como en la sección 10.1A, se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -\frac{V}{EI}x \tag{10.14}$$

Esta ecuación diferencial es lineal, no homogénea y de segundo orden con coeficientes constantes. Al observar que los miembros izquierdos de las ecuaciones (10.7) y (10.14) son idénticos, es posible obtener la solución general de la ecuación (10.14) añadiendo una solución particular de la ecuación (10.14) a la solución de la ecuación (10.8) obtenida para la ecuación (10.7). Tal solución particular es

$$y = -\frac{V}{p^2EI}x$$

o, al recordar la ecuación (10.6),

$$y = -\frac{V}{P}x \tag{10.15}$$

Al añadir las soluciones de las ecuaciones (10.8) y (10.15), la solución general de la ecuación (10.14) es

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px - \frac{V}{P}x \tag{10.16}$$

Las constantes A y B y la magnitud V de la fuerza transversal **V** no conocida se obtienen de las condiciones de frontera indicadas en la figura 10.16. Al hacer $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.16), $B = 0$. Al hacer $x = L$, $y = 0$, resulta

$$A \operatorname{sen} pL = \frac{V}{P}L \tag{10.17}$$

Si se obtiene la derivada de la ecuación (10.16), con $B = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = Ap \cos px - \frac{V}{P}$$

y al hacer $x = L$, $dy/dx = 0$,

$$Ap \cos pL = \frac{V}{P} \tag{10.18}$$

Al dividir miembro a miembro la ecuación (10.17) por la ecuación (10.18), una solución de la forma (10.16) puede existir solo si

$$\tan pL = pL \tag{10.19}$$

Al resolver esta ecuación por prueba y error, el menor valor de pL que satisface (10.19) es

$$pL = 4.4934 \tag{10.20}$$

Llevando el valor de p de la ecuación (10.20) a la ecuación (10.6) y despejando P, la carga crítica de la columna de la figura 10.15 es:

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{L^2} \tag{10.21}$$

La longitud efectiva de la columna se encuentra igualando los miembros derechos de las ecuaciones (10.11*b*) y (10.21):

$$\frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{20.19EI}{L^2}$$

Al despejar L_e, la longitud efectiva de una columna con un extremo fijo y el otro articulado es $L_e = 0.699L \approx 0.7L$.

En la figura 10.18 se muestran las longitudes efectivas correspondientes a las diferentes condiciones de extremo.

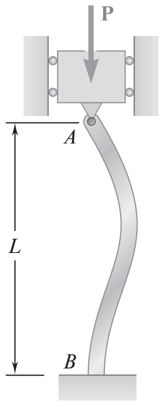


Figura 10.15 (repetida)

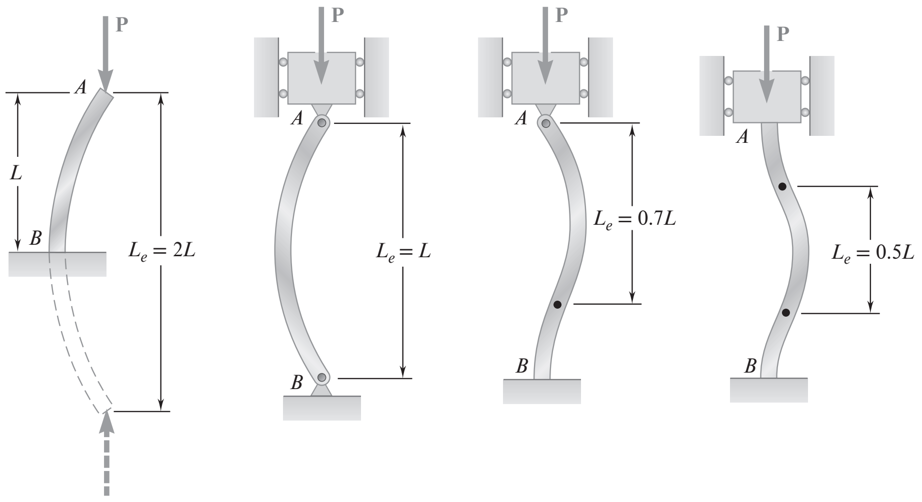
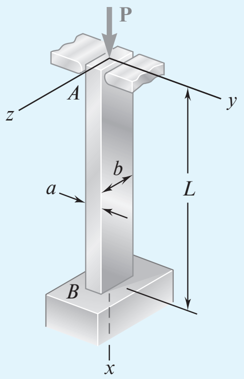


Figura 10.18 Longitud efectiva de columnas con varias condiciones en los extremos.

Problema modelo 10.1

Una columna de aluminio con longitud L y sección transversal rectangular tiene un extremo fijo B y soporta una carga céntrica en A. Dos placas lisas y redondeadas restringen el movimiento del extremo A en uno de los planos verticales de simetría de la columna, pero le permiten moverse en el otro plano. *a*) Determine la relación a/b de los dos lados de la sección transversal correspondiente al diseño más eficiente contra el pandeo. *b*) Diseñe la sección transversal más eficiente para la columna, si se sabe que $L = 20$ in, $E = 10.1 \times 10^6$ psi, $P = 5$ kips, y que se requiere un factor de seguridad de 2.5.



ESTRATEGIA: El diseño más eficiente es aquel para el cual los esfuerzos críticos correspondientes a los dos posibles modos de pandeo son iguales. Esto ocurre si los dos esfuerzos críticos obtenidos de la ecuación (10.13*b*) son iguales. Por lo tanto, para este problema, las dos relaciones de esbeltez efectivas en esta ecuación deben ser iguales para resolver el inciso *a*. Se usará la figura 10.18 para determinar las longitudes efectivas. Los datos de diseño se pueden utilizar con la ecuación (10.13*b*) para dimensionar la sección transversal del inciso *b*.

MODELAR:

Pandeo en el plano *xy*. Con referencia a la figura 10.18*c*, la longitud efectiva de la columna con respecto al pandeo en este plano es $L_e = 0.7L$. El radio de giro r_z de la sección transversal se obtiene mediante

$$I_z = \tfrac{1}{12}ba^3 \quad A = ab$$

y, como $I_z = Ar_z^2$, $\qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{ab} = \frac{a^2}{12} \qquad r_z = a/\sqrt{12}$

La relación de esbeltez efectiva de la columna con respecto al pandeo en el plano *xy* es

$$\frac{L_e}{r_z} = \frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} \tag{1}$$

Pandeo en el plano *xz*. Con referencia a la figura 10.18*a*, la longitud efectiva de la columna con respecto al pandeo en este plano es $L_e = 2L$, y el correspondiente radio de giro es $r_y = b/\sqrt{12}$. Así,

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} \tag{2}$$

ANALIZAR:

***a*) Diseño más eficiente.** El diseño más eficiente es aquel para el cual los esfuerzos críticos correspondientes a los dos posibles modos de pandeo son iguales. Con referencia a la ecuación (10.13*b*), este es el caso si los dos valores obtenidos anteriormente para la relación de esbeltez efectiva son iguales.

$$\frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

y, al despejar a/b, $\qquad \frac{a}{b} = \frac{0.7}{2} \qquad \frac{a}{b} = 0.35$ ◀

***b*) Diseño para los datos dados.** Como se requiere un $F.S. = 2.5$,

$$P_{cr} = (F.S.)P = (2.5)(5 \text{ kips}) = 12.5 \text{ kips}$$

Al usar $a = 0.35b$,

$$A = ab = 0.35b^2 \quad \text{y} \quad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{12\,500 \text{ lb}}{0.35b^2}$$

Si se hace $L = 20$ in en la ecuación (2), $L_e/r_y = 138.6/b$. Al sustituir E, L_e/r y σ_{cr} en la ecuación (10.13b), resulta

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \qquad \frac{12\,500 \text{ lb}}{0.35b^2} = \frac{\pi^2(10.1 \times 10^6 \text{ psi})}{(138.6/b)^2}$$

$$b = 1.620 \text{ in} \qquad a = 0.35b = 0.567 \text{ in} \quad ◀$$

REVISAR y PENSAR: El esfuerzo de pandeo crítico de Euler no puede ser nunca superior a la resistencia a la cedencia del material. En este problema, se puede determinar fácilmente que el esfuerzo crítico $\sigma_{cr} = 13.6$ ksi; aunque no se dio la aleación específica, este esfuerzo es menor que los valores de la resistencia a la cedencia por tensión σ_Y para todas las aleaciones de aluminio enlistadas en el apéndice B.

Problemas

10.1 Si se sabe que el resorte en A tiene constante k y que la barra AB es rígida, determine la carga crítica P_{cr}.

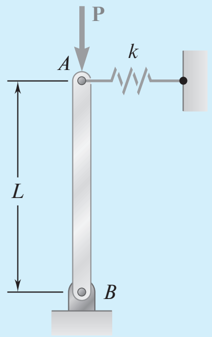


Figura P10.1

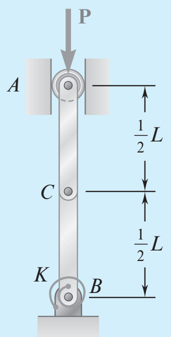


Figura P10.2

10.2 Dos barras rígidas AC y BC están conectadas por un pasador en C como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte de torsión en B tiene constante K, determine la carga crítica P_{cr} para el sistema.

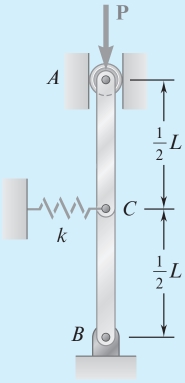


Figura P10.3

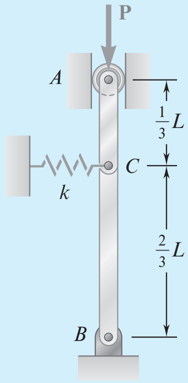


Figura P10.4

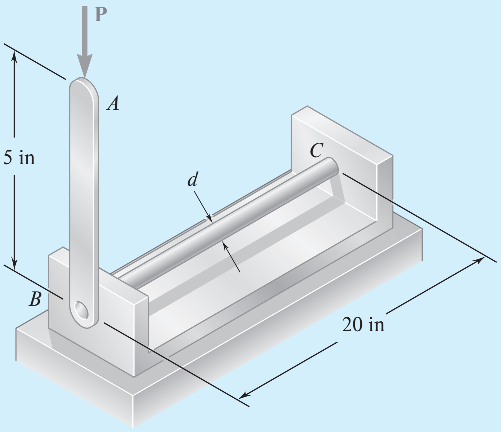


Figura *P10.5*

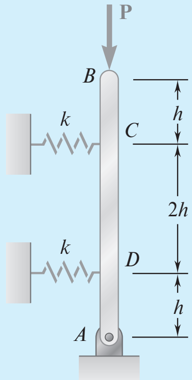


Figura P10.6

10.3 y 10.4 Dos barras rígidas *AC* y *BC* están conectadas a un resorte de constante *k* como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte puede actuar a tensión o a compresión, determine la carga crítica P_{cr} para el sistema.

10.5 La varilla de acero *BC* está unida a la barra rígida *AB* y al apoyo fijo en *C*. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine el diámetro de la varilla *BC* para el que la carga crítica P_{cr} del sistema es de 80 lb.

10.6 La varilla rígida *AB* está unida a una bisagra en *A* y a dos resortes, cada uno con constante $k = 2$ kips/in, que pueden actuar a tensión o a compresión. Si se sabe que $h = 2$ ft, determine la carga crítica.

10.7 La barra rígida *AD* está unida a dos resortes de constante *k* y está en equilibrio en la posición mostrada en la figura. Si se sabe que las fuerzas iguales y opuestas P y P′ permanecen horizontales, determine la magnitud P_{cr} de la carga crítica para el sistema.

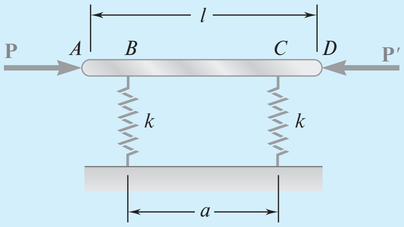


Figura P10.7

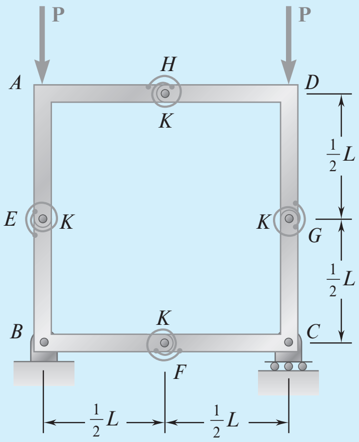


Figura *P10.8*

10.8 Un bastidor se compone de cuatro elementos con forma de *L*, conectados mediante cuatro resortes de torsión, cada uno de los cuales tiene una constante *K*. Si se aplican cargas de igual magnitud **P** en los puntos *A* y *D*, como se muestra en la figura, determine el valor crítico P_{cr} de las cargas aplicadas al bastidor.

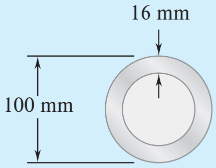


Figura P10.9

10.9 Determine la carga crítica de un tubo de acero articulado en los extremos, con longitud de 5 m, diámetro exterior de 100 mm y espesor de pared de 16 mm. Utilice $E = 200$ GPa.

10.10 Determine la carga crítica de una vara de madera articulada en sus extremos, con longitud de 3 ft y sección transversal rectangular de $\frac{3}{16} \times 1\frac{1}{4}$ in. Utilice $E = 1.6 \times 10^6$ psi.

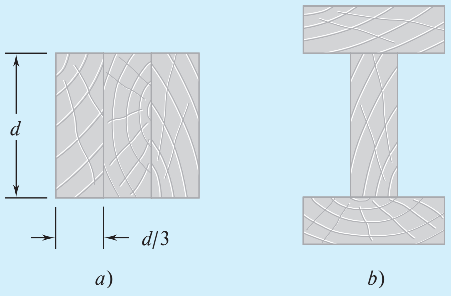


Figura P10.11

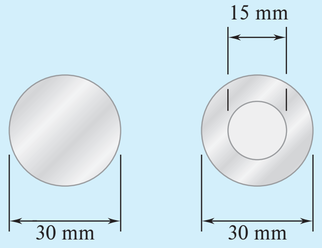


Figura *P10.12*

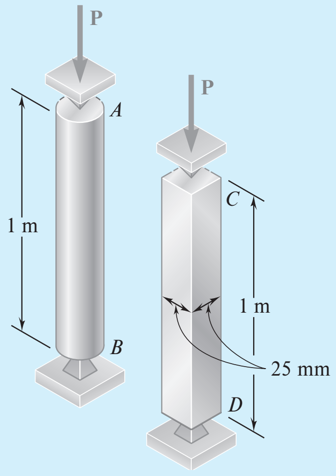


Figura P10.13 y *P10.14*

10.11 Una columna de longitud efectiva L puede construirse al pegar tablas idénticas en cada uno de los arreglos que se muestran en la figura. Determine la relación de la carga crítica que se obtiene con el arreglo a sobre la carga crítica que se logra con el arreglo b.

10.12 Un elemento a compresión de 1.5 m de longitud efectiva consta de una barra sólida de latón con 30 mm de diámetro. Para reducir el peso del elemento en 25%, se reemplaza por una barra hueca con la sección transversal mostrada en la figura. Determine *a*) la reducción porcentual en la carga crítica, *b*) el valor de la carga crítica para la barra hueca. Utilice $E = 200$ GPa.

10.13 Determine el radio del puntal redondo tal que los puntales cuadrado y redondo tengan la misma área de sección transversal y calcule la carga crítica de cada puntal. Utilice $E = 200$ GPa.

10.14 Determine *a*) la carga crítica para el puntal cuadrado, *b*) el radio del puntal redondo para el cual ambos puntales tienen la misma carga crítica, *c*) exprese el área de la sección transversal del puntal cuadrado como un porcentaje del área de la sección transversal del puntal redondo. Utilice $E = 200$ GPa.

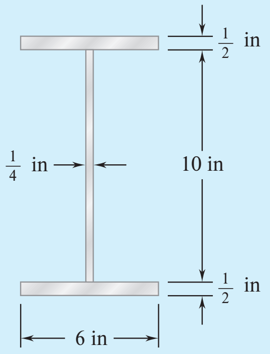


Figura P10.15

10.15 Una columna con la sección transversal que se muestra en la figura tiene una longitud efectiva de 13.5 ft. Utilice un factor de seguridad igual a 2.8 para determinar la carga céntrica permisible que se puede aplicar a la columna. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.16 Una columna está hecha a partir de medio perfil de acero laminado W360 × 216, con las propiedades geométricas que se muestran en la figura. Use un factor de seguridad igual a 2.6 para determinar la carga céntrica permisible, si la longitud efectiva de la columna es de 6.5 m. Utilice $E = 200$ GPa.

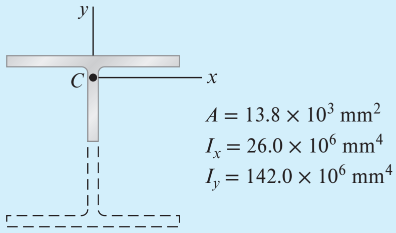


Figura P10.16

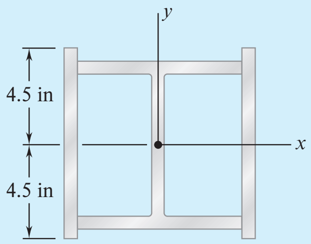


Figura P10.17

10.17 Una columna de 22 ft de longitud efectiva se fabrica al soldar dos placas de 9 × 0.5 in a un perfil W8 × 35, como se muestra en la figura. Determine la carga céntrica permisible si se requiere un factor de seguridad de 2.3. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

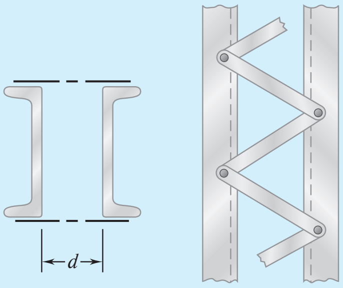


Figura *P10.18*

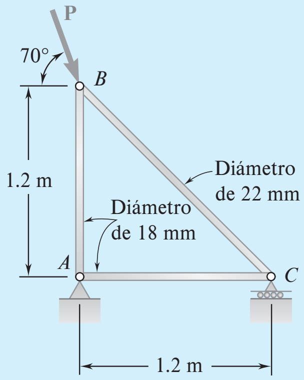


Figura P10.19

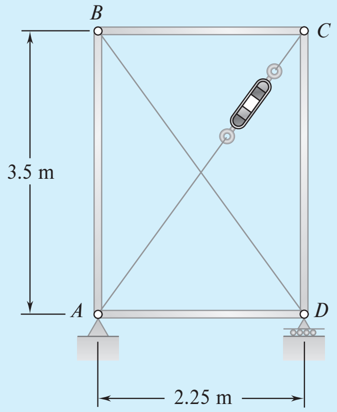


Figura *P10.20*

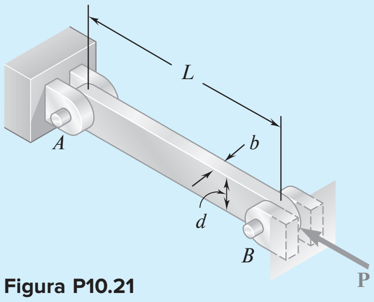


Figura P10.21

10.18 Un elemento simple a compresión con 8.2 m de longitud efectiva se obtiene al conectar dos canales de acero C200 × 17.1 con barras de enlace, como se muestra en la figura. Si se sabe que el factor de seguridad es de 1.85, determine la carga céntrica permisible para el elemento. Utilice $E = 200$ GPa y $d = 100$ mm.

10.19 Si se sabe que $P = 5.2$ kN, determine el factor de seguridad para la estructura que se muestra en la figura. Utilice $E = 200$ GPa y considere solo el pandeo en el plano de la estructura.

10.20 Los elementos *AB* y *CD* son varillas de acero con 30 mm de diámetro, y los elementos *BC* y *AD* son varillas de acero con 22 mm de diámetro. Al apretar el torniquete se tensa el elemento diagonal *AC*. Si se requiere un factor de seguridad con respecto al pandeo de 2.75, determine la máxima tensión permisible en *AC*. Utilice $E = 200$ GPa y considere solo el pandeo en el plano de la estructura.

10.21 La barra uniforme de latón *AB* tiene una sección transversal rectangular y se sostiene mediante pasadores y ménsulas, como se muestra en la figura. Cada extremo de la barra puede girar libremente con respecto a un eje horizontal a través del pasador, pero no puede rotar alrededor de un eje vertical debido a las ménsulas. *a*) Determine la relación b/d para la cual el factor de seguridad es el mismo con respecto a los ejes horizontal y vertical. *b*) Determine el factor de seguridad si $P = 1.8$ kips, $L = 7$ ft, $d = 1.5$ in y $E = 29 \times 10^6$ psi.

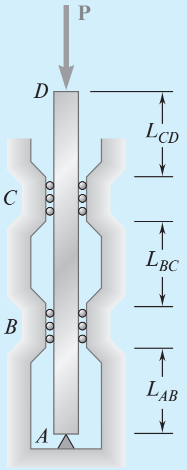


Figura P10.22 y *P10.23*

10.22 Un puntal cuadrado de aluminio de 1 in se mantiene en la posición que se observa en la figura gracias a un pasador en el punto *A* y por medio de un conjunto de rodillos en *B* y *C*, los cuales impiden la rotación del puntal en el plano de la figura. Si se sabe que $L_{AB} = 3$ ft, determine *a*) los valores máximos de L_{BC} y L_{CD} que pueden usarse si la carga permisible **P** debe ser lo más grande posible, *b*) la magnitud de la carga permisible correspondiente. Considere solo el pandeo en el plano de la figura y use $E = 10.4 \times 10^6$ psi.

10.23 Un puntal cuadrado de aluminio de 1 in se mantiene en la posición que se observa en la figura gracias a un pasador en el punto *A* y por medio de un conjunto de rodillos en *B* y *C*, los cuales impiden la rotación del puntal en el plano de la figura. Si se sabe que $L_{AB} = 3$ ft, $L_{BC} = 4$ ft y $L_{CD} = 1$ ft, determine la carga **P** permisible usando un factor de seguridad de 3.2 con respecto al pandeo. Considere solo el pandeo en el plano de la figura y use $E = 10.4 \times 10^6$ psi.

10.24 La columna *ABC* tiene una sección transversal rectangular uniforme con $b =$ 12 mm y $d = 22$ mm. La columna se sostiene en el plano *xz* en su punto medio *C* y recibe una fuerza céntrica **P** con magnitud de 3.8 kN. Si se sabe que el factor de seguridad requerido es de 3.2, determine la máxima longitud permisible *L*. Utilice $E = 200$ GPa.

10.25 La columna *ABC* tiene una sección transversal rectangular uniforme y se encuentra apoyada en el plano *xz* en su punto medio *C*. *a*) Determine la relación b/d para la cual el factor de seguridad es el mismo con respecto al pandeo en los planos *xz* y *yz*. *b*) Usando la relación encontrada en el inciso *a*, diseñe la sección transversal de la columna para la cual el factor de seguridad será 3.0, cuando $P = 4.4$ kN, $L = 1$ m y $E = 200$ GPa.

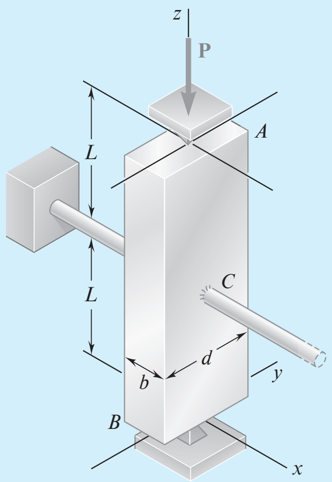


Figura P10.24 y P10.25

10.26 La columna *AB* soporta una carga céntrica **P** con magnitud de 15 kips. Los cables *BC* y *BD* están tensos y evitan el movimiento del punto *B* en el plano *xz*. Usando la fórmula de Euler y un factor de seguridad de 2.2 y despreciando la tensión en los cables, determine la máxima longitud permisible *L*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

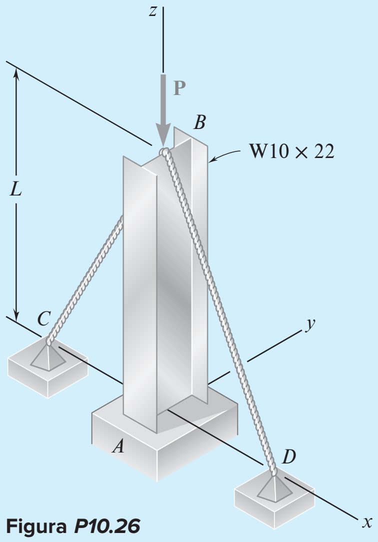


Figura *P10.26*

10.27 Cada uno de los cinco puntales que se muestran en la figura consiste en una varilla sólida de acero. *a*) Si se sabe que el puntal de la figura (1) tiene un diámetro de 20 mm, determine el factor de seguridad con respecto al pandeo para la carga mostrada. *b*) Determine el diámetro de cada uno de los puntales restantes, para los cuales el factor de seguridad es igual al factor de seguridad obtenido en el inciso *a*. Utilice $E = 200$ GPa.

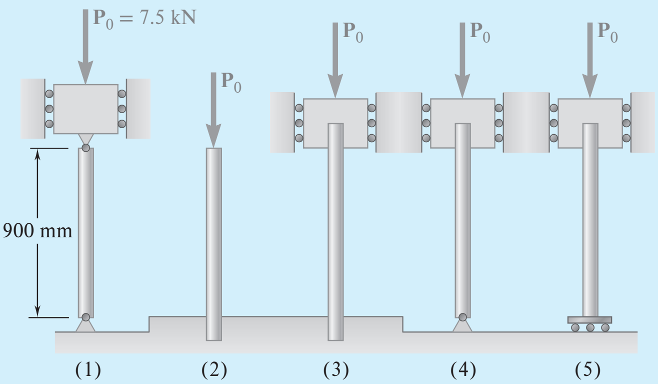


Figura P10.27

10.28 Un bloque rígido de masa *m* puede apoyarse en cada una de las cuatro formas que se muestran en la figura. Cada columna consiste en un tubo de aluminio que tiene 44 mm de diámetro exterior y 4 mm de espesor de pared. Si se utiliza $E = 70$ GPa y un factor de seguridad de 2.8, determine la masa permisible para cada condición de apoyo.

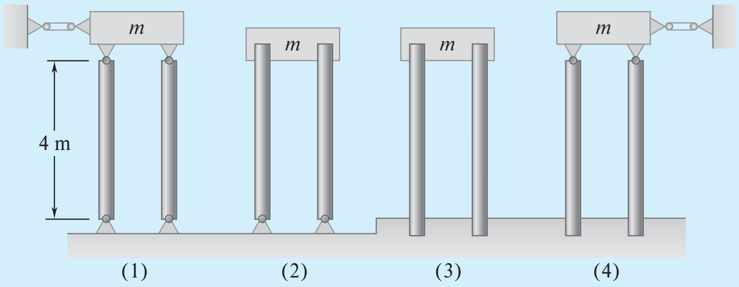


Figura P10.28

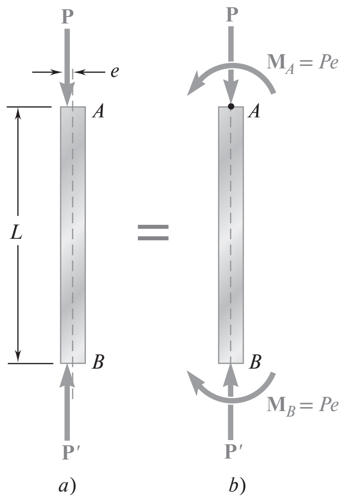


Figura 10.19 *a*) Columna con una carga excéntrica, *b*) modelada como una columna con una carga céntrica equivalente de fuerza y momento.

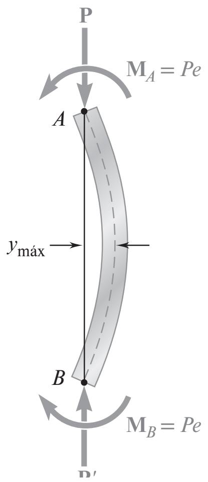


Figura 10.20 Diagrama de cuerpo libre de una columna cargada excéntricamente.

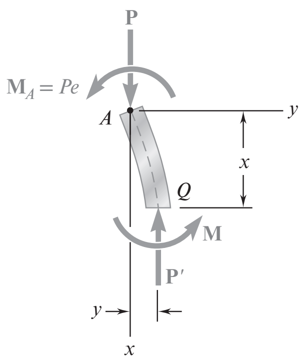


Figura 10.21 Diagrama de cuerpo libre de la porción *AQ* de una columna cargada excéntricamente.

*10.2 CARGA EXCÉNTRICA Y FÓRMULA DE LA SECANTE

En esta sección se estudiará el pandeo de columnas observando que la carga **P** aplicada a una columna nunca es perfectamente céntrica. La excentricidad de la carga es la distancia entre la línea de acción de **P** y el eje de la columna (figura 10.19*a*). La carga excéntrica dada se reemplaza por una fuerza céntrica **P** y un momento $\mathbf{M}_A$ de momento $M_A = Pe$ (figura 10.19*b*). Sin importar lo pequeñas que sean la carga **P** y la excentricidad *e*, el momento $\mathbf{M}_A$ causará alguna flexión en la columna (figura 10.20). A medida que la carga excéntrica se incrementa, tanto el momento $\mathbf{M}_A$ como la fuerza axial **P** aumentan y ambos provocan que la columna se flexione más. Visto así, el problema del pandeo no es cuestión de determinar cuánto tiempo la columna va a permanecer recta y estable bajo una carga creciente, sino cuánto puede flexionarse la columna bajo carga creciente, sin que el esfuerzo permisible sea excedido y sin que la deflexión máxima $y_{máx}$ sea excesiva.

Primero se escribirá y resolverá la ecuación diferencial de la curva elástica, procediendo como en las secciones 10.1A y B. Al dibujar el diagrama de cuerpo libre de una porción *AQ* de la columna y escoger los ejes, como se muestra (figura 10.21), se halla que el momento flector en *Q* es

$$M = -Py - MA = -Py - Pe \qquad (10.22)$$

Al sustituir el valor de *M* en la ecuación (9.4), resulta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{Pe}{EI}$$

Al trasponer el término que contiene a *y* y haciendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \qquad (10.6)$$

como se hizo antes, se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -p^2e \qquad (10.23)$$

Como el lado izquierdo de la ecuación (10.23) es el mismo de la ecuación (10.7), la solución general de la ecuación (10.23) se reescribe como

$$y = A \text{ sen } px + B \cos px - e \qquad (10.24)$$

donde el último término es una solución particular.

Las constantes *A* y *B* se obtienen de las condiciones de frontera de la figura 10.22. Al hacer $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.24), se tiene

$$B = e$$

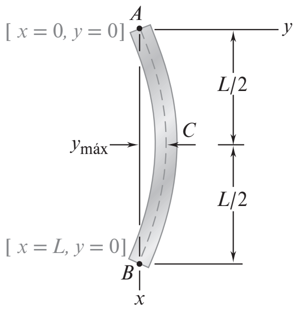


Figura 10.22 Condiciones de frontera para una columna cargada excéntricamente.

Si se hace $x = L$, $y = 0$, resulta

$$A \text{ sen } pL = e(1 - \cos pL) \tag{10.25}$$

Al recordar que

$$\text{sen} pL = 2 \text{ sen} \frac{pL}{2} \cos \frac{pL}{2}$$

y

$$1 - \cos pL = 2 \text{ sen}^2 \frac{pL}{2}$$

y al sustituir en la ecuación (10.25), luego de las simplificaciones, se obtiene

$$A = e \tan \frac{pL}{2}$$

Al sustituir A y B en la ecuación (10.24), la ecuación de la curva elástica es

$$y = e\left(\tan \frac{pL}{2} \text{ sen } px + \cos px - 1\right) \tag{10.26}$$

La deflexión máxima se obtiene al establecer $x = L/2$ en la ecuación (10.26).

$$y_{\text{máx}} = e\left(\tan \frac{pL}{2} \text{ sen} \frac{pL}{2} + \cos \frac{pL}{2} - 1\right)$$

$$= e\left(\frac{\text{sen}^2 \frac{pL}{2} + \cos^2 \frac{pL}{2}}{\cos \frac{pL}{2}} - 1\right)$$

$$y_{\text{máx}} = e\left(\sec \frac{pL}{2} - 1\right) \tag{10.27}$$

Al recordar la ecuación (10.6), se tiene

$$y_{\text{máx}} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \tag{10.28}$$

La expresión obtenida indica que $y_{\text{máx}}$ se vuelve infinita cuando

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{10.29}$$

Aunque la deflexión no se vuelve realmente infinita, se vuelve inaceptablemente grande y P no debe llegar al valor crítico que satisface la ecuación (10.29). Al despejar P de la ecuación (10.29),

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{10.30}$$

que también se obtuvo en la sección 10.1A para una columna bajo carga céntrica. Si se despeja EI de la ecuación (10.30) y se sustituye en la ecuación (10.28), la deflexión máxima en la forma alternativa es

$$y_{\text{máx}} = e\left(\sec \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} - 1\right) \tag{10.31}$$

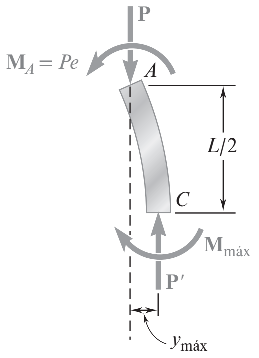


Figura 10.23 Diagrama de cuerpo libre de la mitad superior de una columna cargada excéntricamente.

El esfuerzo máximo $\sigma_{máx}$ ocurre en la sección de la columna donde el momento flector es máximo (es decir, en la sección transversal a través del punto medio C) y se puede obtener sumando los esfuerzos normales debidos, respectivamente, a la fuerza axial y al momento flector ejercido en esa sección (vea la sección 4.7). Entonces,

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{M_{máx}c}{I} \tag{10.32}$$

Del diagrama de cuerpo libre de la porción AC (figura 10.23),

$$M_{máx} = Py_{máx} + M_A = P(y_{máx} + e)$$

Al sustituir este valor en la ecuación (10.32) y recordar que $I = Ar^2$, se escribe

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(y_{máx} + e)c}{r^2}\right] \tag{10.33}$$

Si se sustituye por $y_{máx}$ el valor obtenido en la ecuación (10.28):

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\right] \tag{10.34}$$

Una forma alternativa de $\sigma_{máx}$ se obtiene al sustituir $y_{máx}$ de la ecuación (10.31) en la ecuación (10.33). Así,

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \tag{10.35}$$

Esta ecuación puede usarse con cualquier condición de extremo, siempre que se use el valor apropiado para la carga crítica (vea la sección 10.1B).

Como $\sigma_{máx}$ no varía linealmente con la carga P, el principio de superposición no se emplea en la determinación del esfuerzo debido a la aplicación simultánea de varias cargas; debe calcularse primero la carga resultante y luego puede usarse la ecuación (10.34) o la (10.35) para determinar el esfuerzo correspondiente. Por la misma razón, cuando se usa la *segunda fórmula*, cualquier factor de seguridad debe aplicarse a la carga, no al esfuerzo.

Si se hace $I = Ar^2$ en la ecuación (10.34) y se despeja la relación P/A al frente del paréntesis, resulta

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}\sec\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EA}}\dfrac{L_e}{r}\right)} \tag{10.36}$$

donde la longitud efectiva se utiliza para lograr que la fórmula sea aplicable a varias condiciones de extremo. Esta es la *fórmula de la secante*, la cual define la fuerza por unidad de área, P/A, que causa un esfuerzo máximo especificado $\sigma_{máx}$ en una columna con relación efectiva de esbeltez, L_e/r, para un valor dado de la relación ec/r^2, donde e es la excentricidad de la carga aplicada. Como P/A aparece en ambos miembros, es necesario recurrir a un método de prueba y error para resolver la ecuación trascendental y obtener el valor de P/A correspondiente a una columna y a condiciones de carga dadas.

La ecuación (10.36) se utilizó para dibujar las curvas mostradas en la figura 10.24*a* y *b* para una columna de acero, suponiendo que los valores de E y σ_Y son los mostrados en la figura. Estas curvas permiten calcular la carga por unidad de área P/A, que hace ceder a la columna para valores dados de las relaciones L_e/r y ec/r^2.

Para valores pequeños de L_e/r, la secante es casi 1 en la ecuación (10.36), y P/A puede suponerse igual a

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}} \tag{10.37}$$

Este valor puede obtenerse despreciando el efecto de la deflexión lateral de la columna y usando el método de la sección 4.8. Por otra parte, en la figura 10.24 se observa que para valores grandes de L_e/r, las curvas correspondientes a los diferentes valores de ec/r^2 se acercan mucho a la curva de Euler definida por la ecuación (10.13*b*) y así, el efecto de la excentricidad de la carga en el valor de P/A es despreciable. La fórmula de la secante es útil, sobre todo para valores intermedios de L_e/r. Sin embargo, para usarla con eficiencia, debe conocerse el valor e de la excentricidad de la carga y esta cantidad, desafortunadamente, rara vez se conoce con algún grado de precisión.

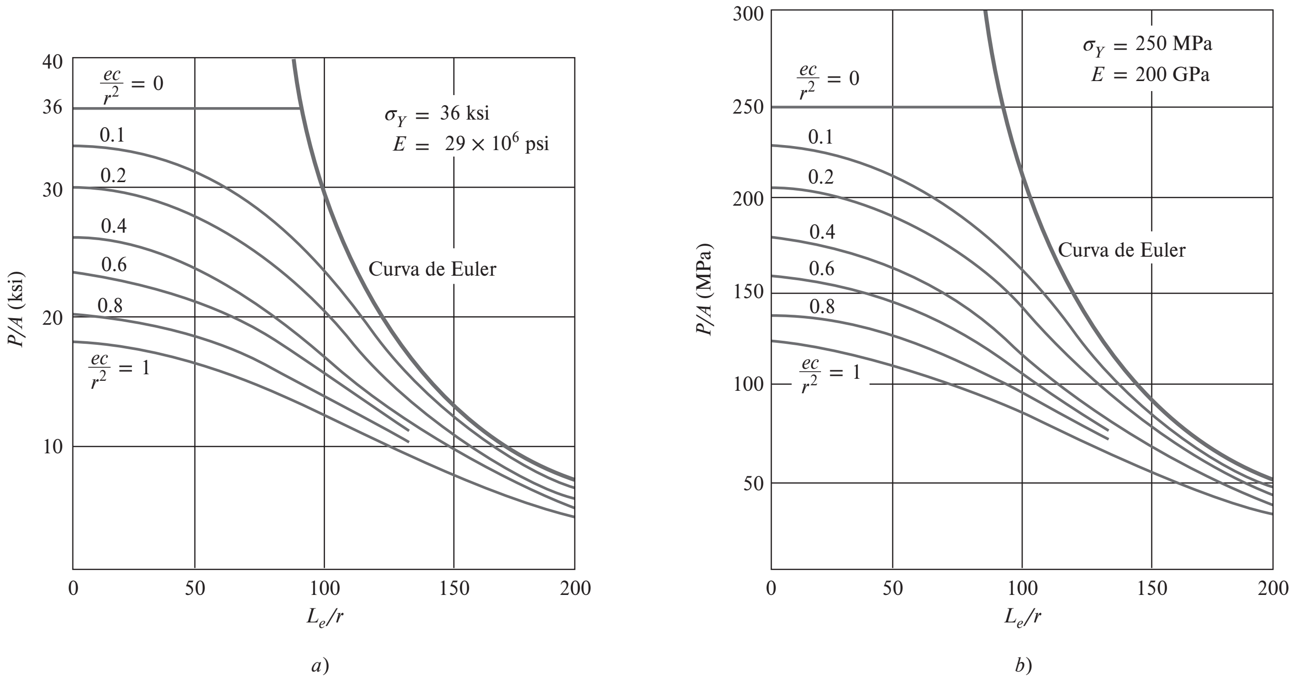
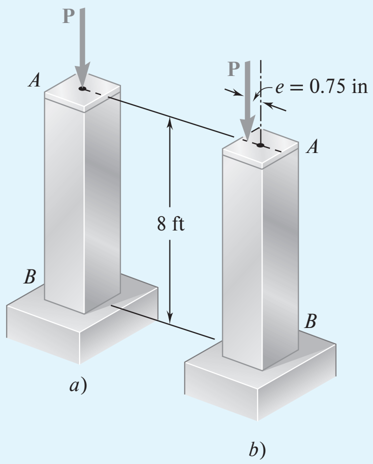


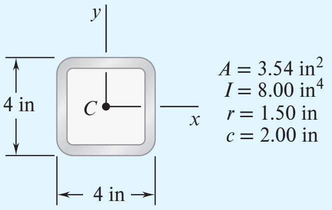
Figura 10.24 Gráficas de la fórmula de la secante para el pandeo en columnas cargadas excéntricamente. *a*) Unidades de uso común en Estados Unidos. *b*) Unidades métricas.

Problema modelo 10.2

La columna uniforme AB consta de una sección de 8 ft de tubo estructural cuya sección se muestra. *a*) Usando la fórmula de Euler y un factor de seguridad de 2, determine la carga céntrica permisible para la columna y el correspondiente esfuerzo normal. *b*) Si la carga permisible, hallada en el inciso *a*, se aplica como se muestra en un punto a 0.75 in del eje geométrico de la columna, determine la deflexión horizontal del extremo superior de la columna y el esfuerzo normal máximo en la columna. Considere que $E = 29 \times 10^6$ psi.



ESTRATEGIA: Para el inciso *a*, se usará el factor de seguridad con la fórmula de Euler para determinar la carga céntrica permisible. Para el inciso *b*, se utilizarán las ecuaciones (10.31) y (10.35) con el propósito de encontrar la deflexión horizontal y el esfuerzo normal máximo en la columna, respectivamente.



MODELAR:

Longitud efectiva. Como la columna tiene un extremo fijo y uno libre, su longitud efectiva es:

$$L_e = 2(8 \text{ ft}) = 16 \text{ ft} = 192 \text{ in}$$

Carga crítica. Usando la fórmula de Euler,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2(29 \times 10^6 \text{ psi})(8.00 \text{ in}^4)}{(192 \text{ in})^2} \qquad P_{cr} = 62.1 \text{ kips}$$

ANALIZAR:

***a*) Carga y esfuerzo críticos.** Para un factor de seguridad de 2,

$$P_{perm} = \frac{P_{cr}}{F.S.} = \frac{62.1 \text{ kips}}{2} \qquad P_{perm} = 31.1 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

y

$$\sigma = \frac{P_{perm}}{A} = \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in}^2} \qquad \sigma = 8.79 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

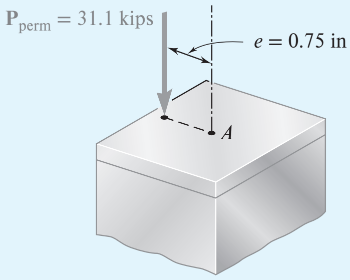


Figura 1 Carga permisible aplicada en la excentricidad supuesta.

***b*) Carga excéntrica (figura 1).** Observe que la columna AB y su carga son idénticas a la mitad superior de la columna de la figura 10.20, que se utilizó en la deducción de las fórmulas de la secante. Por lo tanto, las fórmulas de la sección 10.2 se aplican directamente a este caso. Al recordar que $P_{perm}/P_{cr} = \frac{1}{2}$ y usando la ecuación (10.31), la deflexión horizontal del punto A es

$$y_m = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] = (0.75 \text{ in})\left[\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) - 1\right]$$

$$= (0.75 \text{ in})(2.252 - 1) \qquad y_m = 0.939 \text{ in} \blacktriangleleft$$

Este resultado se ilustra en la figura 2.

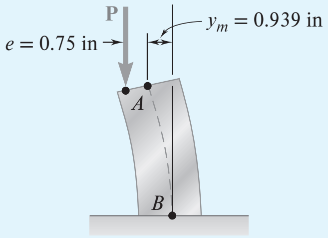


Figura 2 Deflexión de la columna cargada excéntricamente.

El esfuerzo normal máximo se obtiene de la ecuación (10.35) como

$$\sigma_m = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right]$$

$$= \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in}^2}\left[1 + \frac{(0.75 \text{ in})(2 \text{ in})}{(1.50 \text{ in})^2}\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= (8.79 \text{ ksi})[1 + 0.667(2.252)] \qquad \sigma_m = 22.0 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

Problemas

10.29 Se aplica una carga axial **P** = 15 kN sobre el punto D que está a 4 mm del eje geométrico de la barra cuadrada de aluminio BC. Si E = 70 GPa, determine *a*) la deflexión horizontal del extremo C, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

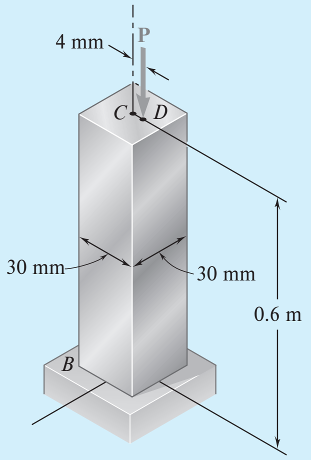


Figura P10.29

10.30 Se aplica una carga axial **P** a la varilla de acero AB con un diámetro de 32 mm que se muestra en la figura. Para P = 37 kN y e = 1.2 mm, determine *a*) la deflexión en el punto medio C de la varilla, *b*) el esfuerzo máximo en la varilla. Utilice E = 200 GPa.

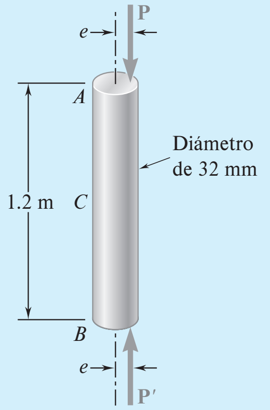


Figura P10.30

10.31 La línea de acción de una carga axial de 310 kN es paralela al eje geométrico de la columna AB e interseca el eje x en $x = e$. Si E = 200 GPa, determine *a*) la excentricidad e cuando la deflexión del punto medio C de la columna es de 9 mm, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

10.32 Se aplica una carga axial **P** a la varilla de acero AB con un diámetro de 1.375 in que se muestra en la figura. Para P = 21 kips se observa que la deflexión horizontal del punto medio C es de 0.03 in. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la excentricidad e de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la varilla.

10.33 Se aplica una carga axial **P** a la barra cuadrada de aluminio BC con 32 mm de lado, como se indica en la figura. Cuando P = 24 kN, la deflexión horizontal en el extremo C es de 4 mm. Con E = 70 GPa, determine *a*) la excentricidad e de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la barra.

10.34 Se aplica la carga axial **P** en un punto ubicado sobre el eje x a una distancia e del eje geométrico de la columna BC de acero laminado. Cuando P = 82 kips, la deflexión horizontal de la parte superior de la columna es de 0.20 in. Con $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la excentricidad e de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

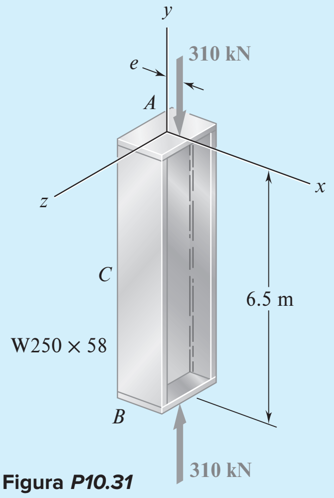


Figura *P10.31*

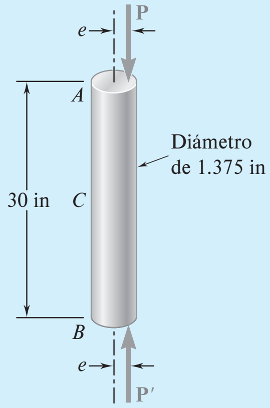


Figura P10.32

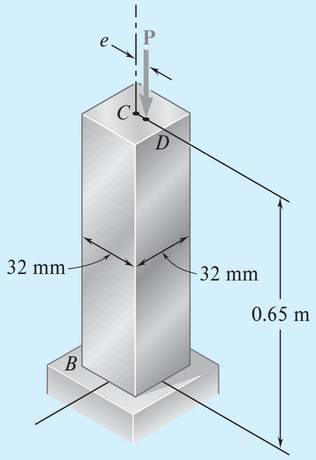


Figura *P10.33*

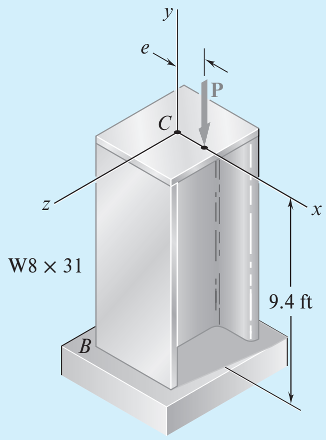


Figura P10.34

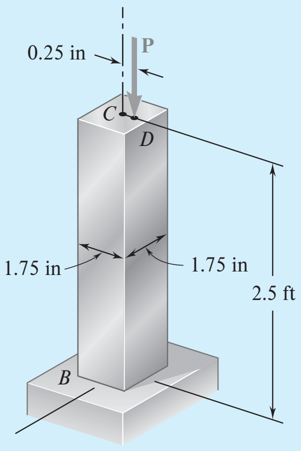


Figura P10.35

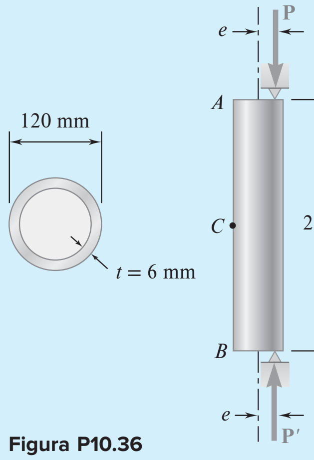


Figura P10.36

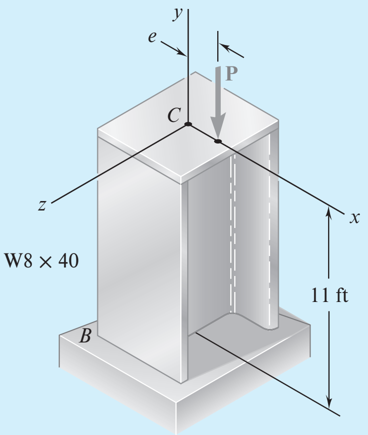


Figura *P10.38*

10.35 Se aplica una carga axial **P** en el punto *D* ubicado a 0.25 in del eje geométrico de la barra cuadrada de aluminio *BC*. Con $E = 10.1 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal del extremo *C* es de 0.50 in, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

10.36 A un tubo de latón, que tiene la sección transversal mostrada en la figura, se le aplica una carga axial **P** a 5 mm de su eje geométrico. Si $E = 120$ GPa, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal en el punto medio *C* es de 5 mm, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

10.37 Resuelva el problema 10.36 suponiendo que la carga axial **P** se aplica a 10 mm del eje geométrico de la columna.

10.38 La línea de acción de una carga axial **P** es paralela al eje geométrico de la columna *AB* e interseca al eje *x* en $x = 0.8$ in. Con $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal en el extremo *C* es de 0.5 in, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

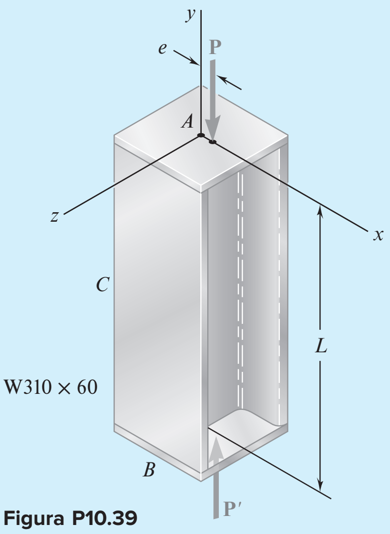


Figura P10.39

10.39 La línea de acción de la carga axial **P** es paralela al eje geométrico de la columna y se aplica en un punto situado en el eje *x*, a una distancia $e = 12$ mm del eje geométrico de la columna *BC* W310 × 60, hecha de acero laminado. Si se supone que $L = 7.0$ m y $E = 200$ GPa, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal del punto medio *C* de la columna es de 15 mm, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

10.40 Resuelva el problema 10.39, suponiendo que *L* es de 9.0 m.

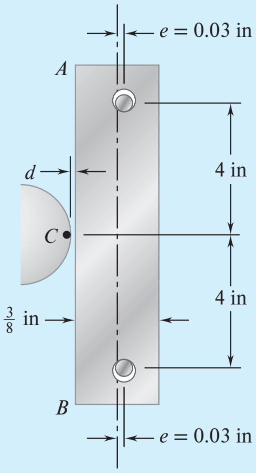


Figura P10.41

10.41 La barra de acero *AB* tiene una sección transversal cuadrada de $\frac{3}{8} \times \frac{3}{8}$ in y la sostienen pasadores con la misma separación entre sí y ubicados a una distancia $e = 0.03$ in desde el eje geométrico de la barra. Si se sabe que a la temperatura T_0 los pasadores están en contacto con la barra y que la fuerza en ésta es de cero, determine el incremento de temperatura para el cual la barra entrará en contacto con el punto *C* si $d = 0.01$ in. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi y un coeficiente de expansión térmica $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$/°F.

10.42 Para la barra del problema 10.41 determine la distancia *d* que se requiere para que la barra entre en contacto con el punto *C* cuando la temperatura se incrementa en 120 °F.

10.43 Un tubo con 3.5 m de longitud, que tiene la sección transversal y las propiedades mostradas en la figura, se utiliza como una columna. Para el grado de acero usado $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Si se requiere un factor de segu-

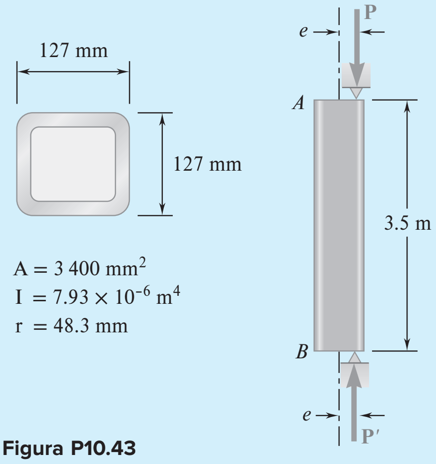


Figura P10.43

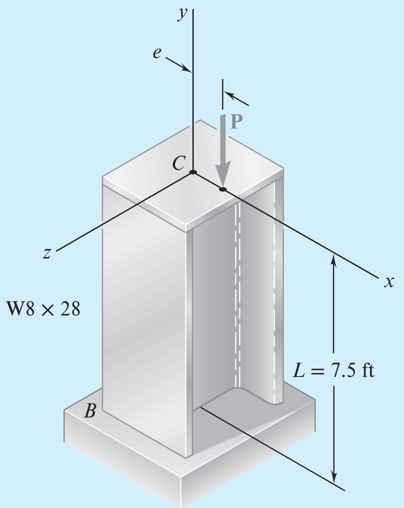


Figura P10.45 y *P10.46*

ridad de 2.6 respecto a la deformación permanente, determine la carga **P** permisible cuando la excentricidad e es de *a*) 15 mm, *b*) 7.5 mm. (*Sugerencia:* Como el factor de seguridad debe aplicarse a la carga **P**, no al esfuerzo, utilice la figura 10.24 para determinar P_Y).

10.44 Resuelva el problema 10.43, suponiendo que la longitud del tubo se incrementa a 5 m.

10.45 Se aplica una carga axial **P** a la columna BC de acero laminado W10 × 28 la cual está libre en su parte superior C y fija en su base B. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 0.6$ in, y que para el grado de acero usado $\sigma_Y = 36$ ksi y que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la magnitud P de la carga permisible si se necesita un factor de seguridad de 2.5 con respecto a la deformación permanente, *b*) la relación de la carga encontrada en el inciso *a* sobre la magnitud de la carga céntrica permisible para la columna. (Vea la sugerencia del problema 10.43).

10.46 Una carga axial **P** con magnitud de 50 kips se aplica en un punto localizado a una distancia $e = 0.25$ in del eje geométrico de la columna BC de acero laminado W8 × 28. Si se sabe que la columna está libre en su parte superior C y fija en su base B, y que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine el factor de seguridad con respecto a la cedencia. (Vea la sugerencia del problema 10.43).

10.47 Se aplica una carga axial **P** de 100 kN a la columna BC de acero laminado W150 × 18 con su extremo superior C libre y su base B fija. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 6$ mm, determine la longitud L máxima permisible si el esfuerzo permisible en la columna es de 80 MPa. Utilice $E = 200$ GPa.

10.48 Se aplica una carga axial **P** de 26 kips a una columna BC de acero laminado W6 × 12, la cual está libre en su extremo superior C y fija en su base B. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 0.25$ in, determine la longitud L máxima permisible si el esfuerzo admisible en la columna es de 14 ksi. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.49 Se aplican cargas axiales de magnitud $P = 135$ kips paralelas al eje geométrico de una columna AB de acero laminado W10 × 54 y que intersecan al eje x a una distancia e de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 12$ ksi y que

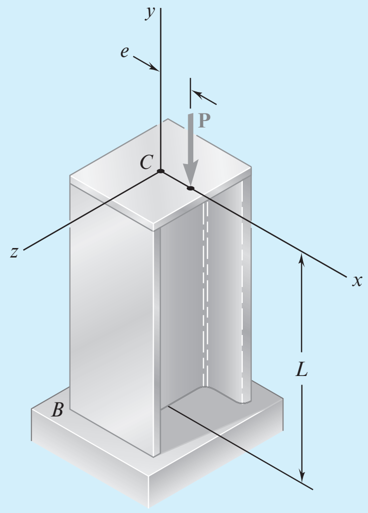


Figura P10.47

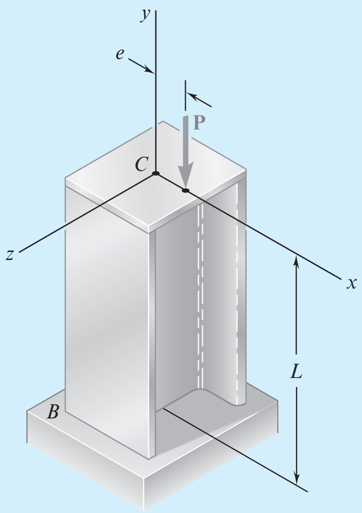


Figura *P10.48*

$E = 29 \times 10^6$ psi, determine la máxima longitud permisible L cuando *a*) $e = 0.25$ in, *b*) $e = 0.5$ in.

10.50 Se aplican cargas axiales de magnitud $P = 84$ kN paralelas al eje geométrico de una columna AB de acero laminado con perfil W200 × 22.5 y que intersecan al eje x a una distancia e de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 75$ MPa y que $E = 200$ GPa, determine la máxima longitud permisible L cuando *a*) $e = 5$ mm, *b*) $e = 12$ mm.

10.51 Se aplica una carga axial de magnitud $P = 220$ kN en un punto ubicado sobre el eje x a una distancia $e = 6$ mm del eje geométrico de la columna BC de patín ancho. Si se sabe que $E = 200$ GPa, elija el perfil W200 más ligero que puede usarse si $\sigma_{perm} = 120$ MPa.

10.52 Resuelva el problema 10.51 suponiendo que la magnitud de la carga axial es $P = 345$ kN.

10.53 Se aplica una carga axial de 12 kips con una excentricidad $e = 0.375$ in a la barra circular de acero BC que tiene libre su extremo C y está fija en su base B. Si se sabe que las barras del lote disponible para usarse tienen diámetros en incrementos de $\frac{1}{8}$ in desde 1.5 in hasta 3.0 in, determine la barra más ligera que podría emplearse si $\sigma_{perm} = 15$ ksi. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.54 Resuelva el problema 10.53 suponiendo que la carga axial de 12 kips se aplicará a la barra con una excentricidad $e = \frac{1}{2}d$.

10.55 Se aplican cargas de magnitud $P = 175$ kN paralelas al eje geométrico de una columna AB de acero laminado con perfil W250 × 44.8 y que intersecan al eje x a una distancia $e = 12$ mm de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_Y = 250$ MPa y que $E = 200$ GPa, determine el factor de seguridad que debe aplicarse con respecto a la cedencia. (*Sugerencia:* Como el factor de seguridad debe aplicarse a la carga **P**, no al esfuerzo, utilice la figura 10.24 para determinar P_Y).

10.56 Resuelva el problema 10.55 suponiendo que $e = 16$ mm y $P = 155$ kN.

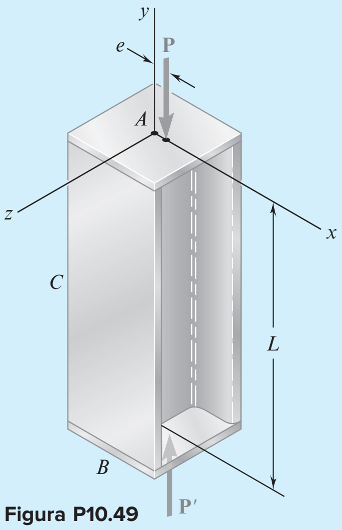


Figura P10.49

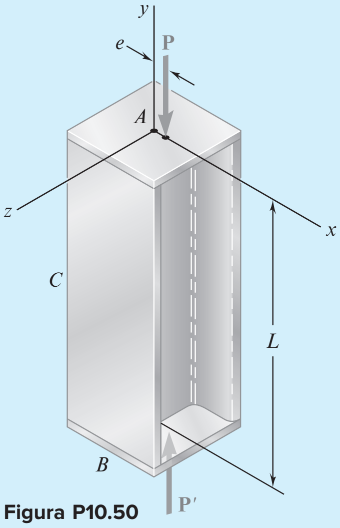


Figura P10.50

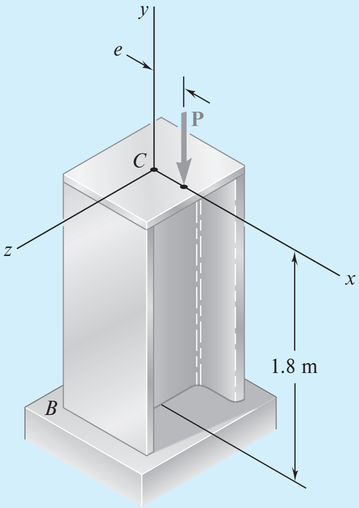


Figura P10.51

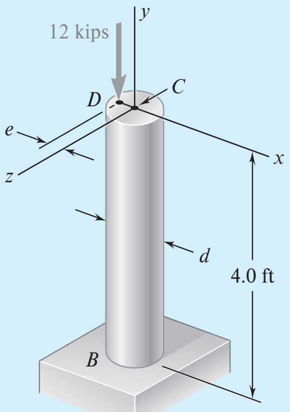


Figura P10.53

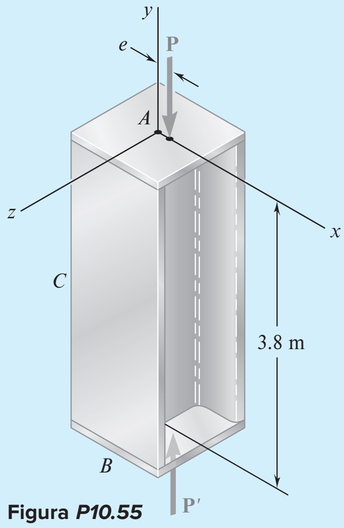


Figura *P10.55*

10.3 DISEÑO DE CARGA CÉNTRICA

En las secciones anteriores se determinó la carga crítica de una columna mediante la fórmula de Euler, y se investigaron las deformaciones y los esfuerzos en las columnas cargadas excéntricamente usando la fórmula de la secante. En cada caso, todos los esfuerzos permanecían debajo del límite de proporcionalidad y la columna era inicialmente un prisma recto homogéneo. Las columnas reales no se ajustan a esa idealización, y en la práctica el diseño de columnas se basa en fórmulas empíricas que reflejan los resultados de numerosas pruebas de laboratorio.

Durante el último siglo, muchas columnas de acero han sido probadas aplicándoles una carga axial céntrica e incrementando la carga hasta producir la falla. Los resultados de tales pruebas se presentan en la figura 10.25 donde se ha marcado un punto con la ordenada igual al esfuerzo normal σ_{cr} de falla y su abscisa igual al valor correspondiente de la relación efectiva de esbeltez L_e/r. Aunque hay dispersión considerable en los resultados, se observan regiones correspondientes a tres tipos de falla.

- Para columnas largas, donde L_e/r es grande, la falla se puede predecir con exactitud mediante la fórmula de Euler, y el valor de σ_{cr} depende del módulo de elasticidad E del acero utilizado pero no de la resistencia a la cedencia σ_Y.
- Para columnas muy cortas y bloques a compresión, la falla ocurre esencialmente como un resultado de la cedencia, y $\sigma_{cr} \approx \sigma_Y$.
- Para las columnas de longitud intermedia, la falla depende tanto de σ_Y como de E. En este rango, la falla de la columna es un fenómeno extremadamente complejo y se han usado datos de ensayo para guiar el desarrollo de especificaciones y fórmulas de diseño.

Las fórmulas empíricas para un esfuerzo permisible o crítico en términos de la relación efectiva de esbeltez se presentaron por primera vez hace más de un siglo. Desde entonces, han experimentado un proceso de refinamiento y mejora. Algunas fórmulas empíricas típicas, utilizadas para aproximar los datos de ensayo, se muestran en la figura 10.26. No siempre es posible usar una sola fórmula para todos los valores de L_e/r. La mayoría de las especificaciones de diseño utiliza fórmulas diferentes, cada una con un rango de aplicabilidad definido. En cada caso debe verificarse que la ecuación que va a usarse es aplicable para el valor de L_e/r de la columna seleccionada. Además, debe determinarse si la ecuación proporciona el valor del esfuerzo crítico para la columna, al cual se le debe aplicar el factor de seguridad apropiado, o si proporciona directamente un esfuerzo permisible.

La fotografía 10.2 ilustra algunos ejemplos de columnas que se diseñaron con el uso de dichas fórmulas para la especificación del diseño. A continuación se presentan las fórmulas de diseño para tres materiales diferentes usando el *diseño del esfuerzo permisible*, seguidas por las fórmulas para el diseño de columnas de acero, basadas en el *factor de diseño de carga y resistencia.*†

a)

b)

Fotografía 10.2 *a*) El tanque de agua se apoya en columnas de acero. *b*) La casa en construcción se estructura con columnas de madera.

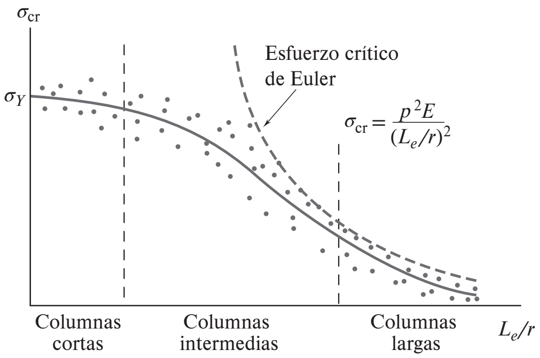


Figura 10.25 Gráfica de datos de ensayo para columnas de acero.

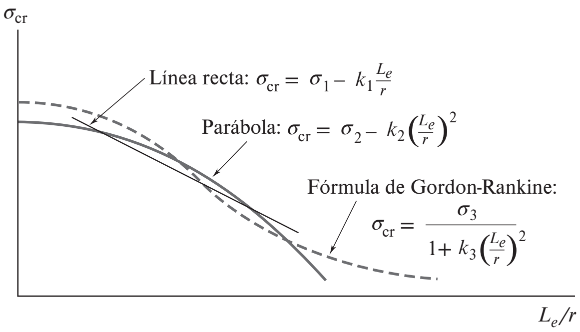


Figura 10.26 Gráficas de las fórmulas empíricas para esfuerzos críticos.

† En fórmulas de diseño específicas, la letra L siempre se refiere a la longitud efectiva de la columna.

10.3A Diseño del esfuerzo permisible

Acero estructural. Las ecuaciones más usadas para el diseño del esfuerzo permisible de columnas de acero bajo una carga céntrica se encuentran en la *especificación para construcciones con acero estructural* del American Institute of Steel Construction.† Se usa una expresión exponencial para predecir el σ_{perm} en las columnas de longitudes cortas e intermedias, y una relación de tipo Euler para las columnas largas. Las relaciones de diseño se desarrollan en dos pasos:

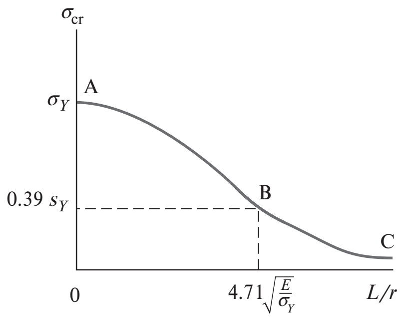


Figura 10.27 Curva de diseño para columnas recomendada por el American Institute of Steel Construction.

1. Se obtiene una curva que representa la variación de σ_{cr} como una función de L/r (figura 10.27). Es importante observar que esta curva no incorpora ningún factor de seguridad.‡ La porción AB de esta curva es

$$\sigma_{cr} = [0.658^{(\sigma_Y/\sigma_e)}]\sigma_Y \tag{10.38}$$

donde

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.39}$$

La porción BC es

$$\sigma_{cr} = 0.877\sigma_e \tag{10.40}$$

Cuando $L/r = 0$, $\sigma_{cr} = \sigma_Y$ en la ecuación (10.38). En el punto B, la ecuación (10.38) interseca la ecuación (10.40). El valor de la esbeltez L/r en la unión entre las dos ecuaciones es

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}} \tag{10.41}$$

Si L/r es menor que el valor en la ecuación (10.41), σ_{cr} se determina a partir de la ecuación (10.38), y si L/r es mayor, σ_{cr} se determina a partir de la ecuación (10.40). Con el valor de esbeltez L/r especificado en la ecuación (10.41), el esfuerzo $\sigma_e = 0.44\ \sigma_Y$. Si se utiliza la ecuación (10.40), $\sigma_{cr} = 0.877\ (0.44\ \sigma_Y) = 0.39\ \sigma_Y$.

2. Se debe usar un factor de seguridad para el diseño final. El factor de seguridad dado por la especificación es 1.67. Por lo tanto,

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} \tag{10.42}$$

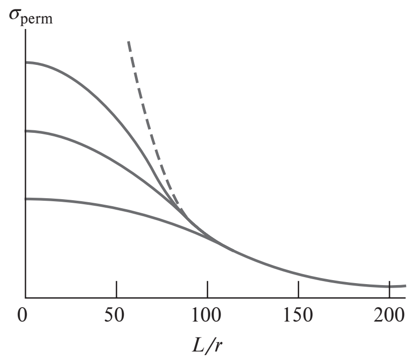


Figura 10.28 Curvas de diseño de una columna de acero para diferentes grados de acero.

Estas ecuaciones pueden emplearse con unidades SI o de uso común en Estados Unidos.

Mediante el uso de las ecuaciones (10.38), (10.40), (10.41) y (10.42), pueden determinarse los esfuerzos axiales permisibles para un grado dado de acero y cualquier valor dado de L/r. El procedimiento consiste en calcular L/r en la intersección entre las dos ecuaciones a partir de la ecuación (10.41). Para valores menores dados de L/r, se usan las ecuaciones (10.38) y (10.42) a fin de calcular σ_{perm}, y para valores mayores se emplean las ecuaciones (10.40) y (10.42). En la figura 10.28 se proporciona un ejemplo de cómo varía σ_e en función de L/r para diferentes grados de acero estructural.

† *Manual of Steel Construction*, 14a. ed., American Institute of Steel Construction, Chicago, 2011.
‡ En la *especificación para construcciones con acero estructural*, se utiliza el símbolo F para los esfuerzos.

Aplicación de conceptos 10.2

Determine la mayor longitud L no apoyada para la cual un elemento AB a compresión de acero laminado S100 × 11.5 puede soportar en forma segura la carga céntrica mostrada (figura 10.29). Suponga que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

Del apéndice C, para un perfil S100 × 11.5,

$$A = 1\ 460\ \text{mm}^2 \qquad r_x = 41.7\ \text{mm} \qquad r_y = 14.6\ \text{mm}$$

Si la carga de 60 kN deber ser soportada en forma segura,

$$\sigma_{perm} = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{1\,460 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 41.1 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Para calcular el esfuerzo crítico σ_{cr}, se inicia por suponer que L/r es mayor que la esbeltez especificada por la ecuación (10.41). Luego se utiliza la ecuación (10.40) con la ecuación (10.39) y se escribe

$$\sigma_{cr} = 0.877\sigma_e = 0.877\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

$$= 0.877\frac{\pi^2(200 \times 10^9 \text{ Pa})}{(L/r)^2} = \frac{1.731 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2}$$

Si se utiliza esta expresión en la ecuación (10.42),

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} = \frac{1.037 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2}$$

Al igualar esta expresión con el valor requerido de σ_{perm}, se tiene

$$\frac{1.037 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2} = 41.1 \times 10^6 \text{ Pa} \qquad L/r = 158.8$$

La relación de esbeltez a partir de la ecuación (10.41) es

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{200 \times 10^9}{250 \times 10^6}} = 133.2$$

El supuesto de que L/r es mayor que esta relación de esbeltez era correcto. Así, al elegir el menor de los dos radios de giro:

$$\frac{L}{r_y} = \frac{L}{14.6 \times 10^{-3} \text{ m}} = 158.8 \qquad L = 2.32 \text{ m}$$

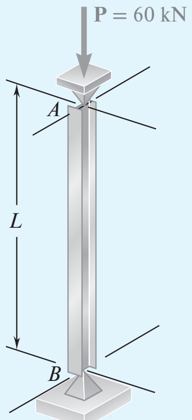


Figura 10.29 Elemento de acero laminado S100 × 11.5 cargado céntricamente.

Aluminio. Existen muchas aleaciones de aluminio que se usan en estructuras y máquinas. Para la mayoría de columnas, las especificaciones de la Aluminum Association† proporcionan dos ecuaciones para el esfuerzo permisible en las columnas bajo carga céntrica. En la figura 10.30 se muestra la variación de σ_{perm} con L/r definida por estas ecuaciones. Para las columnas cortas se usa una relación lineal entre σ_{perm} y L/r, y para las columnas largas se utiliza una ecuación del tipo de Euler. A continuación se proporcionan las ecuaciones específicas para el uso en edificios y estructuras similares en unidades del SI y de uso común en Estados Unidos, para dos aleaciones usadas comúnmente.

Aleación 6061-T6:

$$L/r < 66: \quad \sigma_{perm} = [20.3 - 0.127(L/r)]\text{ksi} \qquad \textbf{(10.43a)}$$

$$= [140 - 0.874(L/r)]\text{MPa} \qquad \textbf{(10.43b)}$$

$$L/r \geq 66: \quad \sigma_{perm} = \frac{51\,400 \text{ ksi}}{(L/r)^2} = \frac{354 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2} \qquad \textbf{(10.44a, b)}$$

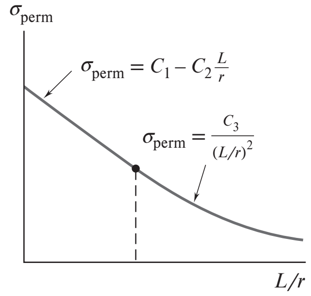


Figura 10.30 Curva de diseño para columnas, recomendada por la Aluminum Association.

† *Specifications for Aluminum Structures*, Aluminum Association, Inc., Washington D.C., 2010.

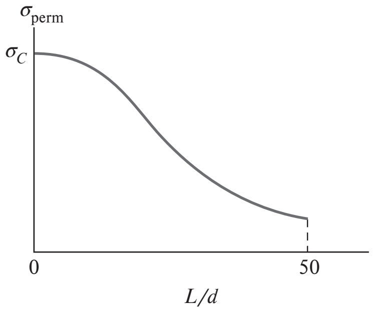


Figura 10.31 Curva de diseño para columnas, recomendada por la American Forest and Paper Association.

Aleación 2014-T6:

$$L/r < 55: \quad \sigma_{perm} = [30.9 - 0.229(L/r)]\,\text{ksi} \qquad \textbf{(10.45a)}$$

$$= [213 - 1.577(L/r)]\,\text{MPa} \qquad \textbf{(10.45b)}$$

$$L/r \geq 55: \quad \sigma_{perm} = \frac{55\,400\text{ ksi}}{(L/r)^2} = \frac{382 \times 10^3\text{ MPa}}{(L/r)^2} \qquad \textbf{(10.46a, b)}$$

Madera. Para el diseño de columnas de madera, las especificaciones de la American Forest and Paper Association† proporcionan una sola ecuación para obtener el esfuerzo permisible en columnas cortas, intermedias y largas bajo carga céntrica. Para una columna con sección transversal *rectangular* de lados b y d, donde $d < b$, la variación de σ_{perm} con L/d se muestra en la figura 10.31.

Para columnas sólidas fabricadas con una sola pieza de madera o con láminas aglutinadas, el esfuerzo permisible σ_{perm} es

$$\sigma_{perm} = \sigma_C C_P \qquad \textbf{(10.47)}$$

donde σ_C es el esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra.‡ Los ajustes realizados para obtener σ_C se incluyen en las especificaciones para dar cuenta de las diferentes variaciones (como en la duración de la carga). El factor de estabilidad de la columna C_P interviene en la longitud de esta y está definido por

$$C_P = \frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c}\right]^2 - \frac{\sigma_{CE}/\sigma_C}{c}} \qquad \textbf{(10.48)}$$

El parámetro c tiene que ver con el tipo de columna, y es igual a 0.8 para columnas de madera aserrada y 0.90 para columnas de láminas de madera aglutinada. El valor de σ_{CE} está definido por

$$\sigma_{CE} = \frac{0.822E}{(L/d)^2} \qquad \textbf{(10.49)}$$

donde E es un módulo de elasticidad ajustado para el pandeo de columnas. Las columnas en las que L/d excede 50 no están permitidas por la *Especificación Nacional de Diseño para la Construcción en Madera.*

† *National Design Specification for Wood Construction*, American Forest & Paper Association, American Wood Council, Washington, D.C., 2012.
‡ En la *National Design Specification for Wood Construction*, se utiliza el símbolo F para denotar los esfuerzos.

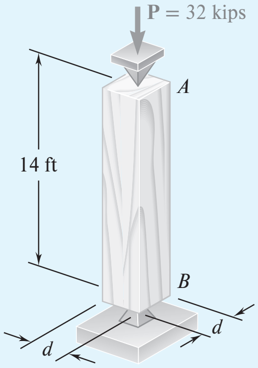


Figura 10.32 Columna de madera cargada céntricamente.

Aplicación de conceptos 10.3

Si se sabe que la columna AB (figura 10.32) tiene una longitud efectiva de 14 ft y debe soportar en forma segura una carga de 32 kips, diséñela usando una sección cuadrada laminar aglutinada. El módulo de elasticidad ajustado para la madera es $E = 800 \times 10^3$ psi, y el esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 1\,060$ psi.

Se observa que $c = 0.90$ para las columnas de madera laminar aglutinada. Al calcular el valor de σ_{CE}, usando la ecuación (10.49), resulta

$$\sigma_{CE} = \frac{0.822E}{(L/d)^2} = \frac{0.822(800 \times 10^3\text{ psi})}{(168\text{ in}/d)^2} = 23.299d^2\text{ psi}$$

Se emplea la ecuación (10.48) para expresar el factor de estabilidad de la columna en términos de d, con $(\sigma_{CE}/\sigma_C) = (23.299d^2/1.060 \times 10^3) = 21.98 \times 10^{-3}\ d^2$,

$$C_P = \frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c}\right]^2 - \frac{\sigma_{CE}/\sigma_C}{c}}$$

$$= \frac{1 + 21.98 \times 10^{-3} d^2}{2(0.90)} - \sqrt{\left[\frac{1 + 21.98 \times 10^{-3} d^2}{2(0.90)}\right]^2 - \frac{21.98 \times 10^{-3} d^2}{0.90}}$$

Como la columna debe soportar 32 kips, la ecuación (10.47) da

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{32 \text{ kips}}{d^2} = \sigma_C C_P = 1.060 C_P$$

Al resolver esta ecuación para C_P y sustituir el valor en la ecuación previa, se obtiene

$$\frac{30.19}{d^2} = \frac{1 + 21.98 \times 10^{-3} d^2}{2(0.90)} - \sqrt{\left[\frac{1 + 21.98 \times 10^{-3} d^2}{2(0.90)}\right]^2 - \frac{21.98 \times 10^{-3} d^2}{0.90}}$$

Al resolver d por prueba y error queda $d = 6.45$ in.

10.3B Diseño del factor de carga y resistencia

***Acero estructural.** En la sección 1.5D se proporciona un método alternativo de diseño basado en la determinación de la carga en la que la estructura deja de ser útil. El diseño se basa en la desigualdad dada por

$$\gamma_D P_D + \gamma_L P_L \leq \phi P_U \qquad \textbf{(1.27)}$$

El diseño de columnas de acero sometidas a una carga céntrica, usando el Factor de Diseño de Carga y Resistencia con la especificación del American Institute of Steel Construction Specifications es similar al Diseño del Esfuerzo Permisible. Si se utiliza el esfuerzo crítico σ_{cr}, la carga última P_U es

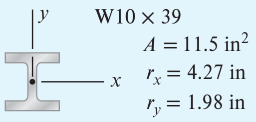
$$P_U = \sigma_{cr} A \qquad \textbf{(10.50)}$$

El esfuerzo crítico σ_{cr} se determina usando la ecuación (10.41) para determinar la esbeltez en la unión entre las ecuaciones (10.38) y (10.40). Si la esbeltez L/r especificada es menor que el valor de la ecuación (10.41), se utiliza la ecuación (10.38), y si es mayor, se emplea la ecuación (10.40). Las ecuaciones se pueden utilizar con unidades del SI o de uso común en Estados Unidos.

Mediante el uso de la ecuación (10.50) con la ecuación (1.27), es posible determinar si el diseño es aceptable. Primero se calcula la relación de esbeltez a partir de la ecuación (10.41). Para valores de L/r menores que esta esbeltez, la *carga última* P_U usada en la ecuación (1.27) se obtiene de la ecuación (10.50), donde σ_{cr} se determina a partir de la ecuación (10.38). Para valores de L/r mayores que esta esbeltez, la *carga última* P_U se obtiene de la ecuación (10.50) con la ecuación (10.40). La especificación del factor de diseño para carga y resistencia del American Institute of Steel Construction especifica que el *factor de resistencia* ϕ es de 0.90.

Nota: Las fórmulas de diseño que se presentaron en la sección 10.3 son ejemplos de diferentes enfoques de diseño. Estas ecuaciones no proporcionan todos los requisitos necesarios para muchos diseños, y el estudiante debe remitirse a las especificaciones apropiadas de diseño antes de intentar hacer diseños reales.

Problema modelo 10.3



La columna AB es un perfil W10 × 39 de acero laminado con $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. Determine la carga céntrica permisible **P** *a*) si la longitud efectiva de la columna en cualquier dirección es de 24 ft, *b*) si se proporciona un refuerzo para evitar el movimiento del punto medio C en el plano xz. (Suponga que el movimiento del punto C en el plano yz no se ve afectado por el refuerzo).

ESTRATEGIA: La carga céntrica permisible para el inciso *a* se determina a partir de la ecuación de diseño del esfuerzo permisible que rige para el acero, la ecuación (10.38) o la ecuación (10.40), basada en el pandeo asociado con el eje que posee un menor radio de giro, puesto que las longitudes efectivas son las mismas. En el inciso *b*, es necesario determinar las relaciones de esbeltez efectivas para ambos ejes, incluyendo la longitud efectiva reducida debida al refuerzo. La mayor relación de esbeltez regirá el diseño.

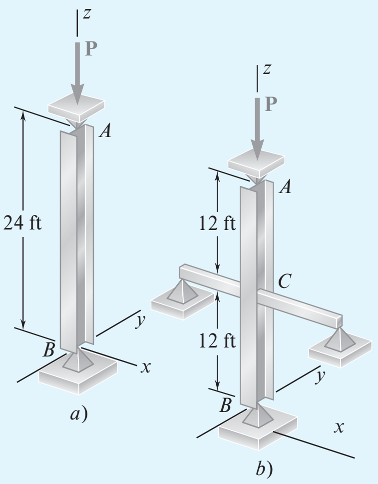


Figura 1 Columna cargada céntricamente *a*) sin reforzar, *b*) reforzada.

MODELAR: Se calcula primero el valor de la relación de esbeltez de la ecuación (10.41) correspondiente a la resistencia a la cedencia $\sigma_Y = 36$ ksi.

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{29 \times 10^6}{36 \times 10^3}} = 133.7$$

ANALIZAR:

***a*) Longitud efectiva = 24 ft.** La columna se muestra en la figura 1*a*. Si se sabe que $r_y < r_x$, el pandeo tendrá lugar en el plano xz (figura 2). Para $L = 24$ ft y $r = r_y = 1.98$ in, la relación de esbeltez es

$$\frac{L}{r_y} = \frac{(24 \times 12)\text{ in}}{1.98\text{ in}} = \frac{288\text{ in}}{1.98\text{ in}} = 145.5$$

Como $L/r > 133.7$, se utiliza la ecuación (10.39) en la ecuación (10.40) para determinar

$$\sigma_{cr} = 0.877\sigma_e = 0.877\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = 0.877\frac{\pi^2(29 \times 10^3\text{ ksi})}{(145.5)^2} = 11.86\text{ ksi}$$

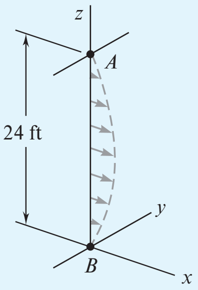


Figura 2 Perfil pandeado para la columna sin reforzar.

El esfuerzo permisible se determina usando la ecuación (10.42)

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} = \frac{11.86\text{ ksi}}{1.67} = 7.10\text{ ksi}$$

y

$$P_{perm} = \sigma_{perm}A = (7.10\text{ ksi})(11.5\text{ in}^2) = 81.7\text{ kips}$$ ◀

***b*) Refuerzo en el punto medio *C*.** La columna se muestra en la figura 1*b*. Como el refuerzo evita el movimiento del punto C en el plano xz, pero no en el plano yz, debe calcularse la relación de esbeltez correspondiente al pandeo en cada plano (figura 3) y determinarse cuál es la mayor.

Plano xz: Longitud efectiva = 12 ft = 144 in, $r = r_y = 1.98$ in
$L/r = (144\text{ in})/(1.98\text{ in}) = 72.7$

Plano yz: Longitud efectiva = 24 ft = 288 in, $r = r_x = 4.27$ in
$L/r = (288\text{ in})/(4.27\text{ in}) = 67.4$

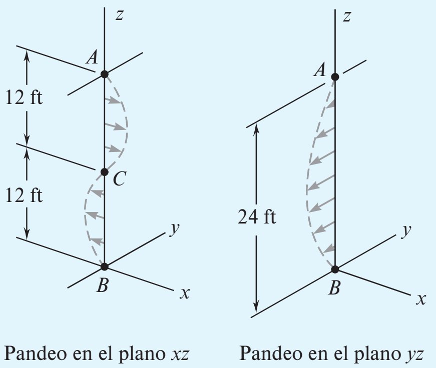


Figura 3 Perfiles pandeados para la columna reforzada.

Como la mayor relación de esbeltez corresponde a una carga permisible menor, se elige $L/r = 72.7$. Puesto que es menor que $L/r = 133.7$, se utilizan las ecuaciones (10.39) y (10.38) para determinar σ_{cr}:

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2(29 \times 10^3 \text{ ksi})}{(72.7)^2} = 54.1 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{cr} = [0.658^{(\sigma_Y/\sigma_e)}]F_Y = [0.658^{(36 \text{ ksi}/54.1 \text{ ksi})}]\, 36 \text{ ksi} = 27.3 \text{ ksi}$$

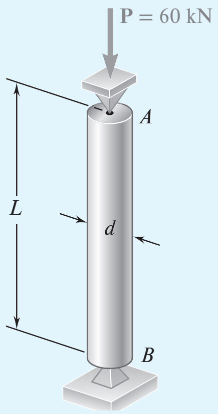
El esfuerzo permisible calculado mediante la ecuación (10.42) y la carga permisible son

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} = \frac{27.3 \text{ ksi}}{1.67} = 16.32 \text{ ksi}$$

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}} A = (16.32 \text{ ksi})(11.5 \text{ in}^2) \quad P_{\text{perm}} = 187.7 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Este problema modelo muestra el beneficio de usar un refuerzo para reducir la longitud efectiva para el pandeo alrededor del eje débil cuando una columna tiene radios de giro significativamente diferentes, lo que es típico para las columnas de patín ancho fabricadas en acero.

Problema modelo 10.4



La varilla circular que se muestra en la figura es de una aleación de aluminio 2014-T6; determine la barra de menor diámetro que puede usarse para soportar la carga céntrica $P = 60$ kN si *a*) $L = 750$ mm, *b*) $L = 300$ mm.

ESTRATEGIA: Se utilizan las ecuaciones del esfuerzo permisible del aluminio para diseñar la columna, es decir, para determinar el diámetro más pequeño que puede utilizarse. Como hay dos ecuaciones de diseño basadas en L/r, primero debe suponerse que una de ellas rige el diseño. Después, se verifica el supuesto.

MODELAR: Para la sección transversal de la varilla circular mostrada en la figura 1,

$$I = \frac{\pi}{4}c^4 \qquad A = \pi c^2 \qquad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi c^4/4}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$

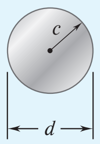


Figura 1 Sección transversal de la columna de aluminio.

ANALIZAR:

***a*) Longitud de 750 mm.** Como el diámetro de la varilla no se conoce, debe suponerse un valor de L/r; se supondrá $L/r > 55$ y se usará la ecuación (10.46). Para la carga céntrica **P**, $\sigma = P/A$ y se escribe

$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{perm}} = \frac{382 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \frac{382 \times 10^9 \text{Pa}}{\left(\dfrac{0.750 \text{ m}}{c/2}\right)^2}$$

$$c^4 = 112.5 \times 10^{-9} \text{m}^4 \qquad c = 18.31 \text{ mm}$$

Para $c = 18.31$ mm, la relación de esbeltez es

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{750 \text{ mm}}{(18.31 \text{ mm})/2} = 81.9 > 55$$

El supuesto de que L/r es mayor que 55 es correcto y para $L = 750$ mm el diámetro requerido es

$$d = 2c = 2(18.31 \text{ mm}) \qquad d = 36.6 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***b*) Longitud de 300 mm.** De nuevo se supone que $L/r > 55$. Usando la ecuación (10.46) y siguiendo el procedimiento de la parte *a*, $c = 11.58$ mm y $L/r = 51.8$. Como L/r es menor que 55, este supuesto es incorrecto. Ahora se debe suponer que $L/r < 55$ y utilizar la ecuación (10.45*b*) para el diseño de esta varilla.

$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{perm}} = \left[213 - 1.577\left(\frac{L}{r}\right)\right]\text{MPa}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \left[213 - 1.577\left(\frac{0.3 \text{ m}}{c/2}\right)\right] 10^6 \text{ Pa}$$

$$c = 11.95 \text{ mm}$$

Para $c = 11.95$ mm, la relación de esbeltez es

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{300 \text{ mm}}{(11.95 \text{ mm})/2} = 50.2$$

El segundo supuesto de que $L/r < 55$ es correcto. Para $L = 300$ mm, el diámetro requerido es

$$d = 2c = 2(11.95 \text{ mm}) \qquad d = 23.9 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

Problemas

10.57 Utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible para una columna de 6 m de longitud efectiva que está hecha de los siguientes tipos de acero laminado: *a*) W200 × 35.9, *b*) W200 × 86. Use $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.58 Se usa un perfil de acero laminado W8 × 31 para formar una columna de 21 ft de longitud efectiva. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible si la resistencia a la cedencia del grado de acero utilizado es *a*) $\sigma_Y = 36$ ksi, *b*) $\sigma_Y = 50$ ksi. Considere que $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.59 Un tubo estructural rectangular que tiene la sección transversal mostrada en la figura, se utiliza como una columna con 5 m de longitud efectiva. Si se sabe que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la mayor carga céntrica que se puede aplicar a la columna de acero.

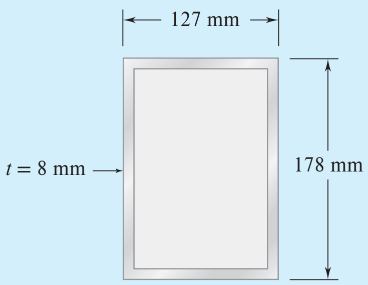


Figura P10.59

10.60 Una columna con una longitud efectiva de 3.5 m está hecha de madera con sección transversal de 114 × 140 mm. Si se sabe que para el grado de madera utilizada el esfuerzo ajustado permisible para la compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 7.6$ MPa y que el módulo ajustado $E = 2.8$ GPa, determine la carga céntrica máxima permisible para la columna.

10.61 Una columna de madera con sección transversal de 7.5 × 5.5 in tiene una longitud efectiva de 18 ft. Si se sabe que para el tipo de madera usada el esfuerzo ajustado permisible para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 1\,200$ psi y que el módulo ajustado $E = 470 \times 10^3$ psi, determine la carga céntrica máxima permisible para la columna.

10.62 La barra *AB* está libre en su extremo *A* y fija en su base *B*. Determine la carga céntrica **P** permisible si la aleación de aluminio empleada es *a*) 6061-T6, *b*) 2014-T6.

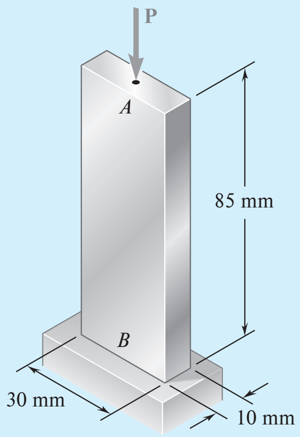


Figura P10.62

10.63 Un elemento a compresión tiene la sección transversal que se muestra en la figura y una longitud efectiva de 5 ft. Si se sabe que la aleación de aluminio usada es 2014-T6, determine la carga céntrica permisible.

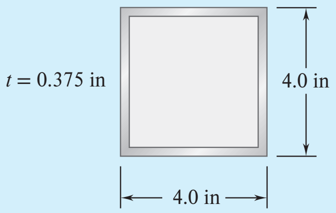


Figura *P10.63*

10.64 Un elemento a compresión tiene la sección transversal que se muestra en la figura y una longitud efectiva de 5 ft. Si se sabe que la aleación de aluminio usada es 6061-T6, determine la carga céntrica permisible.

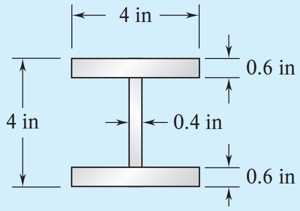


Figura P10.64

10.65 Un elemento a compresión de 8.2 ft de longitud efectiva se obtiene al unir con pernos dos ángulos de acero L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ in, como se muestra en la figura. Use el diseño del esfuerzo permisible y determine la carga céntrica permisible para la columna. Utilice $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

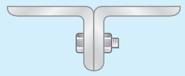


Figura P10.65

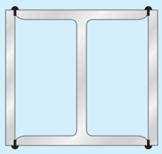


Figura P10.66

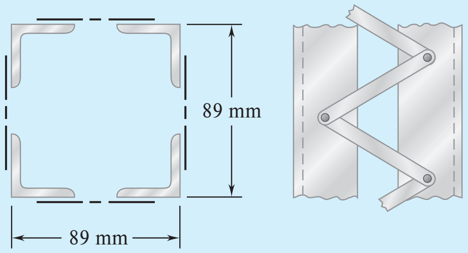


Figura *P10.67*

10.66 Un elemento a compresión de 9 m de longitud efectiva se obtiene al soldar dos placas de acero de 10 mm de grosor a un perfil de acero laminado W250 × 80, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible para el elemento a compresión.

10.67 Una columna de 6.4 m de longitud efectiva se obtiene al conectar cuatro ángulos de acero L89 × 89 × 9.5 mm con barras de enlace, como se muestra en la figura. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible para la columna. Use $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa.

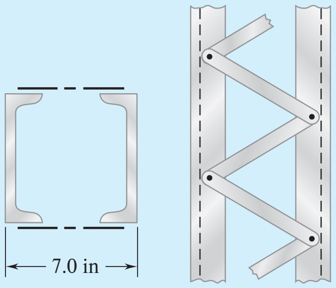


Figura P10.68

10.68 Una columna de 21 ft de longitud efectiva se obtiene al conectar dos canales de acero C10 × 20 con barras de enlace, como se muestra en la figura. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible para la columna. Use $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

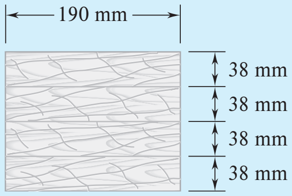


Figura P10.69

10.69 La columna laminar aglutinada que se muestra en la figura está hecha con cuatro tablas, cada una con sección transversal de 38 × 190 mm. Si se sabe que para el grado de madera empleada el esfuerzo ajustado permisible para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 10$ MPa y $E = 12$ GPa, determine la carga céntrica máxima permisible si la longitud efectiva de la columna es *a*) 7 m, *b*) 3 m.

10.70 Un tubo estructural de aluminio se refuerza al remachar dos placas a su costado como se observa en la figura, para usarlo como una columna de 1.7 m de longitud efectiva. Si se sabe que todo el material es aluminio 2014-T6, determine la máxima carga céntrica permisible.

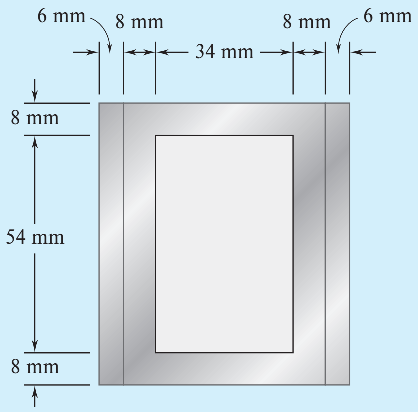


Figura *P10.70*

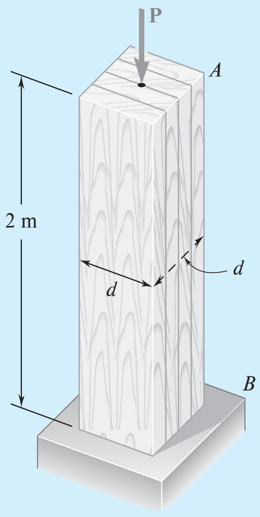


Figura P10.71

10.71 La columna laminar pegada que se muestra en la figura está libre en el extremo *A* y fija en su base *B*. Si se usa madera con un esfuerzo permisible ajus-

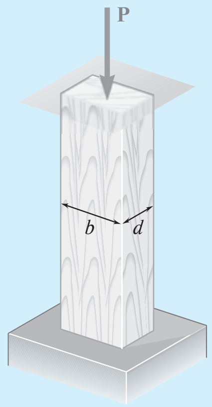


Figura P10.72

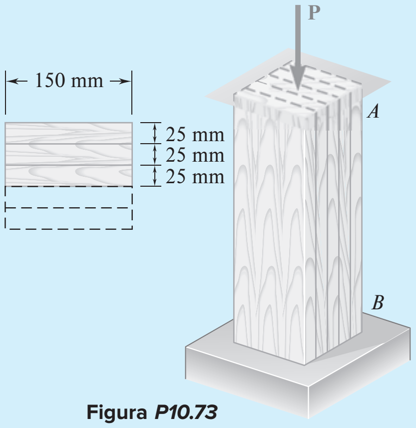


Figura *P10.73*

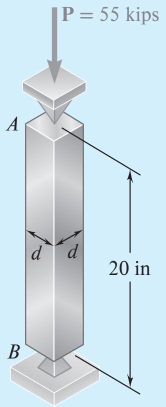


Figura P10.74

tado para la compresión, paralelo a la fibra, de $\sigma_C = 9.2$ MPa y un módulo de elasticidad ajustado $E = 5.7$ GPa, determine la sección transversal mínima que puede soportar una carga céntrica de 62 kN.

10.72 Se aplica una carga céntrica de 18 kips a una columna rectangular de madera con 22 ft de longitud efectiva. Si se usa madera para la cual el esfuerzo permisible a compresión paralelo a la fibra es $\sigma_C = 1\,050$ psi y se sabe que el módulo ajustado $E = 440 \times 10^3$ psi, determine la menor sección transversal cuadrada que puede utilizarse. Use $b = 2d$.

10.73 Una columna laminada que tiene 2.1 m de longitud efectiva se hará al pegar tablas de 25 × 150 mm en su sección transversal. Si se sabe que, para el grado de madera usado, el esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 7.7$ MPa y el módulo ajustado es $E = 5.4$ GPa, determine el número de piezas de madera que debe usarse para soportar la carga céntrica mostrada en la figura, cuando *a*) $P = 52$ kN, *b*) $P = 108$ kN.

10.74 Para una varilla hecha con la aleación de aluminio 2014-T6, seleccione la sección transversal cuadrada mínima que puede usarse si la varilla debe soportar una carga céntrica de 55 kips.

10.75 Una columna de aluminio debe soportar una carga céntrica de 72 kN como se muestra en la figura. Si se utiliza la aleación de aluminio 6061-T6, determine la mínima dimensión b que puede utilizarse.

10.76 Un tubo de aluminio de 90 mm de diámetro exterior debe soportar una carga céntrica de 120 kN. Si se sabe que los tubos del lote disponible están hechos de una aleación 2014-T6 y su espesor de pared aumenta en incrementos de 3 mm, desde 6 mm hasta 15 mm, determine el tubo más ligero que puede emplearse.

10.77 Una columna con longitud efectiva de 4.6 m debe soportar una carga céntrica de 525 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño del esfuerzo permisible para seleccionar el perfil de patín ancho con una profundidad nominal de 200 mm que debe usarse.

10.78 Una columna con longitud efectiva de 22.5 ft debe soportar una carga céntrica de 288 kips. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para seleccionar el perfil de patín ancho con profundidad nominal de 14 in que debe usarse. Considere que $\sigma_Y = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

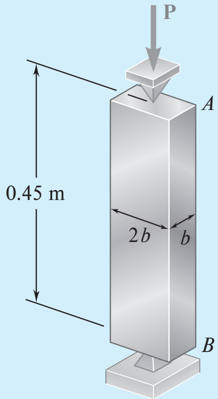


Figura P10.75

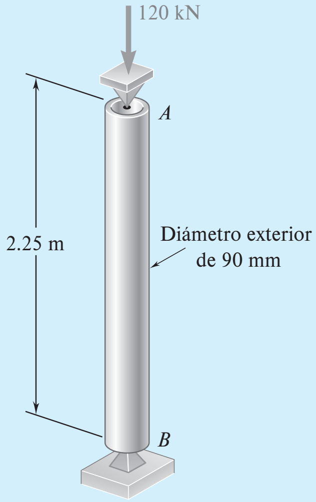


Figura *P10.76*

10.79 Una columna con longitud efectiva de 17 ft debe soportar una carga céntrica de 235 kips. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para seleccionar el perfil de patín ancho con profundidad nominal de 10 in que debe usarse. Considere que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.80 Una barra de acero *AB* debe soportar una carga céntrica **P**. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la menor dimensión *d* de la sección transversal que puede utilizarse cuando *a*) $P = 108$ kN, *b*) $P = 166$ kN. Utilice $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

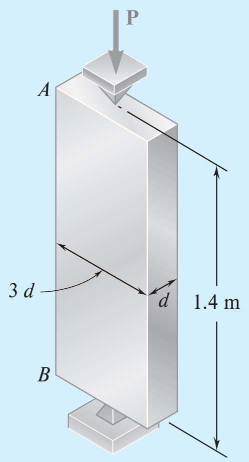


Figura P10.80

10.81 Un tubo estructural cuadrado que tiene la sección transversal mostrada en la figura se utiliza como una columna con longitud efectiva de 26 ft para soportar una carga céntrica de 65 kips. Si se sabe que los tubos disponibles tienen espesores de pared en incrementos de $\frac{1}{16}$ in desde $\frac{1}{4}$ in hasta $\frac{3}{4}$ in, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar el tubo más ligero que puede utilizarse. Considere que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

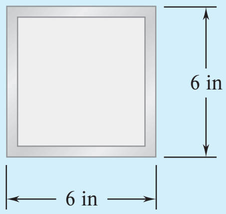


Figura *P10.81*

10.82 Resuelva el problema 10.81 suponiendo que la longitud efectiva de la columna se reduce a 20 ft.

10.83 Se remachan dos ángulos de 89 × 64 mm como se muestra en la figura para usarse como una columna de 2.4 m de longitud efectiva a fin de sostener una carga céntrica de 180 kN. Si se sabe que los ángulos disponibles tienen espesores de 6.4 mm, 9.5 mm y 12.7 mm, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar los ángulos más ligeros que podrían usarse. Considere que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

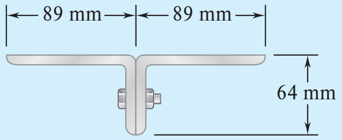


Figura P10.83

10.84 Se remachan dos ángulos de 89 × 64 mm como se muestra en la figura para usarse como una columna de 2.4 m de longitud efectiva a fin de sostener una carga céntrica de 325 kN. Si se sabe que los ángulos disponibles tienen espesores de 6.4 mm, 9.5 mm y 12.7 mm, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar los ángulos más ligeros que podrían usarse. Considere que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

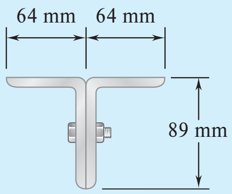


Figura P10.84

***10.85** Un tubo de acero rectangular que tiene la sección transversal mostrada en la figura se utiliza como una columna de 14.5 ft de longitud efectiva. Si se sabe que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, utilice el diseño por el factor de carga y resistencia para determinar la mayor carga viva céntrica que puede aplicarse si la carga muerta céntrica es de 54 kips. Considere que el factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

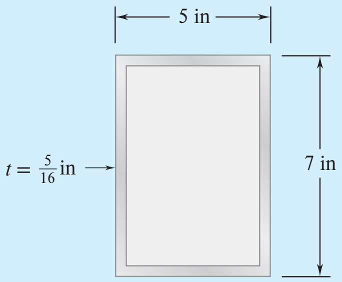


Figura P10.85

***10.86** Una columna con longitud efectiva de 5.8 m soporta una carga céntrica, con una relación de cargas muertas y vivas igual a 1.35. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia $\phi = 0.90$. Use el diseño por factor de carga y resistencia para determinar las cargas vivas y muertas céntricas permisibles si la columna está hecha con los siguientes perfiles de acero laminado: *a*) W250 × 67, *b*) W360 × 101. Considere que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa.

***10.87** Una columna de acero de 5.5 m de longitud efectiva debe soportar una carga muerta céntrica de 310 kN y una carga viva céntrica de 375 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño por factor de carga y resistencia para seleccionar el perfil de patín ancho con una profundidad nominal de 310 mm que debe emplearse. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

***10.88** El tubo de acero que tiene la sección transversal mostrada en la figura se emplea como una columna de 15 ft de longitud efectiva para sostener una carga muerta céntrica de 51 kips y una carga viva céntrica de 58 kips. Si se sabe que los tubos disponibles están fabricados con espesores de pared que se incrementan en $\frac{1}{16}$ in desde $\frac{3}{16}$ in hasta $\frac{3}{8}$ in, utilice el diseño por factor de carga y resistencia para determinar el tubo más ligero que puede emplearse. Considere que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

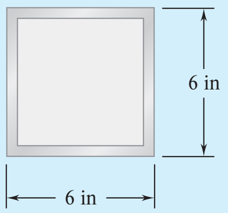


Figura P10.88

10.4 DISEÑO DE CARGA EXCÉNTRICA

En esta sección se estudiará el diseño de columnas sometidas a una carga excéntrica. Las fórmulas empíricas desarrolladas en la sección previa para columnas bajo una carga céntrica pueden modificarse y usarse cuando la carga **P** aplicada a la columna tiene una excentricidad conocida *e*.

Se recuerda, de la sección 4.7, que una carga excéntrica **P** aplicada en un plano de simetría puede reemplazarse por un sistema equivalente que consta de una carga céntrica **P** y un momento **M** de momento $M = Pe$, donde *e* es la distancia de la línea de acción desde la carga hasta el eje longitudinal de la columna (figura 10.33). Los esfuerzos normales ejercidos en una sección transversal de la columna se obtienen superponiendo los esfuerzos debidos a la carga céntrica **P** y al momento **M** (figura 10.34), siempre que la sección considerada no esté muy próxima a ninguno de los extremos de la columna y siempre que los esfuerzos incorporados no excedan el límite de proporcionalidad del material. Los esfuerzos normales debidos a la carga excéntrica **P** pueden expresarse como:

$$\sigma = \sigma_{\text{céntrico}} + \sigma_{\text{flexión}} \tag{10.51}$$

El esfuerzo máximo de compresión en la columna es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{10.52}$$

En una columna diseñada adecuadamente, el esfuerzo máximo dado en la ecuación (10.52) no debe exceder el esfuerzo permisible para la columna. Con el fin de satisfacer este requisito pueden utilizarse dos métodos alternos: el *método del esfuerzo permisible* y el *método de interacción.*

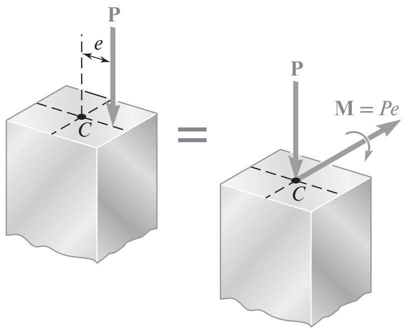


Figura 10.33 Carga axial excéntrica reemplazada con una carga céntrica equivalente y un momento.

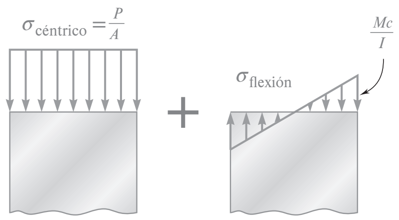


Figura 10.34 El esfuerzo normal de una columna cargada excéntricamente es la superposición de los esfuerzos axial céntrico y de flexión.

Método del esfuerzo permisible. Este método se basa en el supuesto de que los esfuerzos permisibles para una columna con carga excéntrica son iguales para la misma

con carga céntrica. Por lo tanto, $\sigma_{máx} \leq \sigma_{perm}$, donde σ_{perm} es el esfuerzo permisible bajo carga céntrica. Al sustituir $\sigma_{máx}$ de la ecuación (10.52), resulta

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{perm} \tag{10.53}$$

El esfuerzo permisible se determina mediante las mismas ecuaciones de la sección 10.3. Para un material dado, estas ecuaciones expresan σ_{perm} como una función de la relación de esbeltez de la columna. Los códigos de ingeniería requieren que se use la mayor relación de esbeltez de la columna para determinar el esfuerzo permisible, sin importar que este valor corresponda o no al plano real de flexión. Este requisito a veces da como resultado un diseño extremadamente conservador.

Aplicación de conceptos 10.4

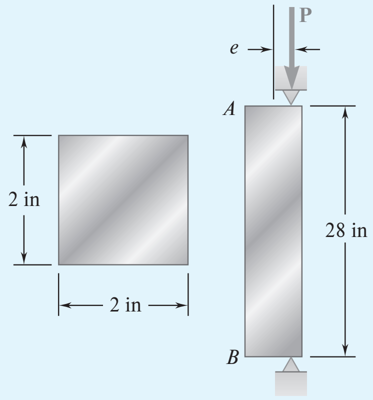


Figura 10.35 Columna sujeta a una carga axial excéntrica.

Una columna con sección transversal cuadrada de 2 in y 28 in de longitud efectiva está hecha de aluminio 2014-T6 (figura 10.35). Usando el método del esfuerzo permisible, determine la máxima carga P que pueda soportar en forma segura con una excentricidad de 0.8 in.

Primero se calcula el radio de giro r con los datos dados:

$$A = (2 \text{ in})^2 = 4 \text{ in}^2 \qquad I = \tfrac{1}{12}(2 \text{ in})^4 = 1.333 \text{ in}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1.333 \text{ in}^4}{4 \text{ in}^2}} = 0.5774 \text{ in}$$

Luego se calcula $L/r = (28 \text{ in})/(0.5774 \text{ in}) = 48.50$.

Como $L/r < 55$, se utiliza la ecuación (10.45a) para determinar el esfuerzo permisible en una columna de aluminio sometida a carga céntrica.

$$\sigma_{perm} \; [30.9 - 0.229(48.50)] = 19.79 \text{ ksi}$$

Ahora se recurre a la ecuación (10.53) con $M = Pe$ y $c = \frac{1}{2}(2 \text{ in}) = 1$ in para determinar la carga permisible:

$$\frac{P}{4 \text{ in}^2} + \frac{P(0.8 \text{ in})(1 \text{ in})}{1.333 \text{ in}^4} \leq 19.79 \text{ ksi}$$

$$P \leq 23.3 \text{ kips}$$

La carga máxima que puede aplicarse con seguridad es $P = 23.3$ kips.

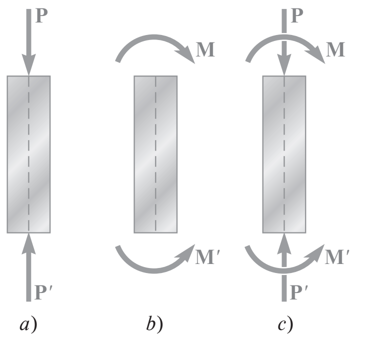


Figura 10.36 Columna sometida a *a*) carga axial céntrica, *b*) flexión pura, *c*) carga excéntrica.

Método de interacción. Recuerde que el esfuerzo permisible en una columna sometida a carga céntrica (figura 10.36a) suele ser menor que el esfuerzo permisible en una columna sometida a flexión pura (figura 10.36b), puesto que toma en cuenta la posibilidad del pandeo. Por lo tanto, cuando se utiliza el método del esfuerzo permisible para diseñar una columna bajo carga excéntrica, de modo que la suma de los esfuerzos debidos a la carga céntrica **P** y al momento flector **M** (figura 10.36c) no debe exceder el esfuerzo permisible para una columna con carga céntrica, el diseño resultante con frecuencia es muy conservador. Es posible desarrollar un método mejorado al reescribir la ecuación (10.53) en la forma:

$$\frac{P/A}{\sigma_{perm}} + \frac{Mc/I}{\sigma_{perm}} \leq 1 \tag{10.54}$$

y al sustituir σ_{perm} en el primero y segundo términos los esfuerzos permisibles que corresponden, respectivamente, a la carga céntrica de la figura 10.36*a* y a la de la flexión pura de la figura 10.36*b*, se tiene

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \leq 1 \qquad (10.55)$$

Esta ecuación se conoce como *fórmula de interacción.*

Cuando $M = 0$, el uso de la ecuación (10.55) conduce al diseño de una columna céntricamente cargada por el método de la sección 10.3. Por otra parte, cuando $P = 0$, el uso de la ecuación da como resultado el diseño de una viga sometida a flexión pura por el método de la sección 5.3. Cuando P y M son ambos diferentes de cero, la ecuación de interacción produce un diseño que toma en cuenta la capacidad del elemento para resistir la flexión y la carga axial. En todos los casos $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}$ se determina usando la mayor relación de esbeltez de la columna sin importar el plano en donde ocurre la flexión.†

Aplicación de conceptos 10.5

Utilice el método de interacción para determinar la máxima carga P que puede soportar en forma segura la columna de la aplicación de conceptos 10.4 con una excentricidad de 0.8 in. El esfuerzo permisible a la flexión es de 24 ksi.

El valor de $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}$ ya ha sido determinado, entonces

$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}} = 19.79 \text{ ksi} \qquad (\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}} = 24 \text{ ksi}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (10.55),

$$\frac{P/A}{19.79 \text{ ksi}} + \frac{Mc/I}{24 \text{ ksi}} \leq 1.0$$

Al usar los datos numéricos de la Aplicación de conceptos 10.4 se escribe

$$\frac{P/4}{19.79 \text{ ksi}} + \frac{P(0.8)(1.0)/1.333}{24 \text{ ksi}} \leq 1.0$$

$$P \leq 26.6 \text{ kips}$$

La carga máxima que puede aplicarse con seguridad es $P = 26.6$ kips.

Cuando la carga excéntrica **P** no se aplica en un plano de simetría, causa flexión con respecto a los dos ejes principales de la sección transversal de la columna. Entonces, la carga **P** puede reemplazarse por una carga céntrica **P** y dos momentos $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$, como se muestra en la figura 10.37. La fórmula de interacción que debe usarse es

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{|M_x| z_{\text{máx}}/I_x}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} + \frac{|M_z| x_{\text{máx}}/I_z}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \leq 1 \qquad (10.56)$$

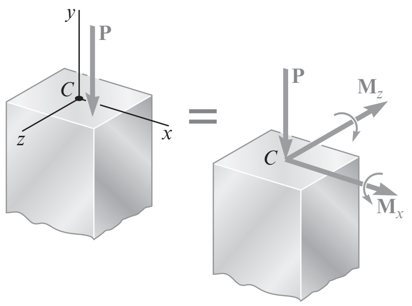
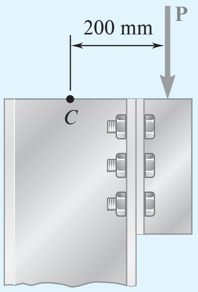


Figura 10.37 Carga céntrica y momentos equivalentes para una carga axial excéntrica que causa flexión biaxial.

† Este procedimiento es requerido por todos los códigos principales para el diseño de elementos de acero, aluminio y madera a compresión. Además, muchas especificaciones requieren el uso de un factor adicional en el segundo término de la ecuación (10.55). Este factor tiene en cuenta los esfuerzos adicionales resultantes de la deflexión de la columna debidos a la flexión.

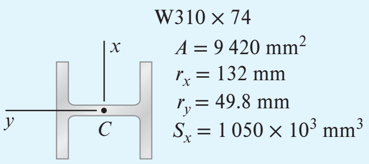
Problema modelo 10.5



Utilice el método del esfuerzo permisible para determinar la mayor carga **P** que puede ser soportada con seguridad por una columna de acero W310 × 74 con 4.5 m de longitud efectiva. Considere que $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.

ESTRATEGIA: Se determinará el esfuerzo céntrico permisible para la columna, usando la ecuación que rige el diseño del esfuerzo permisible para el acero, ecuación (10.38) o ecuación (10.40) con la ecuación (10.42). Después se usará la ecuación (10.53) para calcular la carga **P**.

MODELAR y ANALIZAR:
La mayor relación de esbeltez es $L/r_y = (4.5 \text{ m})/(0.0498 \text{ m}) = 90.4$. Utilizando la ecuación (10.41) con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, la relación de esbeltez en la unión entre las dos ecuaciones para σ_{cr} es $L/r = 133.2$. Por lo tanto, se utilizan las ecuaciones (10.38) y (10.39), y $\sigma_{cr} = 162.2$ MPa. Si se utiliza la ecuación (10.42), el esfuerzo permisible es



$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}} = 162.2/1.67 = 97.1 \text{ MPa}$$

Para la columna dada, al reemplazar la carga excéntrica por un sistema fuerza-momento céntrico que actúa en el centroide (figura 1), se escribe

$$\frac{P}{A} = \frac{P}{9.42 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} = \frac{P(0.200 \text{ m})}{1.050 \times 10^{-3} \text{ m}^3}$$

Al sustituir en la ecuación (10.58), se obtiene

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{perm}}$$

$$\frac{P}{9.42 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{P(0.200 \text{ m})}{1.050 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \leq 97.1 \text{ MPa} \qquad P \leq 327 \text{ kN}$$

La mayor carga permitida **P** es **P** = 327 kN↓ ◀

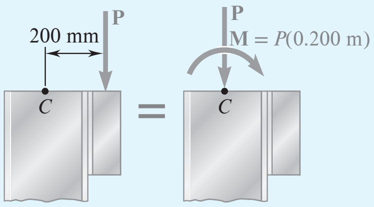


Figura 1 Carga excéntrica reemplazada por un sistema fuerza-momento que actúa en el centroide de la columna.

Problema modelo 10.6

Use el método de interacción para resolver el Problema modelo 10.5. Suponga que $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}} = 150$ MPa.

ESTRATEGIA: Se utilizará el esfuerzo céntrico permisible que se encontró en el Problema modelo 10.5 para calcular la carga **P**.

MODELAR y ANALIZAR:
Mediante el uso de la ecuación (10.55),

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \leq 1$$

Al sustituir el esfuerzo de flexión permisible y el esfuerzo céntrico permisible que se encontró en el Problema modelo 10.5, así como los otros datos dados, se obtiene

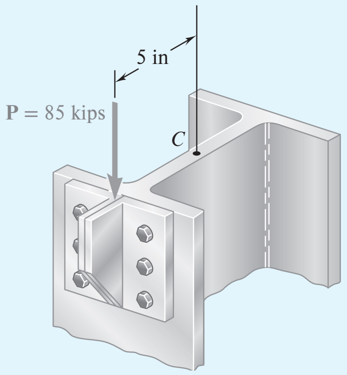
$$\frac{P/(9.42 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)}{97.1 \times 10^6\ \text{Pa}} + \frac{P(0.200\ \text{m})/(1.050 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{150 \times 10^6\ \text{Pa}} \leq 1$$

$$P \leq 423\ \text{kN}$$

La mayor carga permisible **P** es $\mathbf{P} = 423\ \text{kN}\downarrow$ ◀

Problema modelo 10.7

Una columna de acero tiene una longitud efectiva de 16 ft y está cargada excéntricamente, como se muestra en la figura. Usando el método de interacción, elija el perfil de patín ancho con profundidad nominal de 8 in que debe usarse. Suponga que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi, y use un esfuerzo permisible en flexión de 22 ksi.



ESTRATEGIA: Es necesario seleccionar la columna más ligera que satisfaga la ecuación (10.55). Esto involucra un proceso de ensayo y error, que puede acortarse si el primer perfil de patín ancho de 8 in seleccionado está cerca de la solución final. Esto se realiza mediante el método del esfuerzo permisible, ecuación (10.53), con un esfuerzo permisible aproximado.

MODELAR y ANALIZAR:
Para poder seleccionar una sección de ensayo, se utiliza el método del esfuerzo permisible con $\sigma_{perm} = 22$ ksi, y se escribe

$$\sigma_{perm} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I_x} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{Ar_x^2} \qquad (1)$$

En el apéndice C se observa que para perfiles con profundidad nominal de 8 in, $c \approx 4$ in y $r_x \approx 3.5$ in. A partir de la figura 1 y sustituyendo en la ecuación (1),

$$22\ \text{ksi} = \frac{85\ \text{kips}}{A} + \frac{(425\ \text{kip}\cdot\text{in})(4\ \text{in})}{A(3.5\ \text{in})^2} \qquad A \approx 10.2\ \text{in}^2$$

Para un primer ensayo, se elige el perfil W8 × 35.

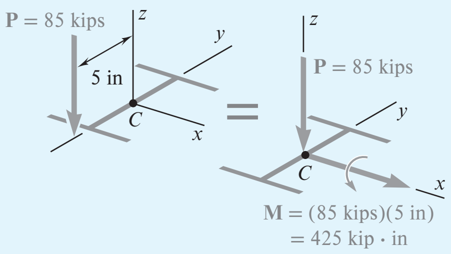
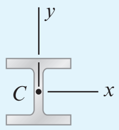


Figura 1 Carga excéntrica reemplazada por un sistema fuerza-momento equivalente en el centroide de la columna.



W8 × 35

$A = 10.3\ \text{in}^2$
$r_x = 3.51$ in
$r_y = 2.03$ in
$S_x = 31.2\ \text{in}^3$
$L = 16\ \text{ft} = 192$ in

Figura 2 Propiedades de sección para W8 × 35.

Ensayo 1: W8 × 35 (figura 2). Los esfuerzos permisibles son

Esfuerzo de flexión permisible: (vea los datos) $(\sigma_{perm})_{flexión} = 22$ ksi

Esfuerzo concéntrico permisible. La mayor relación de esbeltez de la columna es $L/r_y = (192 \text{ in})/(2.03 \text{ in}) = 94.6$. Si se usa la ecuación (10.41) con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi, se encuentra que la relación de esbeltez en la unión entre las dos ecuaciones para σ_{cr} es $L/r = 133.7$. Por lo tanto, se utilizan las ecuaciones (10.38) y (10.39) y se encuentra que $\sigma_{cr} = 22.5$ ksi. A partir de la ecuación (10.42), el esfuerzo permisible es

$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}} = 22.5/1.67 = 13.46 \text{ ksi}$$

Para el perfil de prueba W8 × 35,

$$\frac{P}{A} = \frac{85 \text{ kips}}{10.3 \text{ in}^2} = 8.25 \text{ ksi} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S_x} = \frac{425 \text{ kip} \cdot \text{in}}{31.2 \text{ in}^3} = 13.62 \text{ ksi}$$

Con estos datos, el miembro izquierdo de la ecuación (10.55) es

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} = \frac{8.25 \text{ ksi}}{13.46 \text{ ksi}} + \frac{13.62 \text{ ksi}}{22 \text{ ksi}} = 1.232$$

Como $1.232 > 1.000$, el requisito expresado por la fórmula de interacción no se satisface; debe elegirse un perfil de prueba más grande.

Ensayo 2: W8 × 48 (figura 3). Siguiendo el procedimiento usado en el ensayo 1, resulta

$$\frac{L}{r_y} = \frac{192 \text{ in}}{2.08 \text{ in}} = 92.3 \qquad (\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}} = 13.76 \text{ ksi}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{85 \text{ kips}}{14.1 \text{ in}^2} = 6.03 \text{ ksi} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S_x} = \frac{425 \text{ kip} \cdot \text{in}}{43.2 \text{ in}^3} = 9.84 \text{ ksi}$$

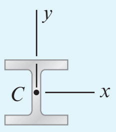
A sustituir en la ecuación (10.55), se tiene

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} = \frac{6.03 \text{ ksi}}{13.76 \text{ ksi}} + \frac{9.82 \text{ ksi}}{22 \text{ ksi}} = 0.885 < 1.000$$

El perfil W8 × 48 es satisfactorio pero puede ser innecesariamente grande.

Ensayo 3: W8 × 40 (figura 4). Siguiendo el mismo procedimiento, la fórmula de interacción no se satisface.

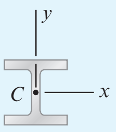
Selección del perfil. Se debe utilizar el perfil W8 × 48 ◀



W8 × 48

$A = 14.1 \text{ in}^2$
$r_x = 3.61$ in
$r_y = 2.08$ in
$S_x = 43.2 \text{ in}^3$
$L = 16 \text{ ft} = 192$ in

Figura 3 Propiedades de sección para W8 × 48.



W8 × 40

$A = 11.7 \text{ in}^2$
$r_x = 3.53$ in
$r_y = 2.04$ in
$S_x = 35.5 \text{ in}^3$
$L = 16 \text{ ft} = 192$ in

Figura 4 Propiedades de sección para W8 × 40.

Problemas

10.89 Se aplica una carga excéntrica en un punto a 22 mm del eje geométrico de una varilla con 60 mm de diámetro, hecha con un acero para el que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Utilice el método del esfuerzo permisible para determinar la carga permisible **P**.

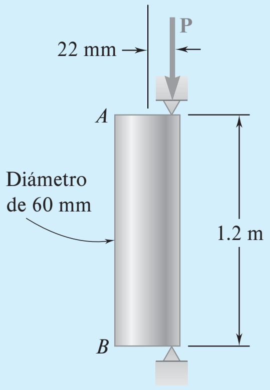


Figura P10.89

10.90 Resuelva el problema 10.89 suponiendo que la carga se aplica en un punto a 40 mm del eje geométrico y que la longitud efectiva es de 0.9 m.

10.91 Una columna de madera con una sección transversal de 5.0 × 7.5 in tiene una longitud efectiva de 8.5 ft. El grado de madera que se usó tiene un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra $\sigma_C = 1\,180$ psi y un módulo ajustado $E = 440 \times 10^3$ psi. Utilice el método del esfuerzo permisible para determinar la carga excéntrica **P** más grande que puede aplicarse cuando *a*) $e = 0.5$ in, *b*) $e = 1.0$ in.

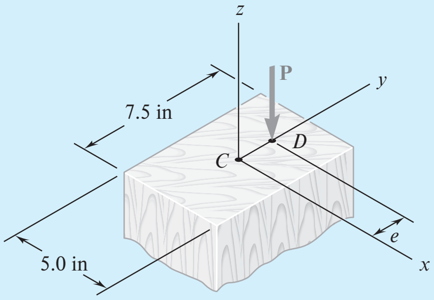


Figura P10.91

10.92 Resuelva el problema 10.91 usando el método de interacción y un esfuerzo permisible en flexión de 1300 psi.

10.93 Una columna de 5.5 m de longitud efectiva está hecha de una aleación de aluminio 2014-T6 para la que el esfuerzo permisible a la flexión es de 220 MPa. Utilice el método de interacción para determinar la carga permisible **P**, si se sabe que la excentricidad es *a*) $e = 0$, *b*) $e = 40$ mm.

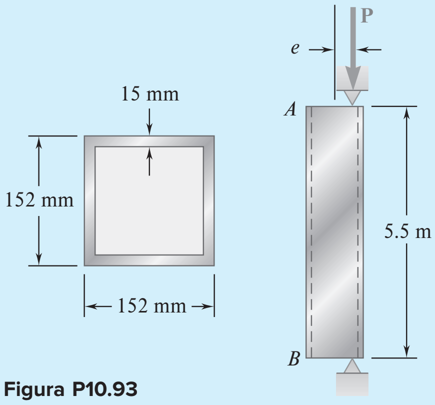


Figura P10.93

10.94 Resuelva el problema 10.93 suponiendo que la longitud efectiva de la columna es de 3.0 m.

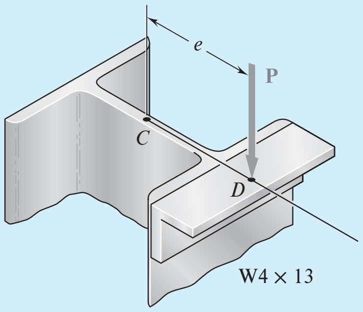


Figura P10.95

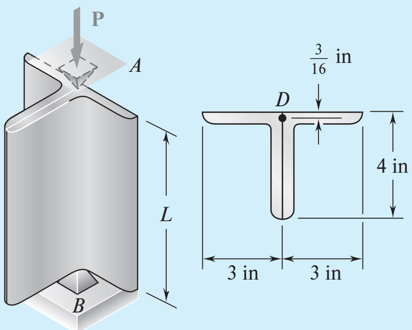


Figura P10.97

10.95 Un elemento a compresión, hecho de acero, con una longitud efectiva de 9 ft soporta una carga excéntrica como se muestra en la figura. Utilice el método del esfuerzo permisible para determinar la excentricidad permisible máxima e si a) $P = 30$ kips, b) $P = 18$ kips. Utilice $\sigma_Y = 18$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.96 Resuelva el problema 10.95, suponiendo que la longitud efectiva de la columna se incrementa a 12 ft y que a) $P = 20$ kips, b) $P = 15$ kips.

10.97 Se sueldan dos ángulos de acero L4 × 3 × $\frac{3}{8}$ in para formar la columna AB. En el punto D se aplica una carga axial **P** de 14 kips de magnitud. Utilice el método del esfuerzo permisible para determinar la longitud L máxima permisible. Suponga que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.98 Resuelva el problema 10.97 usando el método de interacción, con $P = 18$ kips y un esfuerzo permisible a la flexión de 22 ksi.

10.99 Una columna rectangular está hecha de madera con un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra $\sigma_C = 8.3$ MPa y un módulo de elasticidad ajustado $E = 11.1$ GPa. Utilice el método del esfuerzo permisible para determinar la mayor longitud efectiva permisible L que puede utilizarse.

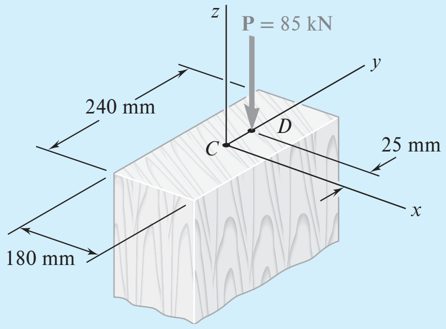


Figura P10.99

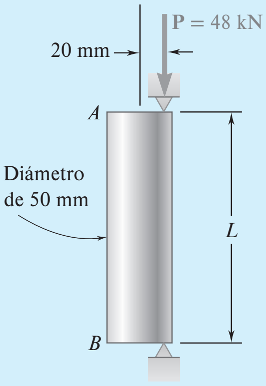


Figura P10.101

10.100 Resuelva el problema 10.99 suponiendo que $P = 105$ kN.

10.101 Una carga excéntrica $P = 48$ kN se aplica en un punto a 20 mm del eje geométrico de la varilla con 50 mm de diámetro, la cual está hecha de una aleación de aluminio 6061-T6. Use el método de interacción y un esfuerzo permisible en flexión de 145 MPa para determinar la máxima longitud efectiva permisible L que puede utilizarse.

10.102 Resuelva el problema 10.101 suponiendo que la aleación de aluminio empleada es 2014-T6, y que el esfuerzo permisible en flexión es de 180 MPa.

10.103 Un elemento a compresión hecho de acero tiene una longitud efectiva de 720 mm y debe soportar la carga **P** de 198 kN, como se muestra en la figura. Para el material empleado, $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Utilice el método de interacción y un esfuerzo permisible a la flexión igual a 150 MPa para determinar la dimensión d más pequeña de la sección transversal que puede utilizarse.

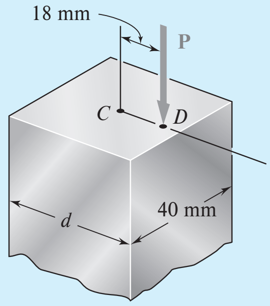


Figura P10.103

10.104 Resuelva el problema 10.103 suponiendo que la longitud efectiva es de 1.62 m y que la magnitud P de la carga excéntrica es de 128 kN.

10.105 Un tubo de acero con 80 mm de diámetro exterior debe soportar una carga **P** de 93 kN con una excentricidad de 20 mm. Los tubos disponibles para su uso están hechos con grosores de pared en incrementos de 3 mm desde 6 mm hasta 15 mm. Utilice el método del esfuerzo permisible para determinar el tubo más ligero que puede utilizarse. Suponga que $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.

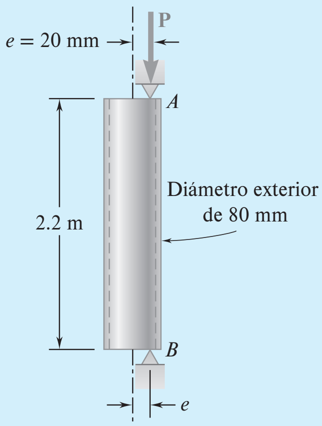


Figura P10.105

10.106 Resuelva el problema 10.105 usando el método de interacción con $P = 165$ kN, $e = 15$ mm y un esfuerzo permisible en flexión de 150 MPa.

10.107 Una columna de madera con sección transversal rectangular tiene una longitud efectiva de 2.2 m y soporta una carga de 41 kN, como se muestra en la figura. Los tamaños disponibles para su uso tienen dimensiones b iguales a 90 mm, 140 mm, 190 mm y 240 mm. El grado de madera tiene un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra $\sigma_C = 8.1$ MPa y un módulo ajustado $E = 8.3$ GPa. Utilice el método del esfuerzo permisible para determinar la sección más ligera que puede emplearse.

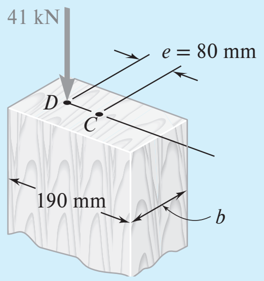


Figura P10.107

10.108 Resuelva el problema 10.107 suponiendo que $e = 40$ mm.

10.109 Un elemento a compresión con sección transversal rectangular tiene una longitud efectiva de 36 in y está hecho de una aleación de aluminio 2014-T6, para la que el esfuerzo permisible en flexión es de 24 ksi. Utilice el método de interacción para determinar la dimensión d más pequeña de la sección transversal que puede usarse cuando $e = 0.4$ in.

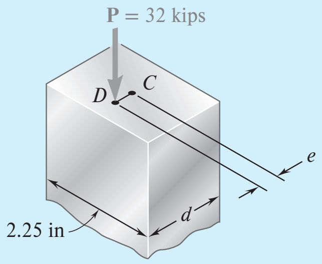


Figura P10.109

10.110 Resuelva el problema 10.109 suponiendo que $e = 0.2$ in.

10.111 Un tubo de aluminio con 3 in de diámetro externo debe soportar una carga de 10 kips con una excentricidad $e = 0.6$ in. Si se sabe que los tubos disponibles para su uso son de una aleación 2014-T6 y tienen espesores de pared en incrementos de $\frac{1}{16}$ in hasta $\frac{1}{2}$ in, determine el tubo más ligero que puede utilizarse. Utilice el método del esfuerzo permisible.

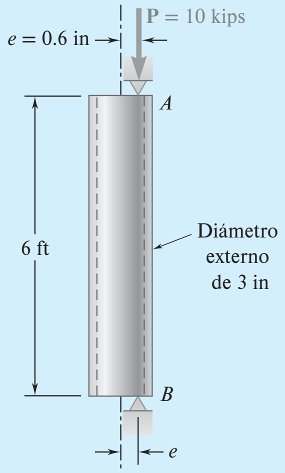


Figura P10.111

10.112 Resuelva el problema 10.111 usando el método de diseño de interacción, con un esfuerzo permisible en flexión de 25 ksi.

10.113 Una columna de acero con 24 ft de longitud efectiva está excéntricamente cargada, como se muestra en la figura. Utilice el método del esfuerzo permisible para seleccionar el perfil de patín ancho con profundidad nominal de 14 in que debe usarse. Emplee $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

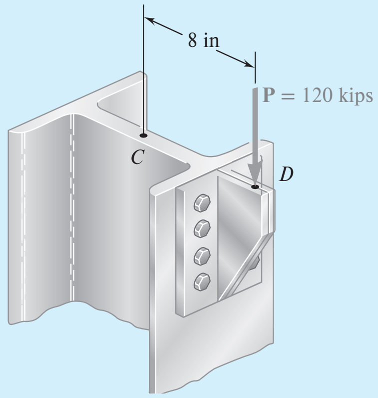


Figura P10.113

10.114 Resuelva el problema 10.113 usando el método de interacción; suponga que $\sigma_Y = 50$ ksi y que el esfuerzo permisible en flexión es de 30 ksi.

10.115 Un elemento a compresión hecho de acero, con longitud efectiva de 5.8 m, debe soportar una carga excéntrica **P** de 296 kN. Utilice el método de interacción para seleccionar el perfil de patín ancho con una profundidad nominal de 200 mm que debe usarse. Emplee $E = 200$ GPa, $\sigma_Y = 250$ MPa y $\sigma_{perm} = 150$ MPa en flexión.

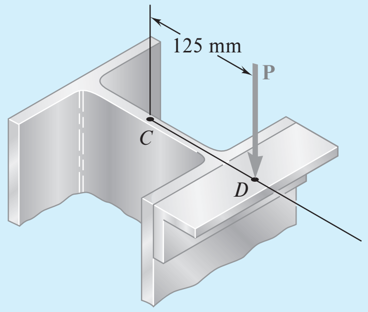


Figura *P10.115*

10.116 Una columna de acero de 7.2 m de longitud efectiva debe soportar una carga excéntrica **P** de 83 kN en un punto D, el cual se localiza sobre el eje x como se muestra en la figura. Utilice el método del esfuerzo permisible para seleccionar el perfil de patín ancho con una profundidad nominal de 250 mm que debe utilizarse. Considere que $E = 200$ GPa y que $\sigma_Y = 250$ MPa.

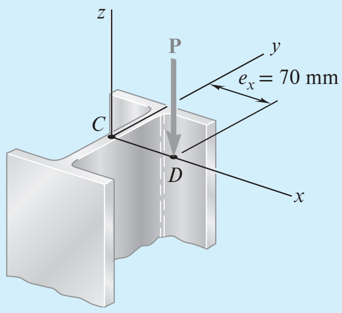


Figura P10.116

Repaso y resumen

Carga crítica

El diseño y análisis de columnas (es decir, elementos prismáticos que soportan cargas axiales) se basa en la determinación de la *carga crítica.* Existen dos posiciones de equilibrio posibles del modelo de la columna: la posición original, con cero deflexiones transversales, y una segunda posición que incluye deflexiones que pueden ser bastante grandes. La primera posición de equilibrio es inestable para $P > P_{cr}$, y estable para $P < P_{cr}$, pues en el último caso es la única posición posible de equilibrio.

Se consideró una columna articulada de longitud L y rigidez a la flexión constante EI, sometida a una carga axial céntrica P. Suponiendo que la columna se hubiera pandeado (figura 10.38), el momento flector en el punto Q es igual a $-Py$. Por lo tanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \qquad (10.4)$$

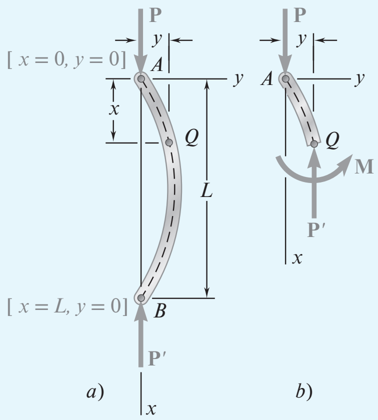


Figura 10.38 Diagramas de cuerpo libre de *a*) una columna pandeada, *b*) la porción *AQ*.

Fórmula de Euler

Al resolver la ecuación diferencial, sujeta a las condiciones de frontera correspondientes a una columna articulada, se determinó la carga P más pequeña para la cual podría ocurrir el pandeo. Esta carga, llamada *carga crítica* y denotada por P_{cr}, está dada por la *fórmula de Euler:*

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (10.11a)$$

donde L es la longitud de la columna. Para esta carga, u otra mayor, el equilibrio de la columna es inestable y ocurren deflexiones transversales.

Relación de esbeltez

Si se representa el área de la sección transversal de la columna con A y su radio de giro con r, el esfuerzo crítico σ_{cr} correspondiente a la carga crítica P_{cr} es

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \qquad (10.13a)$$

La cantidad L/r es la *relación de esbeltez.* El esfuerzo crítico σ_{cr} se grafica como una función de L/r en la figura 10.39. Puesto que el análisis se basó en esfuerzos que permanecen por debajo de la resistencia a la cedencia del material, la columna fallará por cedencia cuando $\sigma_{cr} > \sigma_Y$.

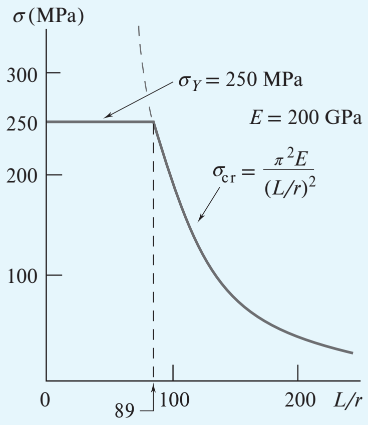


Figura 10.39 Gráfica del esfuerzo crítico.

Longitud efectiva

La carga crítica de columnas con diferentes condiciones de extremo se escribe como

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \qquad (10.11b)$$

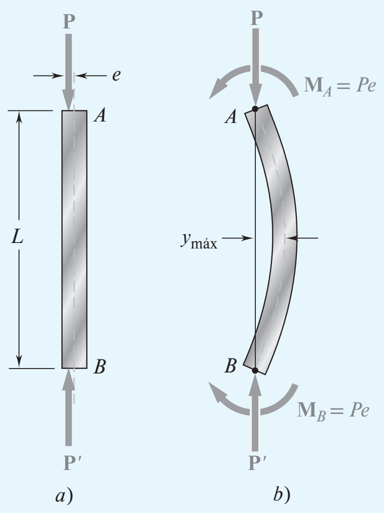


Figura 10.40 *a*) Columna con una carga excéntrica *b*) modelada como una columna con una carga equivalente fuerza-momento.

donde L_e es la *longitud efectiva* de la columna, es decir, la longitud de una columna equivalente articulada. Se calcularon las longitudes efectivas de varias columnas con diferentes condiciones de extremo, y se mostraron en la figura 10.18 de la página 619.

Carga axial excéntrica

Para una columna articulada sometida a una carga P aplicada con excentricidad e, la carga puede reemplazarse por una carga axial céntrica y un momento de momento $MA = Pe$ (figura 10.40). La máxima deflexión transversal es

$$y_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \qquad (10.28)$$

Fórmula de la secante

El esfuerzo máximo en una columna que soporta una carga axial excéntrica puede encontrarse usando la *fórmula de la secante:*

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\frac{L_e}{r}\right)} \qquad (10.36)$$

Esta ecuación puede resolverse para la fuerza por unidad de área, P/A, la cual causa un máximo esfuerzo especificado $\sigma_{máx}$ en una columna articulada en los extremos o en cualquier otra columna con relación de esbeltez efectiva L_e/r.

Diseño de columnas reales

Como en todas las columnas reales hay imperfecciones, el *diseño de columnas reales* se realiza mediante el uso de fórmulas empíricas basadas en pruebas de laboratorio y expresadas en especificaciones de códigos elaborados por organizaciones profesionales. Para *columnas céntricamente cargadas* hechas de acero, aluminio o madera, el diseño se basó en ecuaciones que expresan el esfuerzo permisible como función de la relación de esbeltez L/r. Para el acero estructural, también puede usarse el método de *Diseño por el factor de carga y resistencia.*

Diseño de columnas cargadas excéntricamente

Se pueden utilizar dos métodos para el diseño de columnas bajo una carga *excéntrica.* El primer método es el *método del esfuerzo permisible.* Este método conservador supone que el esfuerzo permisible es el mismo que si la columna estuviera céntricamente cargada. El método del esfuerzo permisible requiere que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{perm} \qquad (10.53)$$

El segundo método es el *método de interacción*, usado en la mayoría de las especificaciones modernas. En este método, el esfuerzo permisible para una columna cargada céntricamente se usa para la porción del esfuerzo total producido por la carga axial, y el esfuerzo permisible en flexión se utiliza para el esfuerzo producido por la flexión. Así, la desigualdad a satisfacer es

$$\frac{P/A}{(\sigma_{perm})_{céntrico}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{perm})_{flexión}} \leq 1 \qquad (10.55)$$

Problemas de repaso

10.117 Determine *a*) la carga crítica para el puntal de acero, *b*) la dimensión d para la cual el puntal de aluminio tiene la misma carga crítica. *c*) Exprese el peso del puntal de aluminio como un porcentaje del peso del puntal de acero.

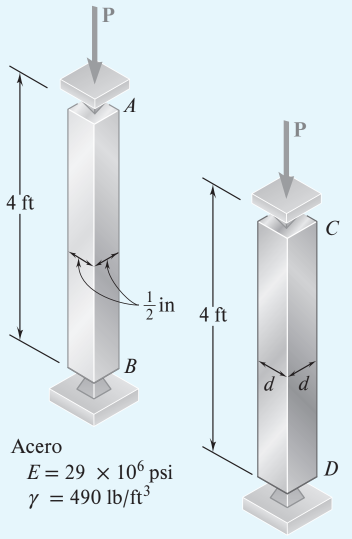


Figura P10.117

10.118 La varilla rígida AB está unida a una bisagra en A y a dos resortes, cada uno de constante k. Si $h = 450$ mm, $d = 300$ mm y $m = 200$ kg, determine el rango de valores de k para los cuales el equilibrio de la barra rígida AB es estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar a tensión o a compresión.

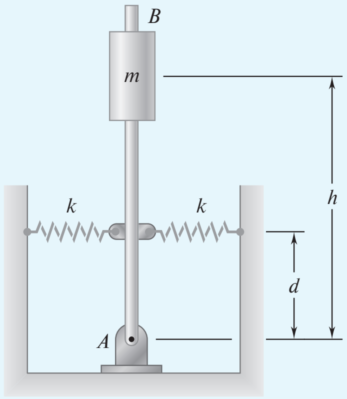


Figura P10.118

10.119 Una columna de 3 m de longitud efectiva se construyó soldando dos canales de acero laminado de C130 × 13. Utilice $E = 200$ GPa y determine la carga céntrica permisible para el arreglo mostrado si se requiere un factor de seguridad de 2.4.

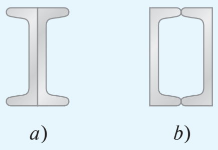


Figura *P10.119*

10.120 *a*) Considere solo el pandeo en el plano de la estructura que se muestra en la figura y, por medio de la fórmula de Euler, determine el valor de θ entre 0 y 90° para el cual la magnitud permisible de la carga **P** es máxima. *b*) Determine el valor máximo correspondiente de P sabiendo que se requiere un factor de seguridad de 3.2. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

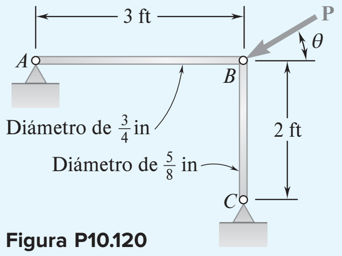


Figura P10.120

10.121 El elemento AB consta de un solo canal de acero C130 × 10.4 con 2.5 m de longitud. Si se sabe que los pasadores en los puntos A y B pasan a través del centroide de la sección transversal del canal, determine el factor de seguridad para la carga que se muestra en la figura, con respecto al pandeo en el plano de la figura, si $\theta = 30°$. Considere que $E = 200$ GPa.

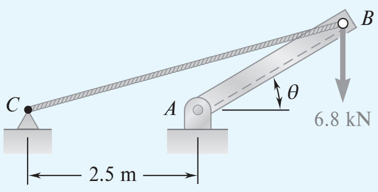


Figura P10.121

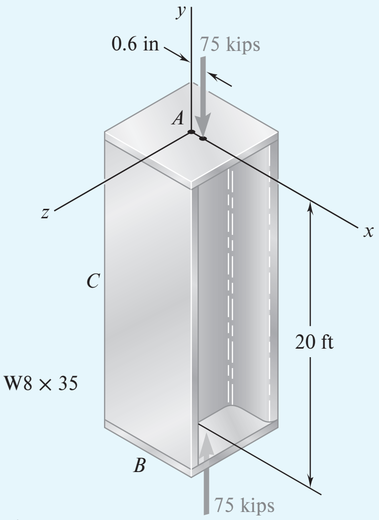


Figura *P10.122*

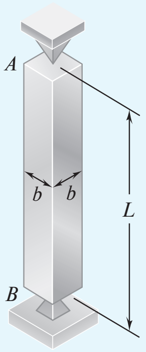


Figura P10.123

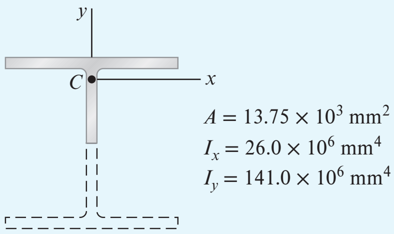


Figura *P10.124*

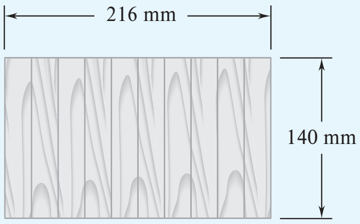


Figura P10.125

10.122 La línea de acción de una carga axial de 75 kips es paralela al eje geométrico de la columna AB e interseca el eje x en $x = 0.6$ in. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la deflexión horizontal del punto medio C de la columna, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

10.123 Los soportes A y B de la columna articulada en sus extremos están a una distancia fija L uno del otro. Si se sabe que a la temperatura T_0 la fuerza en la columna es cero y que cuando la temperatura es $T_1 = T_0 + \Delta T$ se presenta pandeo, exprese ΔT en términos de b, L y el coeficiente α de expansión térmica.

10.124 Una columna está hecha de medio perfil de acero laminado W360 × 216 y tiene las propiedades geométricas que se muestran en la figura. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible si la longitud efectiva de la columna es *a*) 4.0 m, *b*) 6.5 m. Utilice $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.125 Una columna rectangular con longitud efectiva de 4.4 m está hecha con madera laminar conglomerada. Si se sabe que para el grado de madera empleada el esfuerzo ajustado permisible para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 8.3$ MPa y que el módulo ajustado es $E = 4.6$ GPa, determine la máxima carga céntrica permisible para la columna.

10.126 Una columna con longitud efectiva de 4.5 m debe soportar una carga céntrica de 900 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño del esfuerzo permisible para seleccionar el perfil de patín ancho con profundidad nominal de 250 mm que debe usarse.

10.127 Una carga vertical **P** de 11 kips se aplica en el punto medio de una arista de la sección transversal cuadrada de un elemento a compresión AB, el cual está hecho de acero y tiene su parte superior A libre y su base B fija. Si se sabe que para el grado de acero empleado $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, use el método del esfuerzo permisible para calcular la dimensión d más pequeña permisible.

10.128 Una columna con 14 ft de longitud efectiva consiste en una sección de tubo de acero que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Utilice el método del esfuerzo permisible para calcular la máxima excentricidad e permisible si *a*) $P = 55$ kips, *b*) $P = 35$ kips. Considere que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

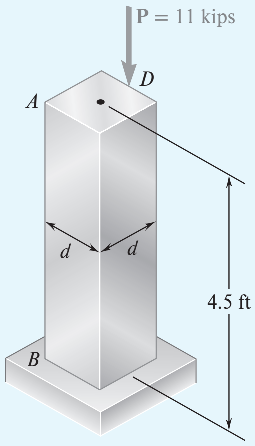


Figura *P10.127*

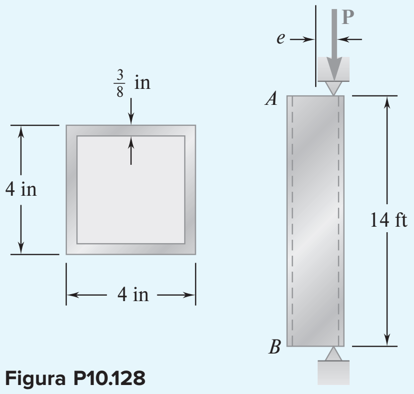


Figura P10.128

Problemas de computadora

Los siguientes problemas han sido diseñados para resolverse con la ayuda de una computadora.

10.C1 Una varilla sólida de acero con longitud efectiva de 500 mm se usará como puntal a compresión para una carga céntrica **P**. Para el grado de acero utilizado $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 245$ MPa. Si se requiere un factor de seguridad de 2.8, utilice la fórmula de Euler para escribir un programa de computadora y úselo para calcular la carga céntrica permisible P_{perm} para valores del radio desde 6 mm hasta 24 mm, en intervalos de 2 mm.

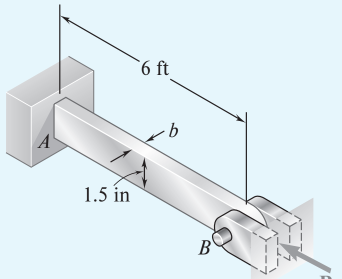


Figura P10.C2

10.C2 Una barra de aluminio está fija en su extremo *A* y apoyada en el extremo *B* en forma tal que es libre de rotar alrededor de un eje horizontal que pasa por el pasador. Las abrazaderas impiden la rotación alrededor de un eje vertical en el extremo *B*. Si $E = 10.1 \times 10^6$ psi, utilice la fórmula de Euler con un factor de seguridad de 2.5 para determinar la carga **P** céntrica permisible para valores de *b* desde 0.75 in hasta 1.5 in, con incrementos de 0.125 in.

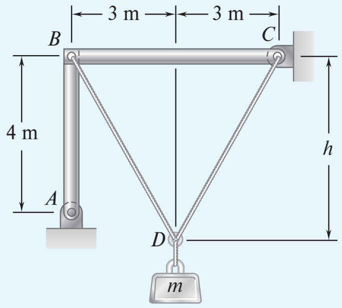


Figura P10.C3

10.C3 Los elementos *AB* y *BC* articulados en sus extremos consisten en secciones de tubo de aluminio con 120 mm de diámetro externo y 10 mm de espesor de pared. Si se necesita un factor de seguridad de 3.5, calcule la masa *m* del bloque más grande que puede sostener el arreglo de cables que se muestra en la figura, para valores de *h* desde 4 m hasta 8 m, usando incrementos de 0.25 m. Utilice $E = 70$ GPa y considere solo el pandeo en el plano de la estructura.

10.C4 Se aplica una carga axial **P** en un punto del eje *x* a una distancia $e = 0.5$ in del eje geométrico de la columna *AB* de acero laminado W8 × 40. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, escriba un programa de computadora y úselo con el fin de calcular, para valores de *P* desde 25 a 75 kips en intervalos de 5 kips, *a*) la deflexión horizontal en el punto medio *C*, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

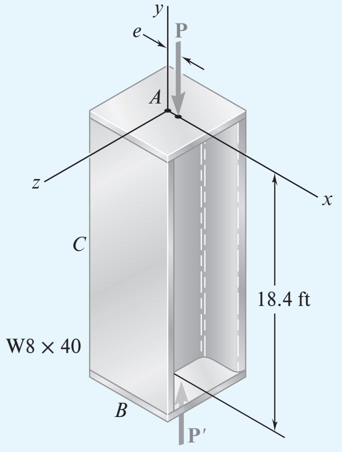


Figura P10.C4

10.C5 Una columna con longitud efectiva *L* está hecha de un perfil laminado de acero y soporta una carga axial céntrica **P**. La resistencia a la cedencia para el grado de acero utilizado es σ_Y, el módulo de elasticidad es *E*, el área de sección transversal del perfil seleccionado es *A*, y su radio de giro más pequeño es *r*. Mediante las ecuaciones de diseño AISC, escriba un programa de computadora que pueda utilizarse con unidades del SI o de uso común en Estados Unidos para determinar la carga permisible **P**. Emplee este programa para solucionar los problemas *a*) 10.57, *b*) 10.58, *c*) 10.124.

10.C6 Una columna con longitud efectiva *L* está hecha de un perfil laminado de acero y está cargada excéntricamente como se muestra en la figura. La resistencia a la cedencia para el grado de acero utilizado se denota por σ_Y, el esfuerzo permisible a la flexión por σ_{perm}, el módulo de elasticidad por *E*, el área de la sección transversal del perfil seleccionado por *A*, y su radio de giro más pequeño por *r*. Escriba un programa de computadora que pueda utilizarse con las unidades del SI o de uso común en Estados Unidos para determinar la carga permisible **P**, ya sea mediante el método del esfuerzo permisible o por medio del método de interacción. Utilice este programa para verificar la respuesta obtenida en *a*) el problema 10.113, *b*) el problema 10.114.

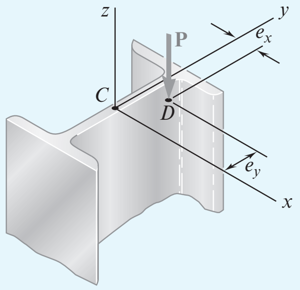
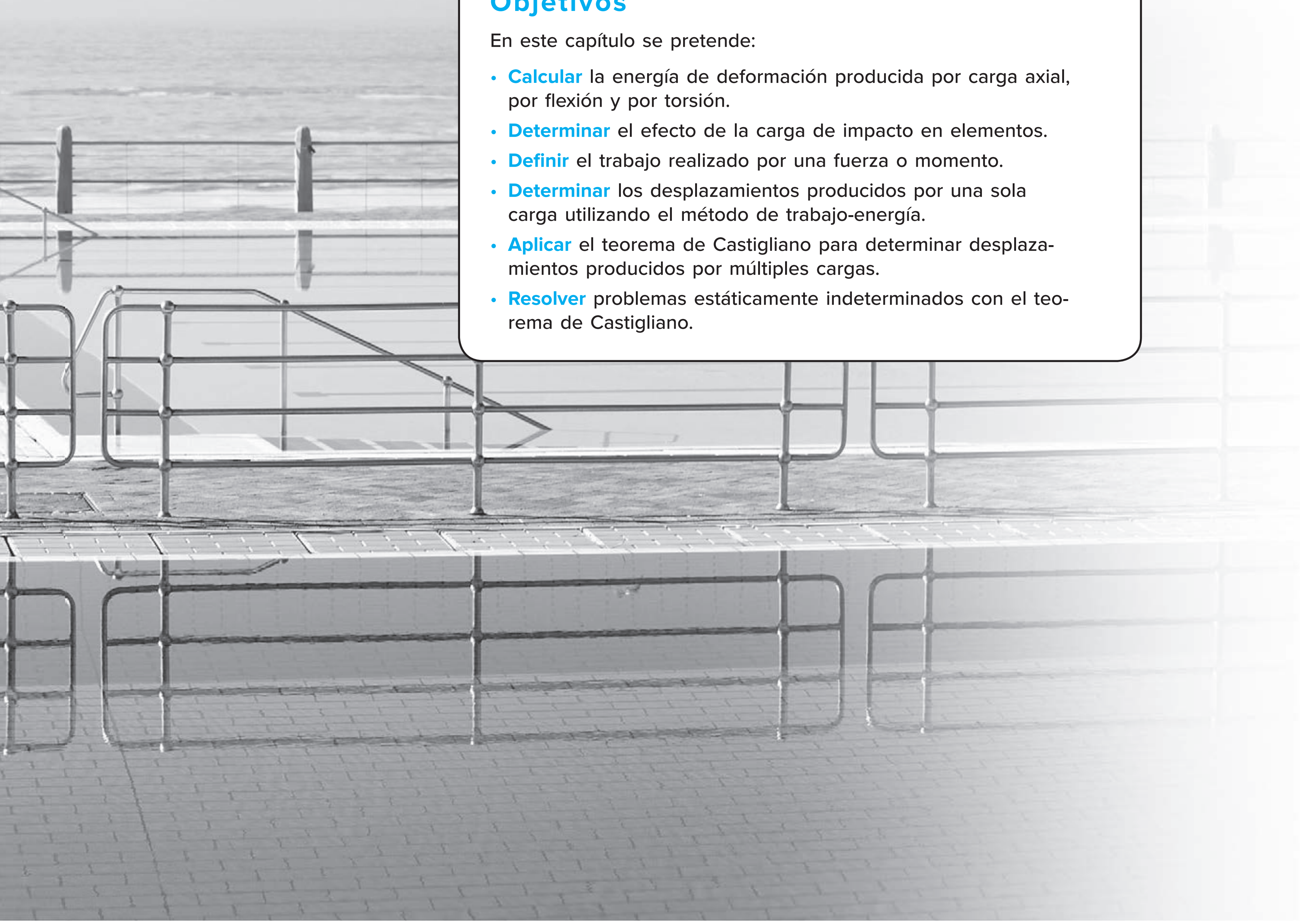


Figura P10.C6



11

Métodos de energía

Cuando el clavadista salta sobre el trampolín, la energía potencial producida por su elevación sobre éste se convierte en energía de deformación a medida que el trampolín se flexiona.

Objetivos

En este capítulo se pretende:

- **Calcular** la energía de deformación producida por carga axial, por flexión y por torsión.
- **Determinar** el efecto de la carga de impacto en elementos.
- **Definir** el trabajo realizado por una fuerza o momento.
- **Determinar** los desplazamientos producidos por una sola carga utilizando el método de trabajo-energía.
- **Aplicar** el teorema de Castigliano para determinar desplazamientos producidos por múltiples cargas.
- **Resolver** problemas estáticamente indeterminados con el teorema de Castigliano.

Introducción

11.1 Energía de deformación
11.1A Conceptos de energía de deformación
11.1B Densidad de energía de deformación
11.2 Energía de deformación elástica
11.2A Esfuerzos normales
11.2B Esfuerzos cortantes
11.3 Energía de deformación para un estado general de esfuerzo
11.4 Cargas de impacto
11.4A Análisis
11.4B Diseño
11.5 Cargas únicas
11.5A Formulación de energía
11.5B Deflexiones
***11.6 Trabajo y energía bajo varias cargas**
***11.7 Teorema de Castigliano**
***11.8 Deflexiones por el teorema de Castigliano**
***11.9 Estructuras estáticamente indeterminadas**

Introducción

El capítulo anterior se concentró en las relaciones que existen entre fuerzas y deformaciones bajo varias condiciones de carga. El análisis se basó en dos conceptos fundamentales, el concepto de esfuerzo (capítulo 1) y el concepto de deformación (capítulo 2). Ahora se introducirá un tercer concepto importante, el de *energía de deformación.*

La *energía de deformación* de un elemento es el incremento de energía asociado con la deformación del elemento. La energía de deformación es igual al trabajo realizado por una carga que se incrementa lentamente aplicada al elemento. La *densidad de energía de deformación* de un material es la energía de deformación por unidad de volumen, la cual es igual al área bajo la curva esfuerzo-deformación (sección 11.1B). Según el diagrama de la curva esfuerzo-deformación de un material, dos propiedades adicionales de éste son el *módulo de tenacidad* y el *módulo de resiliencia.*

En la sección 11.2 se analiza la energía de deformación elástica asociada con *esfuerzos normales* para elementos sometidos a carga axial y a flexión. En la sección 11.3 se considera la energía de deformación elástica asociada con esfuerzos cortantes (como en las cargas torsionales de flechas y en vigas con cargas transversales. En la sección 11.3 se considera la energía de deformación para un *estado general de esfuerzo*, donde se deriva el *criterio de la energía de distorsión* máxima para cedencia o fluencia.

El efecto de la *carga de impacto* se considera en la sección 11.4. Se calculará el *esfuerzo máximo* y la *deflexión máxima* producidos por una masa en movimiento que se impacta contra un elemento. En la sección 11.4B se analizan las propiedades que mejoran la capacidad de una estructura de soportar cargas de impacto.

En la sección 11.5A se calcula la deformación elástica de un elemento sometido a una *carga concentrada única* y en la sección 11.5B se determina la deflexión en el punto de aplicación de una carga única.

La última parte del capítulo se dedica a la energía de deformación de estructuras sometidas a *varias cargas* (sección 11.6). El *teorema de Castigliano* se deriva (sección 11.7) y utiliza (sección 11.8) para determinar la deflexión en un punto dado de una estructura sometida a varias cargas. Las estructuras indeterminadas se analizan con el teorema de Castigliano (sección 11.9).

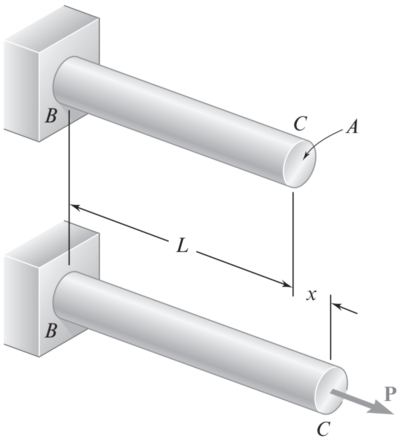


Figura 11.1 Barra axialmente cargada.

11.1 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

11.1A Conceptos de energía de deformación

Considere una barra BC de longitud L y área de sección transversal uniforme A empotrada en B y sometida en C a una carga axial $\mathbf{P}$ que *se incrementa lentamente* (figura 11.1). Al graficar la magnitud P de la carga contra la deformación x de la barra (sección 2.1), se obtiene un diagrama de la curva carga-deformación (figura 11.2) que es característico de la barra BC.

Ahora considere el trabajo dU realizado por la carga $\mathbf{P}$ cuando la barra se alarga una pequeña cantidad dx. Este *trabajo elemental* es igual al producto de la magnitud P de la carga y del pequeño alargamiento dx.

$$dU = P\,dx \tag{11.1}$$

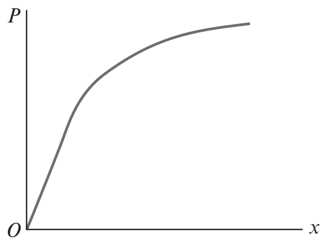


Figura 11.2 Diagrama de la curva carga-deformación para carga axial.

Observe que esta ecuación es igual al elemento con un área de ancho dx situada bajo la curva carga-deformación (figura 11.3). El *trabajo total* U realizado por la carga cuando la barra experimenta una deformación x_1 es

$$U = \int_0^{x_1} P\,dx$$

y es igual al área bajo la curva carga-deformación entre $x = 0$ y $x = x_1$.

El trabajo realizado por la carga **P** cuando se aplica lentamente a la barra incrementa la energía asociada con la deformación de la barra. Esta energía es la *energía de deformación* de la barra.

$$\text{Energía de deformación} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \tag{11.2}$$

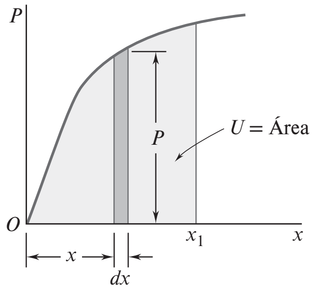


Figura 11.3 El trabajo realizado por la carga **P** es igual al área bajo la curva carga-deformación.

Recuerde que el trabajo y la energía deben obtenerse multiplicando unidades de longitud por unidades de fuerza. Por lo tanto, cuando se utilizan unidades SI, el trabajo y la energía se expresan en N · m, la cual se llama *joule* (J). Cuando se utilizan unidades U.S. comunes, el trabajo y la energía se expresan en ft · lb o en in · lb.

Para una deformación elástica lineal, la parte del diagrama de la curva carga-deformación involucrada se puede representar por una línea recta cuya ecuación es $P = kx$ (figura 11.4). Al sustituir P en la ecuación (11.2) se obtiene

$$U = \int_0^{x_1} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

o

$$U = \tfrac{1}{2}P_1x_1 \tag{11.3}$$

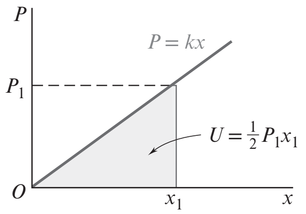


Figura 11.4 Trabajo debido a una deformación elástica lineal.

donde P_1 es la carga correspondiente a la deformación x_1.

La energía de deformación se puede usar para determinar los efectos de cargas de impacto en estructuras o componente de máquina. Por ejemplo, un cuerpo de masa m que se mueve a una velocidad $\mathbf{v}_0$ y que se impacta con el extremo B de una barra AB (figura 11.5*a*). Ignorando la inercia de la barra y suponiendo que no se disipa energía durante el impacto, la energía máxima de deformación U_m adquirida por la barra (figura 11.5*b*) es igual a la energía cinética original $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ del cuerpo en movimiento. Si luego se determina el valor P_m de la carga estática que habría producido la misma energía de deformación en la barra, es posible obtener el valor σ_m del esfuerzo máximo que ocurre en la barra dividiendo P_m entre el área de sección transversal.

11.1B Densidad de energía de deformación

Como se señaló en la sección 2.1, el diagrama de la curva carga-deformación para una barra BC depende de su longitud L y del área de sección transversal A. La energía de

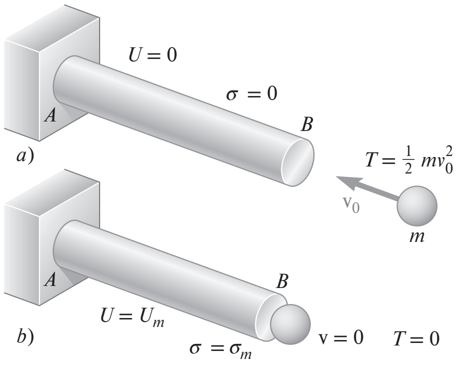


Figura 11.5 Barra sometida a una carga de impacto.

deformación U definida por la ecuación (11.2), por consiguiente, también dependerá de las dimensiones de la barra. Para eliminar el efecto del tamaño y de la atención directa a las propiedades del material, se considerará la energía de deformación por unidad de volumen. Al dividir la energía de deformación U entre el volumen $V = AL$ de la barra (figura 11.1) y utilizando la ecuación (11.2) se tiene

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A}\frac{dx}{L}$$

Al recordar que P/A representa el esfuerzo normal σ_x y x/L la deformación normal ϵ_x

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x$$

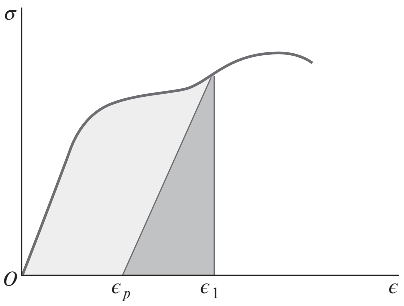


Figura 11.6 La densidad de energía de deformación es el área bajo la curva de esfuerzo-deformación entre $\epsilon_x = 0$ y $\epsilon_x = \epsilon_1$. Si se carga en la región plástica, solo se recupera la energía asociada con la descarga elástica.

donde ϵ_1 denota el valor de la deformación correspondiente al alargamiento x_1. La energía de deformación por unidad de volumen U/V se llama *densidad de energía de deformación*, denotado por u. Por consiguiente

$$\text{Densidad de energía de deformación} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x \tag{11.4}$$

La densidad de energía de deformación u se expresa en unidades de energía divididas entre unidades de volumen. Por lo tanto, cuando se utilizan unidades métricas SI, la densidad de energía de deformación es J/m^3 o sus múltiplos kJ/m^3 y MJ/m^3. Cuando se utilizan unidades U.S. comunes, se expresa en in · lb/in^3.†

En la figura 11.6 se observa que la densidad de energía de deformación u es igual al área situada bajo la curva de esfuerzo-deformación, la cual se mide desde $\epsilon_x = 0$ hasta $\epsilon_x = \epsilon_1$. Si se retira la carga del material, el esfuerzo regresa a cero. Sin embargo, hay una deformación permanente representada por la deformación ϵ_p, y solo la parte de la energía de deformación por unidad de volumen correspondiente al área triangular se recupera. El resto de la energía consumida al deformar el material se disipa en la forma de calor.

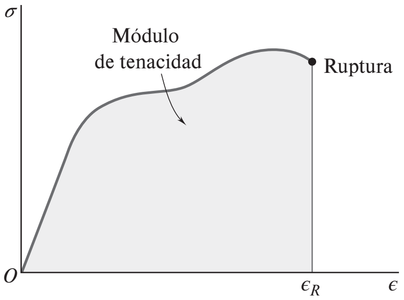


Figura 11.7 El módulo de tenacidad es el área bajo la curva de esfuerzo-deformación hasta la ruptura.

La densidad de energía de deformación obtenida con $\epsilon_1 = \epsilon_R$ en la ecuación (11.4), donde ϵ_R es la deformación en el momento de la ruptura, se llama *módulo de tenacidad* del material. Es igual al área bajo el diagrama de la curva esfuerzo-deformación total (figura 11.7) y representa la energía por unidad de volumen requerida para que el material se fracture. La tenacidad de un material está relacionada con su ductilidad y también con su resistencia última (sección 2.1B), y la capacidad de una estructura para resistir una carga de impacto depende de la tenacidad del material utilizado (fotografía 11.1).

Si el esfuerzo σ_x permanece dentro del límite proporcional del material, la ley de Hooke aplica:

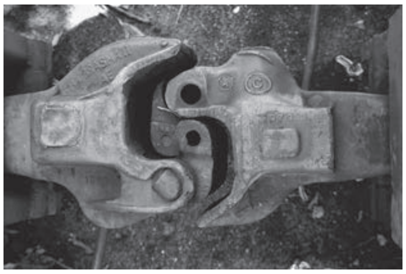
$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{11.5}$$

Al sustituir σ_x de la ecuación (11.5) en la ecuación (11.4) se tiene

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon_x \, d\epsilon_x = \frac{E\epsilon_1^2}{2} \tag{11.6}$$

o utilizando la ecuación (11.5) para expresar ϵ_1 en función del esfuerzo correspondiente σ_1 se obtiene

$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E} \tag{11.7}$$



Fotografía 11.1 El acoplador de ferrocarril está hecho de un acero dúctil con un alto módulo de tenacidad.

† Observe que 1 J/m^3 y 1 Pa son iguales a 1 N/m^2, mientras que 1 in · lb/in^3 y 1 psi son iguales a 1 lb/in^2. Por lo tanto, la densidad de energía de deformación y el esfuerzo son dimensionalmente iguales y se pueden expresar en las mismas unidades.

La densidad de energía de deformación obtenida con $\sigma_1 = \sigma_Y$ en la ecuación (11.7), donde σ_Y es la resistencia a la cedencia, se llama *módulo de resiliencia* del material, y está denotado por u_Y. Por lo tanto,

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} \quad (11.8)$$

El módulo de resiliencia es igual al área bajo la parte de línea recta O_Y del diagrama de la curva esfuerzo-deformación (figura 11.8) y representa la energía por unidad de volumen que el material puede absorber sin cedencia. La capacidad de una estructura de soportar una carga de impacto sin que se deforme permanentemente depende de la resiliencia del material utilizado.

Dado que el módulo de tenacidad y el módulo de resiliencia representan valores característicos de la densidad de energía de deformación del material considerado, ambos se expresan en J/m^3 o en sus múltiplos si se utilizan unidades SI, y en $in \cdot lb/in^3$ si se utilizan unidades U.S. comunes.†

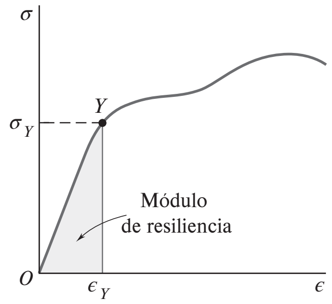


Figura 11.8 El módulo de resiliencia es el área bajo la curva de esfuerzo-deformación a la cedencia.

11.2 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA

11.2A Esfuerzos normales

Dado que la barra considerada en la sección anterior se sometió a esfuerzos uniformemente distribuidos σ_x, la densidad de energía de deformación se mantuvo constante a lo largo de la barra y se definió como la razón U/V de la energía de deformación U y el volumen V de la barra. En un elemento estructural o pieza de máquina con distribución de esfuerzos no uniforme, la densidad de energía de deformación u se puede definir considerando la energía de deformación de un pequeño elemento de material de volumen ΔV. Por lo tanto,

$$u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

o

$$u = \frac{dU}{dV} \quad (11.9)$$

La expresión previamente obtenida para u (sección 11.1B) en función de σ_x y ϵ_x es válida, por lo tanto

$$u = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x \, d\epsilon_x \quad (11.10)$$

la que tiene en cuenta variaciones del esfuerzo σ_x, la deformación ϵ_x y la densidad de energía de deformación u de punto a punto.

Para valores de σ_x dentro del límite proporcional, $\sigma_x = E\epsilon_x$ en la ecuación (11.10) y

$$u = \frac{1}{2}E\epsilon_x^2 = \frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E} \quad (11.11)$$

† Observe que el módulo de tenacidad y el módulo de resiliencia se podrían expresar en las mismas unidades que el esfuerzo.

La energía de deformación U de un cuerpo sometido a esfuerzos normales uniaxiales se puede obtener sustituyendo u de la ecuación (11.11) en la ecuación (11.9) e integrando ambos miembros.

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \tag{11.12}$$

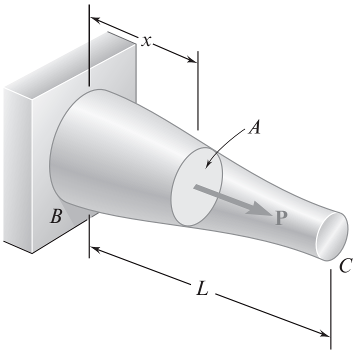


Figura 11.9 Barra con carga axial céntrica.

Esta ecuación es válida solo para deformaciones elásticas y se conoce como *energía de deformación elástica* del cuerpo.

Energía de deformación bajo carga axial. Recuerde de la sección 2.10 que cuando una barra se somete a una carga axial céntrica, se puede suponer que los esfuerzos normales σ_x están uniformemente distribuidos en cualquier sección transversal dada. Utilizando el área de la sección A localizada a una distancia x del extremo B de la barra (figura 11.9) y la fuerza interna P en esa sección, se escribe $\sigma_x = P/A$. Al sustituir σ_x en la ecuación (11.12) se tiene

$$U = \int \frac{P^2}{2EA^2} dV$$

o al establecer $dV = A\ dx$,

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx \tag{11.13}$$

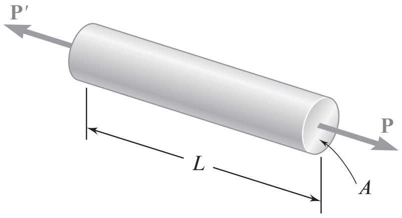


Figura 11.10 Barra prismática con carga axial céntrica.

Para una barra de sección transversal uniforme con fuerzas iguales y opuestas de magnitud P en sus extremos (figura 11.10), la ecuación (11.13) da

$$U = \frac{P^2L}{2AE} \tag{11.14}$$

Aplicación de conceptos 11.1

Una barra se compone de dos partes BC y CD del mismo material, la misma longitud, pero de diferentes secciones transversales (figura 11.11). Determine la energía de deformación de la barra cuando se somete a una carga axial céntrica **P**, y exprese el resultado en función de P, L, E, el área A de la sección transversal de la parte CD y la razón n de los dos diámetros.

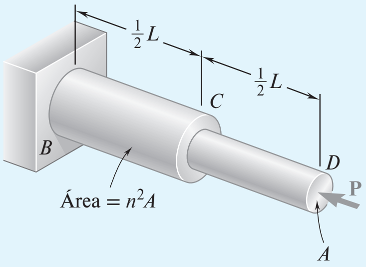


Figura 11.11 Barra escalonada axialmente cargada.

Use la ecuación (11.14) para determinar la energía de deformación de cada una de las dos partes y sume las expresiones obtenidas:

$$U_n = \frac{P^2(\frac{1}{2}L)}{2AE} + \frac{P^2(\frac{1}{2}L)}{2(n^2A)E} = \frac{P^2L}{4AE}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

o

$$U_n = \frac{1+n^2}{2n^2}\frac{P^2L}{2AE} \tag{1}$$

Verifique que, con $n = 1$,

$$U_1 = \frac{P^2L}{2AE}$$

la cual es la misma que la ecuación (11.14) para una barra de longitud L y sección transversal uniforme de área A. También observe que para $n > 1$, $U_n < U_1$. Como un ejemplo, cuando $n = 2$, $U_2 = (\frac{5}{8})U_1$. Como el esfuerzo máximo ocurre en la parte CD de la barra y es igual a $\sigma_{\text{máx}} = P/A$, entonces para un esfuerzo permisible dado, al incrementarse el diámetro de la parte BC de la barra la capacidad de absorción de energía total se *reduce*. Deben evitarse los cambios innecesarios del área de sección transversal en el diseño de elementos sometidos a cargas (como cargas de impacto) donde la capacidad de absorción de energía del elemento es crítica.

Aplicación de conceptos 11.2

Dos barras del mismo material y de la misma sección transversal uniforme de área A soportan una carga **P** aplicada en B (figura 11.12*a*). Determine la energía de deformación del sistema.

Utilizando las fuerzas F_{BC} y F_{BD} que actúan en los elementos BC y BD y recordando la ecuación (11.14), la energía de deformación del sistema es

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE} \qquad \textbf{(1)}$$

De la figura 11.12*a*,

$$BC = 0.6l \qquad BD = 0.8l$$

Del diagrama de cuerpo libre del pasador B y el triángulo de fuerza correspondiente (figura 11.12*b*),

$$F_{BC} = +0.6P \qquad F_{BD} = -0.8P$$

Al sustituir en la ecuación (1) se obtiene

$$U = \frac{P^2 l[(0.6)^3 + (0.8)^3]}{2AE} = 0.364\frac{P^2 l}{AE}$$

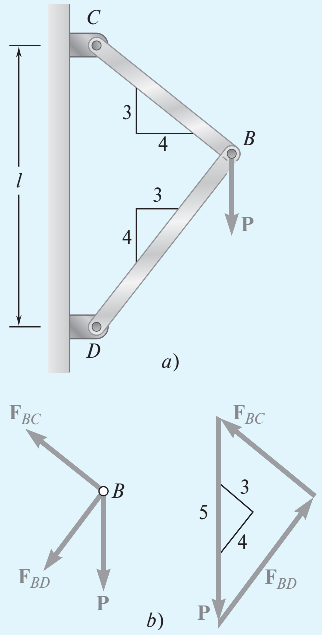


Figura 11.12 *a*) Bastidor *CBD* que soporta una fuerza vertical *P*. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la articulación *B* y triángulo de fuerza correspondiente.

Energía de deformación en flexión. Considere una viga AB sometida a una carga dada (figura 11.13) y sea M el momento flector a una distancia x del extremo A. Ignorando el efecto del cortante y considerando solo los esfuerzos normales $\sigma_x = My/I$, sustituya la expresión en la ecuación (11.12) y escriba

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV$$

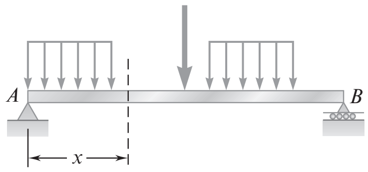


Figura 11.13 Viga transversalmente cargada.

Al hacer $dV = dA\, dx$, donde dA representa un elemento del área de sección transversal, y al recordar que $M^2/2EI^2$ es una función de solo x se obtiene

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int y^2\, dA\right) dx$$

Recuerde que la integral dentro del paréntesis representa el momento de inercia I de la sección transversal con respecto a su eje neutro. Así,

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \qquad \textbf{(11.15)}$$

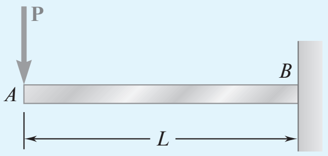


Figura 11.14 Viga en voladizo con una carga P.

Aplicación de conceptos 11.3

Determine la energía de deformación de la viga prismática en voladizo AB (figura 11.14), considerando solo el efecto de los esfuerzos normales.

El momento flector a una distancia x del extremo A es $M = -Px$. Sustituya esta expresión en la ecuación (11.15) para obtener

$$U = \int_0^L \frac{P^2x^2}{2EI} dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

11.2B Esfuerzos cortantes

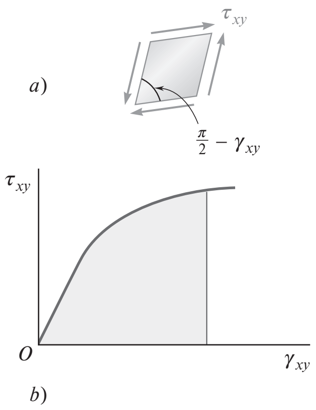


Figura 11.15 *a*) Deformación por cortante correspondiente a τ_{xy}. *b*) La densidad de energía de deformación u es el área bajo la curva de esfuerzo-deformación.

Cuando un material se somete a esfuerzos cortantes planos τ_{xy}, la densidad de energía de deformación en un punto dado es

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} \qquad \textbf{(11.16)}$$

donde γ_{xy} es la deformación por cortante correspondiente a τ_{xy} (figura 11.15*a*). Observe que la densidad de energía de deformación u es igual al área bajo la curva esfuerzo-deformación (figura 11.15*b*).

Para valores de τ_{xy} dentro del límite proporcional, $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, donde G es el módulo de rigidez del material. Al sustituir τ_{xy} en la ecuación (11.16) integrando se tiene

$$u = \frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad \textbf{(11.17)}$$

El valor de la energía de deformación U de un cuerpo sometido a esfuerzos cortantes planos se puede obtener recordando de la sección 11.2A

$$u = \frac{dU}{dV} \qquad \textbf{(11.9)}$$

Al sustituir u de la ecuación (11.17) en la ecuación (11.9) e integrando ambos miembros se tiene

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV \qquad \textbf{(11.18)}$$

Esta ecuación define la energía de deformación elástica asociada con las deformaciones por cortante del cuerpo. Al igual que la expresión similar en la sección 11.2A para esfuerzos normales uniaxiales, solo es válida para deformaciones elásticas.

Energía de deformación en torsión. Considere la flecha BC de sección transversal circular no uniforme de longitud L sometido a uno o varios momentos de torsión. Utilizando el momento polar de inercia J de la sección transversal localizada a una distan-

cia x de B (figura 11.16) y el par de torsión T, recuerde que los esfuerzos cortantes son $\tau_{xy} = T\rho/J$. Al sustituir τ_{xy} en la ecuación (11.18),

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\,dV = \int \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2}\,dV$$

Con $dV = dA\,dx$, donde dA es el área de la sección transversal, observe que $T^2/2GJ^2$ es una función únicamente de x para obtener

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int \rho^2\,dA\right)dx$$

Recuerde que la integral entre paréntesis representa el momento polar de inercia J de la sección transversal, y se obtiene

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,dx \qquad (11.19)$$

Para una flecha de sección transversal uniforme sometida en sus extremos a pares iguales y opuestos de magnitud T (figura 11.17), la ecuación (11.19) da

$$U = \frac{T^2L}{2GJ} \qquad (11.20)$$

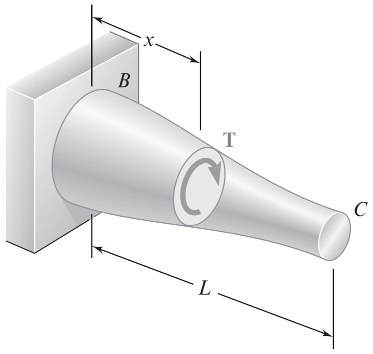


Figura 11.16 Flecha sometida a un par de torsión.

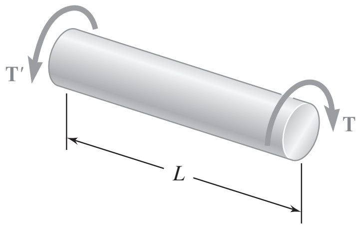


Figura 11.17 Flecha prismática sometida a torsión.

Aplicación de conceptos 11.14

Una flecha circular se compone de dos partes BC y CD del mismo material y longitud, pero de secciones transversales diferentes (figura 11.18). Determine la energía de deformación de la flecha cuando se somete a un par de torsión **T** en el extremo D. Exprese los resultados en función de T, L, G, el momento polar de inercia J de la sección transversal menor y la relación n de los dos diámetros.

Use la ecuación (11.20) para calcular la energía de deformación de cada una de las dos partes de la flecha, y sume las expresiones obtenidas. Observe que el momento polar de inercia de la parte BC es igual a n^4J y escriba

$$U_n = \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2GJ} + \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2G(n^4J)} = \frac{T^2L}{4GJ}\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)$$

o

$$U_n = \frac{1+n^4}{2n^4}\,\frac{T^2L}{2GJ} \qquad (1)$$

Para $n = 1$,

$$U_1 = \frac{T^2L}{2GJ}$$

la cual es la expresión dada en la ecuación (11.20) para una flecha de longitud L y sección transversal uniforme. Observe que, para $n > 1$, $U_n < U_1$. Por ejemplo, cuando $n = 2$, $U_2 = (\frac{17}{32})U_1$. Como el esfuerzo cortante máximo ocurre en el segmento CD de la flecha y es proporcional al par de torsión T, al incrementarse el diámetro del segmento BC, la capacidad de absorción de energía total de la flecha *se reduce*.

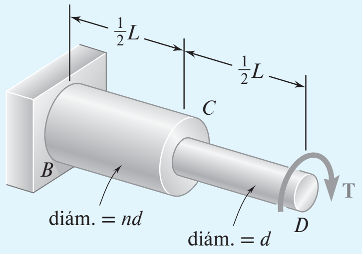


Figura 11.18 Flecha escalonada sometida a un par de torsión T.

Energía de deformación bajo carga transversal. En la sección 11.2A se obtuvo una ecuación para la energía de deformación de una viga sometida a una carga transversal. Sin embargo, en esa expresión, se consideró solo el efecto de los esfuerzos normales producidos por flexión y se ignoró el efecto de los esfuerzos cortantes. En la Aplicación de conceptos 11.5, ambos tipos de esfuerzos se toman en cuenta.

Aplicación de conceptos 11.5

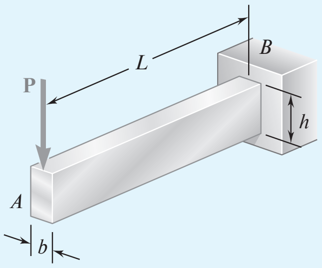


Figura 11.19 Viga rectangular en voladizo con una carga *P*.

Determine la energía de deformación de la viga rectangular en voladizo *AB* (figura 11.19), tomando en cuenta el efecto tanto de los esfuerzos normales como de los esfuerzos cortantes.

Recuerde de la Aplicación de conceptos 11.3 que la energía de deformación producida por los esfuerzos normales σ_x es

$$U_\sigma = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

Para determinar la energía de deformación U_τ producida por los esfuerzos cortantes τ_{xyw}, recuerde la ecuación (6.9) y determine que, para una viga de sección transversal rectangular de ancho *b* y la altura *h*,

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

Al sustituir τ_{xy} en la ecuación (11.18),

$$U_\tau = \frac{1}{2G}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\right)^2 \int \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^2 dV$$

o haciendo $dV = b\,dy\,dx$, y después de las reducciones,

$$U_\tau = \frac{9P^2}{8Gbh^2}\int_{-c}^{c}\left(1 - 2\frac{y^2}{c^2} + \frac{y^4}{c^4}\right)dy \int_0^L dx$$

Al integrar y recordar que $c = h/2$,

$$U_\tau = \frac{9P^2L}{8Gbh^2}\left[y - \frac{2}{3}\frac{y^3}{c^2} + \frac{1}{5}\frac{y^5}{c^4}\right]_{-c}^{+c} = \frac{3P^2L}{5Gbh} = \frac{3P^2L}{5GA}$$

La energía de deformación total de la viga es

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5GA}$$

o con $I/A = h^2/12$ y factorizando la expresión para U_σ,

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = U_\sigma\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) \quad (1)$$

Recuerde de la sección 2.7 que $G \geq E/3$. Considerando el paréntesis, esta ecuación es menor que $1 + 0.9(h/L)^2$ y el error relativo es menor que $0.9(h/L)^2$ cuando se ignora el efecto del cortante. Para una viga con una relación h/L menor que $\frac{1}{10}$, el porcentaje de error es menor que 0.9%. Por consiguiente, en la práctica de ingeniería se acostumbra ignorar el efecto del cortante al calcular la energía de deformación de vigas con alturas pequeñas.

11.3 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN PARA UN ESTADO GENERAL DE ESFUERZO

En las secciones anteriores se determinó la energía de deformación de un cuerpo en un estado de esfuerzo uniaxial (sección 11.2A) y en un estado de esfuerzo cortante plano (sección 11.2B). En un cuerpo en un estado general de esfuerzo caracterizado por los seis componentes de esfuerzo σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx} (figura 2.35), la densidad de energía de deformación se obtiene sumando las expresiones dadas en las ecuaciones (11.10) y (11.16), además de las otras cuatro expresiones obtenidas al permutar los subíndices.

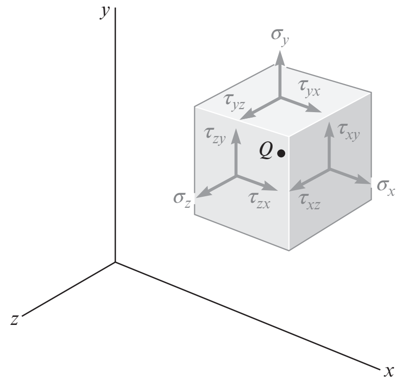


Figura 2.35 (repetida) Componente de esfuerzo positivo en el punto Q para un estado general de esfuerzo.

En la deformación elástica de un cuerpo isotrópico, cada de las seis relaciones de esfuerzo-deformación involucradas es lineal, y la densidad de energía de deformación es

$$u = \tfrac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \sigma_z\epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \qquad (11.21)$$

Al recordar la ecuación (2.29) y sustituyendo los componentes de deformación en la ecuación (11.21), el estado más general de esfuerzo de un punto dado de un cuerpo isotrópico elástico es

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \qquad (11.22)$$

Si se utilizan los ejes principales en el punto dado como ejes de coordenadas, los esfuerzos cortantes se vuelven cero y la ecuación (11.22) se reduce a

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)] \qquad (11.23)$$

donde σ_a, σ_b y σ_c son los esfuerzos principales en el punto dado.

Ahora recuerde de la sección 7.5A que un criterio utilizado para predecir si un estado dado de esfuerzo hace que ocurra cedencia en un material dúctil es el criterio de la energía de distorsión máxima, el cual está basado en la energía por unidad de volumen asociada con la distorsión (o cambio de forma) de dicho material. Separando la densidad de energía de deformación u en un punto dado en dos partes, u_v asociada con un cambio de volumen del material en ese punto y u_d asociada con una distorsión del material en el mismo punto,

$$u = u_v + u_d \qquad (11.24)$$

Para determinar u_v y u_d, se introduce el *valor promedio* $\bar{\sigma}$ de los esfuerzos principales en el punto considerado como

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c}{3} \qquad (11.25)$$

y

$$\sigma_a = \bar{\sigma} + \sigma_a' \qquad \sigma_b = \bar{\sigma} + \sigma_b' \qquad \sigma_c = \bar{\sigma} + \sigma_c' \qquad (11.26)$$

Por lo tanto, el estado de esfuerzo dado (figura 11.20*a*) se puede obtener superponiendo los estados de esfuerzo mostrados en las figuras 11.20*b* y *c*. El estado de esfuerzo descrito en la figura 11.20*b* tiende a cambiar el volumen del elemento pero no su forma, ya que todas las caras del elemento están sometidas al mismo esfuerzo $\bar{\sigma}$. Por otra parte, de las ecuaciones (11.25) y (11.26) se deduce que

$$\sigma_a' + \sigma_b' + \sigma_c' = 0 \qquad (11.27)$$

Esta indica que algunos de los esfuerzos mostrados en la figura 11.20*c* son de tensión y otros de compresión. Así pues, este estado de esfuerzo tiende a cambiar la forma del elemento. Sin embargo, no tiende a cambiar su volumen. Recuerde de la ecuación (2.22)

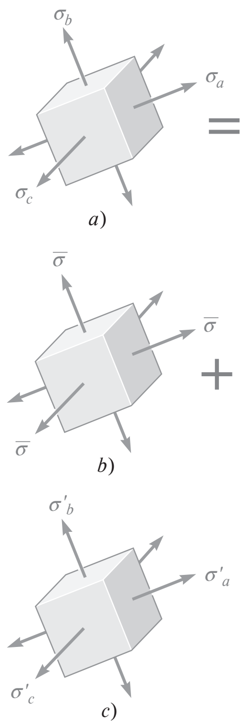


Figura 11.20 *a*) Elemento sometido a un estado de esfuerzo multiaxial expresado como la superposición de *b*) esfuerzos que tienden a provocar un cambio de volumen, *c*) esfuerzos que tienden a provocar distorsión.

que la dilatación e (es decir, el cambio de volumen por unidad de volumen) producido por este estado de esfuerzo es

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c)$$

o $e = 0$ según la ecuación (11.27). Por lo tanto, la parte u_0 de la densidad de energía de deformación debe asociarse con el estado de esfuerzo mostrado en la figura 11.20*b*, mientras que la parte u_d debe asociarse con el estado de esfuerzo mostrado en la figura 11.20*c*.

La parte u_v de la densidad de energía de deformación correspondiente a un cambio de volumen del elemento se puede obtener sustituyendo $\bar{\sigma}$ en lugar de cada uno de los esfuerzos principales en la ecuación (11.23). Por consiguiente,

$$u_v = \frac{1}{2E}[3\bar{\sigma}^2 - 2\nu(3\bar{\sigma}^2)] = \frac{3(1 - 2\nu)}{2E}\bar{\sigma}^2$$

o al recordar la ecuación (11.25),

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \tag{11.28}$$

La parte de la densidad de energía de deformación correspondiente a la distorsión del elemento se determina resolviendo la ecuación (11.24) para u_d y sustituyendo u y u_v de las ecuaciones (11.23) y (11.28), respectivamente

$$u_d = u - u_v = \frac{1}{6E}[3(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2) - 6\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a) - (1 - 2\nu)(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2]$$

Al desarrollar el cuadrado y reordenar los términos,

$$u_d = \frac{1 + n}{6E}[(\sigma_a^2 - 2\sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) + (\sigma_b^2 - 2\sigma_b\sigma_c + \sigma_c^2) + (\sigma_c^2 - 2\sigma_c\sigma_a + \sigma_a^2)]$$

Al observar que cada uno de los paréntesis dentro del corchete es un cuadrado perfecto y al recordar de la ecuación (2.34) que el coeficiente en frente del corchete es igual a $1/12G$, la parte u_d de la densidad de energía de deformación (es decir, la energía de distorsión por unidad de volumen es

$$u_d = \frac{1}{12G}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] \tag{11.29}$$

En *esfuerzo plano,* suponiendo que el eje c es perpendicular al plano de esfuerzo, $\sigma_c = 0$ y la ecuación (11.29) se reduce a

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \tag{11.30}$$

Al considerar una probeta de prueba sometida a tensión, en el momento de la cedencia $\sigma_a = \sigma_Y$, $\sigma_b = 0$ y $(u_d)_Y = \sigma_Y^2/6G$. El criterio de energía de distorsión máxima para esfuerzo plano indica que un estado de esfuerzo dado es seguro cuando $u_d < (u_d)_Y$ o al sustituir u_d de la ecuación (11.30), es seguro siempre que

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \tag{7.26}$$

la cual es la condición que aparece en la sección 7.5A y representada gráficamente por la elipse de la figura 7.32. Para un estado general de esfuerzo, se debe usar la ecuación (11.29) obtenida para u_d. El criterio de energía de distorsión máxima se obtiene entonces mediante la condición:

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 < 2\sigma_Y^2 \tag{11.31}$$

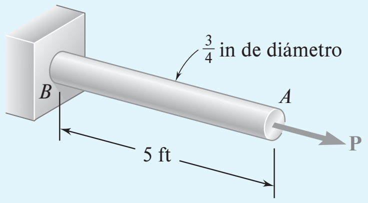
la que indica que un estado de esfuerzo dado es seguro si el punto de coordenadas σ_a, σ_b, σ_c se encuentra dentro de la superficie definida por

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 = 2\sigma_Y^2 \tag{11.32}$$

Esta superficie es un cilindro circular con un radio de $\sqrt{2/3}\sigma_Y$ y un eje de simetría que forma ángulos iguales con los tres ejes de esfuerzo principales.

Problema modelo 11.1

Durante una operación de manufactura de rutina, la barra *AB* debe adquirir una energía de deformación elástica de 120 in · lb. Utilizando $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la resistencia a la cedencia requerida del acero si el factor de seguridad es de 5 con respecto a la deformación permanente.



ESTRATEGIA: Use el factor de seguridad especificado para determinar la densidad de energía de deformación requerida, y luego utilice la ecuación (11.8) para determinar la resistencia a la cedencia.

MODELAR y ANALIZAR:

Factor de seguridad. Como se requiere un factor de seguridad de 5, la barra debe diseñarse para una energía de deformación de

$$U = 5(120 \text{ in} \cdot \text{lb}) = 600 \text{ in} \cdot \text{lb}$$

Densidad de energía de deformación. El volumen de la barra es

$$V = AL = \frac{\pi}{4}(0.75 \text{ in})^2(60 \text{ in}) = 26.5 \text{ in}^3$$

Como la barra tiene una sección transversal uniforme, la densidad de energía de deformación requerida es

$$u = \frac{U}{V} = \frac{600 \text{ in} \cdot \text{lb}}{26.5 \text{ in}^3} = 22.6 \text{ in} \cdot \text{lb/in}^3$$

Resistencia a la cedencia. Recuerde que el módulo de resiliencia es igual a la densidad de energía de deformación cuando el esfuerzo máximo es igual a σ_Y (figura 1). Utilizando la ecuación (11.8),

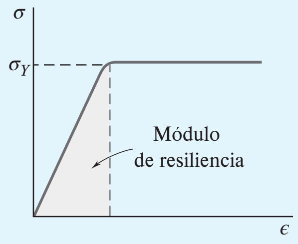


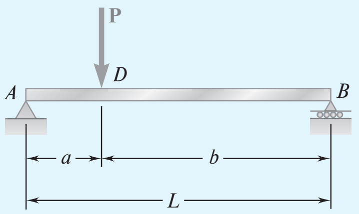
Figura 1 El módulo de resiliencia es igual a la densidad de energía de deformación hasta la cedencia.

$$u = \frac{\sigma_Y^2}{2E}$$

$$22.6 \text{ in} \cdot \text{lb/in}^3 = \frac{\sigma_Y^2}{2(29 \times 10^6 \text{ psi})} \qquad \sigma_Y = 36.2 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Como las cargas de energía no están linealmente relacionadas con los esfuerzos que producen, deben aplicarse factores de seguridad asociados con cargas de energía a las cargas de energía y no con los esfuerzos.

Problema modelo 11.2



a) Tomando en cuenta solo el efecto de los esfuerzos normales producidos por flexión, determine la energía de deformación de la viga prismática AB para la carga mostrada. *b*) Evalúe la energía de deformación, si la viga es una W10 × 45, $P = 40$ kips, $L = 12$ ft, $a = 3$ ft, $b = 9$ ft y $E = 29 \times 10^6$ psi.

ESTRATEGIA: Use el diagrama de cuerpo libre para determinar las reacciones, y escriba ecuaciones para el momento en función de la coordenada a lo largo de viga. La energía de deformación requerida para la parte *a* se determina entonces con la ecuación (11.15). Úsela junto con los datos para evaluar numéricamente la energía de deformación para la parte *b*.

MODELAR:

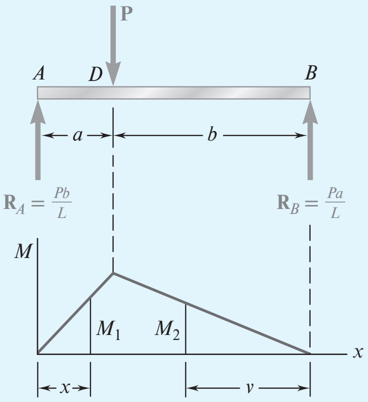


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre y momento flector.

Momento flector. Utilizando el diagrama de cuerpo libre de toda la viga (figura 1), determine las reacciones

$$\mathbf{R}_A = \frac{Pb}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{Pa}{L}\uparrow$$

Utilizando el diagrama de cuerpo libre que aparece en la figura 2, el momento flector para la parte AD de la viga es

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x$$

De *A* a *D*:

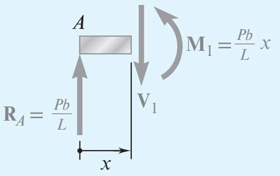


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre, tomando una sección dentro de la parte *AD*.

Asimismo, utilizando el diagrama de cuerpo de la figura 3, el momento flector para la parte DB a una distancia v del extremo B es

$$M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

ANALIZAR:

***a*) Energía de deformación.** Como la energía de deformación es una cantidad escalar, sume la energía del segmento AD a la del segmento DB para obtener la energía de deformación total de la viga. Utilizando la ecuación (11.15),

$$U = U_{AD} + U_{DB}$$

$$= \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI}dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI}dv$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^b \left(\frac{Pa}{L}v\right)^2 dv$$

$$= \frac{1}{2EI}\frac{P^2}{L^2}\left(\frac{b^2a^3}{3} + \frac{a^2b^3}{3}\right) = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL^2}(a + b)$$

De *B* a *D*:

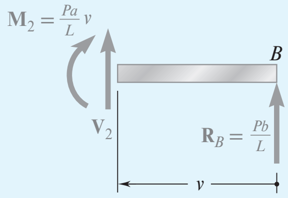


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre, tomando una sección dentro de la parte *DB*.

o como $(a + b) = L$

$$U = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL} \quad ◀$$

***b*) Evaluación de la energía de deformación.** El momento de inercia de un perfil de acero rolado W10 × 45 se obtiene del apéndice C, y los datos dados se modifican utilizando unidades de kips y pulgadas.

$P = 40$ kips $\qquad L = 12$ ft $= 144$ in

$a = 3$ ft $= 36$ in $\qquad b = 9$ ft $= 108$ in

$E = 29 \times 10^6$ psi $= 29 \times 10^3$ ksi $\qquad I = 248$ in^4

Al sustituir U en la expresión,

$$U = \frac{(40 \text{ kips})^2(36 \text{ in})^2(108 \text{ in})^2}{6(29 \times 10^3 \text{ ksi})(248 \text{ in}^4)(144 \text{ in})} \qquad U = 3.89 \text{ in} \cdot \text{kips}$$

Problemas

11.1 Determine el módulo de resiliencia para cada uno de los siguientes grados de acero estructural:

a) ASTM A709 Grado 50: $\sigma_Y = 50$ ksi
b) ASTM A913 Grado 65: $\sigma_Y = 65$ ksi
c) ASTM A709 Grado 100: $\sigma_Y = 100$ ksi

11.2 Determine el módulo de resiliencia para cada una de las siguientes aleaciones de aluminio:

a) 1100-H14 $E = 70$ GPa $\sigma_Y = 55$ MPa
b) 2014-T6: $E = 72$ GPa $\sigma_Y = 220$ MPa
c) 6061-T6: $E = 69$ GPa $\sigma_Y = 150$ MPa

11.3 Determine el módulo de resiliencia para cada uno de los siguientes metales.

a) Acero inoxidable AISI 302 (recocido): $E = 190$ GPa $\sigma_Y = 260$ MPa
b) Acero inoxidable AISI 302 (laminado en frío): $E = 190$ GPa $\sigma_Y = 520$ MPa
c) Hierro fundido maleable: $E = 165$ GPa $\sigma_Y = 230$ MPa

11.4 Determine el módulo de resiliencia para cada una de las siguientes aleaciones:

a) Titanio: $E = 16.5 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 120$ ksi
b) Magnesio: $E = 6.5 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 29$ ksi
c) Cuproníquel (recocido): $E = 20 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 16$ ksi

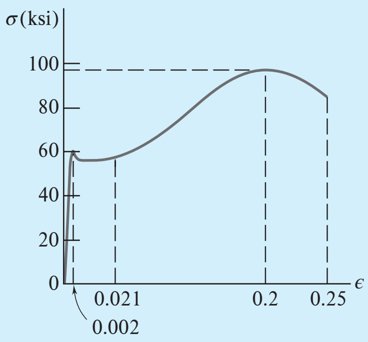


Figura P11.5

11.5 El diagrama de la curva esfuerzo-deformación mostrado se trazó con datos obtenidos durante una prueba de tensión de una probeta de acero estructural. Utilizando $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) el módulo de resiliencia del acero, *b*) el módulo de tenacidad del acero.

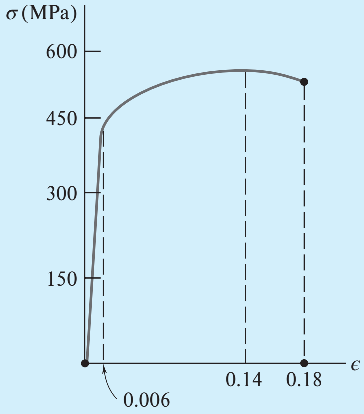


Figura P11.6

11.6 El diagrama de la curva esfuerzo-deformación mostrado se trazó con datos obtenidos durante una prueba de tensión de una aleación de aluminio. Utilizando $E = 72$ GPa, determine *a*) el módulo de resiliencia de la aleación, *b*) el módulo de tenacidad de la aleación.

11.7 El diagrama de la curva carga-deformación mostrado se trazó con datos obtenidos durante una prueba de tensión de una probeta de una aleación de aluminio. Si se sabe que el área de sección transversal de la probeta era de 600 mm^2 y que la deformación se midió con una longitud de referencia de 400 mm, determine mediante métodos aproximados *a*) el módulo de resiliencia de la aleación, *b*) el módulo de tenacidad de la aleación.

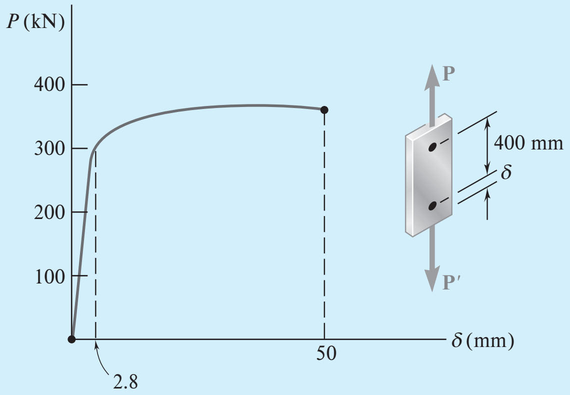


Figura P11.7

11.8 El diagrama de la curva carga-deformación se trazó con datos obtenidos durante una prueba de tensión de una barra de acero estructural de $\frac{5}{8}$ in de diámetro. Si se sabe que la deformación se midió utilizando una longitud de referencia de 18 in, determine mediante métodos aproximados *a*) el módulo de resiliencia del acero, *b*) el módulo de tenacidad del acero.

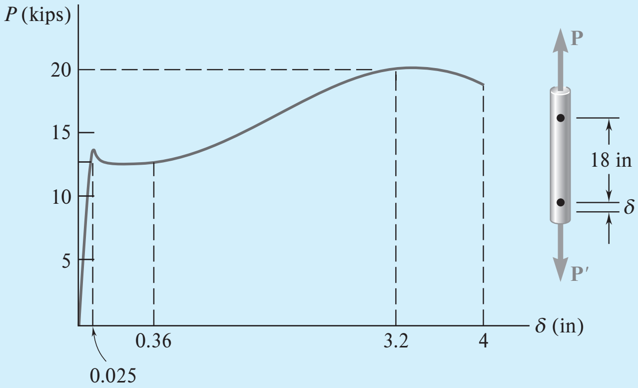


Figura *P11.8*

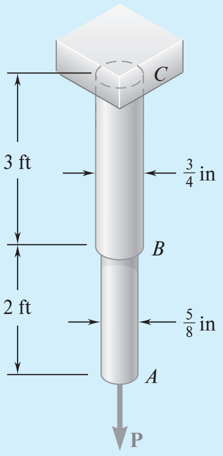


Figura P11.9

11.9 Utilizando $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la energía de deformación de la barra de acero *ABC* cuando $P = 8$ kips, *b*) la densidad de energía de deformación correspondiente en las partes *AB* y *BC* de la barra.

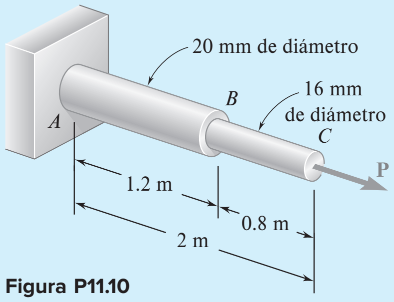


Figura P11.10

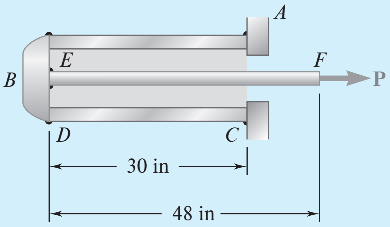


Figura P11.11

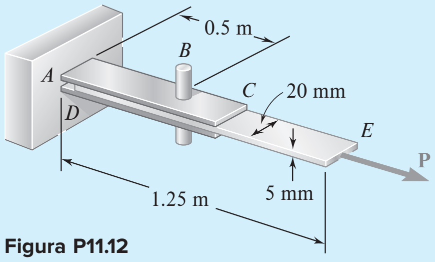


Figura P11.12

11.10 Utilizando $E = 200$ GPa, determine *a*) la energía de deformación de la barra de acero *ABC* cuando $P = 25$ kN, *b*) la densidad de energía de deformación en las partes *AB* y *BC* de la barra.

11.11 Se suelda un tubo de aluminio de 30 in de longitud con área de sección transversal de 1.85 in^2 a un soporte fijo *A* y a una tapa rígida *B*. La barra de acero *EF*, de 0.75 in de diámetro se suelda a la tapa *B*. Si se sabe que el módulo de elasticidad es de 29×10^6 psi para el acero y de 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine *a*) la energía de deformación total del sistema cuando $\mathbf{P} = 8$ kips, *b*) la densidad de energía de deformación del tubo *CD* y en la barra *EF*.

11.12 Se utiliza un solo pasador *B* de acero de 6 mm de diámetro para conectar la tira de acero *DE* a dos tiras de aluminio, cada una de 20 mm de ancho y 5 mm de espesor. El módulo de elasticidad es de 200 GPa para el acero y de 70 GPa para el aluminio. Si se sabe que para el pasador en *B* el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 85$ MPa, determine, para la carga mostrada, la energía de deformación máxima que las tiras ensambladas pueden adquirir.

11.13 Las barras *AB* y *BC* están hechas de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 300$ MPa y su módulo de elasticidad es $E = 200$ GPa. Determine la energía de deformación máxima que el ensamble puede adquirir sin que se deforme permanentemente cuando la longitud *a* de la barra *AB* es *a*) 2 m, *b*) 4 m.

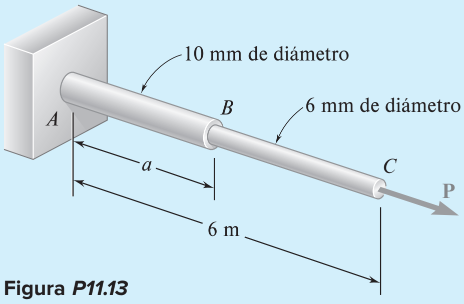


Figura *P11.13*

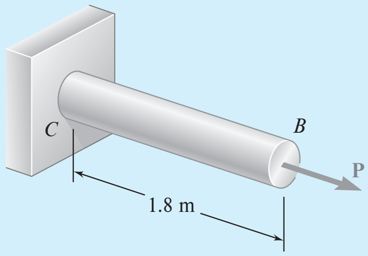


Figura *P11.14*

11.14 La barra *BC* está hecha de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 300$ MPa y su módulo de elasticidad es $E = 200$ GPa. Si se sabe que la barra debe adquirir una energía de deformación de 10 J cuando se aplica la carga axial **P**, determine el diámetro de la barra para el cual el factor de seguridad con respecto a la deformación permanente es seis.

11.15 El ensamble *ABC* está hecho de un acero para el cual $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 320$ MPa. Si se sabe que el ensamble debe adquirir una energía de deformación de 5 J cuando se aplica la carga axial **P**, determine el factor de seguridad con respecto a la deformación permanente cuando *a*) $x = 300$ mm, *b*) $x = 600$ mm.

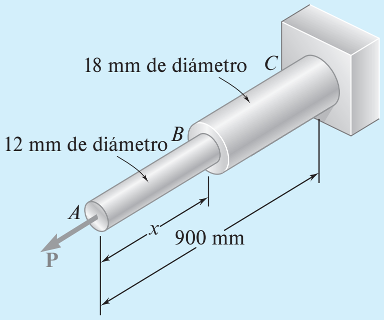


Figura P11.15

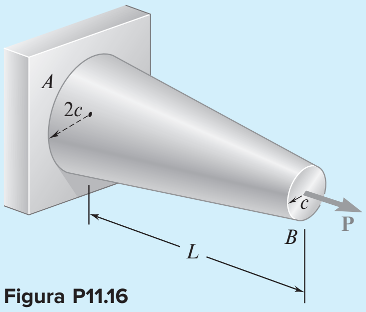


Figura P11.16

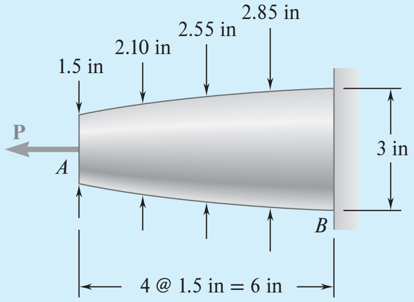


Figura P11.17

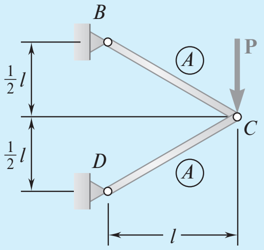


Figura P11.18

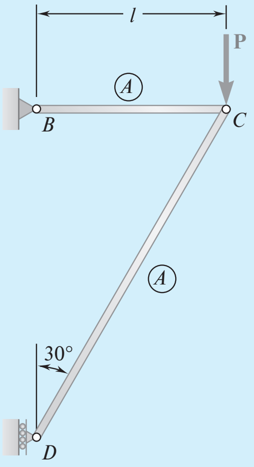


Figura *P11.19*

11.16 Demuestre por integración que la energía de deformación para la barra ahusada AB es

$$U = \frac{1}{4}\frac{P^2L}{EA_{\min}}$$

donde $A_{\min}$ es el área de sección transversal en el extremo B.

11.17 Utilizando $E = 10.6 \times 10^6$ psi, determine mediante métodos aproximados que la energía máxima de deformación que la barra de aluminio puede adquirir si el esfuerzo normal permisible es $\sigma_{\text{perm}} = 22$ ksi.

11.18 a 11.21 En la armadura mostrada, todos los elementos están hechos del mismo material y tienen el área de sección transversal uniforme indicada. Determine la energía de deformación de la armadura cuando se aplica la carga **P**.

11.22 Cada elemento de la armadura mostrada es de aluminio y tiene el área de sección transversal mostrada. Utilizando $E = 72$ GPa, determine la energía de deformación de la armadura para la carga mostrada.

11.23 Cada elemento de la armadura mostrada es de aluminio y tiene el área de sección transversal indicada. Utilizando $E = 10.5 \times 10^6$ psi, determine la energía de deformación de la armadura para la carga mostrada.

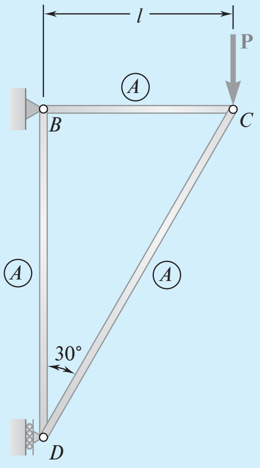


Figura P11.20

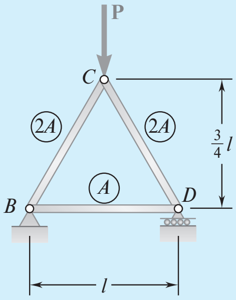


Figura P11.21

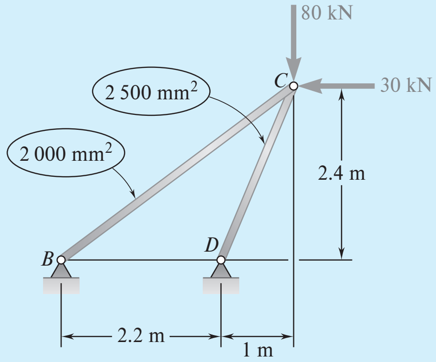


Figura *P11.22*

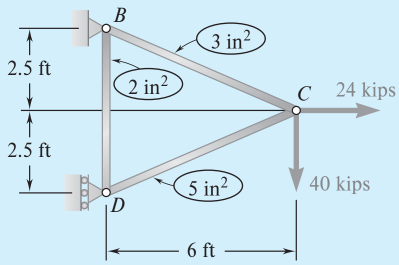


Figura P11.23

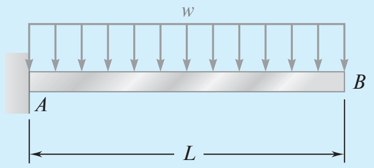


Figura P11.24

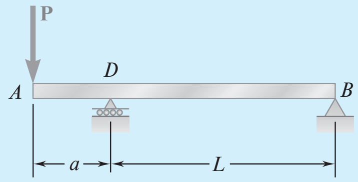


Figura P11.25

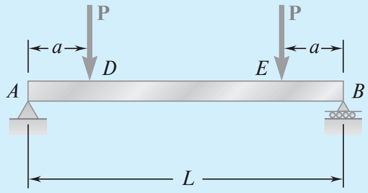


Figura *P11.26*

11.24 a 11.27 Considerando solo el efecto de los esfuerzos normales, determine la energía de deformación de la barra prismática para la carga mostrada.

11.28 y *11.29* Utilizando $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la energía de deformación producida por flexión para la viga de acero y carga mostradas. (Ignore el efecto de los esfuerzos cortantes).

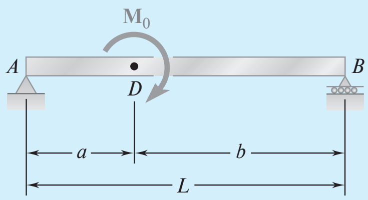


Figura P11.27

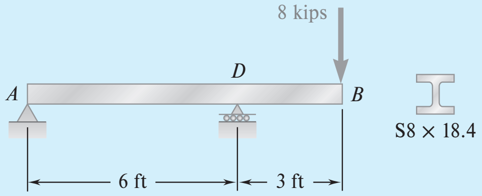


Figura P11.28

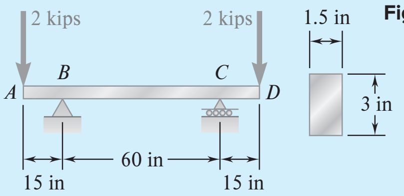


Figura *P11.29*

11.30 y 11.31 Utilizando $E = 200$ GPa, determine la energía de deformación producida por flexión para la viga de acero y carga mostradas. (Ignore el efecto de los esfuerzos cortantes).

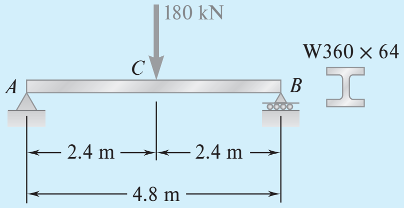


Figura P11.30

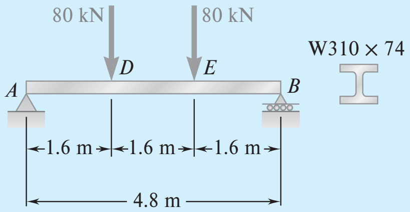


Figura P11.31

11.32 Suponiendo que la viga prismática *AB* tiene una sección transversal rectangular, demuestre que para la carga dada el valor máximo de la energía de deformación en la viga es

$$u_{\text{máx}} = \frac{45}{8}\frac{U}{V}$$

donde U es la energía de deformación de la viga y V es su volumen.

11.33 En el ensamble mostrado, los pares de torsión $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ se ejercen en los discos *A* y *B*, respectivamente. Si ambas flechas son sólidas y están hechas de alu-

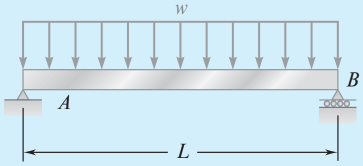


Figura P11.32

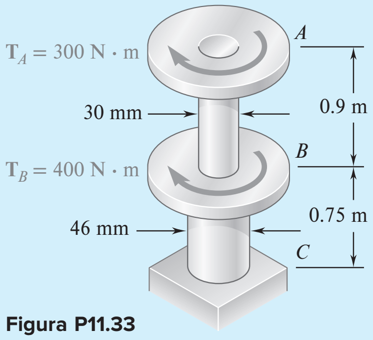


Figura P11.33

minio (G = 73 GPa), determine la energía de deformación total adquirida por el ensamble.

11.34 Las especificaciones de diseño para la flecha de acero AB requieren que la flecha adquiera una energía de deformación de 400 in · lb cuando se aplica el par de torsión de 25 kip · in. Utilizando $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el diámetro interno máximo de la flecha que se puede usar, *b*) el esfuerzo cortante máximo correspondiente en la flecha.

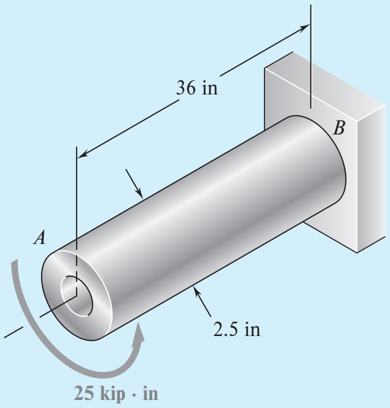


Figura *P11.34*

11.35 Demuestre por integración que la energía de deformación en la barra ahusada AB es

$$U = \frac{7}{48}\frac{T^2 L}{GJ_{\text{mín}}}$$

donde $J_{\text{mín}}$ es el momento polar de inercia de la barra en el extremo B.

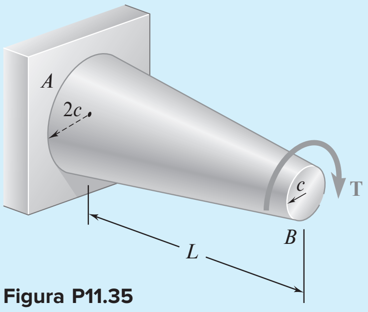


Figura P11.35

11.36 El estado de esfuerzo mostrado se presenta en un componente de máquina de latón para el cual σ_Y = 160 MPa. Utilizando el criterio de energía de distorsión máxima, determine el rango de valores de σ_z para los cuales ocurre la cedencia.

11.37 El estado de esfuerzo mostrado se presenta en un componente de máquina de latón para el cual σ_Y = 160 MPa. Utilizando el criterio de energía de distorsión máxima, determine si la cedencia ocurre cuando *a*) σ_z = +45 MPa, *b*) σ_z = −45 MPa.

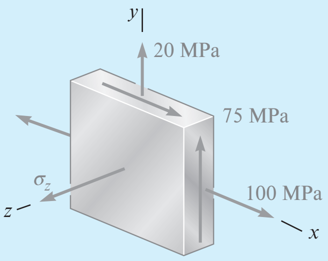


Figura *P11.36* y P11.37

11.38 El estado de esfuerzo mostrado se presenta en un componente de máquina hecho de un grado de acero para el cual σ_Y = 65 ksi. Utilizando el criterio de energía de distorsión máxima, determine el rango de valores de σ_y para el cual el factor de seguridad asociado con la resistencia a la cedencia es igual o mayor que 2.2.

11.39 El estado de esfuerzo mostrado ocurre en un componente de máquina hecho de un grado de acero para el cual σ_Y = 65 ksi. Utilizando el criterio de energía de distorsión máxima, determine el factor de seguridad asociado con la resistencia a la cedencia cuando *a*) σ_y = +16 ksi, *b*) σ_y = −16 ksi.

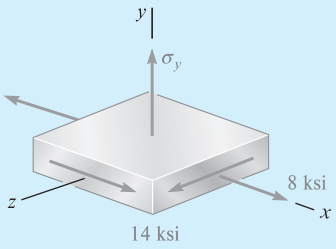


Figura *P11.38* y P11.39

11.40 Determine la energía de deformación de la viga prismática AB, teniendo en cuenta el efecto tanto de los esfuerzos normales como de los esfuerzos cortantes.

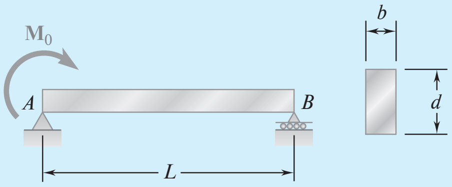


Figura P11.40

***11.41** Un soporte aislante de la vibración se fabricó pegando una barra A, de radio R_1, y un tubo B, de radio interno R_2, a un cilindro hueco de caucho. Si G denota el módulo de rigidez del caucho, determine la energía de deformación del cilindro de hueco de caucho para la carga mostrada.

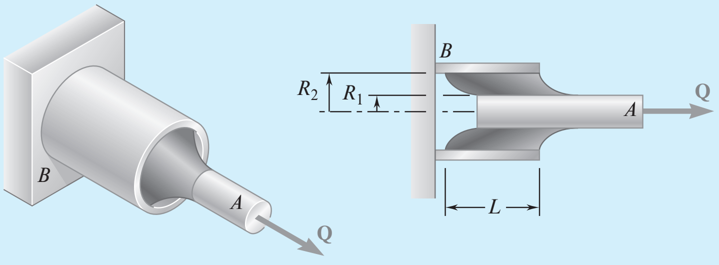


Figura P11.41 *a*) *b*)

11.4 CARGAS DE IMPACTO

11.4A Análisis

Considere una barra *BD* de sección transversal uniforme que es golpeada en el extremo *B* por un cuerpo de masa *m* que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0$ (figura 11.21*a*). Conforme la barra se deforma por el impacto (figura 11.21*b*), dentro de ella se desarrollan esfuerzos que alcanzan un valor máximo σ_m. Después de vibrar durante un tiempo, la barra se detiene y todos los esfuerzos desaparecen. Tal secuencia de eventos se conoce como *carga de impacto* (fotografía 11.2).

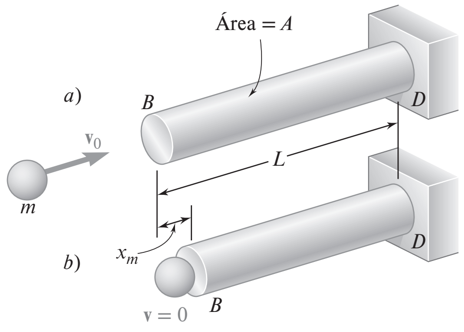


Figura 11.21 Barra sometida a una carga de impacto.

Fotografía 11.2 El vapor eleva alternadamente un contrapeso en el interior del martinete y luego lo impulsa hacia abajo. Esto ejerce una gran carga de impacto sobre el pilote que se está clavando en el suelo.

Se hacen varias suposiciones para determinar el valor máximo σ_m del esfuerzo en un punto dado de una estructura sometida a una carga de impacto.

Primero, se supone que la energía cinética $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ del cuerpo que golpea se transfiere íntegramente a la estructura. Por lo tanto, la energía de deformación U_m correspondiente a la deformación máxima x_m es

$$U_m = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \tag{11.33}$$

Esta suposición conduce a los siguientes requisitos.

1. No se disipa energía durante el impacto.
2. El cuerpo que golpea no debe rebotar de la estructura y retener una parte de su energía. Esto, a su vez, requiere que la inercia de la estructura será insignificante, comparada con la inercia del cuerpo que golpea.

En la práctica, ninguno de estos requisitos se satisface, y solo una parte de la energía cinética del cuerpo que golpea se transfiere realmente a la estructura. Por lo tanto, suponer que toda la energía cinética se transfiere a la estructura conduce a un diseño conservador.

También se supone que el diagrama de la curva esfuerzo-deformación obtenido con una prueba de estática del material es válido bajo cargas de impacto. Por lo tanto, para una deformación elástica de la estructura, el valor máximo de la energía de deformación es

$$U_m = \int \frac{\sigma_m^2}{2E}\,dV \tag{11.34}$$

Para la barra uniforme de la figura 11.21, el esfuerzo máximo σ_m tiene el mismo valor a lo largo de la barra, y $U_m = \sigma_m^2 V/2E$, resolviendo σ_m y sustituyendo U_m de la ecuación (11.33) se obtiene

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 E}{V}} \tag{11.35}$$

En esta ecuación se observa que si selecciona una barra de gran volumen *V* y un bajo módulo de elasticidad *E* se obtiene un valor más pequeño del esfuerzo máximo σ_m para una carga de impacto dada.

En la mayoría de los problemas, la distribución de esfuerzos en la estructura no es uniforme, y la ecuación (11.35) no es válida. Entonces es conveniente determinar la carga estática $\mathbf{P}_m$ que produce la misma energía de deformación que la carga de impacto y calcular con P_m el valor correspondiente σ_m del esfuerzo máximo en la estructura.

Aplicación de conceptos 11.6

Un cuerpo de masa *m* que se desplaza a una velocidad $\mathbf{v}_0$ choca con el extremo *B* de la barra no uniforme *BCD* (figura 11.22). Si se sabe que el diámetro del segmento *BC* es dos veces el diámetro de la parte *CD*, determine el valor máximo σ_m del esfuerzo en la barra.

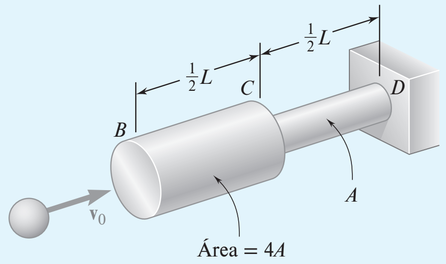


Figura 11.22 Barra escalonada impactada por un cuerpo de masa *m*.

Con $n = 2$ en la ecuación (1) de la Aplicación de conceptos 11.1, cuando la barra *BCD* se somete a una carga estática P_m, su energía de deformación es

$$U_m = \frac{5P_m^2 L}{16AE} \qquad (1)$$

donde *A* es el área de sección transversal del segmento *CD*. Resolviendo la ecuación (1) para P_m, la carga estática que produce la misma energía de deformación que la carga de impacto dada es

$$P_m = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_m AE}{L}}$$

donde la ecuación (11.33) da U_m. El esfuerzo máximo ocurre en el segmento *CD*. Al dividir P_m entre el área *A* de esa parte,

$$\sigma_m = \frac{P_m}{A} = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_m E}{AL}} \qquad (2)$$

o al sustituir U_m de la ecuación (11.33) se obtiene

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8}{5}\frac{mv_0^2 E}{AL}} = 1.265\sqrt{\frac{mv_0^2 E}{AL}}$$

Comparando este valor con el valor obtenido para σ_m en la barra uniforme de la figura 11.21 y con $V = AL$ en la ecuación (11.35), observe que el esfuerzo máximo en la barra de sección transversal variable es 26.5% más grande que en la barra uniforme más ligera. Por lo tanto, como en el análisis de la Aplicación de conceptos 11.1, al incrementarse el diámetro del segmento *BC*, la capacidad de absorción de energía de la barra se *reduce*.

Aplicación de conceptos 11.7

Se deja caer un bloque de peso W desde una altura h sobre el extremo libre de la viga en voladizo AB (figura 11.23). Determine el valor máximo del esfuerzo en la viga.

Conforme cae a lo largo de la distancia h, la energía potencial Wh del bloque se transforma en energía cinética. A consecuencia del impacto, la energía cinética se transforma en energía de deformación. Por consiguiente,

$$U_m = Wh \tag{1}$$

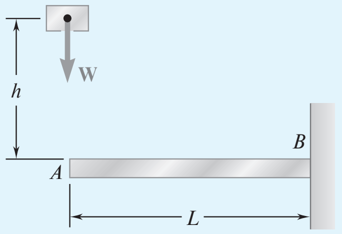


Figura 11.23 Bloque de peso W que cae sobre una viga en voladizo.

La distancia total que el bloque cae en realidad es $h + y_m$, donde y_m es la deflexión máxima del extremo de la viga. Por lo tanto, una expresión más precisa para U_m (vea el Problema modelo 11.3) es

$$U_m = W(h + y_m) \tag{2}$$

Sin embargo, cuando $h \gg y_m$, y_m se puede ignorar, y por lo tanto la ecuación (1) es válida.

Al recordar la ecuación para la energía de deformación de la viga en voladizo AB de la Aplicación de conceptos 11.3, la cual se basó en ignorar el efecto del cortante,

$$U_m = \frac{P_m^2 L^3}{6EI}$$

Al resolver P_m en esta ecuación, la fuerza estática que produce la misma energía de deformación en la viga es

$$P_m = \sqrt{\frac{6U_m EI}{L^3}} \tag{3}$$

El esfuerzo máximo σ_m ocurre en el extremo fijo B y es

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} = \frac{P_m Lc}{I}$$

Al sustituir P_m de la ecuación (3),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U_m E}{L(I/c^2)}} \tag{4}$$

o al recordar la ecuación (1),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6WhE}{L(I/c^2)}}$$

11.4B Diseño

Ahora compare los valores de la sección anterior para el esfuerzo máximo σ_m: *a*) en la barra de sección transversal uniforme mostrada en la figura 11.21, *b*) en la barra de sección transversal variable de la Aplicación de conceptos 11.6 y *c*) en la viga en voladizo de la Aplicación de conceptos 11.7, suponiendo que la última tiene una sección transversal circular de radio c.

a) La ecuación (11.35) demuestra que, si U_m es la cantidad de energía transferida a la barra a consecuencia de la carga de impacto, el esfuerzo máximo en la barra de sección transversal uniforme es

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}} \tag{11.36a}$$

donde V es el volumen de la barra.

b) Considerando la barra de la Aplicación de conceptos 11.6 y observando que su volumen es

$$V = 4A(L/2) + A(L/2) = 5AL/2$$

sustituya $AL = 2V/5$ en la ecuación (2) de la Aplicación de conceptos 11.6 y escriba

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8U_m E}{V}} \tag{11.36b}$$

c) Por último, al recordar que $I = \frac{1}{4}\pi c^4$ para una viga de sección transversal circular,

$$L(I/c^2) = L(\tfrac{1}{4}\pi c^4/c^2) = \tfrac{1}{4}(\pi c^2 L) = \tfrac{1}{4}V$$

donde V es el volumen de la viga. Al sustituir en la ecuación (4) de la Aplicación de conceptos 11.7, el esfuerzo máximo en la viga en voladizo es

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{24U_m E}{V}} \tag{11.36c}$$

En cada caso, el esfuerzo máximo σ_m es proporcional a la raíz cuadrada del módulo de elasticidad del material e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del volumen del elemento. Suponiendo que los tres elementos tienen el mismo volumen y que son del mismo material, se observa que para un valor dado de la energía absorbida, la barra uniforme experimenta el esfuerzo máximo más bajo y la viga en voladizo el más alto.

Esto se explica por el hecho de que la distribución de esfuerzos es uniforme en el caso *a*, y de que la energía de deformación está uniformemente distribuida en la barra. En el caso *b*, por otra parte, los esfuerzos en el segmento *BC* de la barra son sólo 25% más grandes que los esfuerzos en el segmento *CD*. Esta distribución irregular de los esfuerzos y energía de deformación produce un esfuerzo máximo σ_m que es dos veces más grande que el esfuerzo correspondiente en la barra uniforme. Por último, en el caso *c*, donde la viga en voladizo se somete a una carga de impacto transversal, los esfuerzos varían linealmente a lo largo de la viga así como también a través de una sección transversal. Esta distribución irregular de la energía de deformación hace que el esfuerzo máximo σ_m sea 3.46 veces más grande que en el mismo elemento axialmente cargado (como en el caso *a*).

Las propiedades analizadas en esta sección son bastante generales y se pueden observar en todos los tipos de estructuras sujetas a cargas de impacto. Por lo tanto, un elemento estructural diseñado para resistir con más eficacia una carga de impacto debe

1. Tener un gran volumen.
2. Estar hecho de un material con un bajo módulo de elasticidad y una alta resistencia a la cedencia.
3. Tener una forma de modo que los esfuerzos se distribuyan lo más uniformemente posible en todo el elemento.

11.5 CARGAS ÚNICAS

11.5A Formulación de energía

El concepto de energía de deformación introducido al principio de este capítulo consideró el trabajo realizado por una carga axial **P** aplicada al extremo de una barra de

sección transversal uniforme (figura 11.1). La energía de deformación de la barra para un alargamiento x_1 se definió como el trabajo de la carga **P** a medida que se incrementa lentamente de 0 a P_1 correspondiente a x_1. Por lo tanto,

$$\text{Energía de deformación} = U = \int_0^{x_1} P\, dx \tag{11.2}$$

Para una deformación elástica, el trabajo de la carga **P** y la energía de deformación de la barra es

$$U = \tfrac{1}{2} P_1 x_1 \tag{11.3}$$

La energía de deformación de elementos estructurales en varias condiciones de carga se determinó en la sección 11.2 utilizando la densidad de energía de deformación u en cada punto del elemento e integrando u a lo largo de todo el elemento.

Cuando una estructura o un elemento se somete a una *carga concentrada única*, se puede utilizar la ecuación (11.3) para evaluar su energía de deformación elástica, siempre que se conozca la relación entre la carga y la deformación resultante. Por ejemplo, la viga en voladizo de la Aplicación de conceptos 11.3 (figura 11.24) tiene

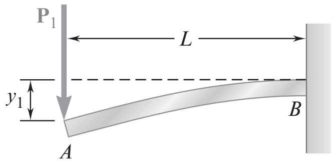


Figura 11.24 Viga en voladizo con un momento $\mathbf{P}_1$.

$$U = \tfrac{1}{2} P_1 y_1$$

y al sustituir el valor de la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice *D* en lugar de y_1 da

$$U = \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{P_1 L^3}{3EI} \right) = \frac{P_1^2 L^3}{6EI} \tag{11.37}$$

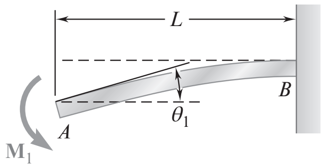


Figura 11.25 Viga en voladizo con un momento $\mathbf{M}_1$.

Se puede usar un método similar para determinar la energía de deformación de una estructura o elemento sometido a un *momento único*. Recuerde que el trabajo elemental de un momento M es $M\, d\theta$, donde $d\theta$ es un ángulo pequeño. Como M y θ están linealmente relacionados, la energía de deformación elástica de una viga en voladizo AB sometida a un momento único $\mathbf{M}_1$ en su extremo A (figura 11.25) es

$$U = \int_0^{\theta_1} M\, d\theta = \tfrac{1}{2} M_1 \theta_1 \tag{11.38}$$

donde θ_1 es la pendiente de la viga en A. Al sustituir el valor obtenido del apéndice D para θ_1 da

$$U = \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_1 L}{EI} \right) = \frac{M_1^2 L}{2EI} \tag{11.39}$$

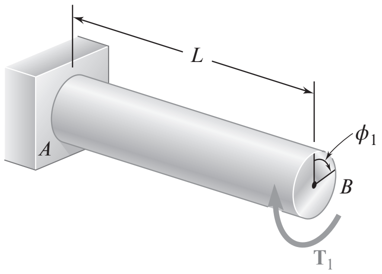


Figura 11.26 Flecha en voladizo sometida a un par $\mathbf{T}_1$.

Asimismo, la energía de deformación elástica de una flecha circular uniforme AB de longitud L sometida en su extremo B a un par único $\mathbf{T}_1$ (figura 11.26) es

$$U = \int_0^{\phi_1} T\, d\phi = \tfrac{1}{2} T_1 \phi_1 \tag{11.40}$$

Al sustituir el ángulo de torsión ϕ_1 de la ecuación (3.15) da

$$U = \frac{1}{2} T_1 \left(\frac{T_1 L}{JG} \right) = \frac{T_1^2 L}{2JG}$$

El método presentado en esta sección puede simplificar la solución de muchos problemas de carga de impacto. En la Aplicación de conceptos 11.8 se analiza la colisión de un automóvil contra una barrera (fotografía 11.3) utilizando un modelo simplificado que consiste en un bloque y una viga simple.

Fotografía 11.3 Cuando el automóvil choca con la barrera, se disipa una considerable cantidad de energía como calor durante la deformación permanente del automóvil y la barrera.

Aplicación de conceptos 11.8

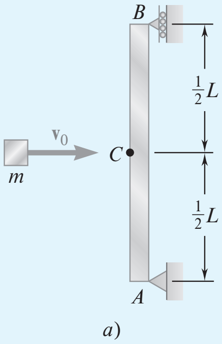


Figura 11.27 *a*) Viga simplemente apoyada impactada por un bloque en su centro.

Un bloque de masa m que se desplaza a una velocidad $\mathbf{v}_0$ choca perpendicularmente con el elemento prismático AB en su centro C (figura 11.27*a*). Determine *a*) la carga estática equivalente P_m, *b*) el esfuerzo máximo σ_m en el elemento, y *c*) la deflexión máxima x_m en el punto C.

a) Carga estática equivalente. La energía de deformación máxima del elemento es igual a la energía cinética del bloque antes del impacto.

$$U_m = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \qquad (1)$$

Por otra parte, U_m se puede dar como el trabajo de la carga estática horizontal equivalente al aplicarse lentamente en el centro C.

$$U_m = \tfrac{1}{2}P_m x_m \qquad (2)$$

donde x_m es la deflexión de C correspondiente a la carga estática P_m. De la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice D,

$$x_m = \frac{P_m L^3}{48EI} \qquad (3)$$

Al sustituir x_m de la ecuación (3) en la ecuación (2),

$$U_m = \frac{1}{2}\frac{P_m^2 L^3}{48EI}$$

Al resolver P_m y recordar la ecuación (1), la carga estática equivalente a la carga de impacto dada es

$$P_m = \sqrt{\frac{96U_m EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} \qquad (4)$$

***b*) Esfuerzo máximo.** Al trazar el diagrama de cuerpo libre del elemento (figura 11.27*b*), el valor máximo del momento flector ocurre en C y es $M_{\text{máx}} = P_m L/4$. El esfuerzo máximo ocurre en una sección transversal a través de C y es igual a

$$\sigma_m = \frac{M_{\text{máx}}\, c}{I} = \frac{P_m Lc}{4I}$$

Al sustituir P_m de la ecuación (4),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{3mv_0^2 EI}{L(I/c)^2}}$$

Deflexión máxima. Al sustituir en la ecuación (3) la expresión obtenida para P_m en la ecuación (4):

$$x_m = \frac{L^3}{48EI}\sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 L^3}{48EI}}$$

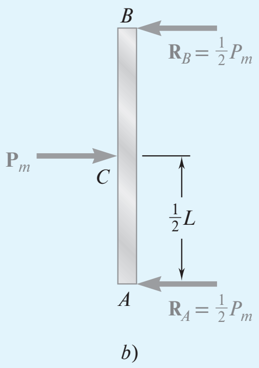


Figura 11.27 (*cont.*) *b*) Diagrama de cuerpo libre de la viga.

11.5B Deflexiones

La sección anterior demostró que, si se conoce la deflexión x_1 de una estructura bajo una carga concentrada única $\mathbf{P}_1$, la energía de deformación correspondiente U es

$$U = \tfrac{1}{2}P_1 x_1 \qquad (11.3)$$

Una ecuación similar para la energía de deformación de un elemento estructural sometido a un par único $\mathbf{M}_1$ es

$$U = \tfrac{1}{2}M_1\theta_1 \qquad (11.38)$$

Si se conoce la energía de deformación U de una estructura o elemento sometido a una carga concentrada única $\mathbf{P}_1$ o a un momento $\mathbf{M}_1$, se pueden usar las ecuaciones (11.3) u (11.38) para determinar la deflexión correspondiente x_1 o el ángulo θ_1. Para determinar la deflexión bajo una carga única aplicada a una estructura con varios componentes, en lugar de utilizar uno de los métodos del capítulo 9, con frecuencia es más fácil calcular primero la energía de deformación de la estructura integrando la densidad de energía de deformación en sus diversas partes, como se hizo en la sección 11.2, y luego utilizar las ecuaciones (11.3) u (11.38) para determinar la deflexión deseada. Asimismo, el ángulo de torsión ϕ_1 de una flecha compuesta se puede obtener integrando la densidad de energía de deformación en varias partes de la flecha y resolviendo ϕ_1 en la ecuación (11.40).

El método en esta sección se puede usar *solo si la estructura dada se somete a una carga concentrada o momento únicos*. La energía de deformación de una estructura sometida a varias cargas no se puede determinar calculando el trabajo de cada una como si se aplicara independientemente a la estructura (vea la sección 11.6). Aun cuando es posible determinar la energía de deformación de la estructura de esta manera, sólo una ecuación está disponible para determinar las deflexiones correspondientes a las varias cargas. En las secciones 11.7 y 11.8 se desarrolla otro método basado en el concepto de energía de deformación que se puede usar para determinar la deflexión o pendiente en un punto dado, aun cuando la estructura esté sometida simultáneamente a varias cargas concentradas, cargas distribuidas, o momentos.

Aplicación de conceptos 11.9

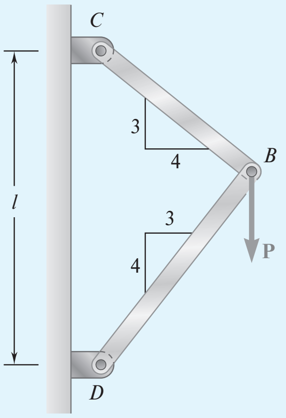


Figura 11.28 Bastidor *CBD* con una carga vertical **P**.

Dos barras uniformes de la misma área de sección transversal soportan una carga **P** en *B* (figura 11.28). Determine la deflexión vertical del punto *B*.

La energía de deformación del sistema bajo la carga dada se determinó en la Aplicación de conceptos 11.2. Al igualar *U* al trabajo de la carga, escriba

$$U = 0.364\frac{P^2 l}{AE} = \frac{1}{2}Py_B$$

y al resolver para la deflexión vertical de *B*,

$$y_B = 0.728\frac{Pl}{AE}$$

Comentario. Una vez que se han obtenido las fuerzas en las dos barras (vea la Aplicación de conceptos 11.2), se pueden obtener las deformaciones $\delta_{B/C}$ y $\delta_{B/D}$ con el método del capítulo 2. Sin embargo, la determinación de la deflexión vertical en el punto *B* a partir de estas deformaciones requiere un cuidadoso análisis geométrico de los diferentes desplazamientos. El método de energía de deformación utilizado aquí hace innecesario tal análisis.

Aplicación de conceptos 11.10

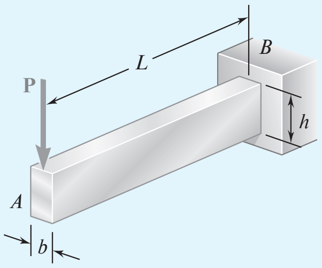


Figura 11.29 Viga rectangular en voladizo con una carga **P**.

Determine la deflexión en el extremo *A* de la viga *AB* en voladizo (figura 11.29), considerando el efecto de *a*) solo los esfuerzos normales, *b*) los esfuerzos normales y cortantes.

***a*) Efecto de los esfuerzos normales.** El trabajo de la fuerza **P** al aplicarla lentamente a *A* es

$$U = \tfrac{1}{2}Py_A$$

Al sustituir *U* con la expresión para la energía de deformación de la viga en la Aplicación de conceptos 11.3, donde se consideró solo el efecto de los esfuerzos normales, escriba

$$\frac{P^2L^3}{6EI} = \frac{1}{2}Py_A$$

y al resolver y_A,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

***b*) Efecto de esfuerzos normales y cortantes.** Ahora sustituya en lugar de *U* la expresión para la energía de deformación total obtenida en la Aplicación de con-

ceptos 11.5, donde se consideraron los efectos tanto de los esfuerzos normales como de los esfuerzos cortantes. Por lo tanto,

$$\frac{P^2L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = \frac{1}{2}Py_A$$

y al resolver y_A,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right)$$

Observe que el error relativo cuando no se considera el efecto del cortante es el mismo que el obtenido en la Aplicación de conceptos 11.5 [es decir, menor que $0.9(h/L)^2$]. Este valor es menor que 0.9% para una viga con una relación h/L menor que $\frac{1}{10}$.

Aplicación de conceptos 11.11

Se aplica un par **T** en el extremo *D* de la flecha *BCD* (figura 11.30). Si se sabe que las dos partes de la flecha son del mismo material y longitud, pero que el diámetro de *BC* es dos veces el diámetro de *CD*, determine el ángulo de torsión para toda la flecha.

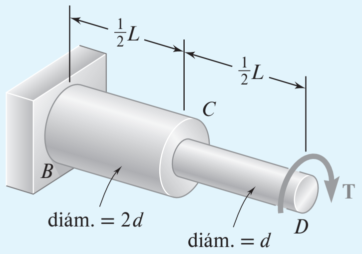


Figura 11.30 Flecha escalonada *BCD* con par **T**.

En la Aplicación de conceptos 11.4, la energía de deformación se determinó al dividir la flecha en sus partes componentes *BC* y *CD*. Con $n = 2$ en la ecuación (1) de la Aplicación de conceptos se obtiene

$$U = \frac{17}{32}\frac{T^2L}{2GJ}$$

donde *G* es el módulo de rigidez del material y *J* es el momento polar de inercia del segmento *CD*. Al hacer *U* igual al trabajo del par a medida que se aplica lentamente al extremo *D* y recordando la ecuación (11.40), escriba

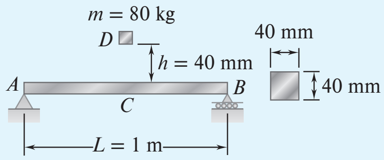
$$\frac{17}{32}\frac{T^2L}{2GJ} = \frac{1}{2}T\phi_{D/B}$$

y al resolver el ángulo de torsión $\phi_{D/B}$,

$$\phi_{D/B} = \frac{17TL}{32GJ}$$

Problema modelo 11.3

El bloque *D* de masa *m* se deja caer desde el reposo y cae una distancia *h* hasta impactarse en el centro *C* de la viga de aluminio *AB*. Utilizando $E = 73$ GPa, determine *a*) la deflexión máxima del punto *C*, *b*) el esfuerzo máximo en la viga.



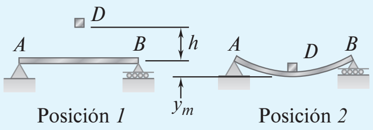


Figura 1 Bloque soltado desde la posición de reposo (posición *1*) y deflexión máxima de la viga (posición *2*).

ESTRATEGIA: Calcule la energía de deformación de la viga en función de la deflexión e iguálela al trabajo realizado por el bloque. Esto luego se puede usar junto con los datos para resolver las parte *a*. Utilizando la relación entre la carga aplicada y la deflexión (apéndice D), obtenga la carga estática equivalente y con esta obtenga el esfuerzo normal producido por flexión.

MODELAR:

Principio del trabajo y energía. El bloque se deja caer desde el reposo (figura 1, posición *1*). Observe que en esta posición tanto la energía cinética como la energía de deformación son cero. En la posición *2* (figura 1), donde ocurre la deflexión máxima y_m, la energía cinética también es cero. Use la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice D para determinar la expresión para y_m mostrada en la figura 2. La energía de deformación de la viga en la posición *2* es

$$U_2 = \frac{1}{2}P_m y_m = \frac{1}{2}\frac{48EI}{L^3}y_m^2 \qquad U_2 = \frac{24EI}{L^3}y_m^2$$

El trabajo realizado por el peso **W** del bloque es $W(h + y_m)$. Al igualar la energía de deformación de la viga al trabajo realizado por **W** se obtiene

$$\frac{24EI}{L^3}y_m^2 = W(h + y_m) \qquad (1)$$

ANALIZAR:

***a*) Deflexión máxima del punto C.** Con los datos dados,

$$EI = (73 \times 10^9 \text{ Pa})\tfrac{1}{12}(0.04 \text{ m})^4 = 15.573 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2$$

$$L = 1 \text{ m} \qquad h = 0.040 \text{ m} \qquad W = mg = (80 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 784.8 \text{ N}$$

Al sustituir W en la ecuación (1), se obtiene una ecuación cuadrática que se puede resolver para la deflexión:

$$(373.8 \times 10^3)y_m^2 - 784.8y_m - 31.39 = 0 \qquad y_m = 10.27 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***b*) Esfuerzo máximo.** El valor de P_m (figura 2) es

$$P_m = \frac{48EI}{L^3}y_m = \frac{48(15.573 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m})}{(1 \text{ m})^3}(0.01027 \text{ m}) \qquad P_m = 7\,677 \text{ N}$$

Al recordar que $\sigma_m = M_{\text{máx}}c/I$ y $M_{\text{máx}} = \frac{1}{4}P_m L$, escriba

$$\sigma_m = \frac{(\frac{1}{4}P_m L)c}{I} = \frac{\frac{1}{4}(7\,677 \text{ N})(1 \text{ m})(0.020 \text{ m})}{\frac{1}{12}(0.040 \text{ m})^4} \qquad \sigma_m = 179.9 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Del apéndice D

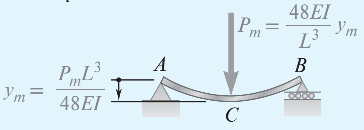
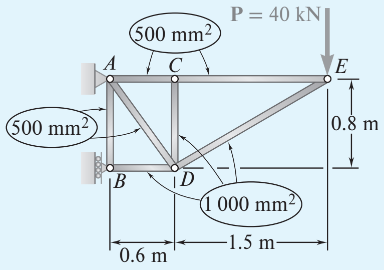


Figura 2 Fuerza estática equivalente para producir la deflexión y_m.

REVISAR y PENSAR: Se obtiene una aproximación para el trabajo realizado por el peso del bloque omitiendo y_m de la expresión para el trabajo y del miembro de la derecha de la ecuación (1), como se hizo en la Aplicación de conceptos 11.7. Si aquí se utiliza esta aproximación, y_m = 9.16 mm y el error es de 10.8%. Sin embargo, si se deja caer un bloque de 8 kg desde una altura de 400 mm (se produce el mismo valor para Wh) y se omite y_m del miembro de la derecha de la ecuación (1) se obtiene un error de solo 1.2%.

Problema modelo 11.4



Los elementos de la armadura mostrada se componen de secciones de tubo de aluminio con la sección transversal indicada. Utilizando $E = 73$ GPa, determine la deflexión vertical del punto E producida por la carga **P**.

ESTRATEGIA: Trace un diagrama de cuerpo libre de la armadura para determinar las reacciones y luego utilice los diagramas de cuerpo libre de cada unión para determinar las fuerzas en los elementos. Se puede utilizar entonces la ecuación (11.14) para determinar la energía de deformación en cada miembro. Iguale la energía de deformación total en los elementos al trabajo realizado por la carga **P** para determinar la deflexión vertical en la carga.

MODELAR:

Fuerzas axiales en elementos de la armadura. Las reacciones se encuentran utilizando el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura (figura 1*a*). Considere el equilibrio de las uniones E, C, D y B en secuencia (figura 1*b* a 1*e*). En cada unión, determine las fuerzas indicadas por las líneas de rayas. En la junta B, la ecuación $\sum F_x = 0$ comprueba los cálculos.

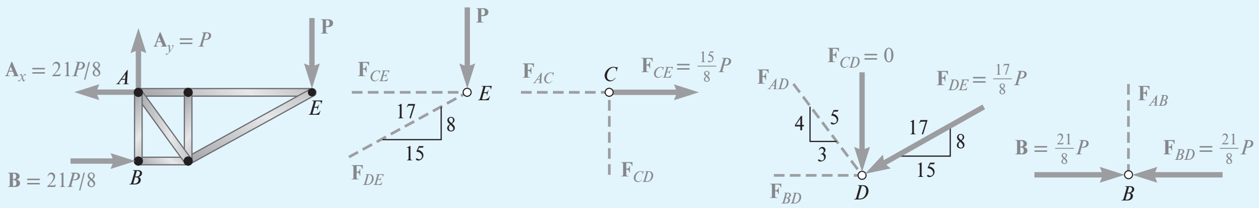


Figura 1 *a*) Diagrama de cuerpo libre de la armadura. *b*-*e*) Diagramas de fuerza en las uniones.

$\Sigma F_y = 0$: $F_{DE} = -\frac{17}{8}P$ $\quad \Sigma F_x = 0$: $F_{AC} = +\frac{15}{8}P$ $\quad \Sigma F_y = 0$: $F_{AD} = +\frac{5}{4}P$ $\quad \Sigma F_y = 0$: $F_{AB} = 0$

$\Sigma F_x = 0$: $F_{CE} = +\frac{15}{8}P$ $\quad \Sigma F_y = 0$: $F_{CD} = 0$ $\quad \Sigma F_x = 0$: $F_{BD} = -\frac{21}{8}P$ $\quad \Sigma F_x = 0$: (Se comprueba)

ANALIZAR:

Energía de deformación. Al observar que E es el mismo para todos los elementos, la energía de deformación de la armadura es

$$U = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2E} \sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} \qquad (1)$$

donde F_i es la fuerza en un elemento dado indicada en la siguiente tabla y donde la suma se amplía a todos los elementos de la armadura.

Elemento	F_i	L_i, m	A_i, m²	$\dfrac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0.6	500×10^{-6}	$4\,219P^2$
AD	$+5P/4$	1.0	500×10^{-6}	$3\,125P^2$
BD	$-21P/8$	0.6	$1\,000 \times 10^{-6}$	$4\,134P^2$
CD	0	0.8	$1\,000 \times 10^{-6}$	0
CE	$+15P/8$	1.5	500×10^{-6}	$10\,547P^2$
DE	$-17P/8$	1.7	$1\,000 \times 10^{-6}$	$7\,677P^2$

$$\sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} = 29\,700 P^2$$

Al regresar a la ecuación (1),

$$U = (1/2E)(29.7 \times 10^3 P^2)$$

Principio de trabajo-energía. El trabajo realizado por la carga **P** cuando se aplica gradualmente es $\frac{1}{2}Py_E$. Al igualar el trabajo realizado por **P** a la energía de deformación U y al recordar que $E = 73$ GPa y $P = 40$ kN,

$$\frac{1}{2}Py_E = U \qquad \frac{1}{2}Py_E = \frac{1}{2E}(29.7 \times 10^3 P^2)$$

$$y_E = \frac{1}{E}(29.7 \times 10^3 P) = \frac{(29.7 \times 10^3)(40 \times 10^3)}{73 \times 10^9}$$

$$y_E = 16.27 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad y_E = 16.27 \text{ mm}\downarrow$$

Problemas

11.42 Un collar D de 5 kg se desplaza a lo largo de una barra AB a una velocidad $v_0 = 6$ m/s cuando choca con una pequeña placa fija en el extremo A de la barra. Utilizando $E = 200$ GPa y si se sabe que el esfuerzo permisible en la barra es de 250 MPa, determine el menor diámetro que se puede usar para la barra.

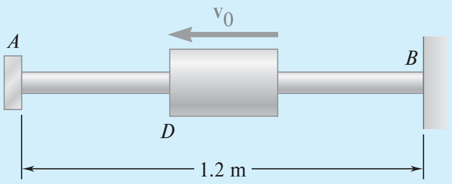


Figura P11.42

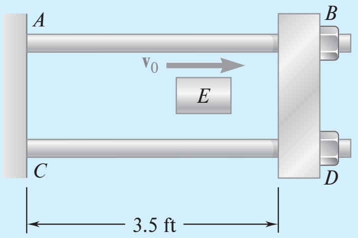


Figura P11.43 y P11.44

11.43 El bloque cilíndrico E de 18 lb se desplaza a una velocidad horizontal v_0 cuando choca perpendicularmente con el yugo BD que está sujeto en las barras AB y CD de $\frac{7}{8}$ in de diámetro. Si se sabe que las barras son de un

acero para el cual $\sigma_Y = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la velocidad máxima permisible v_0 para que las barras no se deformen permanentemente.

11.44 El bloque cilíndrico E se desplaza a una velocidad horizontal $v_0 = 16$ ft/s cuando choca perpendicularmente con el yugo BD que está fijo en las barras AB y CD de $\frac{7}{8}$ in de diámetro. Si se sabe que las barras son de un acero para el cual $\sigma_Y = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine el peso del bloque E para el cual el factor de seguridad es cinco con respecto a la deformación permanente de las barras.

11.45 El collar D de 35 kg se suelta del reposo en la posición mostrada y lo detiene una placa fija en el extremo C de la barra vertical ABC. Si se sabe que $E = 200$ GPa para las dos partes de la barra, determine la distancia h para la cual el esfuerzo máximo en la barra es de 250 MPa.

11.46 El collar D de 15 kg se suelta del reposo en la posición mostrada y lo detiene una placa fija en el extremo C de la barra vertical ABC. Si se sabe que $E =$ 200 GPa para las dos partes de la barra, determine a) la deflexión máxima del extremo C, b) la carga estática equivalente, c) el esfuerzo máximo que ocurre en la barra.

11.47 El collar G de 48 kg se suelta del reposo en la posición mostrada y lo detiene la placa BDF fija en la barra de acero CD de 20 mm de diámetro y en las barras de acero AB y EF de 15 mm de diámetro. Si se sabe que para el grado de acero utilizado $\sigma_{perm} = 180$ MPa y $E = 200$ GPa, determine la distancia h máxima permisible.

11.48 Un bloque C de 25 lb que se desplaza horizontalmente a una velocidad v_0 choca perpendicularmente con el poste AB como se muestra. Utilizando $E =$ 29×10^6 psi, determine la velocidad máxima v_0 para la cual el esfuerzo normal máximo en el poste no excede de 18 ksi.

11.49 Resuelva el problema 11.48 suponiendo que el poste AB se giró 90° con respecto a su eje longitudinal.

11.50 Un tubo de aluminio que tiene la sección transversal mostrada es impactado en su centro por un bloque de 6 kg que se desplaza horizontalmente a una velocidad de 2 m/s. Utilizando $E = 70$ GPa, determine a) la carga estática equivalente, b) el esfuerzo máximo en la viga, c) la deflexión máxima en el centro C de la viga.

11.51 Resuelva el problema 11.50, suponiendo que el tubo ha sido reemplazado por una barra sólida de aluminio con las mismas dimensiones externas que el tubo.

11.52 El bloque D de 2 kg se deja caer desde la posición mostrada sobre el extremo de una barra de 16 mm de diámetro. Si se sabe que $E = 200$ GPa, determine

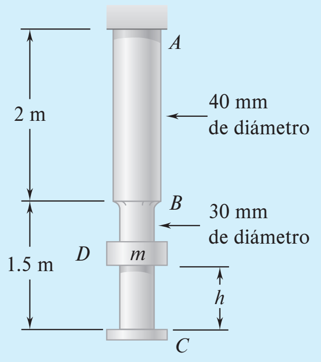


Figura P11.45 y *P11.46*

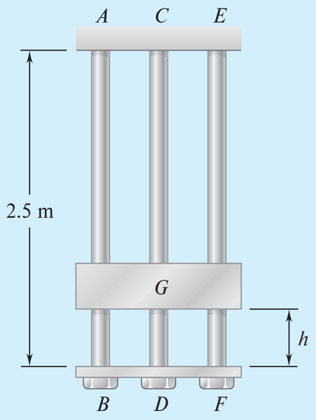


Figura *P11.47*

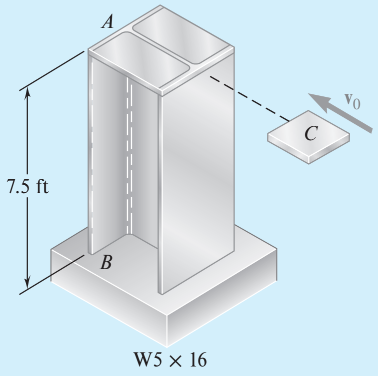


Figura P11.48

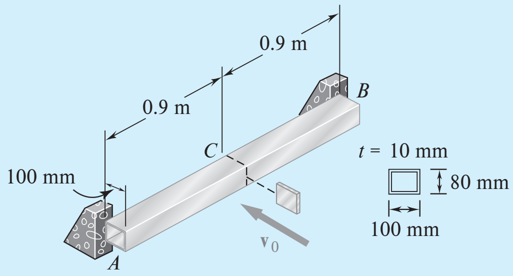


Figura P11.50

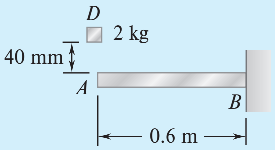


Figura P11.52

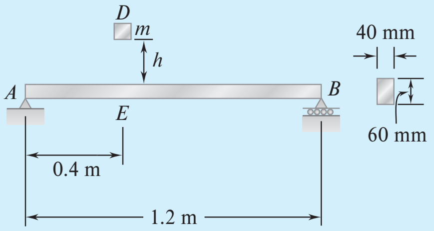


Figura P11.53

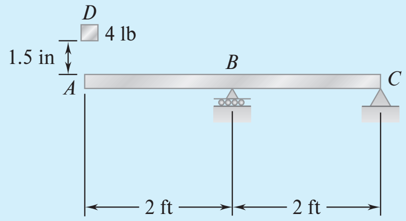


Figura P11.54

a) la deflexión máxima del extremo *A*, *b*) el momento flector máximo en la barra, *c*) el esfuerzo normal máximo en la barra.

11.53 El bloque *D* de 10 kg se deja caer desde una altura $h = 450$ mm sobre la viga de aluminio *AB*. Si se sabe que $E = 70$ GPa, determine *a*) la deflexión máxima del punto *E*, *b*) el esfuerzo máximo en la viga.

11.54 El bloque *D* de 4 lb se deja caer desde la posición mostrada sobre el extremo de una barra de $\frac{5}{8}$ in de diámetro. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la deflexión máxima en el punto *A*, *b*) el momento flector máximo en la barra, *c*) el esfuerzo normal máximo en la barra.

11.55 Un clavadista de 160 lb salta desde una altura de 20 in sobre el extremo *C* de un trampolín que tiene la sección transversal uniforme mostrada. Suponiendo que las piernas del clavadista permanecen rígidas y utilizando $E = 1.8 \times 10^6$ psi, determine *a*) la deflexión máxima en el punto *C*, *b*) el esfuerzo normal máximo en el trampolín, *c*) la carga equivalente estática.

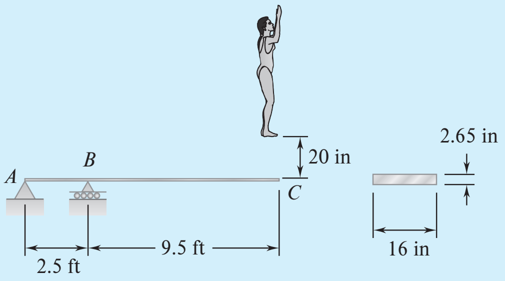


Figura *P11.55*

11.56 Se deja caer un bloque de peso *W* desde una altura *h* sobre la viga horizontal *AB* y la impacta en el punto *D*. *a*) Demuestre que la deflexión máxima y_m en el punto *D* se puede expresar como

$$y_m = y_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{st}}}\right)$$

donde y_{st} representa la deflexión en *D* producida por una carga estática *W* aplicada en ese punto y donde la cantidad entre paréntesis se conoce como *factor de impacto*. *b*) Calcule el factor de impacto para la viga del problema 11.52.

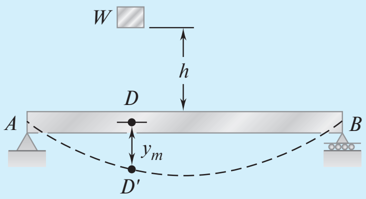


Figura P11.56 y P11.57

11.57 Se deja caer un bloque de peso *W* desde una altura *h* sobre la viga horizontal *AB* y se impacta en el punto *D*. *a*) Si y_m denota el valor exacto de la deflexión máxima en *D* y el valor y'_m obtenido al ignorar el efecto de esta deflexión en el cambio de energía potencial del bloque, demuestre que el valor absoluto del error relativo es $(y'_m - y_m)/y_m$, nunca excede $y'_m/2h$. *b*) Verifique el resul-

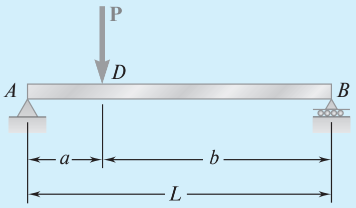


Figura P11.58

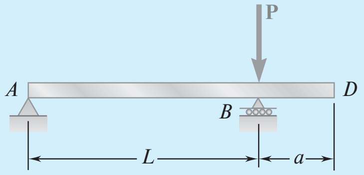


Figura P11.59

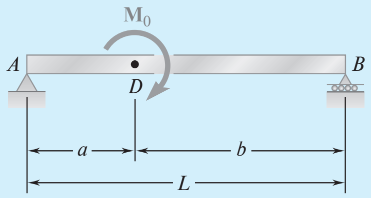


Figura *P11.60*

tado obtenido en la parte *a*) resolviendo la parte *a* del problema 11.52 sin considerar y_m cuando determine el cambio de energía potencia de la carga y compare la respuesta obtenida de esta manera con la respuesta exacta a ese problema.

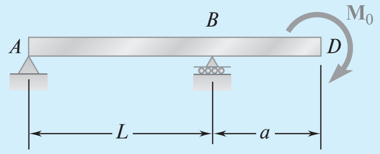


Figura P11.61

11.58 y 11.59 Utilizando el método de trabajo y energía, determine la deflexión en el punto *D* producida por la carga **P**.

***11.60* y 11.61** Utilizando el método de trabajo y energía, determine la pendiente en el punto *D* producida por el momento $\mathbf{M}_0$.

11.62 y 11.63 Utilizando el método de trabajo y energía, determine la deflexión en el punto *C* producida por la carga **P**.

11.64 Utilizando el método de trabajo y energía, determine la pendiente en el punto *B* producida por el momento $\mathbf{M}_0$.

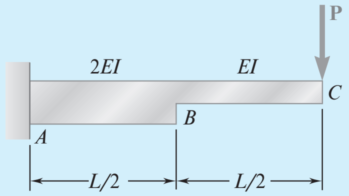


Figura P11.62

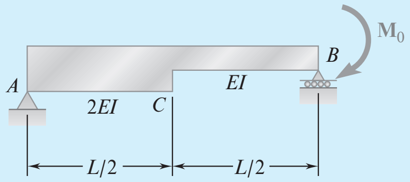


Figura *P11.64*

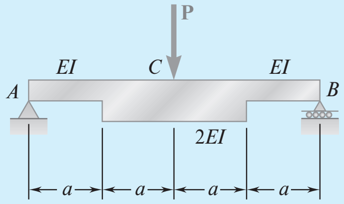


Figura P11.63

11.65 Utilizando el método de trabajo y energía, determine la pendiente en el punto *D* producido por el momento $\mathbf{M}_0$.

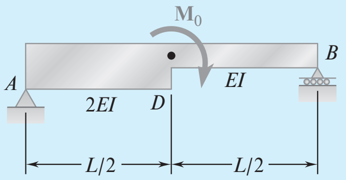


Figura P11.65

11.66 La barra *BC* de acero de 20 mm de diámetro está sujeta a la palanca *AB* y al soporte fijo *C*. La palanca de acero uniforme es de 10 mm de espesor y 30 mm de peralte. Utilizando el método de trabajo y energía, determine la deflexión en el punto *A* cuando $L = 600$ mm. Use $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa.

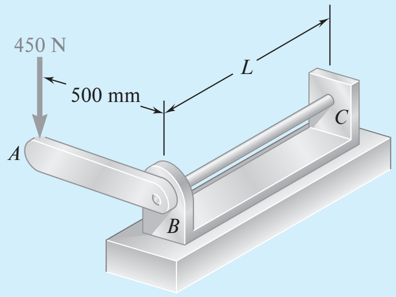


Figura P11.66

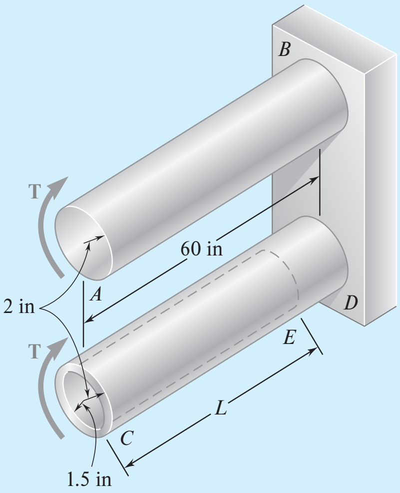


Figura P11.67

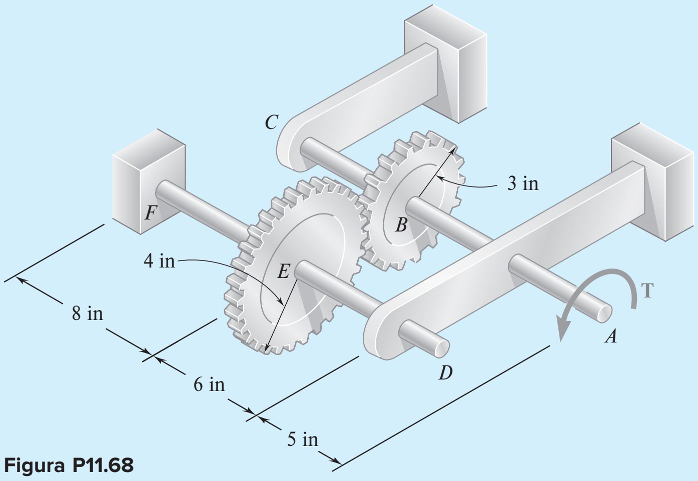


Figura P11.68

11.67 Se aplican pares de la misma magnitud T a la flechas de acero AB y CD. Utilizando el método de trabajo y energía, determine la longitud L de la parte hueca de la flecha CD para la cual el ángulo de torsión en C es igual a 1.25 veces el ángulo de torsión en A.

11.68 Dos flechas de acero, cada una de 0.75 in de diámetro están conectadas por los engranes mostrados. Si $G = 11.2 \times 10^6$ psi y si la flecha DF está sujeta en F, determine el ángulo que el extremo A gira cuando se aplica un par de 750 lb · in en A. (Ignore la energía de deformación de las flechas producida por la flexión).

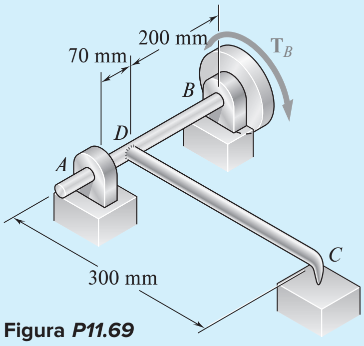


Figura *P11.69*

11.69 La barra CD de acero de 20 mm de diámetro está soldada a la flecha AB de acero de 20 mm de diámetro como se muestra. El extremo C de la barra CD toca la superficie rígida cuando se aplica un par $\mathbf{T}_B$ a un disco montado en la flecha AB. Si se sabe que las chumaceras se autoalinean y no ejercen momentos en la flecha, determine el ángulo de rotación del disco cuando T_B = 400 N · m. Use E = 200 GPa y G = 77.2 GPa. (Considere la energía de deformación producida tanto por la flexión como por la torsión en la flecha AB y por flexión en el brazo CD).

11.70 El elemento cilíndrico AB hueco de pared delgada tiene una sección transversal no circular de espesor variable. Utilizando la expresión dada en la ecuación (3.50) de la sección 3.10 y la expresión para la densidad de energía de deformación dada en la ecuación (11.17), demuestre que el ángulo de torsión del elemento AB es

$$\phi = \frac{TL}{4\mathcal{A}^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

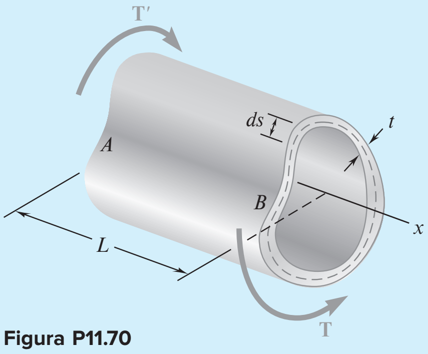


Figura P11.70

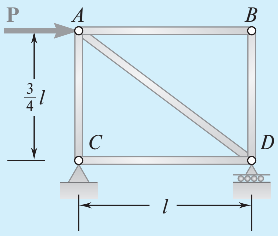


Figura *P11.71*

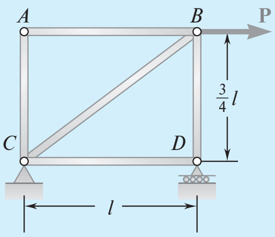


Figura P11.72

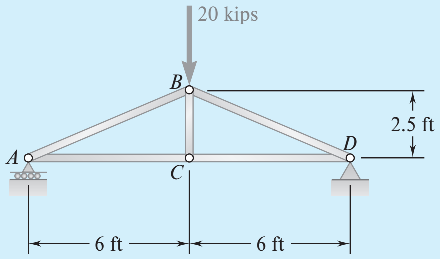


Figura P11.73

donde *ds* es la longitud de un pequeño elemento de la sección transversal de la pared y @ es el área encerrada por la línea central de la sección transversal de la pared.

***11.71* y 11.72** Cada elemento de la armadura mostrada tiene un área de sección transversal uniforme *A*. Utilizando el método de trabajo y energía, determine la deflexión horizontal del punto de aplicación de la carga **P**.

11.73 Cada elemento de la armadura mostrada es de acero y tiene un área de sección transversal uniforme de 5 in^2. Con $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la deflexión vertical en el punto *B* producida por la carga de 20 kips.

11.74 Cada elemento de la armadura mostrada es de acero. El área de sección transversal del elemento *BC* es de 800 mm^2, y la de todos los demás elementos es de 400 mm^2. Con $E = 200$ GPa, determine la deflexión del punto *D* producida por la carga de 60 kN.

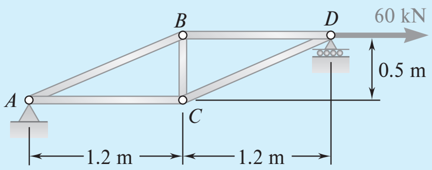


Figura *P11.74*

11.75 Cada elemento de la armadura mostrada es de acero y su área de sección transversal es de 5 in^2. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la deflexión vertical del punto *C* producida por la carga de 15 kips.

11.76 La barra de acero *BC* es de 24 mm de diámetro y el cable de acero *ABDCA* de 12 mm de diámetro. Utilice $E = 200$ GPa para determinar la deflexión de la unión *D* producida por la carga de 12 kN.

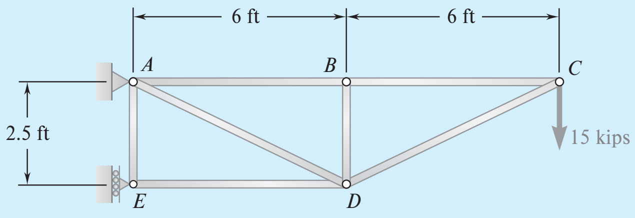


Figura P11.75

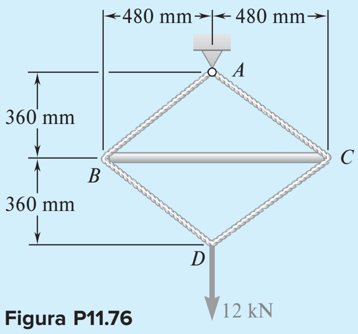


Figura P11.76

*11.6 TRABAJO Y ENERGÍA BAJO VARIAS CARGAS

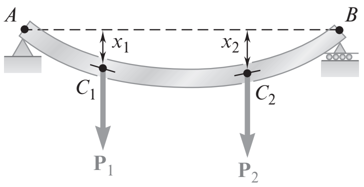


Figura 11.31 Viga con varias cargas.

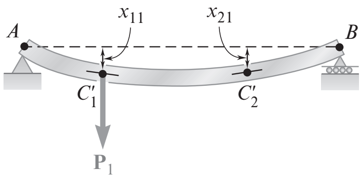


Figura 11.32 Deflexiones de la viga en C_1 y C_2 producidas por una carga única $\mathbf{P}_1$.

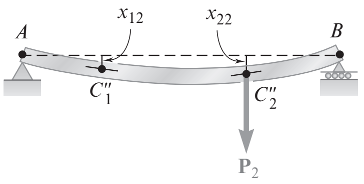


Figura 11.33 Deflexiones de la viga en C_1 y C_2 producidas por $\mathbf{P}_2$.

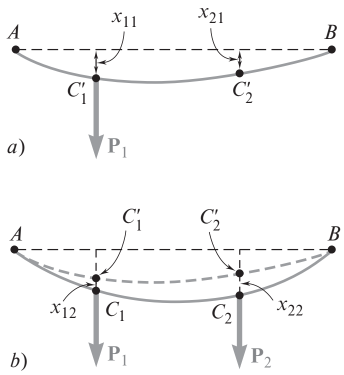


Figura 11.34 *a*) Deflexión producida solo por $\mathbf{P}_1$. *b*) Deflexión adicional producida por la subsecuente aplicación de $\mathbf{P}_2$.

En esta sección, la energía de deformación de una estructura sometida a varias cargas se considera y expresa en función de las mismas y de las deflexiones resultantes.

Considere una viga elástica AB sometida a dos cargas concentradas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$. La energía de deformación de la viga es igual al trabajo $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuando se aplican lentamente a la viga en C_1 y C_2, respectivamente (figura 11.31). Sin embargo, para evaluar este trabajo, las deflexiones x_1 y x_2 deben expresarse en función de las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.

Suponga que solo $\mathbf{P}_1$ se aplica a la viga (figura 11.32). Tanto C_1 y C_2 se deflexionan, y sus deflexiones son proporcionales a la carga P_1. Al denotar estas deflexiones por x_{11} y x_{21}, respectivamente, escriba

$$x_{11} = \alpha_{11}P_1 \qquad x_{21} = \alpha_{21}P_1 \tag{11.41}$$

donde α_{11} y α_{21} son constantes llamadas *coeficientes de influencia.* Estas constantes representan las deflexiones de C_1 y C_2 cuando se aplica una carga unitaria en C_1 y son características de la viga.

Ahora suponga que solo $\mathbf{P}_2$ se aplica a la viga (figura 11.33). Las deflexiones resultantes de C_1 y C_2 denotadas como x_{12} y x_{22}, respectivamente, por lo tanto

$$x_{12} = \alpha_{12}P_2 \qquad x_{22} = \alpha_{22}P_2 \tag{11.42}$$

donde α_{12} α_{22} son los coeficientes de influencia que representan las deflexiones de C_1 y C_2 cuando se aplica una carga unitaria en C_2. Aplicando el principio de superposición, las deflexiones x_1 y x_2 de C_1 y C_2 cuando se aplican ambas cargas (figura 11.31) son

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 \tag{11.43}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2 \tag{11.44}$$

Para calcular el trabajo realizado por $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ y por consiguiente la energía de deformación de la viga, suponga que $\mathbf{P}_1$ se aplica primero lentamente en C_1 (figura 11.34*a*). Al recordar la primera de las ecuaciones (11.41), el trabajo de $\mathbf{P}_1$ es

$$\tfrac{1}{2}P_1x_{11} = \tfrac{1}{2}P_1(\alpha_{11}P_1) = \tfrac{1}{2}\alpha_{11}P_1^2 \tag{11.45}$$

Observe que $\mathbf{P}_2$ no realiza trabajo mientras C_2 se mueve hacia x_{21}, ya que aún no se ha aplicado a la viga.

Ahora aplique $\mathbf{P}_2$ lentamente en C_2 (figura 11.34*b*). Al recordar la segunda de las ecuaciones (11.42), el trabajo de $\mathbf{P}_2$ es

$$\tfrac{1}{2}P_2x_{22} = \tfrac{1}{2}P_2(\alpha_{22}P_2) = \tfrac{1}{2}\alpha_{22}P_2^2 \tag{11.46}$$

Sin embargo, conforme $\mathbf{P}_2$ se aplica lentamente en C_2, el punto de aplicación en $\mathbf{P}_1$ se mueve hacia x_{12} desde C'_1 hasta C_1, y la carga $\mathbf{P}_1$ realiza trabajo. Como $\mathbf{P}_1$ está *totalmente aplicada* durante este desplazamiento (figura 11.35), su trabajo es igual a P_1x_{12}, o recordando la primera de las ecuación (11.42),

$$P_1x_{12} = P_1(\alpha_{12}P_2) = \alpha_{12}P_1P_2 \tag{11.47}$$

Sumando las expresiones de las ecuaciones (11.45), (11.46) y (11.47), la energía de deformación de la viga bajo las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ es

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \tag{11.48}$$

Si la carga $\mathbf{P}_2$ se hubiera aplicado primero a la viga (figura 11.36*a*) y luego $\mathbf{P}_1$ (figura 11.36*b*), el trabajo realizado por cada carga habría sido el que aparece en la figura

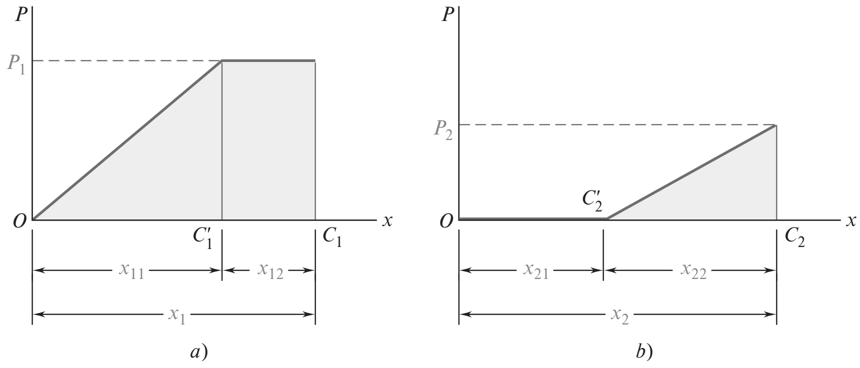


Figura 11.35 Diagramas de la curva carga-desplazamiento para la aplicación de P_1 seguida de P_2. *a*) Diagrama de la curva carga-desplazamiento para C_1. *b*) Diagrama de la curva carga-desplazamiento para C_2.

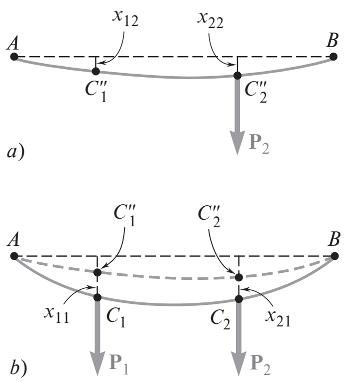


Figura 11.36 *a*) Deflexión producida solo por $\mathbf{P}_2$. *b*) Deflexión adicional producida por aplicación subsecuente de $\mathbf{P}_1$.

11.37. Cálculos similares conducirían a una expresión alternativa para la energía de deformación de la viga:

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{22}P_2^2 + 2\alpha_{21}P_2P_1 + \alpha_{11}P_1^2) \qquad (11.49)$$

Al igualar los miembros del lado derecho de las ecuaciones (11.48) y (11.49), $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, y por consiguiente se concluye que la deflexión producida en C_1 por una carga unitaria aplicada en C_2 es igual a la deflexión producida en C_2 por una carga unitaria aplicada en C_1. Esto se conoce como *Teorema recíproco de Maxwell*, en honor al físico británico James Maxwell (1831-1879).

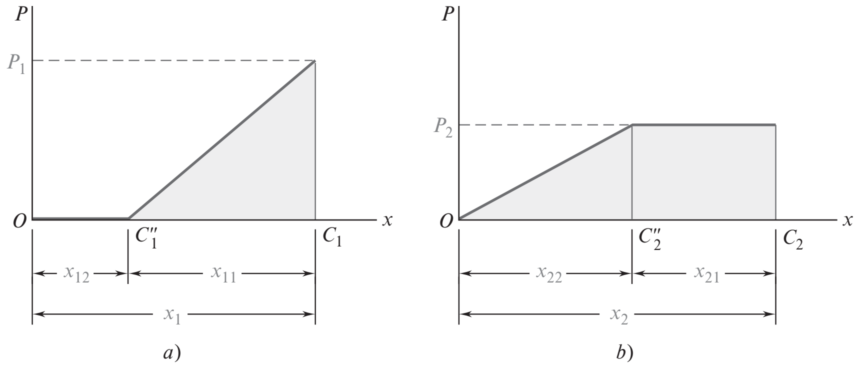


Figura 11.37 Diagramas de las curvas carga-desplazamiento para la aplicación de P_2 y luego de P_1. *a*) Diagrama de la curva carga-desplazamiento para C_1. *b*) Diagrama de la curva carga-desplazamiento para C_2.

Aunque ahora es posible expresar la energía de deformación U de una estructura sometida a varias cargas como una función de estas, no se puede usar el método de trabajo y energía de la sección 11.5B para determinar las deflexiones de tal estructura. Al calcular la energía de deformación U integrando la densidad de energía de deformación u sobre la estructura y sustituyendo la expresión obtenida en la ecuación (11.48) se obtiene solo una ecuación, la que claramente no puede resolverse para los múltiples coeficientes α.

*11.7 TEOREMA DE CASTIGLIANO

Recuerde de la sección anterior que la energía de deformación de una estructura elástica sometida a dos cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ es

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \qquad (11.48)$$

donde α_{11}, α_{12} y α_{22} son los coeficientes de influencia asociados con los puntos de aplicación de C_1 y C_2 de las dos cargas. Derivando la ecuación (11.48) con respecto a P_1 y utilizando la ecuación (11.43) se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1 \qquad (11.50)$$

Al derivar la ecuación (11.48) con respecto a P_2, utilizando la ecuación (11.44) y teniendo en cuenta que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2 \qquad (11.51)$$

En general, si una estructura elástica se somete a n cargas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., $\mathbf{P}_n$, la deflexión x_j del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$, medida a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{P}_j$ se expresa como la derivada parcial de la energía de deformación de la estructura con respecto a la carga $\mathbf{P}_j$. Por lo tanto,

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \qquad (11.52)$$

Este es el *teorema de Castigliano,* llamado así por el ingeniero italiano Alberto Castigliano (1847-1884) quien lo formuló por primera vez.†

Recuerde que el trabajo de un momento $\mathbf{M}$ es $\frac{1}{2}M\theta$, donde θ es el ángulo de rotación en el punto en donde el momento es aplicado lentamente. El teorema de Castigliano se puede usar para determinar la pendiente de una viga en el punto de aplicación de un momento $\mathbf{M}_j$. Por lo tanto,

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \qquad (11.55)$$

De manera similar, el ángulo de torsión ϕ_j en una sección de una flecha donde un par $\mathbf{T}_j$ se aplica lentamente se obtiene al derivar la energía de deformación de la flecha con respecto a T_j.

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \qquad (11.56)$$

† Para una estructura elástica sometida a n cargas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., $\mathbf{P}_n$, la deflexión del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$, medida a lo largo de su línea de acción es

$$x_j = \sum_k \alpha_{jk}P_k \qquad (11.53)$$

y la energía de deformación de la estructura es

$$U = \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_k \alpha_{ik}P_iP_k \qquad (11.54)$$

Al derivar U con respecto a $\mathbf{P}_j$ y observar que $\mathbf{P}_j$ se determina en términos correspondientes a $i = j$ o $k = j$ se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{jk}P_k + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ij}P_i$$

o como $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$,

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{jk}P_k + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ji}P_i = \sum_k \alpha_{jk}P_k$$

Al recordar la ecuación 11.53, se comprueba que

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \qquad (11.52)$$

*11.8 DEFLEXIONES POR EL TEOREMA DE CASTIGLIANO

En la sección anterior se vio que la deflexión x_j de una estructura en el punto de aplicación de una carga $\mathbf{P}_j$ se puede determinar calculando la derivada parcial $\partial U/\partial P_j$ de la energía de deformación U de la estructura. Hay que recordar de las secciones 11.2A y 11.2B que la energía de deformación U se obtiene integrando o sumando a lo largo de la estructura la energía de deformación de cada uno de sus elementos. El cálculo por el teorema de Castigliano de la deflexión x_j se simplifica si la derivación con respecto a la carga P_j se realiza antes de la integración o suma.

Para la viga de la sección 11.2A, se determinó que la energía de deformación es

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \tag{11.15}$$

y la deflexión x_j del punto de aplicación de la carga $\mathbf{P}_j$ es por lo tanto

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_j}dx \tag{11.57}$$

Para una armadura de n elementos uniformes de longitud L_i, área de sección transversal A_i y fuerza interna F_i, se puede usar la ecuación (11.14) para la energía de deformación U para escribir

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} \tag{11.58}$$

La deflexión x_j del punto de aplicación de la carga $\mathbf{P}_j$ se obtiene derivando cada término de la suma con respecto a P_j. Por consiguiente,

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E}\frac{\partial F_i}{\partial P_j} \tag{11.59}$$

Aplicación de conceptos 11.12

La viga en voladizo AB soporta una carga uniformemente distribuida w y una carga concentrada $\mathbf{P}$ (figura 11.38). Si se sabe que $L = 2$ m, $w = 4$ kN/m, $P = 6$ kN y $EI = 5$ MN · m^2, determine la deflexión en A.

La deflexión y_A del punto de aplicación A de la carga $\mathbf{P}$ se obtiene con la ecuación (11.57). Como $\mathbf{P}$ es vertical y está dirigida hacia abajo, y_A representa una deflexión vertical y es positiva hacia abajo.

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx \tag{1}$$

El momento flector M a una distancia x de A es

$$M = -(Px + \tfrac{1}{2}wx^2) \tag{2}$$

y su derivada con respecto a P es

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

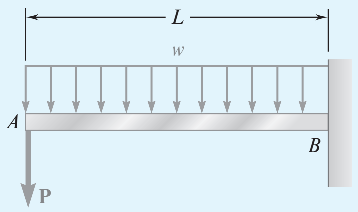


Figura 11.38 Viga en voladizo cargada como se muestra.

Al sustituir M y $\partial M/\partial P$ en la ecuación (1),

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(Px^2 + \frac{1}{2}wx^3\right)dx$$

$$y_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} + \frac{wL^4}{8}\right) \qquad (3)$$

Al sustituir los datos dados,

$$y_A = \frac{1}{5 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^2}\left[\frac{(6 \times 10^3 \text{ N})(2 \text{ m})^3}{3} + \frac{(4 \times 10^3 \text{ N/m})(2 \text{ m})^4}{8}\right]$$

$$y_A = 4.8 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad y_A = 4.8 \text{ mm}\downarrow$$

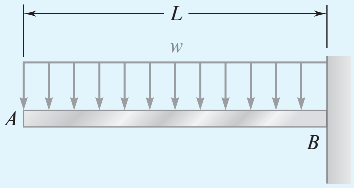
Observe que el cálculo de la derivada parcial $\partial M/\partial P$ *no se podría haber realizado* si el valor numérico de P se hubiera sustituido en lugar de P en la ecuación (2) para el momento flector.

La deflexión x_j de una estructura en un punto dado C_j se puede obtener mediante la aplicación directa del teorema de Castigliano solo si la carga $\mathbf{P}_j$ se aplica en C_j en la dirección para la cual x_j se tiene que determinar. Cuando no se aplica ninguna carga en C_j o se aplica una carga en una dirección diferente de la deseada, la deflexión x_j se puede determinar con el teorema de Castigliano si se utiliza el siguiente procedimiento. Primero, se aplica una carga "ficticia" $\mathbf{Q}_j$ en C_j en la dirección en la cual se tiene que determinar la deflexión x_j. Entonces se utiliza el teorema de Castigliano para obtener la deflexión

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial Q_j} \qquad (11.60)$$

producida por $\mathbf{Q}_j$ y las cargas reales. Con $Q_j = 0$ en la ecuación (11.60) se obtiene la deflexión en C_j en la dirección deseada bajo la carga dada.

La pendiente de θ_j de una viga en un punto C_j se puede determinar aplicando un momento ficticio $\mathbf{M}_j$ en C_j, calculando la derivada parcial $\partial U/\partial M_j$ y haciendo $M_j = 0$ en la expresión obtenida.



a)

Figura 11.39 *a*) Viga en voladizo que soporta a una carga uniformemente distribuida.

Aplicación de conceptos 11.13

La viga en voladizo AB soporta a una carga uniformemente distribuida w (figura 11.39*a*). Determine la deflexión y la pendiente en A.

Deflexión en *A*. Aplique una carga ficticia $\mathbf{Q}_A$ dirigida hacia abajo en A (figura 11.39*b*) y escriba

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial Q_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q_A}dx \qquad (1)$$

El momento flector M a una distancia x de A es

$$M = -Q_A x - \tfrac{1}{2} wx^2 \qquad (2)$$

y su derivada con respecto a Q_A es

$$\frac{\partial M}{\partial Q_A} = -x \qquad (3)$$

Al sustituir M y $\partial M/\partial Q_A$ de las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación 1 y con $Q_A = 0$, la deflexión en A para la carga dada es:

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2} wx^2)(-x)\, dx = +\frac{wL^4}{8EI}$$

Como la carga ficticia está dirigida hacia abajo, el signo positivo indica que

$$y_A = \frac{wL^4}{8EI} \downarrow$$

Pendiente en *A*. Aplique un par ficticio $\mathbf{M}_A$ en A en sentido contrario al de las manecillas del reloj (figura 11.39*c*) y escriba

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}$$

Al recordar la ecuación (11.15),

$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M_A}\int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A} dx \qquad (4)$$

El momento flector M a una distancia x de A es

$$M = -M_A - \tfrac{1}{2} wx^2 \qquad (5)$$

y su derivada con respecto a M_A es

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = -1 \qquad (6)$$

Al sustituir M y $\partial M/\partial M_A$ de las ecuaciones (5) y (6) en la ecuación (4) y con $M_A = 0$, la pendiente en A para la carga dada es:

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2} wx^2)(-1)\, dx = +\frac{wL^3}{6EI}$$

Como el momento ficticio actuó en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el signo positivo indica que el ángulo θ_A también es el sentido contrario al de las manecillas del reloj:

$$\theta_A = \frac{wL^3}{6EI} ⦩$$

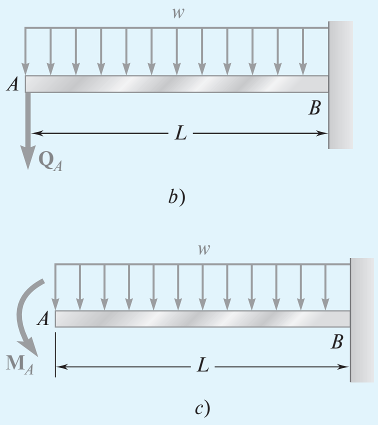


Figura 11.39 (*cont.*) *b*) Carga ficticia Q_A aplicada para determinar la deflexión en *A*. *c*) Carga ficticia M_A aplicada para determinar la pendiente en *A*.

Aplicación de conceptos 11.14

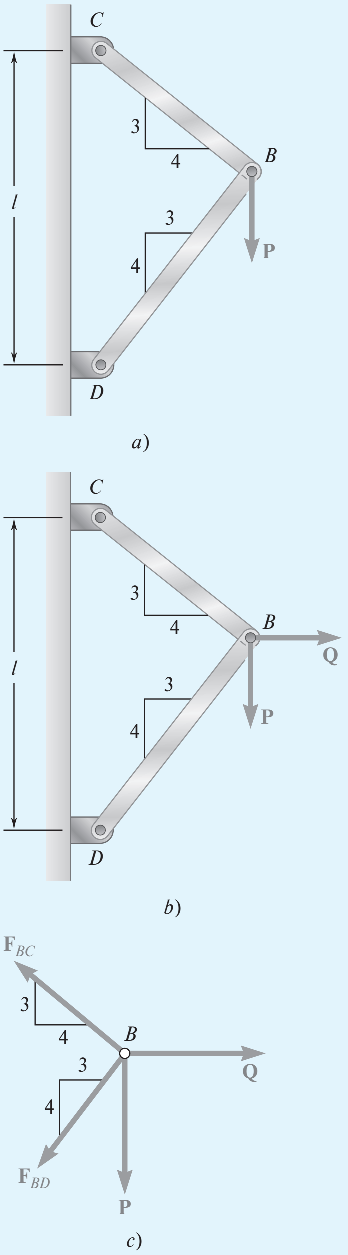


Figura 11.40 *a*) Bastidor *CBD* que soporta una carga vertical *P*. *b*) Bastidor *CBD* con una carga horizontal ficticia *Q* aplicada. c) Diagrama de cuerpo libre de la unión *B* para determinar las fuerzas en los elementos en función de las cargas *P* y *Q*.

Dos barras del mismo material y de la misma área de sección transversal A soportan una carga **P** en B (figura 11.40*a*). Determine la deflexión horizontal y vertical del punto B.

Se aplica una carga horizontal ficticia **Q** en B (figura 11.40*b*). Por el teorema de Castigliano,

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} \qquad y_B = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Se utiliza la ecuación (11.14) para obtener la energía de deformación para las barras

$$U = \frac{F_{BC}^2\,(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2\,(BD)}{2AE}$$

donde F_{BC} y F_{BD} representan las fuerzas en BC y BD, respectivamente. Por consiguiente,

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{F_{BC}\,(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} + \frac{F_{BD}\,(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} \tag{1}$$

y

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{F_{BC}\,(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial P} + \frac{F_{BD}\,(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial P} \tag{2}$$

Del diagrama de cuerpo libre del pasador B (figura 11.40*c*),

$$F_{BC} = 0.6P + 0.8Q \qquad F_{BD} = -0.8P + 0.6Q \tag{3}$$

Al derivar estas ecuaciones con respecto a Q y P, escriba

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} = 0.8 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} = 0.6$$
$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial P} = 0.6 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial P} = -0.8 \tag{4}$$

Al sustituir de las ecuaciones (3) y (4) en las ecuaciones (1) y (2), haciendo $Q = 0$ y observando que $BC = 06l$ y $BD = 0.8l$, las deflexiones horizontal y vertical del punto B bajo la carga dada **P** son

$$x_B = \frac{(0.6P)\,(0.6l)}{AE}(0.8) + \frac{(-0.8P)\,(0.8l)}{AE}(0.6)$$
$$= -0.096\frac{Pl}{AE}$$
$$y_B = \frac{(0.6P)\,(0.6l)}{AE}(0.6) + \frac{(-0.8P)\,(0.8l)}{AE}(-0.8)$$
$$= +0.728\frac{Pl}{AE}$$

Por las direcciones de las cargas **Q** y **P**, se concluye que

$$x_B = 0.096\frac{Pl}{AE} \leftarrow \qquad y_B = 0.728\frac{Pl}{AE}\downarrow$$

Se comprueba que la expresión hallada para la deflexión vertical de B es la misma que se obtuvo en la Aplicación de conceptos 11.9.

*11.9 ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Las reacciones en los apoyos de una estructura elástica estáticamente indeterminada se pueden determinar con el teorema de Castigliano. Por ejemplo, en una estructura indeterminada de primer grado, designe una de las reacciones como redundante y elimine o modifique como deba ser el apoyo correspondiente. La reacción redundante se trata como una carga desconocida que, junto con las demás cargas, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. Primero calcule la energía de deformación U de la estructura producida por la acción combinada de las cargas y la reacción redundante. Al observar que la derivada parcial U con respecto a la reacción redundante representa la deflexión (o pendiente) en el apoyo que se eliminó o modificó, entonces se iguala la derivada a cero y se resuelve la reacción redundante.† Las reacciones restantes se determinan con las ecuaciones de estática.

† Este es el caso de un apoyo rígido que no permite deflexión. Para otros tipos de apoyo, la derivada parcial de U debe igualarse a la deflexión permitida.

Aplicación de conceptos 11.15

Determine las reacciones en los apoyos para la viga prismática y carga mostradas (figura 11.41*a*).

La viga es estáticamente indeterminada de primer grado. La reacción en A es redundante y la viga se suelta de ese apoyo. Se considera que la reacción $\mathbf{R}_A$ es una carga desconocida (figura 11.41*b*) y se determinará con la condición de que la deflexión y_A en A debe ser cero. Por el teorema de Castigliano, $y_A = \partial U/\partial R_A$, donde U es la energía de deformación de la viga bajo la carga distribuida y la reacción redundante. Al recordar la ecuación (11.57),

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \tag{1}$$

El momento flector M para la carga de la figura 11.14*b* a una distancia x de A es

$$M = R_A x - \tfrac{1}{2}wx^2 \tag{2}$$

y su derivada con respecto a R_A es

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x \tag{3}$$

Al sustituir M y $\partial M/\partial R_A$ de las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1), escriba,

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{1}{2}wx^3\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right)$$

Haga $y_A = 0$ y resuelva R_A:

$$R_A = \tfrac{3}{8}wL \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{3}{8}wL\uparrow$$

Por las condiciones de equilibrio de la viga, la reacción en B se compone de una fuerza y un momento:

$$\mathbf{R}_B = \tfrac{5}{8}wL\uparrow \qquad \mathbf{M}_B = \tfrac{1}{8}wL^2 \circlearrowright$$

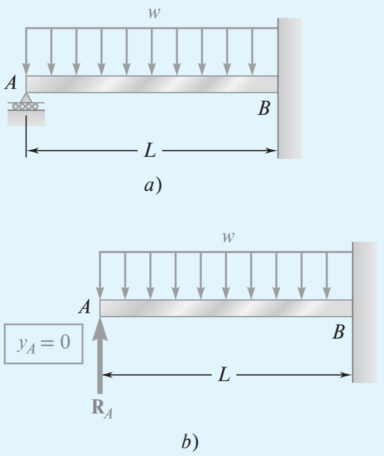


Figura 11.41 *a*) Viga estáticamente indeterminada de primer grado. *b*) Reacción redundante en *A* y condición límite de desplazamiento cero.

Aplicación de conceptos 11.16

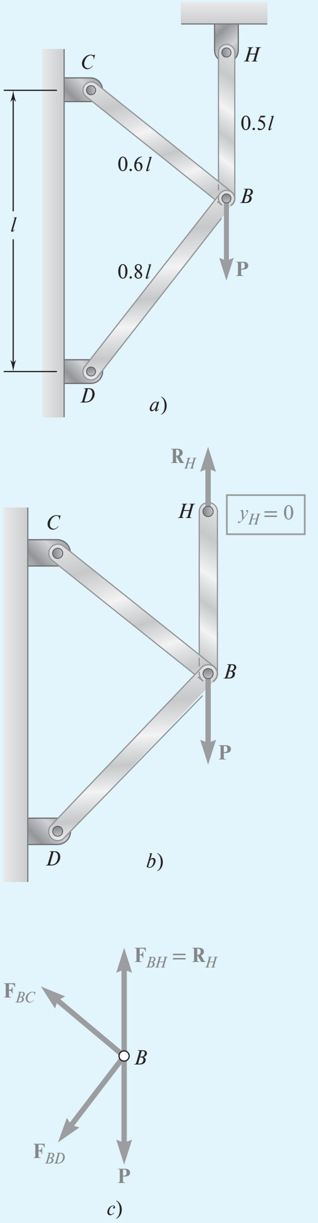


Figura 11.42 *a*) Bastidor estáticamente indeterminado que soporta una carga vertical *P*. *b*) Reacción redundante en *H* y condición límite de desplazamiento cero. c) Diagrama de cuerpo libre de la unión *B*.

Tres barras del mismo material y de la misma área de sección transversal A (figura 11.42*a*) soportan una carga **P** en B. Determine la fuerza en cada barra.

La estructura es estáticamente indeterminada de primer grado. La reacción en H se considera como redundante. Por lo tanto, la barra BH se suelta de su apoyo en H. Ahora se considera que la reacción $\mathbf{R}_H$ es una carga desconocida (figura 11.42*b*) y se determinará con la condición de que la deflexión y_H del punto H debe ser cero. Por el teorema de Castigliano, $y_H = \partial U/\partial R_H$, donde U es la energía de deformación del sistema de tres barras bajo la carga **P** y la reacción redundante $\mathbf{R}_H$. Al recordar la ecuación (11.59),

$$y_H = \frac{F_{BC}\,(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} + \frac{F_{BD}\,(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} + \frac{F_{BH}\,(BH)}{AE}\frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} \qquad (1)$$

Observe que la fuerza en la barra BH es igual a R_H, o

$$F_{BH} = R_H \qquad (2)$$

Entonces, del diagrama de cuerpo libre del pasador B (figura 11.42*c*),

$$F_{BC} = 0.6P - 0.6R_H \qquad F_{BD} = 0.8R_H - 0.8P \qquad (3)$$

Al derivar la fuerza en cada barra con respecto a R_H se obtiene

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} = -0.6 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} = 0.8 \qquad \frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} = 1 \qquad (4)$$

Al sustituir de las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1) y al observar que las longitudes BC, BD y BH son iguales a 0.6l, 08l y 0.5l, respectivamente,

$$y_H = \frac{1}{AE}[(0.6P - 0.6R_H)(0.6l)(-0.6) + (0.8R_H - 0.8P)(0.8l)(0.8) + R_H\,(0.5l)(1)]$$

Con $y_H = 0$ se obtiene

$$1.228R_H - 0.728P = 0$$

y al resolver R_H:

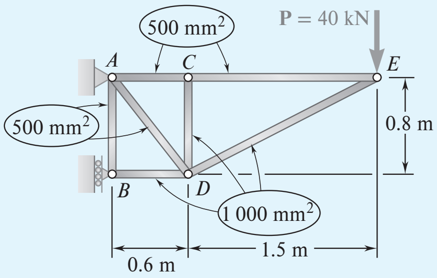
$$R_H = 0.593P$$

Llevando este valor a las ecuaciones (2) y (3), las fuerzas en las tres barras son

$$F_{BC} = +0.244P \qquad F_{BD} = -0.326P \qquad F_{BH} = +0.593P$$

Problema modelo 11.5

Para la armadura y carga del problema modelo 11.14, determine la deflexión vertical de la unión C.



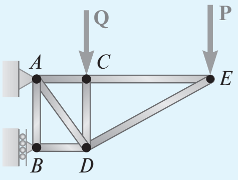


Figura 1 Carga ficticia **Q** aplicada a la unión *C* utilizada para determinar la deflexión vertical en *C*.

ESTRATEGIA: Agregue una carga ficticia asociada con la deflexión vertical deseada en la unión *C*. La armadura se analiza entonces para determinar las fuerzas en los elementos, trazando primero un diagrama de cuerpo libre de la armadura para determinar las reacciones y luego utilizando el equilibrio en cada unión para determinar las fuerzas en los elementos. Use la ecuación (11.59) para obtener la deflexión en función de la carga ficticia **Q**.

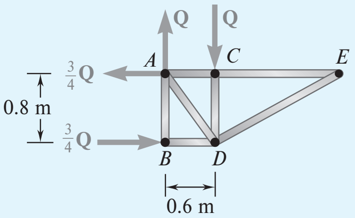


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la armadura con solo una carga ficticia *Q*.

MODELAR y ANALIZAR:

Teorema de Castigliano. Se introduce la carga vertical ficticia **Q** como se muestra en la figura 1. Utilizando el teorema de Castigliano donde la fuerza F_i en un elemento dado i se genera por la carga combinada de **P** y **Q** y como E = constante,

$$y_C = \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i E}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}\sum\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} \qquad \textbf{(1)}$$

Fuerza en los elementos. Como la fuerza en cada elemento producida por la carga **P** ya se determinó en el problema modelo 11.4, solo se tiene que determinar la fuerza en cada elemento producida por **Q**. Utilizando el diagrama de cuerpo libre de la armadura con la carga **Q**, se traza un diagrama de cuerpo libre (figura 2) para determinar las reacciones. Luego, considerando en secuencia el equilibrio de las uniones *E*, *C*, *B* y *D* y utilizando la figura 3, se determina la fuerza en cada elemento producida por la carga **Q**.

Unión *E*: $F_{CE} = F_{DE} = 0$

Unión *C*: $F_{AC} = 0;\ F_{CD} = -Q$

Unión *B*: $F_{AB} = 0;\ F_{BD} = -\frac{3}{4}Q$

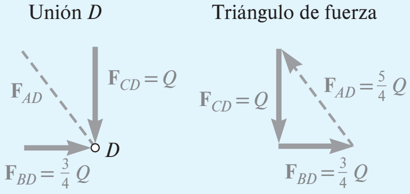


Figura 3 Diagramas para analizar las fuerzas en la unión *D*.

La fuerza total en cada elemento bajo la acción combinada de **Q** y **P** se muestra en la siguiente tabla. Forme $\partial F_i/\partial Q$ para cada elemento, y luego calcule $(F_iL_i/A_i)(\partial F_i/\partial Q)$, como se indica.

Elemento	F_i	$\partial F_i/\partial Q$	L_i, m	A_i, m²	$\left(\frac{F_iL_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0.6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	$\frac{5}{4}$	1.0	500×10^{-6}	$+3\,125P + 3\,125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-\frac{3}{4}$	0.6	$1\,000 \times 10^{-6}$	$+1\,181P + 338Q$
CD	$-Q$	-1	0.8	$1\,000 \times 10^{-6}$	$+ 800Q$
CE	$+15P/8$	0	1.5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1.7	$1\,000 \times 10^{-6}$	0

$$\sum\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = 4\,306P + 4\,263Q$$

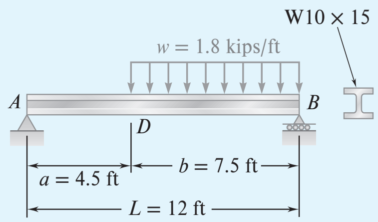
Deflexión de C. Al sustituir en la ecuación (1) se tiene

$$y_C = \frac{1}{E}\sum\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}(4\,306P + 4\,263Q)$$

Como la carga **Q** no forma parte de la carga original, haga $Q = 0$. Al sustituir $P = 40$ kN y $E = 73$ GPa se obtiene

$$y_C = \frac{4\,306\,(40 \times 10^3\ \text{N})}{73 \times 10^9\ \text{Pa}} = 2.36 \times 10^{-3}\ \text{m} \qquad y_C = 2.36\ \text{mm}\downarrow$$

Problema modelo 11.6



Para la viga y carga mostradas, determine la deflexión en el punto D. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

ESTRATEGIA: Agregue una carga ficticia asociada con la deflexión vertical deseada en el unión D. Use un diagrama de cuerpo libre para determinar las reacciones producidas tanto por la carga ficticia como por la carga distribuida. Los momentos en cada segmento se escriben entonces como una función de la coordenada a lo largo de la viga. Se utiliza la ecuación (11.57) para determinar la deflexión.

MODELAR y ANALIZAR:

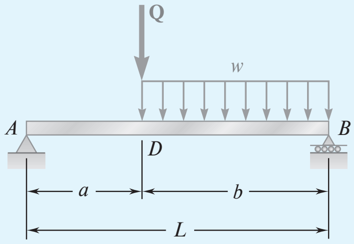


Figura 1 Carga ficticia **Q** utilizada para determinar la deflexión vertical en el punto D.

Teorema de Castigliano. Se introduce una carga ficticia **Q** como se muestra en la figura 1. Al utilizar el teorema de Castigliano y observar que EI es constante, escriba

$$y_D = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)dx = \frac{1}{EI}\int M\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)dx \qquad (1)$$

La integración se realizará por separado para los segmentos AD y DB.

Reacciones. Utilizando el cuerpo libre de toda la viga (figura 2) se obtiene

$$\mathbf{R}_A = \frac{wb^2}{2L} + Q\frac{b}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{wb\,(a + \frac{1}{2}b)}{L} + Q\frac{a}{L}\uparrow$$

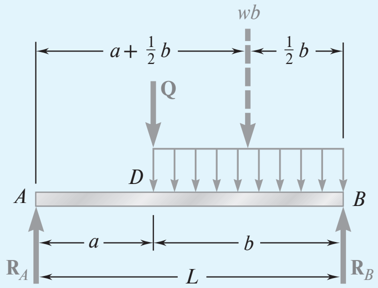


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la viga.

Parte *AD* de la viga. Utilizando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 3,

$$M_1 = R_A x = \left(\frac{wb^2}{2L} + Q\frac{b}{L}\right)x \qquad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = +\frac{bx}{L}$$

Al sustituir en la ecuación (1) e integrando de A a D se obtiene

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M_1}{\partial Q}dx = \frac{1}{EI}\int_0^a R_A x\left(\frac{bx}{L}\right)dx = \frac{R_A a^3 b}{3EIL}$$

Luego sustituya R_A e iguale la carga ficticia Q a cero.

$$\frac{1}{EI}\int M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q}dx = \frac{wa^3b^3}{6EIL^2} \quad (2)$$

Parte *DB* de la viga. Utilizando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4, el momento flector a una distancia v del extremo B es

$$M_2 = R_Bv - \frac{wv^2}{2} = \left[\frac{wb\,(a + \frac{1}{2}b)}{L} + Q\frac{a}{L}\right]v - \frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial Q} = +\frac{av}{L}$$

Sustituya en la ecuación (1) e integre desde el punto B (donde $v = 0$) hasta el punto D (donde $v = b$) para obtener

$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial Q}dv = \frac{1}{EI}\int_0^b \left(R_Bv - \frac{wv^2}{2}\right)\left(\frac{av}{L}\right)dv = \frac{R_Bab^3}{3EIL} - \frac{wab^4}{8EIL}$$

Al sustituir R_B y con $Q = 0$,

$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial Q}dv = \left[\frac{wb\,(a + \frac{1}{2}b)}{L}\right]\frac{ab^3}{3EIL} - \frac{wab^4}{8EIL} = \frac{5a^2b^4 + ab^5}{24EIL^2}w \quad (3)$$

Deflexión en el punto *D*. Al recordar las ecuaciones (1), (2) y (3),

$$y_D = \frac{wab^3}{24EIL^2}(4a^2 + 5ab + b^2) = \frac{wab^3}{24EIL^2}(4a + b)(a + b) = \frac{wab^3}{24EIL}(4a + b)$$

Del apéndice C, $I = 68.9\text{ in}^4$ para una viga W10 × 15. Al sustituir los valores numéricos de I, w, a, b y L,

$$y_D = 0.262\text{ in}\downarrow$$

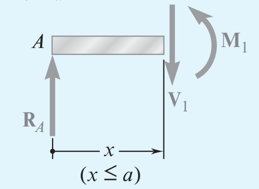


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda (en *AD*).

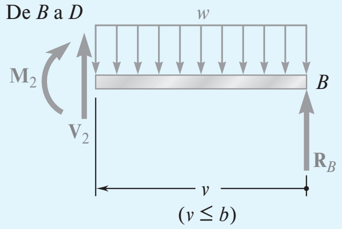


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre de la parte derecha (en *BD*).

Problema modelo 11.7

Para la viga uniforme y carga mostradas, determine las reacciones en los apoyos.

ESTRATEGIA: La viga es indeterminada de primer grado, y se debe elegir una de las reacciones como redundante. Luego se usa un diagrama de cuerpo libre para determinar las reacciones producidas por la carga distribuida y la reacción redundante. Utilizando diagramas de cuerpo libre de los segmentos, se obtiene los momentos en función de la coordenada a lo largo de viga. Utilizando la ecuación (11.57), se escribe el teorema de Castigliano para la deflexión asociada con la reacción redundante. Se iguala esta deflexión a cero y se resuelve la reacción redundante. Se utiliza entonces el equilibrio para determinar las otras reacciones.

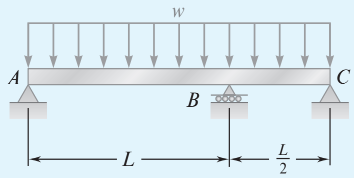


Figura 1 Viga libre donde el apoyo A se reemplaza con una reacción redundante R_A.

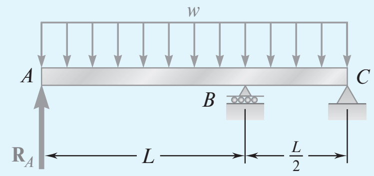
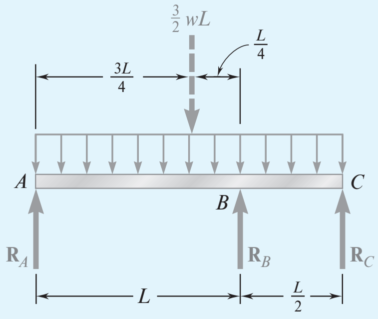


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la viga.



De A a B

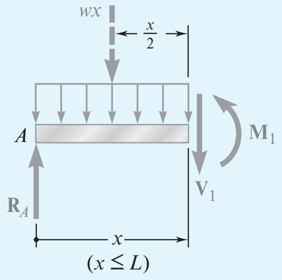


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda que muestra el cortante interno y el momento.

De C a B

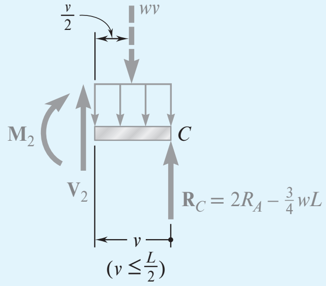


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre de la parte derecha que muestra el cortante interno y el momento.

MODELAR y ANALIZAR:

Teorema de Castigliano. Considere la reacción $\mathbf{R}_A$ como la redundante (figura 1). Utilizando el teorema de Castigliano, determine la deflexión producida por la acción combinada de $\mathbf{R}_A$ y la carga distribuida. Como EI es constante,

$$y_A = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial R_A}\right)dx = \frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \qquad (1)$$

La integración se realizará por separado para las partes AB y BC de la viga. $\mathbf{R}_A$ se obtiene entonces igualando y_A a cero.

Cuerpo libre de toda la viga. Utilizando la figura 2, las reacciones en B y C en función de R_A y la carga distribuida son

$$R_B = \tfrac{9}{4}wL - 3R_A \qquad R_C = 2R_A - \tfrac{3}{4}wL \qquad (2)$$

Parte *AB* de la viga. Utilizando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 3, determine

$$M_1 = R_A x - \frac{wx^2}{2} \qquad \frac{\partial M_1}{\partial R_A} = x$$

Al sustituir en la ecuación (1) y al integrar de A a B da

$$\frac{1}{EI}\int M_1 \frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{wx^3}{2}\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) \qquad (3)$$

Parte *BC* de la viga. Utilizando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4, determine

$$M_2 = \left(2R_A - \frac{3}{4}wL\right)v - \frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial R_A} = 2v$$

Al sustituir en la ecuación (1) e integrando de C (donde $v = 0$) a B (donde $v = \tfrac{1}{2}L$) se obtiene

$$\frac{1}{EI}\int M_2 \frac{\partial M_2}{\partial R_A}\,dv = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(4R_A v^2 - \frac{3}{2}wLv^2 - wv^3\right)dv$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{64}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64}\right) \qquad (4)$$

Reacción en *A*. Al sumar las expresiones de las ecuaciones (3) y (4), se obtiene y_A y se hace igual a cero:

$$y_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64}\right) = 0$$

Por lo tanto $\qquad R_A = \dfrac{13}{32}wL \qquad\qquad R_A = \dfrac{13}{32}wL\uparrow$ ◀

Reacciones en *B* y *C*. Al sustituir R_A en las ecuaciones (2), se obtiene

$$R_B = \frac{33}{32}wL\uparrow \qquad\qquad R_C = \frac{wL}{16}\uparrow \quad ◀$$

Problemas

11.77 y 11.78 Utilizando la información del apéndice D, calcule el trabajo de las cargas cuando se aplican a la viga *a*) si primero se aplica la carga **P**, *b*) si primero se aplica el momento **M**.

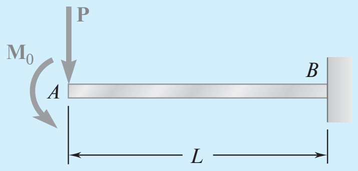


Figura P11.77

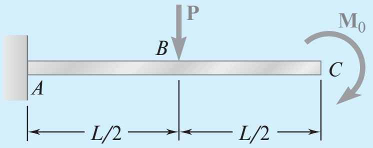


Figura P11.78

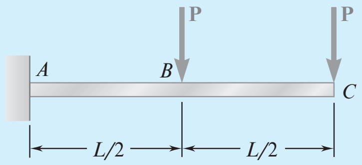


Figura *P11.79*

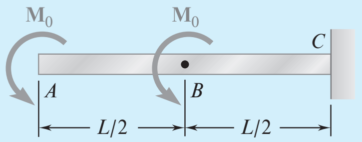


Figura P11.80

***11.79* a 11.82** Para la viga y carga mostradas, *a*) calcule el trabajo de las cargas cuando se aplican sucesivamente a la viga, utilizando la información provista en el apéndice D, *b*) calcule la energía de deformación de la viga mediante el método de la sección 11.2A y demuestre que es igual al trabajo obtenido en la parte *a*.

11.83 a 11.85 Para la viga prismática, determine la deflexión del punto *D*.

11.86 a 11.88 Para la viga prismática mostrada, determine la pendiente en el punto *D*.

11.89 Para la viga prismática mostrada, determine la pendiente en el punto *A*.

11.90 Para la viga prismática mostrada, determine la pendiente en el punto *B*.

11.91 Para la viga y carga mostradas, determine la deflexión del punto *B*. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

11.92 Para la viga y carga mostradas, determine la deflexión del punto *A*. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

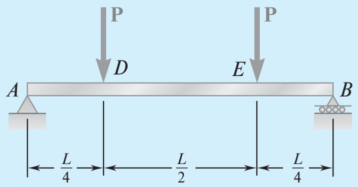


Figura *P11.81*

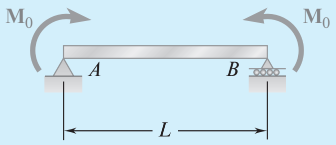


Figura P11.82

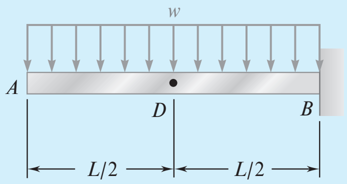


Figura P11.83 y P11.86

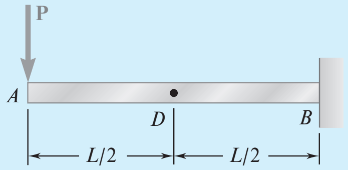


Figura *P11.84* y *P11.87*

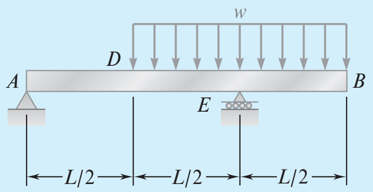


Figura P11.85 y P11.88

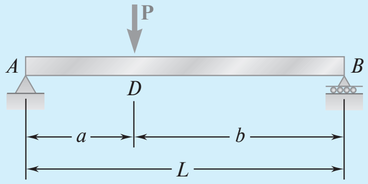


Figura P11.89

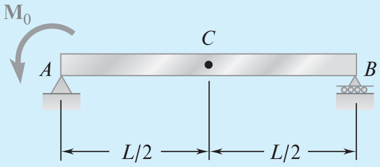


Figura P11.90

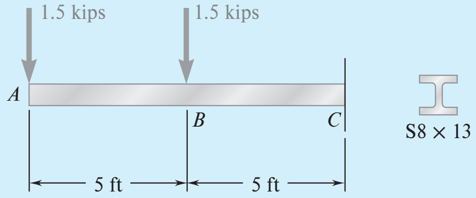


Figura P11.91 y *P11.92*

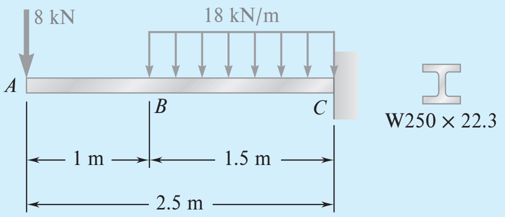


Figura P11.93

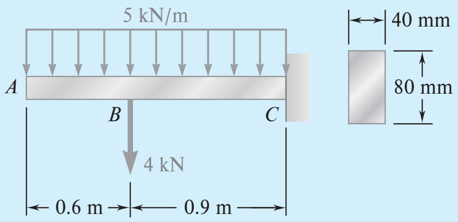


Figura P11.94

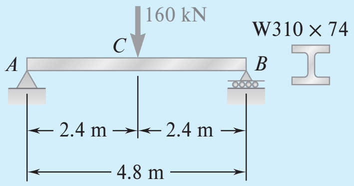


Figura P11.95

11.93 y 11.94 Para la viga y carga mostradas, determine la deflexión en el punto *B*. Use $E = 200$ GPa.

11.95 Para la viga y carga mostradas, determine la pendiente en el extremo *A*. Use $E = 200$ GPa.

11.96 Para la viga y carga mostradas, determine la deflexión en el punto *D*. Use $E = 200$ GPa.

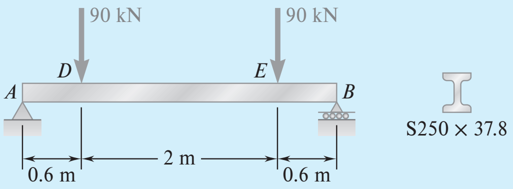


Figura P11.96

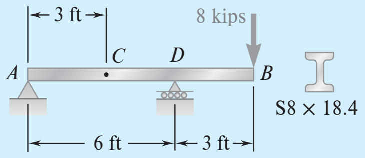


Figura P11.97 y *P11.98*

11.97 Para la viga y carga mostradas, determine la pendiente en el extremo *A*. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

11.98 Para la viga y carga mostradas, determine la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

11.99 y *11.100* Para la armadura y carga mostradas, determine las deflexiones horizontal y vertical de la unión *C*.

11.101 y 11.102 Cada elemento de la armadura mostrada es de acero y tiene el área de sección transversal mostrada. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la deflexión indicada.

11.101 Deflexión vertical de la unión *C*.
11.102 Deflexión horizontal de la unión *C*.

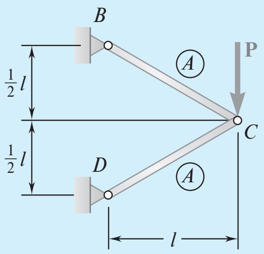


Figura P11.99

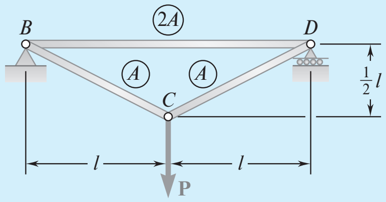


Figura *P11.100*

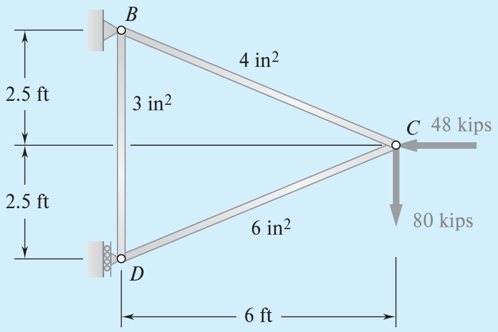


Figura P11.101 y P11.102

11.103 y *11.104* Cada elemento de la armadura mostrada es de cero y tiene un área de sección transversal de 500 mm^2. Utilice $E = 200$ GPa para determinar la deflexión indicada.

11.103 Deflexión vertical de la unión *B*.
11.104 Deflexión horizontal de la unión *B*.

11.105 Una barra uniforme de rigidez a la flexión *EI* se dobla y carga como se muestra. Determine *a*) la deflexión vertical del punto *A*, *b*) la deflexión horizontal del punto *A*.

11.106 Para la barra uniforme y la carga mostradas y utilizando el teorema de Castigliano, determine la deflexión del punto *B*.

11.107 Para la viga y la carga mostradas y utilizando el teorema de Castigliano, determine *a*) la deflexión horizontal del punto *B*, *b*) la deflexión vertical del punto *B*.

11.108 Dos barras *AB* y *BC* de la misma rigidez a la flexión *EI*, se sueldan en *B*. Para la carga mostrada, determine *a*) la deflexión del punto *C*, *b*) la pendiente del elemento *BC* en el punto *C*.

11.109 Tres barras, cada una de la misma rigidez a la flexión *EI*, se sueldan para formar el marco *ABCD*. Para la carga mostrada, determine la deflexión en el punto *D*.

11.110 Tres barras, cada una de la misma rigidez a la flexión *EI*, se sueldan para formar el marco *ABCD*. Para la carga mostrada, determine el ángulo formado por el marco en el punto *D*.

11.111 a *11.115* Determine la reacción en apoyo de rodillo y trace el diagrama de momento flector para la viga y carga mostradas.

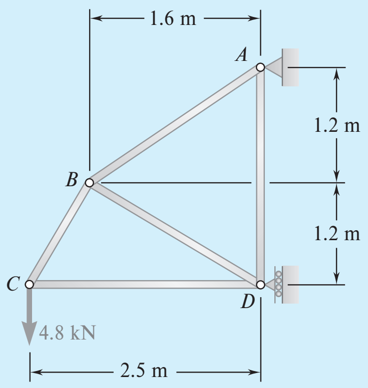


Figura P11.103 y *P11.104*

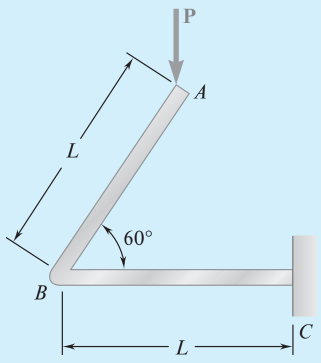


Figura P11.105

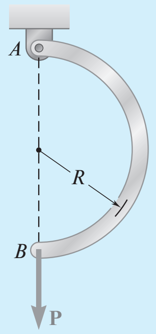


Figura P11.106

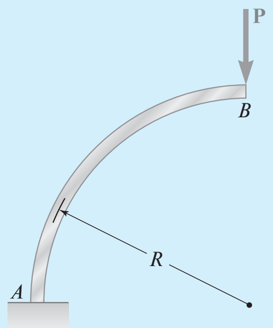


Figura P11.107

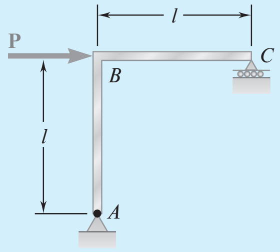
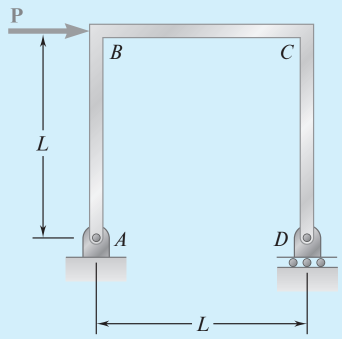


Figura *P11.108*



Figuras P11.109 y *P11.110*

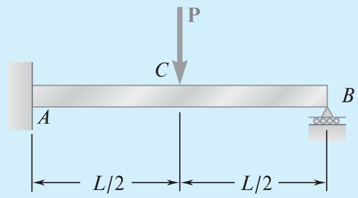


Figura P11.111

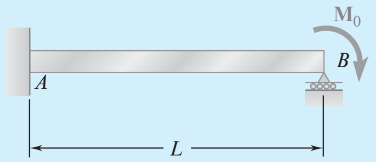


Figura P11.112

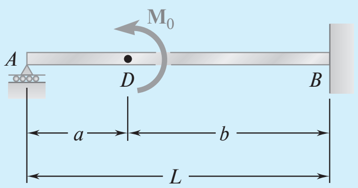


Figura P11.113

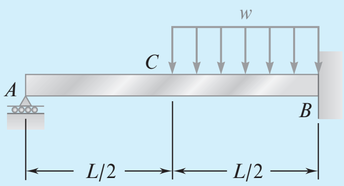


Figura P11.114

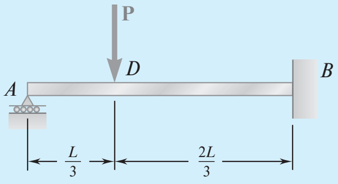


Figura *P11.115*

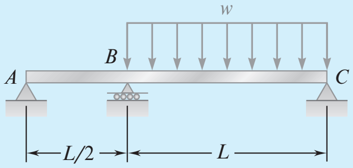


Figura *P11.116*

11.116 Para la viga uniforme y la carga mostradas, determine la reacción en cada apoyo.

11.117 a *11.120* Se utilizan tres elementos del mismo material y de la misma área de sección transversal para soportar la carga **P**. Determine la fuerza en el elemento *BC*.

11.121 y *11.122* Si los ocho elementos de la armadura indeterminada mostrada tienen la misma área de sección transversal uniforme, determine la fuerza en el elemento *AB*.

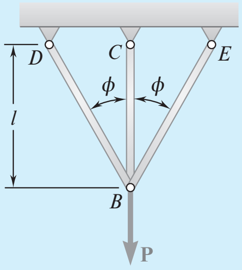


Figura P11.117

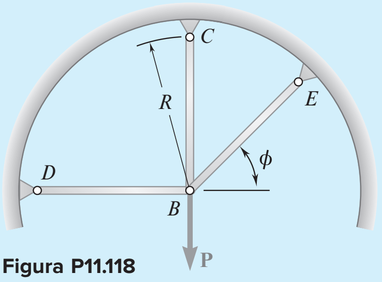


Figura P11.118

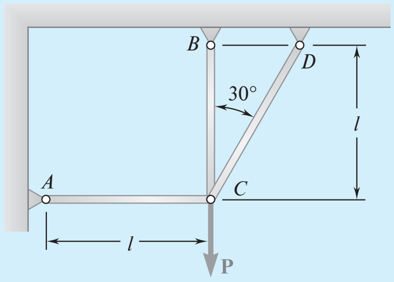


Figura P11.119

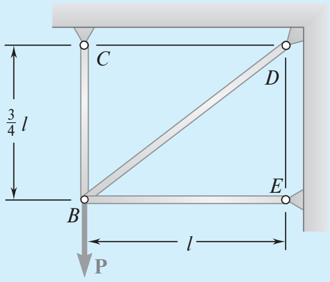


Figura *P11.120*

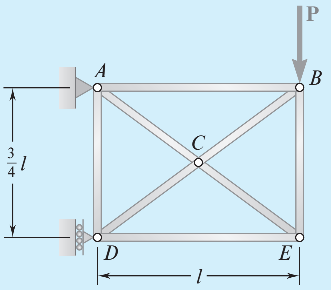


Figura P11.121

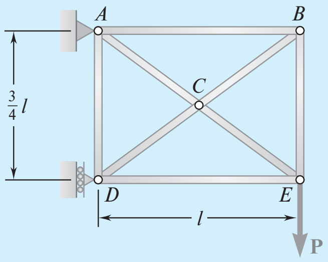


Figura *P11.122*

Repaso y resumen

Energía de deformación

Considere una barra uniforme sometida a una carga axial **P** que se incrementa lentamente (figura 11.43). El área bajo el diagrama de la curva carga-deformación (figura 11.44) representa el trabajo realizado por **P**. Este trabajo es igual a la *energía de deformación* de la barra asociada con la deformación producida por la carga **P**.

$$\text{Energía de deformación} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \tag{11.2}$$

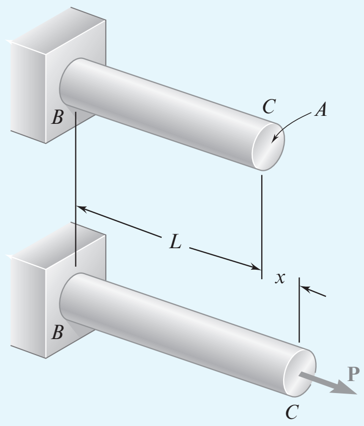


Figura 11.43 Barra axialmente cargada.

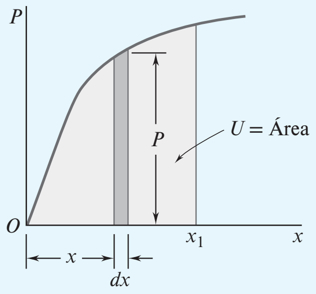


Figura 11.44 El trabajo realizado por *P* es igual al área bajo el diagrama de la curva carga-deformación.

Densidad de energía de deformación

Como el esfuerzo es uniforme en la barra mostrada en la figura 11.43, la energía de deformación se puede dividir entre su volumen para obtener la densidad de energía de deformación por unidad de volumen. Esta es la *densidad de energía de deformación* del material.

$$\text{Densidad de energía de deformación} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x\,d\epsilon_x \tag{11.4}$$

La densidad de energía de deformación es igual al área bajo la curva esfuerzo-deformación del material (figura 11.45). La ecuación (11.4) permanece válida cuando los esfuerzos no están uniformemente distribuidos, pero ahora la densidad de energía de deformación varía de punto a punto. Si el material se descarga, hay una deformación permanente ϵ_p, y solo se recupera la densidad de energía de deformación correspondiente al área triangular. El resto de la energía se disipa en forma de calor durante la deformación del material.

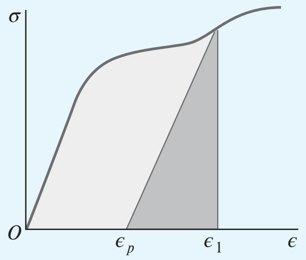


Figura 11.45 La densidad de energía de deformación es el área bajo la curva esfuerzo-deformación entre $\epsilon_x = 0$ y $\epsilon_x = \epsilon_1$. Si se carga en la región plástica solo se recupera la energía asociada con la descarga elástica.

Módulo de tenacidad

El área bajo la curva esfuerzo-deformación (desde cero hasta la ruptura) se llama *módulo de tenacidad* y mide la energía total que el material puede adquirir.

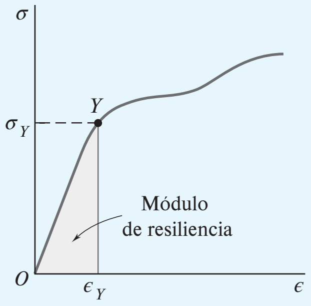


Figura 11.46 El módulo de resiliencia es el área bajo la curva de esfuerzo-deformación hasta la cedencia.

Módulo de resiliencia

Si el esfuerzo normal σ permanece dentro del límite proporcional del material, la densidad de energía de deformación u es

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

El área bajo la curva de esfuerzo-deformación desde cero hasta la deformación ϵ_Y al momento de la cedencia (figura 11.46) es el *módulo de resiliencia* del material. Representa la energía por unidad de volumen que el material puede absorber sin ceder:

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} \qquad \textbf{(11.8)}$$

Energía de deformación bajo carga axial

La energía de deformación bajo carga axial está asociada con los *esfuerzos normales*. Si una barra de longitud L y de *área A de sección transversal variable* se somete a un carga axial **P** céntrica en su extremo, la energía de deformación de la barra es

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE}\,dx \qquad \textbf{(11.13)}$$

Si la barra tiene una *sección transversal uniforme* de área A, la energía de deformación es

$$U = \frac{P^2L}{2AE} \qquad \textbf{(11.14)}$$

Energía de deformación debido a flexión

Para una viga sometida a cargas transversales (figura 11.47), la energía de deformación asociada con los esfuerzos normales es

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx \qquad \textbf{(11.15)}$$

donde M es el momento flector y EI es la rigidez flexional de la viga.

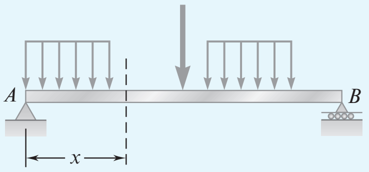


Figura 11.47 Viga transversalmente cargada.

Energía de deformación debido a esfuerzos cortantes

La energía de deformación también se puede asociar con los *esfuerzos cortantes.* La densidad de energía de deformación de un material en cortante puro es

$$u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad \textbf{(11.17)}$$

donde τ_{xy} es el esfuerzo cortante y G es el módulo de rigidez del material.

Energía de deformación debido a torsión

Para una flecha de longitud L y sección transversal uniforme sometida a momentos de magnitud T en sus extremos (figura 11.48), la energía de deformación es

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \qquad \textbf{(11.20)}$$

donde J es el momento polar de inercia del área de sección transversal de la flecha.

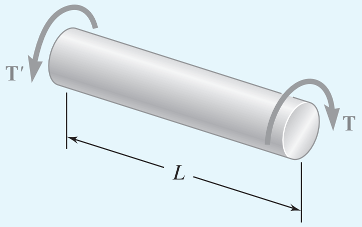


Figura 11.48 Flecha prismática sometida a un par de torsión.

Estado general de esfuerzo

La energía de deformación de un material elástico isotrópico sometido a un estado general de esfuerzo se consideró donde la densidad de energía de deformación en un punto dado se expresa en función de los esfuerzos principales, σ_a, σ_b y σ_c en dicho punto.

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)] \qquad \textbf{(11.23)}$$

La densidad de energía de deformación en un punto dado se divide en dos partes: u_v, la cual está asociada con un cambio de volumen del material en ese punto, y u_d, la cual está asociada con una distorsión del material en el mismo punto. Por consiguiente $u = u_v + u_d$, donde

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \qquad \textbf{(11.28)}$$

y

$$u_d = \frac{1}{12G}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] \qquad \textbf{(11.29)}$$

Esta ecuación para u_d se utiliza para derivar el criterio de energía máxima de distorsión para predecir si un material dúctil cede o no sometido a un estado de esfuerzo plano.

Cargas de impacto

Para la *carga de impacto* de una estructura elástica que es impactada por una masa en movimiento a una velocidad dada, se supone que la energía cinética de la masa se transfiere totalmente a la estructura. La *carga estática equivalente* es la carga que produce las mismas deformaciones y esfuerzos que la carga de impacto.

Un elemento estructural diseñado para soportar una carga de impacto con eficacia debe estar conformado de modo que los esfuerzos se distribuyan uniformemente en el elemento. Además, el material utilizado debe tener un bajo módulo de elasticidad y una alta resistencia a la cedencia.

Elementos sometidos a una carga única

La energía de deformación de elementos estructurales sometidos a una *carga única* se consideró para la viga y la carga de la figura 11.49. La energía de deformación de la viga es

$$U = \frac{P_1^2 L^3}{6EI} \qquad \textbf{(11.37)}$$

Al observar que el trabajo realizado por la carga **P** es $\frac{1}{2}P_1 y_1$, el trabajo de la carga y la energía de deformación de la viga son iguales y se pueden igualar para determinar la deflexión y_1 en el punto de aplicación de la carga.

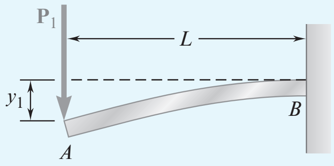


Figura 11.49 Viga en voladizo con una carga $\mathbf{P}_1$.

El método que se acaba de describir es de valor limitado, ya que está limitado a estructuras sometidas a una carga concentrada única y a la determinación de la deflexión en el punto de aplicación de la carga. En las secciones restantes del capítulo se presentó un método más general, que se puede usar para determinar deflexiones en varios puntos de estructuras sometidas a varias cargas.

Teorema de Castigliano

El *teorema de Castigliano* establece que la deflexión x_j del punto de aplicación de una carga $\mathbf{P}_j$ medida a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{P}_j$ es igual a la derivada parcial de la energía de deformación de la estructura con respecto a la carga $\mathbf{P}_j$. Por consiguiente,

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \qquad \textbf{(11.52)}$$

El teorema de Castigliano también se puede usar para determinar la *pendiente* de una viga en el punto de aplicación de un momento $\mathbf{M}_j$ al escribir

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \qquad \textbf{(11.55)}$$

Asimismo, el *ángulo de torsión* se determina en una sección de una flecha donde se aplica un par $\mathbf{T}_j$ al escribir

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \qquad \textbf{(11.56)}$$

Se puede aplicar el teorema de Castigliano para determinar las deflexiones y pendientes en varios puntos de una estructura dada. Se utilizan cargas ficticias para determinar desplazamientos en puntos donde no hay una carga real aplicada. El cálculo de una deflexión x_j se simplifica si la derivación con respecto a la carga P_j se realiza antes de la integración. Para una viga,

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_j}dx \qquad \textbf{(11.57)}$$

Para una armadura compuesta de n elementos, la deflexión x_j en el punto de aplicación de la carga $\mathbf{P}_j$ es

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E}\frac{\partial F_i}{\partial P_j} \qquad \textbf{(11.59)}$$

Estructuras indeterminadas

El teorema de Castigliano también se puede usar en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, como se muestra en la sección 11.9.

Problemas de repaso

11.123 La barra AB está hecha de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y =$ 450 MPa y $E = 200$ GPa; la barra BC está hecha de una aleación de aluminio para la cual $\sigma_Y = 280$ MPa y $E = 73$ GPa. Determine la energía máxima de deformación que la barra compuesta puede adquirir sin que sufra deformaciones permanentes.

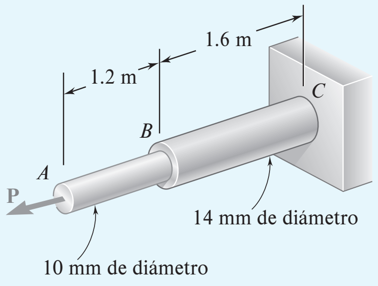


Figura P11.123

11.124 Cada elemento de la armadura mostrada es de acero y tiene el área de sección transversal mostrada. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la energía de deformación de la armadura para la carga mostrada.

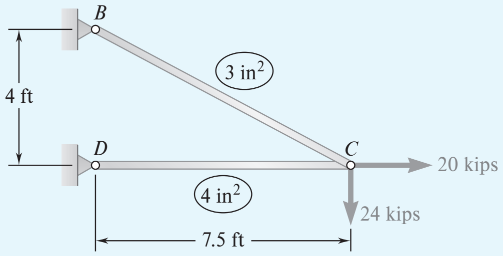


Figura P11.124

11.125 El buque situado en A acaba de comenzar a perforar el suelo del océano en busca de petróleo a una profundidad de 5 000 pies. El tubo perforador de acero tiene un diámetro externo de 8 in y un espesor de pared uniforme de 0.5 in. Si se sabe que el extremo superior del tubo perforador realiza dos revoluciones completas antes de que la broca en B comience a operar y utilizando $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine la energía máxima de deformación adquirida por el tubo perforador.

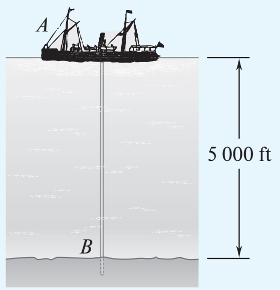


Figura *P11.125*

11.126 El collarín D se suelta del reposo en la posición mostrada y una pequeña placa fija en el extremo C de la barra vertical ABC lo detiene. Determine la masa del collarín para la cual el esfuerzo normal máximo en la parte BC es de 125 MPa.

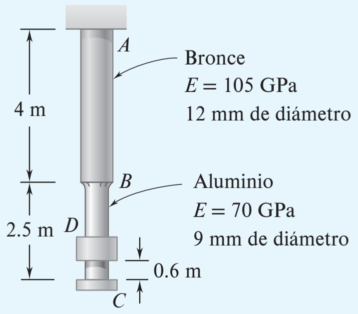


Figura P11.126

11.127 Cada parte de la armadura que se muestra está hecha de acero y tiene un área de sección transversal de 400 mm². Usando $E = 200$ GPa, determine la deflexión del punto D causada por la carga de 16 kN.

11.128 Un bloque de peso W se coloca en contacto con una viga en algún punto dado D y se suelta. Demuestre que la deflexión máxima resultante en el

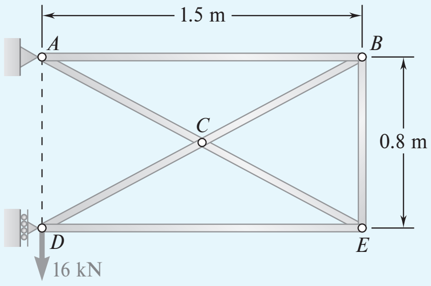


Figura *P11.127*

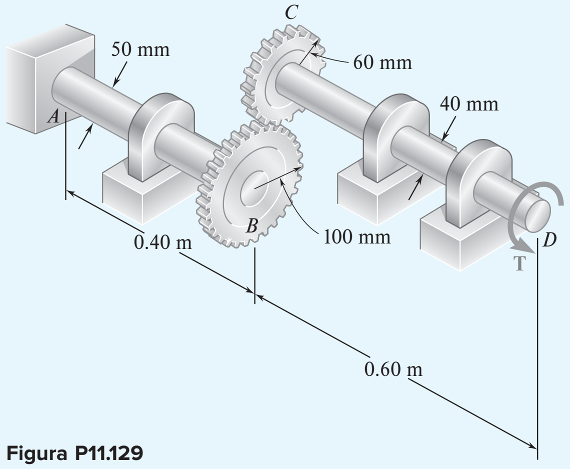


Figura P11.129

punto D es dos veces más grande que la deflexión producida por una carga estática W aplicada en D.

11.129 Dos flechas sólidas de acero están conectadas por los engranes mostrados. Utilizando el método de trabajo y energía, determine el ángulo que el extremo D gira cuando $T = 820$ N · m. Use $G = 77.2$ GPa.

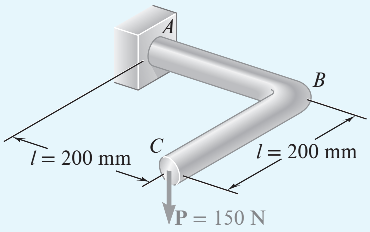


Figura P11.130

11.130 La barra de acero de 12 mm de diámetro ABC se dobló en la forma mostrada. Si se sabe que $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa, determine la deflexión del extremo C producida por la fuerza de 150 N.

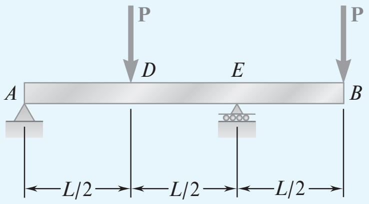


Figura *P11.131*

11.131 Para la barra prismática mostrada, determine la pendiente en el punto D.

11.132 Un disco de radio a se soldó al extremo B de la flecha sólida de acero AB. Luego se enrolló un cable alrededor del disco y se aplicó una fuerza vertical **P** en el extremo C del cable. Si se sabe que el radio de la flecha es L e ignorando las deformaciones del disco y del cable, demuestre que la deflexión del punto C producida por la aplicación de **P** es

$$\delta_c = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + 1.5\frac{Ea^2}{GL^2}\right)$$

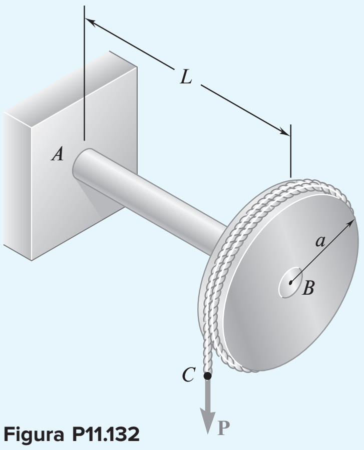


Figura P11.132

11.133 Una barra uniforme de rigidez flexional EI se dobla y carga como se muestra. Determine *a*) la deflexión horizontal del punto D, *b*) la pendiente en el punto D.

11.134 La barra de acero ABC tiene una sección transversal cuadrada de 0.75 in. por lado y se somete a una carga **P** de 50 lb. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para la barra BD y la barra ABC para determinar la deflexión en el punto C.

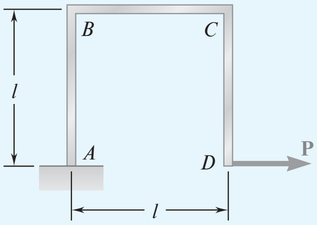


Figura *P11.133*

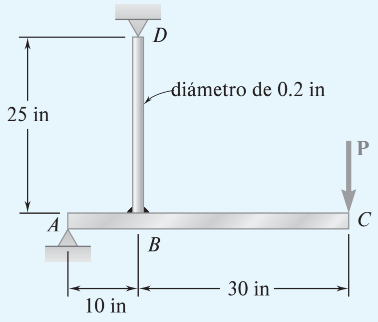


Figura P11.134

Problemas de computadora

Los siguientes problemas se diseñaron para resolverse con una computadora.

11.C1 Una barra consta de n elementos, cada uno de los cuales es homogéneo de sección transversal uniforme, se somete a una carga **P** aplicada en su extremo libre. La longitud del elemento i se designa L_i y su diámetro d_i. *a*) Si E es el módulo de elasticidad del material utilizado en la barra, escriba un programa de computadora que se pueda usar para determinar la energía de deformación adquirida por la barra y la deformación medida en su extremo libre. *b*) Use este programa para determinar la energía de deformación y la deformación de las barras de los problemas 11.9 y 11.10.

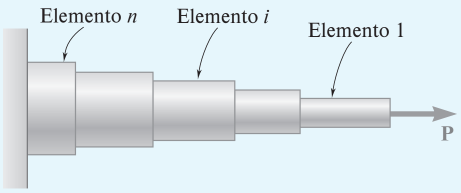


Figura P11.C1

11.C2 Se sueldan dos cubreplacas de 0.75 × 6 in a una viga W8 × 18 de acero laminado como se muestra. El bloque de 1 500 lb se deja caer desde una altura $h = 2$ in sobre la viga. *a*) Escriba un programa de computadora para calcular el esfuerzo normal máximo en las secciones transversales justo a la izquierda de D y en el centro de la viga para valores de a de 0 a 60 in, con incrementos de 5 in. *b*) Con los valores considerados en la parte *a*, seleccione la distancia a para los cuales el esfuerzo normal máximo es lo más pequeño posible. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

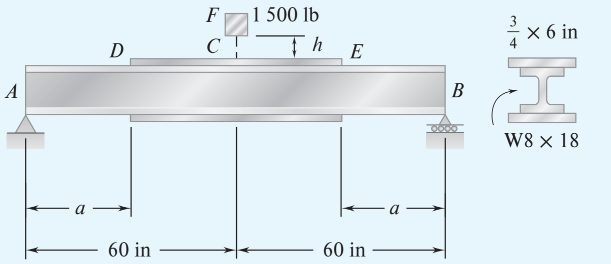


Figura P11.C2

11.C3 El bloque de 16 kg se deja caer desde una altura h sobre el extremo libre la barra de acero AB. Para el acero utilizado $\sigma_{perm} = 120$ MPa y $E = 200$ GPa. *a*) Escriba un programa de computadora para calcular la altura máxima per-

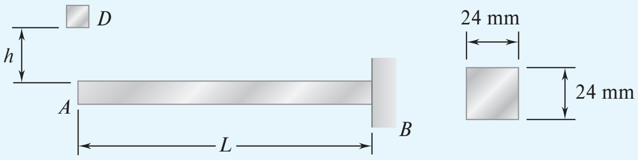


Figura P11.C3

misible h para valores de la longitud L de 100 mm a 1.2 m, con incrementos de 100 mm. *b*) Con los valores considerados en la parte *a*), seleccione la longitud correspondiente a la altura máxima permisible.

11.C4 El bloque d de masa $m = 8$ kg se deja caer desde una altura $h = 750$ mm sobre la viga de acero laminado AB. Si $E = 200$ GPa, escriba un programa de computadora para calcular la deflexión máxima del punto E y el esfuerzo normal máximo en la viga para valores de a de 100 a 900 mm, con incrementos de 100 mm.

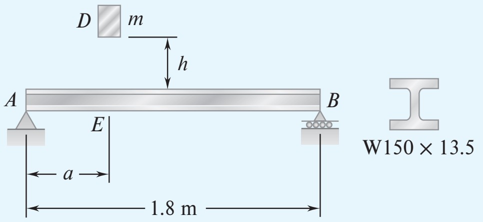


Figura P11.C4

11.C5 Las barras de acero AB y BC son de acero para el cual $\sigma_Y = 300$ MPa y $E = 200$ GPa. *a*) Escriba un programa de computadora para calcular con valores de a de 0 a 6 m e incrementos de 1 m, la energía de deformación máxima que el ensamble puede adquirir sin que se deforme permanentemente. *b*) Para cada valor de a considerado, calcule el diámetro de una barra uniforme de 6 m de longitud y de la misma masa que el ensamble original, y la energía máxima de deformación que esta barra uniforme podría adquirir sin deformarse permanentemente.

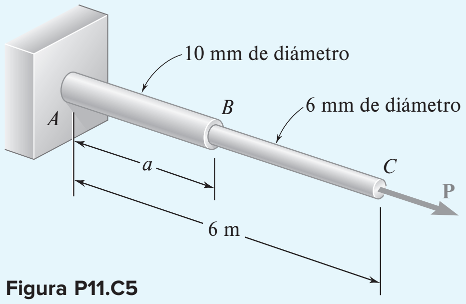


Figura P11.C5

11.C6 Una clavidista de 160 lb salta desde una altura de 20 in sobre el extremo C un trampolín de sección transversal uniforme. Escriba un programa de computadora para calcular con valores de a de 10 a 50 in e incrementos de 10 in, *b*) el momento flector máximo en el trampolín, *c*) la carga estática equivalente. Suponga que las piernas del clavadista permanecen rígidas y utilice $E = 1.8 \times 10^6$ psi.

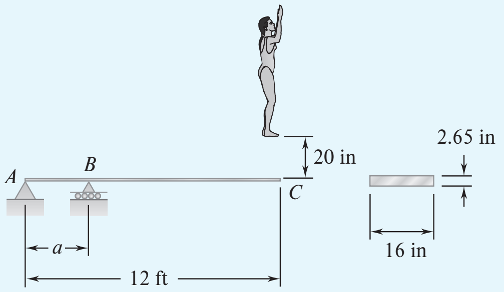


Figura P11.C6

Apéndices

Apéndice A Momentos de áreas AP-2

Apéndice B Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería AP-11

Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero† AP-15

Apéndice D Deflexiones y pendientes de vigas AP-27

Apéndice E Fundamentos de la certificación en ingeniería AP-28

† Cortesía del American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois.

APÉNDICE

A Momentos de áreas

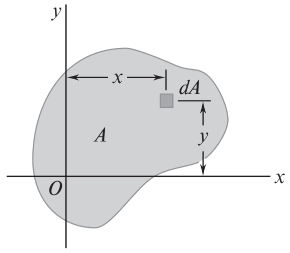


Figura A.1 Área general *A* con área infinitesimal *dA* referida al sistema de coordenadas *xy*.

A.1 Primer momento de un área y centroide de un área

Sea un área A en el plano xy (figura A.1). Usando x y y como las coordenadas de un elemento de área dA, el *primer momento del área A con respecto al eje x* es la integral

$$Q_x = \int_A y\,dA \qquad \text{(A.1)}$$

Análogamente, el *primer momento del área A con respecto al eje y* es la integral

$$Q_y = \int_A x\,dA \qquad \text{(A.2)}$$

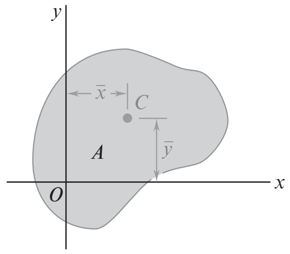


Figura A.2 Centroide del área *A*.

Observe que cada una de estas integrales puede ser positiva, negativa o cero dependiendo de la posición de los ejes coordenados. Si se usan unidades del SI, los primeros momentos Q_x y Q_y se expresan en m^3 o mm^3. Cuando se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos, se expresan en ft^3 o in^3.

El *centroide del área A* es el punto C de coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ (figura A.2), que satisfacen la relación

$$\int_A x\,dA = A\bar{x} \qquad \int_A y\,dA = A\bar{y} \qquad \text{(A.3)}$$

Al comparar las ecuaciones (A.1) y (A.2) con las ecuaciones (A.3), los primeros momentos del área A pueden expresarse como los productos del área por las coordenadas de su centroide:

$$Q_x = A\bar{y} \qquad Q_y = A\bar{x} \qquad \text{(A.4)}$$

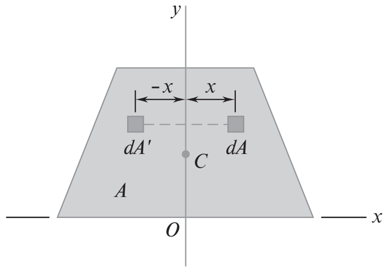


Figura A.3 Área que tiene un eje de simetría.

Cuando un área posee un *eje de simetría*, el primer momento del área con respecto a su eje es cero. Considerando el área A de la figura A.3, que es simétrica con respecto al eje y, todo elemento de área dA con abscisa x corresponde a un elemento de área dA' con abscisa $-x$. Por lo tanto, la integral en la ecuación (A.2) es cero y $Q_y = 0$. De la primera de las relaciones en la ecuación (A.3), = 0. Por lo tanto, si un área A posee un eje de simetría, su centroide C estará en ese eje.

Como un rectángulo posee dos ejes de simetría (figura A.4*a*), el centroide C de un área rectangular coincide con su centro geométrico. De modo similar, el centroide de un área circular coincide con el centro del círculo (figura A.4*b*).

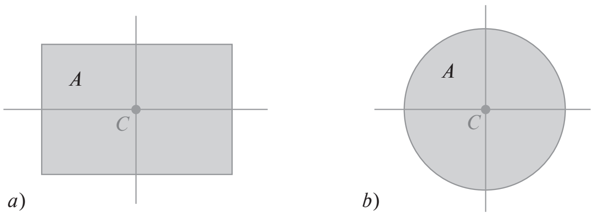


Figura A.4 Las áreas que tienen dos ejes de simetría tienen el centroide en su intersección.

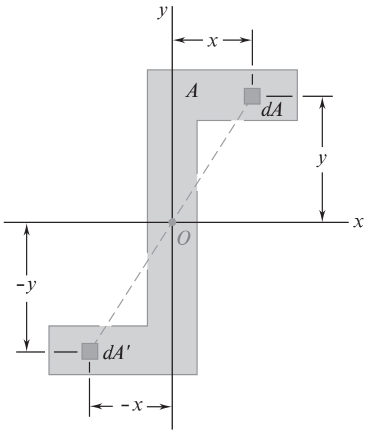


Figura A.5 El área con centro de simetría tiene su centroide en el origen.

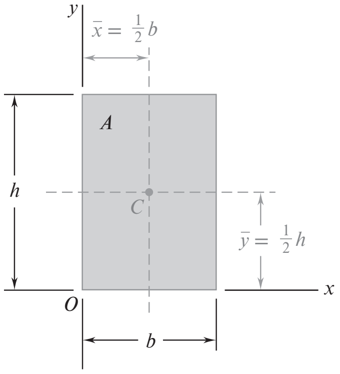


Figura A.6 Centroide de un área rectangular.

Cuando un área posee un *centro de simetría O*, el primer momento del área con respecto a cualquier eje en *O*, es cero. Considerando el área *A* de la figura A.5, a todo elemento de área *dA* con coordenadas *x* y *y* corresponde un elemento de área *dA'* con coordenadas –*x* y –*y*. Se tiene que las integrales en las ecuaciones (A.1) y (A.2) son ambas cero y que $Q_x = Q_y = 0$. De las ecuaciones (A.3), $\bar{x} = \bar{y} = 0$, de modo que el centroide del área coincide con su centro de simetría.

Cuando el centroide *C* de un área puede localizarse por simetría, el primer momento de esa área con respecto a cualquier eje dado se calcula a partir de las ecuaciones (A.4). Por ejemplo, para el área rectangular de la figura A.6,

$$Q_x = A\bar{y} = (bh)(\tfrac{1}{2}h) = \tfrac{1}{2}bh^2$$

y

$$Q_y = A\bar{x} = (bh)(\tfrac{1}{2}b) = \tfrac{1}{2}b^2h$$

En la mayoría de los casos, es necesario efectuar las integraciones indicadas en las ecuaciones (A.1) a (A.3) para determinar los primeros momentos y el centroide de un área dada. Aunque cada una de las integrales involucrada es realmente doble, es posible elegir elementos del área *dA* en la forma de delgadas tiras horizontales o verticales para reducir las ecuaciones a integrales de una sola variable. Esto se ilustra en la sección Aplicación de conceptos A.1. En las primeras páginas del libro se presenta una tabla con los centroides de formas geométricas comunes.

Aplicación de conceptos A.1

Para el área triangular de la figura A.7*a*, determine *a*) el primer momento Q_x del área con respecto al eje *x*, *b*) la ordenada del centroide del área.

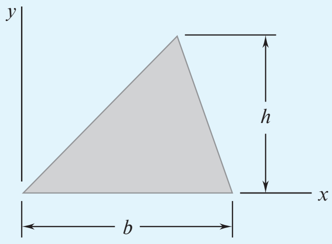


Figura A.7 *a*) Área triangular.

a) Primer momento Q_x. Se elige como elemento de área una tira horizontal de longitud *u* y espesor *dy*. Se observa que todos los puntos del elemento están a la misma distancia *y* del eje *x* (figura A.7*b*). Por triángulos semejantes:

$$\frac{u}{b} = \frac{h - y}{h} \qquad u = b\frac{h - y}{h}$$

y

$$dA = u\,dy = b\frac{h - y}{h}dy$$

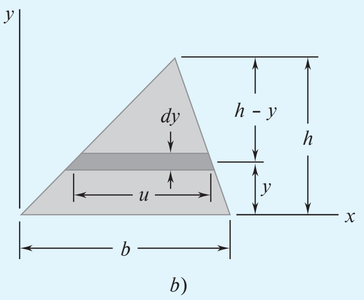


Figura A.7 (*cont.*) *b*) Elemento horizontal utilizado en la integración para encontrar el centroide.

El primer momento del área con respecto al eje x es:

$$Q_x = \int_A y\,dA = \int_0^h yb\frac{h-y}{h}dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy - y^2)\,d$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h \quad Q_x = \tfrac{1}{6}bh^2$$

***b*) Ordenada del centroide.** Al recordar la primera de las ecuaciones (A.4) y como $A = \frac{1}{2}bh$,

$$Q_x = A\bar{y} \qquad \tfrac{1}{6}bh^2 = (\tfrac{1}{2}bh)\bar{y}$$

$$\bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$

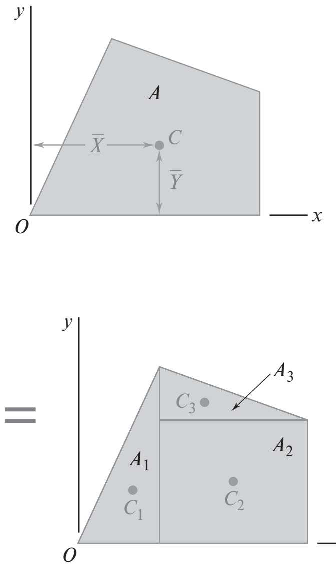


Figura A.8 Área cuadrilateral dividida en formas geométricas simples.

A.2 El primer momento y el centroide de un área compuesta

Considere el área A, del área cuadrilateral en la figura A.8, que puede dividirse en formas geométricas simples. El primer momento Q_x del área con respecto al eje x está representado por la integral $\int y\,dA$, que se extiende sobre toda el área A. Al dividir A en sus componentes A_1, A_2, A_3, se escribe

$$Q_x = \int_A y\,dA = \int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} y\,dA + \int_{A_3} y\,dA$$

o, al recordar la segunda de las ecuaciones (A.3),

$$Q_x = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3$$

donde $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ y $\bar{y}_3$, representan las ordenadas de los centroides de las áreas componentes. Al extender esto a un número arbitrario de áreas componentes y al notar que una expresión similar puede obtenerse para Q_y, se escribe

$$Q_x = \sum A_i\bar{y}_i \qquad Q_y = \sum A_i\bar{x}_i \tag{A.5}$$

Para obtener las coordenadas $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ del centroide C del área compuesta A, se sustituye $Q_x = A\overline{Y}$ y $Q_y = A\overline{X}$ en las ecuaciones (A.5):

$$A\overline{Y} = \sum_i A_i\bar{y}_i \qquad A\overline{X} = \sum_i A_i\bar{x}_i$$

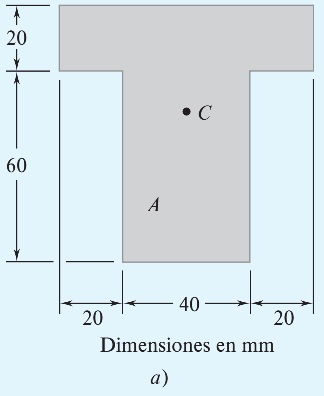
Al resolver $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ y al recordar que el área A es la suma de las áreas componentes A_i,

$$\overline{X} = \frac{\sum_i A_i\bar{x}_i}{\sum_i A_i} \qquad \overline{Y} = \frac{\sum_i A_i\bar{y}_i}{\sum_i A_i} \tag{A.6}$$

Aplicación de conceptos A.2

Localice el centroide C del área A mostrada en la figura A.9*a*.

Al elegir los ejes coordenados de la figura A.9*b*, se observa que el centroide C debe estar en el eje y, puesto que éste es un eje de simetría. Así, $\overline{X} = 0$.



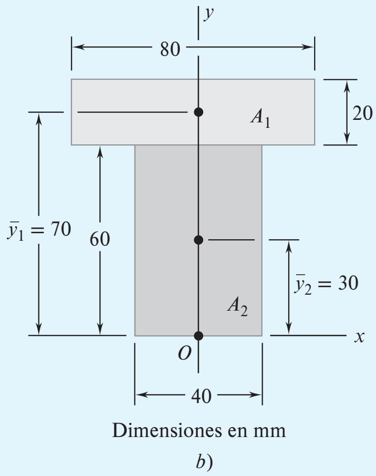


Figura A.9 *a*) Área *A*. *b*) Áreas compuestas A_1 y A_2 utilizadas para determinar el centroide general.

Al dividir A en sus componentes A_1 y A_2, se usa la segunda de las ecuaciones (A.6) para determinar la ordenada $\overline{Y}$ del centroide. El cálculo real se realiza mejor en una tabla.

	Área, mm²	$\bar{y}_i$, mm	$A_i\bar{y}_i$, mm³
A_1	(20)(80) = 1 600	70	112×10^3
A_2	(40)(60) = 2 400	30	72×10^3
	$\sum_i A_i = 4\,000$		$\sum_i A_i\bar{y}_i = 184 \times 10^3$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_i A_i\bar{y}_i}{\sum_i A_i} = \frac{184 \times 10^3 \text{ mm}^3}{4 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 46 \text{ mm}$$

Aplicación de conceptos A.3

En relación con el área A de la Aplicación de conceptos A.2, considere el eje horizontal x' que pasa por el centroide C (llamado *eje centroidal*). La porción de A localizada por encima del eje es A' (figura A.10*a*). Determine el primer momento de A' con respecto al eje x'.

Solución. Se divide el área A' en sus componentes A_1 y A_3 (figura A.10*b*). Recuerde de la Aplicación de conceptos A.2 que C se localiza 46 mm por encima del borde inferior de A. Las coordenadas y'_1 y y'_3 de A_1 y A_3 y el primer momento $Q'_{x'}$ de A' con respecto a x' son:

$$\begin{aligned} Q'_{x'} &= A_1\bar{y}'_1 + A_3\bar{y}'_3 \\ &= (20 \times 80)(24) + (14 \times 40)(7) = 42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

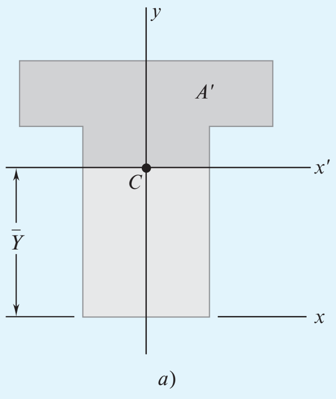
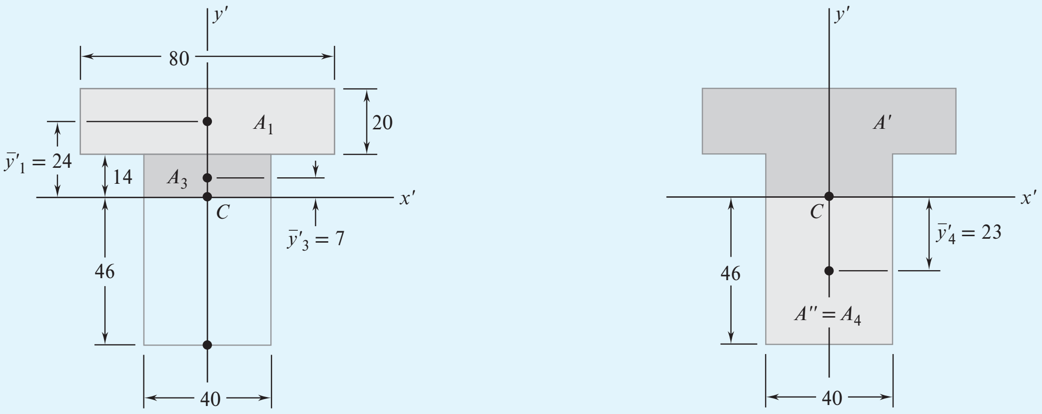


Figura A.10 *a*) Área *A* con ejes centroidales *x'y'*, destacando la porción *A'*.



Dimensiones en mm

b)

Dimensiones en mm

c)

Figura A.10 (*cont.*) *b*) Áreas utilizadas para determinar el primer momento del área *A′* con respecto al eje *x′*. *c*) Solución alternativa usando la otra porción *A″* del área total *A*.

Solución alternativa. Como el centroide C de A se localiza en el eje x', el primer momento $Q_{x'}$ *del área total* A con respecto a su eje es cero:

$$Q_{x'} = A\bar{y}' = A(0) = 0$$

Usando A'' como la porción de A por debajo del eje x' y $Q''_{x'}$ como su primer momento con respecto a ese eje,

$$Q_{x'} = Q'_{x'} + Q''_{x'} = 0 \qquad \text{o} \qquad Q'_{x'} = -Q''_{x'}$$

Esto muestra que los primeros momentos de A' y A'' tienen la misma magnitud y signos contrarios. Con referencia a la figura A.10*c*, se escribe

$$Q''_{x'} = A_4\bar{y}'_4 = (40 \times 46)(-23) = -42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

y

$$Q'_{x'} = -Q''_{x'} = +42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

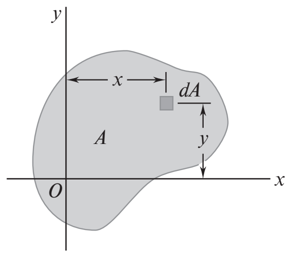


Figura A.1 (*repetida*)

A.3 Segundo momento o momento de inercia de un área, y radio de giro

Considere un área A en el plano xy (figura A.1) y el elemento de área dA de las coordenadas x y y. El *segundo momento* o *momento de inercia* del área A con respecto a los ejes x y y es

$$I_x = \int_A y^2\, dA \quad I_y = \int_A x^2\, dA \tag{A.7}$$

Estas integrales se llaman *momentos rectangulares de inercia*, ya que se calculan de las coordenadas rectangulares del elemento dA. Mientras cada integral es realmente una integral doble, es posible elegir elementos de área dA en la forma de delgadas tiras horizontales o verticales y así reducir las ecuaciones a integrales en una sola variable. Esto se ilustra en la Aplicación de conceptos A.4.

El *momento polar de inercia* del área A con respecto al punto O (figura A.11) es la integral

$$J_O = \int_A \rho^2 \, dA \tag{A.8}$$

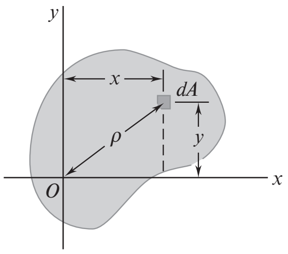


Figura A.11 Área *dA* localizada por la distancia ρ desde el punto *O*.

donde ρ es la distancia de O al elemento dA. Mientras esta integral es nuevamente una integral doble, es posible en el caso de un área circular elegir elementos del área dA en la forma de anillos circulares y reducir la ecuación de J_O a una integración única (vea la Aplicación de conceptos A.5).

Se nota, de las ecuaciones (A.7) y (A.8), que los momentos de inercia de un área son cantidades positivas. Cuando se utilizan unidades del SI, los momentos de inercia se expresan en m^4 o mm^4. Cuando se usan unidades de uso común en Estados Unidos, están dadas en ft^4 o in^4.

Se puede establecer una importante relación entre el momento polar de inercia J_O de un área dada y los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y. Al notar que $\rho^2 = x^2 + y^2$,

$$J_O = \int_A \rho^2 \, dA = \int_A (x^2 + y^2)\, dA = \int_A y^2 \, dA + \int_A x^2 \, dA$$

o

$$J_O = I_x + I_y \tag{A.9}$$

El *radio de giro* de un área A con respecto al eje x es r_x, que satisface la relación

$$I_x = r_x^2 A \tag{A.10}$$

donde I_x es el momento de inercia de A con respecto al eje x. Al resolver r_x en la ecuación (A.10),

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{A.11}$$

Los radios de giro con respecto al eje y y al origen O son

$$I_y = r_y^2 A \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{A.12}$$

$$J_O = r_O^2 A \qquad r_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{A.13}$$

Al sustituir J_O, I_x e I_y en términos de los correspondientes radios de giro en la ecuación (A.9),

$$r_O^2 = r_x^2 + r_y^2 \tag{A.14}$$

Los resultados obtenidos en las dos siguientes Aplicaciones de conceptos se incluyen en la tabla para momentos de inercia de formas geométricas comunes, que se presenta en las primeras páginas de este libro.

Aplicación de conceptos A.4

Para el área rectangular de la figura A.12*a*, determine *a*) el momento de inercia I_x del área con respecto al eje centroidal x, *b*) el radio de giro correspondiente r_x.

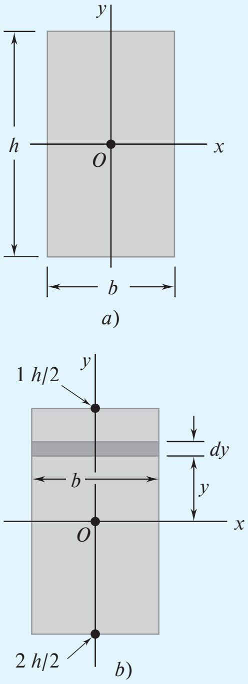


Figura A.12 *a*) Área rectangular. *b*) Tira horizontal utilizada para determinar el momento de inercia I_x.

***a*) Momento de inercia I_x.** Se opta por seleccionar una tira horizontal de longitud b y espesor dy (figura A.12*b*). Como todos los puntos de la tira tienen la misma distancia y desde el eje x, el momento de inercia de la tira con respecto a ese eje es

$$dI_x = y^2\,dA = y^2(b\,dy)$$

Al integrar desde $y = -h/2$ hasta $y = +h/2$,

$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2(b\,dy) = \tfrac{1}{3}b[y^3]_{-h/2}^{+h/2}$$

$$= \tfrac{1}{3}b\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right)$$

o

$$I_x = \tfrac{1}{12}\,bh^3$$

***b*) Radio de giro r_x.** De la ecuación (A.10),

$$I_x = r_x^2 A \quad \tfrac{1}{12}bh^3 = r_x^2(bh)$$

y, al despejar r_x resulta

$$r_x = h/\sqrt{12}$$

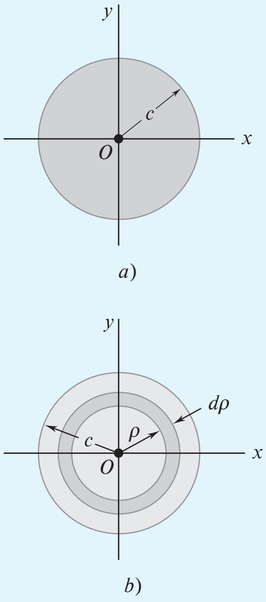


Figura A.13 *a*) Área circular. *b*) Tira anular utilizada para determinar el momento polar de inercia J_O.

Aplicación de conceptos A.5

Para el área circular de la figura A.13*a*, determine *a*) el momento polar de inercia J_O, *b*) los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y.

***a*) Momento polar de inercia.** Se opta por seleccionar, como elemento de área, un anillo de radio ρ y espesor $d\rho$ (figura A.13*b*). Como todos los puntos dentro del anillo tienen la misma distancia ρ desde el origen O, el momento polar de inercia del anillo es:

$$dJ_O = \rho^2\,dA = \rho^2(2\pi\rho\,d\rho)$$

Al integrar en ρ de 0 a c,

$$J_O = \int_A \rho^2\,dA = \int_0^c \rho^2(2\pi\rho\,d\rho) = 2\pi\int_0^c \rho^3 d\rho$$

$$J_O = \tfrac{1}{2}\pi c^4$$

***b*) Momentos rectangulares de inercia.** Debido a la simetría del área circular, $I_x = I_y$. Al recordar la ecuación (A.9), se escribe

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \quad \tfrac{1}{2}\pi c^4 = 2I_x$$

e

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{4}\pi c^4$$

A.4 Teorema de los ejes paralelos

Considere el momento de inercia I_x de un área A con respecto a un eje arbitrario x (figura A.14). Si y es la distancia de un elemento de área dA a ese eje, se recuerda de la sección A.3 que

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$

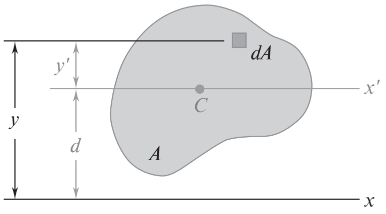


Figura A.14 Área general con eje centroidal x', paralelo al eje x arbitrario.

Se dibuja ahora el *eje centroidal* x', que es el eje paralelo al eje x que pasa por el centroide C. Si y' es la distancia del elemento dA a dicho eje, $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los dos ejes. Al sustituir y en la integral que representa I_x, da:

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_A (y' + d)^2 dA$$

$$I_x = \int_A y'^2\, dA + 2d \int_A y'\, dA + d^2 \int_A dA \qquad \textbf{(A.15)}$$

La primera integral en la ecuación (A.15) representa el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del área con respecto al eje centroidal x'. La segunda integral representa el primer momento $Q_{x'}$ del área con respecto al eje x' y es igual a cero, ya que el centroide C del área se sitúa en ese eje. En otras palabras, al recordar la sección A.1, se escribe

$$Q_{x'} = A\bar{y}' = A(0) = 0$$

La última integral en la ecuación (A.15) es igual al área total A. Entonces,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2 \qquad \textbf{(A.16)}$$

Esta ecuación expresa que el momento de inercia I_x de un área con respecto a un eje arbitrario x es igual al momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del área con respecto al eje centroidal x' paralelo al eje x *más* el producto Ad^2 del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes. Este resultado se conoce como *teorema de los ejes paralelos*. Con este, el momento de inercia de un área con respecto a un eje dado, puede determinarse cuando se conoce su momento de inercia con respecto a un eje centroidal en la misma dirección. También hace posible conocer el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ de un área A con respecto a un eje centroidal x' cuando el momento de inercia I_x de A con respecto a un eje paralelo es conocido. Esto se logra *restando* de I_x el producto Ad^2. Debe notarse que el teorema de ejes paralelos se puede usar *solo si uno de los dos ejes involucrados es un eje centroidal.*

Una ecuación similar relaciona el momento polar de inercia J_O de un área con respecto a un punto arbitrario O y el momento polar de inercia $\bar{J}_C$ de la misma área con respecto a su centroide C. Si d es la distancia entre O y C,

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad \textbf{(A.17)}$$

A.5 Momento de inercia de un área compuesta

Considere un área compuesta A hecha de varios componentes A_1, A_2, etc. Como la integral para el momento de inercia de A puede subdividirse en integrales que se extienden sobre A_1, A_2, etcétera, el momento de inercia de A con respecto a un eje dado se obtendrá sumando los momentos de inercia de las áreas A_1, A_2, etc., con respecto al mismo eje. El momento de inercia de un área hecha de varias de las formas comunes se obtiene usando las fórmulas dadas en las primeras páginas de este libro. Antes de añadir los momentos de inercia de las áreas componentes, el teorema de los ejes paralelos debe usarse para transferir cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en la Aplicación de conceptos A.6.

Aplicación de conceptos A.6

Determine el momento de inercia $\bar{I}_x$ del área mostrada con respecto al eje centroidal x (figura A.15*a*).

Localización del centroide. El centroide C del área ya se localizó antes en la Aplicación de conceptos A.2, para el área dada. A partir de esto, C se localiza a 46 mm por encima del borde inferior del área A.

Cálculo del momento de inercia. Se divide el área A en dos áreas rectangulares A_1 y A_2 (figura A.15*b*) y se calcula el momento de inercia de cada área con respecto al eje x.

Área rectangular A_1. Para obtener el momento de inercia $(I_x)_1$ de A_1 con respecto al eje x, se calcula primero el momento de inercia de A_1, *con respecto a su eje centroidal* x'. Al recordar la ecuación del inciso *a* de la Aplicación de conceptos A.4 para el momento centroidal de inercia de un área rectangular,

$$(\bar{I}_{x'})_1 = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(80\text{ mm})(20\text{ mm})^3 = 53.3 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Con el uso del teorema de los ejes paralelos, se transfiere el momento de inercia de A_1 de su eje centroidal x' al eje paralelo x:

$$(I_x)_1 = (\bar{I}_{x'})_1 + A_1d_1^2 = 53.3 \times 10^3 + (80 \times 20)(24)^2$$
$$= 975 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Área rectangular A_2. Al calcular el momento de inercia de A_2 con respecto a su eje centroidal x'', y usando el teorema de los ejes paralelos para transferirlo al eje x, se tiene

$$(\bar{I}_{x''})_2 = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(40)(60)^3 = 720 \times 10^3\text{ mm}^4$$
$$(I_x)_2 = (\bar{I}_{x''})_2 + A_2d_2^2 = 720 \times 10^3 + (40 \times 60)(16)^2$$
$$= 1\,334 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Área total A. Se suman los valores para los momentos de inercia A_1 y A_2 con respecto al eje x para obtener el momento de inercia $\bar{I}_x$ de toda el área:

$$\bar{I}_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 = 975 \times 10^3 + 1\,334 \times 10^3$$

$$\bar{I}_x = 2.31 \times 10^6\text{ mm}^4$$

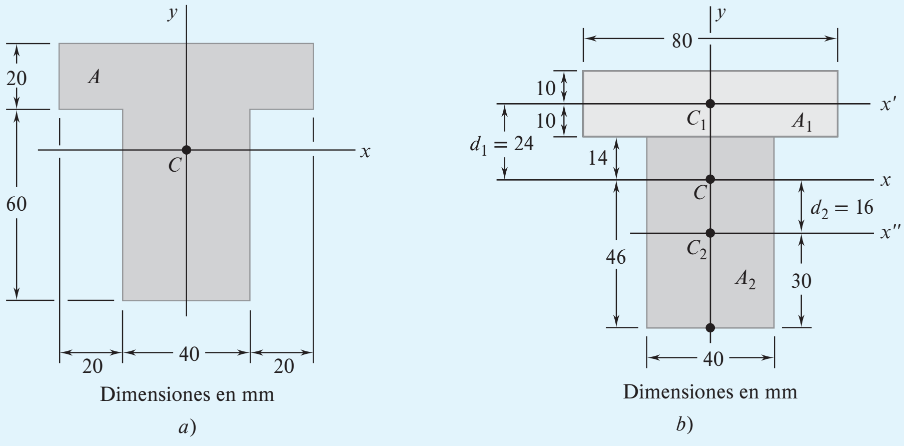


Figura A.15 *a*) Área *A*. *b*) Áreas compuestas y centroides.

Apéndice B Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería[1,5]

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Material	Peso específico, lb/in³	Resistencia última: Tensión, ksi	Resistencia última: Compresión,[2] ksi	Resistencia última: Cortante, ksi	Resistencia a la cedencia[3]: Tensión, ksi	Resistencia a la cedencia[3]: Cortante, ksi	Módulo de elasticidad, 10^6 psi	Módulo de rigidez, 10^6 psi	Coeficiente de expansión térmica, $10^{-6}/°F$	Ductilidad, porcentaje de elongación en 2 in
Acero										
Estructural (ASTM-A36)	0.284	58			36	21	29	11.2	6.5	21
Alta resistencia-baja aleación										
ASTM-A709 Grado 50	0.284	65			50		29	11.2	6.5	21
ASTM-A913 Grado 65	0.284	80			65		29	11.2	6.5	17
ASTM-A992 Grado 50	0.284	65			50		29	11.2	6.5	21
Templado										
ASTM-A709 Grado 100	0.284	110			100		29	11.2	6.5	18
Inoxidable AISI 302										
Laminado en frío	0.286	125			75		28	10.8	9.6	12
Recocido	0.286	95			38	22	28	10.8	9.6	50
Acero de refuerzo										
Resistencia media	0.283	70			40		29	11	6.5	
Alta resistencia	0.283	90			60		29	11	6.5	
Hierro fundido										
Hierro fundido gris										
4.5% C, ASTM A-48	0.260	25	95	35			10	4.1	6.7	0.5
Hierro fundido maleable										
2% C, 1% Si,										
ASTM A-47	0.264	50	90	48	33		24	9.3	6.7	10
Aluminio										
Aleación 1100-H14										
(99% Al)	0.098	16		10	14	8	10.1	3.7	13.1	9
Aleación 2014-T6	0.101	66		40	58	33	10.9	3.9	12.8	13
Aleación 2024-T4	0.101	68		41	47		10.6		12.9	19
Aleación 5456-H116	0.095	46		27	33	19	10.4		13.3	16
Aleación 6061-T6	0.098	38		24	35	20	10.1	3.7	13.1	17
Aleación 7075-T6	0.101	83		48	73		10.4	4	13.1	11
Cobre										
Cobre libre de oxígeno										
(99.9% Cu)										
Recocido	0.322	32		22	10		17	6.4	9.4	45
Endurecido	0.322	57		29	53		17	6.4	9.4	4
Latón amarillo										
(65% Cu, 35% Zn)										
Laminado en frío	0.306	74		43	60	36	15	5.6	11.6	8
Recocido	0.306	46		32	15	9	15	5.6	11.6	65
Latón rojo										
(85% Cu, 15% Zn)										
Laminado en frío	0.316	85		46	63		17	6.4	10.4	3
Recocido	0.316	39		31	10		17	6.4	10.4	48
Estaño bronce	0.318	45			21		14		10	30
(88 Cu, 8Sn, 4Zn)										
Manganeso bronce	0.302	95			48		15		12	20
(63 Cu, 25 Zn, 6 Al, 3 Mn, 3 Fe)										
Aluminio bronce	0.301	90	130		40		16	6.1	9	6
(81 Cu, 4 Ni, 4 Fe, 11 Al)										

(*La tabla continúa en la página AP-12*)

Apéndice B Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería[1,5]

(Unidades del SI)

		Resistencia última			Resistencia a la cedencia[3]					
Material	Densidad kg/m^3	Tensión, MPa	Compre-sión,[2] MPa	Cortante, MPa	Tensión, MPa	Cortante, MPa	Módulo de elasticidad, GPa	Módulo de rigidez, GPa	Coeficiente de expansión térmica, 10^{-6}/°C	Ductilidad, porcentaje de elongación en 50 mm
Acero										
Estructural (ASTM-A36)	7 860	400			250	145	200	77.2	11.7	21
Alta resistencia-baja aleación										
ASTM-A709 Grado 345	7 860	450			345		200	77.2	11.7	21
ASTM-A913 Grado 450	7 860	550			450		200	77.2	11.7	17
ASTM-A992 Grado 345	7 860	450			345		200	77.2	11.7	21
Templado										
ASTM-A709 Grado 690	7 860	760			690		200	77.2	11.7	18
Inoxidable, AISI 302										
Laminado en frío	7 920	860			520		190	75	17.3	12
Recocido	7 920	655			260	150	190	75	17.3	50
Acero de refuerzo										
Resistencia media	7 860	480			275		200	77	11.7	
Alta resistencia	7 860	620			415		200	77	11.7	
Hierro fundido										
Hierro fundido gris										
4.5% C, ASTM A-48	7 200	170	655	240			69	28	12.1	0.5
Hierro fundido maleable										
2% C, 1% Si,										
ASTM A-47	7 300	345	620	330	230		165	65	12.1	10
Aluminio										
Aleación 1100-H14										
(99% Al)	2 710	110		70	95	55	70	26	23.6	9
Aleación 2014-T6	2 800	455		275	400	230	75	27	23.0	13
Aleación 2024-T4	2 800	470		280	325		73		23.2	19
Aleación 5456-H116	2 630	315		185	230	130	72		23.9	16
Aleación 6061-T6	2 710	260		165	240	140	70	26	23.6	17
Aleación 7075-T6	2 800	570		330	500		72	28	23.6	11
Cobre										
Cobre libre de oxígeno										
(99.9% Cu)										
Recocido	8 910	220		150	70		120	44	16.9	45
Endurecido	8 910	390		200	265		120	44	16.9	4
Latón amarillo										
(65% Cu, 35% Zn)										
Laminado en frío	8 470	510		300	410	250	105	39	20.9	8
Recocido	8 470	320		220	100	60	105	39	20.9	65
Latón rojo										
(85% Cu, 15% Zn)										
Laminado en frío	8 740	585		320	435		120	44	18.7	3
Recocido	8 740	270		210	70		120	44	18.7	48
Estaño bronce	8 800	310			145		95		18.0	30
(88 Cu, 8Sn, 4Zn)										
Manganeso bronce	8 360	655			330		105		21.6	20
(63 Cu, 25 Zn, 6 Al, 3 Mn, 3 Fe)										
Aluminio bronce	8 330	620	900		275		110	42	16.2	6
(81 Cu, 4 Ni, 4 Fe, 11 Al)										

(*La tabla continúa en la página AP-13*)

Apéndice B Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería[1,5]

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Material	Peso específico, lb/in^3	Resistencia última: Tensión, ksi	Resistencia última: Compresión,[2] ksi	Resistencia última: Cortante, ksi	Resistencia a la cedencia[3]: Tensión, ksi	Resistencia a la cedencia[3]: Cortante, ksi	Módulo de elasticidad, 10^6 psi	Módulo de rigidez, 10^6 psi	Coeficiente de expansión térmica, 10^{-6}/°F	Ductilidad, porcentaje de elongación en 2 in
Aleaciones de magnesio										
Aleación AZ80 (Forjado)	0.065	50		23	36		6.5	2.4	14	6
Aleación AZ31 (Extrusión)	0.064	37		19	29		6.5	2.4	14	12
Titanio										
Aleación (6% Al, 4% V)	0.161	130			120		16.5		5.3	10
Aleación monel 400(Ni-Cu)										
Trabajada en frío	0.319	98			85	50	26		7.7	22
Recocida	0.319	80			32	18	26		7.7	46
Cuproníquel (90% Cu, 10% Ni)										
Recocido	0.323	53			16		20	7.5	9.5	35
Trabajado en frío	0.323	85			79		20	7.5	9.5	3
Madera, secada al aire										
Pino-Douglas	0.017	15	7.2	1.1			1.9	.1	Varía	
Abeto, Sitka	0.015	8.6	5.6	1.1			1.5	.07	1.7 a 2.5	
Pino de hoja corta	0.018		7.3	1.4			1.7			
Pino blanco	0.014		5.0	1.0			1.5			
Pino ponderosa	0.015	8.4	5.3	1.1			1.3			
Roble blanco	0.025		7.4	2.0			1.8			
Roble rojo	0.024		6.8	1.8			1.8			
Cicuta occidental	0.016	13	7.2	1.3			1.6			
Nogal de corteza fibrosa	0.026		9.2	2.4			2.2			
Secoya	0.015	9.4	6.1	0.9			1.3			
Concreto										
Resistencia media	0.084		4.0				3.6		5.5	
Alta resistencia	0.084		6.0				4.5		5.5	
Plásticos										
Nailon, tipo 6/6, (compuesto moldeado)	0.0412	11	14		6.5		0.4		80	50
Policarbonato	0.0433	9.5	12.5		9		0.35		68	110
Poliéster, PBT (termoplástico)	0.0484	8	11		8		0.35		75	150
Poliéster elastomérico	0.0433	6.5		5.5			0.03			500
Poliestireno	0.0374	8	13		8		0.45		70	2
Vinilo, PVC rígido	0.0520	6	10		6.5		0.45		75	40
Caucho	0.033	2							90	600
Granito (promedio)	0.100	3	35	5			10	4	4	
Mármol (promedio)	0.100	2	18	4			8	3	6	
Arenisca (promedio)	0.083	1	12	2			6	2	5	
Cristal, 98% de sílice	0.079		7				9.6	4.1	44	

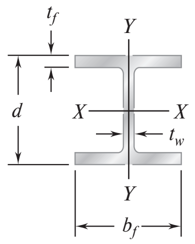
[1] Las propiedades de los metales varían ampliamente con la composición, el tratamiento térmico y el trabajado mecánico.
[2] Para materiales dúctiles la resistencia a compresión se supone igual a la resistencia a tensión.
[3] Sesgo de 0.2%.
[4] Las propiedades de la madera son para carga paralela a la fibra.
[5] Vea también *Marks' Mechanical Engineering Handbook*, 10a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1996; *Annual Book of ASTM*, American Society for Testing Materials, Philadelphia, Pa.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Metals Park, Ohio; y *Aluminum Design Manual*, The Aluminum Association, Washington, D.C.

Apéndice B Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería[1,5]

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Material	Densidad kg/m³	Resistencia última			Resistencia a la cedencia[3]		Módulo de elasticidad, GPa	Módulo de rigidez, GPa	Coeficiente de expansión térmica, $10^{-6}/°C$	Ductilidad, porcentaje de elongación en 50 mm
		Tensión, MPa	Compre-sión,[2] MPa	Cortante, MPa	Tensión, MPa	Cortante, MPa				
Aleaciones de magnesio										
Aleación AZ80 (Forjado)	1 800	345		160	250		45	16	25.2	6
Aleación AZ31 (Extrusión)	1 770	255		130	200		45	16	25.2	12
Titanio										
Aleación (6% Al, 4% V)	4 730	900			830		115		9.5	10
Aleación monel 400(Ni-Cu)										
Trabajada en frío	8 830	675			585	345	180		13.9	22
Recocida	8 830	550			220	125	180		13.9	46
Cuproníquel (90% Cu, 10% Ni)										
Recocido	8 940	365			110		140	52	17.1	35
Trabajado en frío	8 940	585			545		140	52	17.1	3
Madera, secada al aire										
Pino-Douglas	470	100	50	7.6			13	0.7	Varía	
Abeto, Sitka	415	60	39	7.6			10	0.5	3.0 a 4.5	
Pino de hoja corta	500		50	9.7			12			
Pino blanco	390		34	7.0			10			
Pino ponderosa	415	55	36	7.6			9			
Roble blanco	690		51	13.8			12			
Roble rojo	660		47	12.4			12			
Cicuta occidental	440	90	50	10.0			11			
Nogal de corteza fibrosa	720		63	16.5			15			
Secoya	415	65	42	6.2			9			
Concreto										
Resistencia media	2 320		28				25		9.9	
Alta resistencia	2 320		40				30		9.9	
Plásticos										
Nailon, tipo 6/6, (compuesto moldeado)	1 140	75	95		45		2.8		144	50
Policarbonato	1 200	65	85		35		2.4		122	110
Poliéster, PBT (termoplástico)	1 340	55	75		55		2.4		135	150
Poliéster elastomérico	1 200	45		40			0.2			500
Poliestireno	1 030	55	90		55		3.1		125	2
Vinilo, PVC rígido	1 440	40	70		45		3.1		135	40
Caucho	910	15							162	600
Granito (promedio)	2 770	20	240	35			70	4	7.2	
Mármol (promedio)	2 770	15	125	28			55	3	10.8	
Arenisca (promedio)	2 300	7	85	14			40	2	9.0	
Cristal, 98% de sílice	2 190		50				65	4.1	80	

[1] Las propiedades de los metales varían ampliamente con la composición, el tratamiento térmico y el trabajado mecánico.
[2] Para metales dúctiles la resistencia a compresión se supone igual a la resistencia a tensión.
[3] Sesgo de 0.2%.
[4] Las propiedades de la madera son para carga paralela a la fibra.
[5] Vea también *Marks' Mechanical Engineering Handbook*, 10a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1996; *Annual Book of ASTM*, American Society for Testing Materials, Philadelphia, Pa.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Metals Park, Ohio; y *Aluminum Design Manual*, The Aluminum Association, Washington, D.C.



Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Perfiles W

(Perfiles de patín ancho)

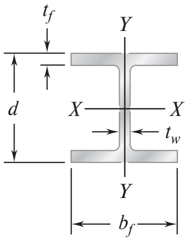
			Aleta								
					Espesor del alma	Eje X-X			Eje Y-Y		
Designación†	Área A, in^2	Altura d, in	Ancho b_f, in	Espesor t_f, in	t_w, in	I_x, in^4	S_x, in^3	r_x, in	I_y, in^4	S_y, in^3	r_y, in
W36 × 302	88.8	37.3	16.7	1.68	0.945	21 100	1 130	15.4	1 300	156	3.82
135	39.7	35.6	12.0	0.790	0.600	7 800	439	14.0	225	37.7	2.38
W33 × 201	59.2	33.7	15.7	1.15	0.715	11 600	686	14.0	749	95.2	3.56
118	34.7	32.9	11.5	0.740	0.550	5 900	359	13.0	187	32.6	2.32
W30 × 173	51.0	30.4	15.0	1.07	0.655	8 230	541	12.7	598	79.8	3.42
99	29.1	29.7	10.50	0.670	0.520	3 990	269	11.7	128	24.5	2.10
W27 × 146	43.1	27.4	14.0	0.975	0.605	5 660	414	11.5	443	63.5	3.20
84	24.8	26.70	10.0	0.640	0.460	2 850	213	10.7	106	21.2	2.07
W24 × 104	30.6	24.1	12.8	0.750	0.500	3 100	258	10.1	259	40.7	2.91
68	20.1	23.7	8.97	0.585	0.415	1 830	154	9.55	70.4	15.7	1.87
W21 × 101	29.8	21.4	12.3	0.800	0.500	2 420	227	9.02	248	40.3	2.89
62	18.3	21.0	8.24	0.615	0.400	1 330	127	8.54	57.5	14.0	1.77
44	13.0	20.7	6.50	0.450	0.350	843	81.6	8.06	20.7	6.37	1.26
W18 × 106	31.1	18.7	11.2	0.940	0.590	1 910	204	7.84	220	39.4	2.66
76	22.3	18.2	11.0	0.680	0.425	1 330	146	7.73	152	27.6	2.61
50	14.7	18.0	7.50	0.570	0.355	800	88.9	7.38	40.1	10.7	1.65
35	10.3	17.7	6.00	0.425	0.300	510	57.6	7.04	15.3	5.12	1.22
W16 × 77	22.6	16.5	10.3	0.760	0.455	1 110	134	7.00	138	26.9	2.47
57	16.8	16.4	7.12	0.715	0.430	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
40	11.8	16.0	7.00	0.505	0.305	518	64.7	6.63	28.9	8.25	1.57
31	9.13	15.9	5.53	0.440	0.275	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
26	7.68	15.7	5.50	0.345	0.250	301	38.4	6.26	9.59	3.49	1.12
W14 × 370	109	17.9	16.5	2.66	1.66	5 440	607	7.07	1 990	241	4.27
145	42.7	14.8	15.5	1.09	0.680	1 710	232	6.33	677	87.3	3.98
82	24.0	14.3	10.1	0.855	0.510	881	123	6.05	148	29.3	2.48
68	20.0	14.0	10.0	0.720	0.415	722	103	6.01	121	24.2	2.46
53	15.6	13.9	8.06	0.660	0.370	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
43	12.6	13.7	8.00	0.530	0.305	428	62.6	5.82	45.2	11.3	1.89
38	11.2	14.1	6.77	0.515	0.310	385	54.6	5.87	26.7	7.88	1.55
30	8.85	13.8	6.73	0.385	0.270	291	42.0	5.73	19.6	5.82	1.49
26	7.69	13.9	5.03	0.420	0.255	245	35.3	5.65	8.91	3.55	1.08
22	6.49	13.7	5.00	0.335	0.230	199	29.0	5.54	7.00	2.80	1.04

† Un perfil de patín ancho se designa con la letra W seguida de la altura nominal in y el peso en libras por pie.

(*La tabla continúa en la página AP-16*)

Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)



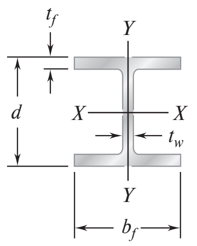
Perfiles W

(Perfiles de patín ancho)

			Aleta			Eje X-X			Eje Y-Y		
Designación†	Área A, in^2	Altura d, in	Ancho b_f, in	Espesor t_f, in	Espesor del alma t_w, in	I_x, in^4	S_x, in^3	r_x, in	I_y, in^4	S_y, in^3	r_y, in
W920 × 44957300	947	424	42.7	24.0	8 780	18 500	391	541	2 560	97.0	
201	25 600	904	305	20.1	15.2	3 250	7 190	356	93.7	618	60.5
W840 × 29938200	856	399	29.2	18.2	4 830	11 200	356	312	1 560	90.4	
176	22 400	836	292	18.8	14.0	2 460	5 880	330	77.8	534	58.9
W760 × 25732900	772	381	27.2	16.6	3 430	8 870	323	249	1 310	86.9	
147	18 800	754	267	17.0	13.2	1 660	4 410	297	53.3	401	53.3
W690 × 21727800	696	356	24.8	15.4	2 360	6 780	292	184	1 040	81.3	
125	16 000	678	254	16.3	11.7	1 190	3 490	272	44.1	347	52.6
W610 × 15519700	612	325	19.1	12.7	1 290	4 230	257	108	667	73.9	
10113000	602	228	14.9	10.5	762	2 520	243	29.3	257	47.5	
W530 × 15019200	544	312	20.3	12.7	1 010	3 720	229	103	660	73.4	
92	11 800	533	209	15.6	10.2	554	2 080	217	23.9	229	45.0
66	8 390	526	165	11.4	8.89	351	1 340	205	8.62	104	32.0
W460 × 15820100	475	284	23.9	15.0	795	3 340	199	91.6	646	67.6	
113	14 400	462	279	17.3	10.8	554	2 390	196	63.3	452	66.3
74	9 480	457	191	14.5	9.02	333	1 460	187	16.7	175	41.9
52	6 650	450	152	10.8	7.62	212	944	179	6.37	83.9	31.0
W410 × 11414600	419	262	19.3	11.6	462	2 200	178	57.4	441	62.7	
85	10 800	417	181	18.2	10.9	316	1 510	171	17.9	198	40.6
60	7 610	406	178	12.8	7.75	216	1 060	168	12.0	135	39.9
46.1	5 890	404	140	11.2	6.99	156	773	163	5.16	73.6	29.7
38.8	4 950	399	140	8.76	6.35	125	629	159	3.99	57.2	28.4
W360 × 55170300	455	419	67.6	42.2	2 260	9 950	180	828	3 950	108	
216	27 500	376	394	27.7	17.3	712	3 800	161	282	1 430	101
122	15 500	363	257	21.7	13.0	367	2 020	154	61.6	480	63.0
101	12 900	356	254	18.3	10.5	301	1 690	153	50.4	397	62.5
79	10 100	353	205	16.8	9.40	225	1 270	150	24.0	234	48.8
64	8 130	348	203	13.5	7.75	178	1 030	148	18.8	185	48.0
57.8	7 230	358	172	13.1	7.87	160	895	149	11.1	129	39.4
44	5 710	351	171	9.78	6.86	121	688	146	8.16	95.4	37.8
39	4 960	353	128	10.7	6.48	102	578	144	3.71	58.2	27.4
32.9	4 190	348	127	8.51	5.84	82.8	475	141	2.91	45.9	26.4

† Un perfil de patín ancho se designa con la letra W seguida de la altura nominal en milímetros y la masa en kilogramos por metro.

(*La tabla continúa en la página AP-17*)



Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Perfiles W

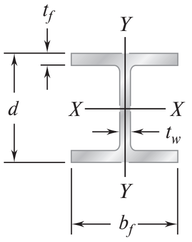
(Perfiles de patín ancho)

			Aleta			Eje *X-X*			Eje *Y-Y*		
Designación†	Área A, in^2	Altura d, in	Ancho b_f, in	Espesor t_f, in	Espesor del alma t_w, in	I_x, in^4	S_x, in^3	r_x, in	I_y, in^4	S_y, in^3	r_y, in
W12 × 96	28.2	12.7	12.2	0.900	0.550	833	131	5.44	270	44.4	3.09
72	21.1	12.3	12.0	0.670	0.430	597	97.4	5.31	195	32.4	3.04
50	14.6	12.2	8.08	0.640	0.370	391	64.2	5.18	56.3	13.9	1.96
40	11.7	11.9	8.01	0.515	0.295	307	51.5	5.13	44.1	11.0	1.94
35	10.3	12.5	6.56	0.520	0.300	285	45.6	5.25	24.5	7.47	1.54
30	8.79	12.3	6.52	0.440	0.260	238	38.6	5.21	20.3	6.24	1.52
26	7.65	12.2	6.49	0.380	0.230	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51
22	6.48	12.3	4.03	0.425	0.260	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.848
16	4.71	12.0	3.99	0.265	0.220	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.773
W10 × 112	32.9	11.4	10.4	1.25	0.755	716	126	4.66	236	45.3	2.68
68	20.0	10.4	10.1	0.770	0.470	394	75.7	4.44	134	26.4	2.59
54	15.8	10.1	10.0	0.615	0.370	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56
45	13.3	10.1	8.02	0.620	0.350	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
39	11.5	9.92	7.99	0.530	0.315	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98
33	9.71	9.73	7.96	0.435	0.290	171	35.0	4.19	36.6	9.20	1.94
30	8.84	10.5	5.81	0.510	0.300	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
22	6.49	10.2	5.75	0.360	0.240	118	23.2	4.27	11.4	3.97	1.33
19	5.62	10.2	4.02	0.395	0.250	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874
15	4.41	10.0	4.00	0.270	0.230	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810
W8 × 58	17.1	8.75	8.22	0.810	0.510	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10
48	14.1	8.50	8.11	0.685	0.400	184	43.2	3.61	60.9	15.0	2.08
40	11.7	8.25	8.07	0.560	0.360	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04
35	10.3	8.12	8.02	0.495	0.310	127	31.2	3.51	42.6	10.6	2.03
31	9.12	8.00	8.00	0.435	0.285	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02
28	8.24	8.06	6.54	0.465	0.285	98.0	24.3	3.45	21.7	6.63	1.62
24	7.08	7.93	6.50	0.400	0.245	82.7	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61
21	6.16	8.28	5.27	0.400	0.250	75.3	18.2	3.49	9.77	3.71	1.26
18	5.26	8.14	5.25	0.330	0.230	61.9	15.2	3.43	7.97	3.04	1.23
15	4.44	8.11	4.01	0.315	0.245	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876
13	3.84	7.99	4.00	0.255	0.230	39.6	9.91	3.21	2.73	1.37	0.843
W6 × 25	7.34	6.38	6.08	0.455	0.320	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52
20	5.87	6.20	6.02	0.365	0.260	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50
16	4.74	6.28	4.03	0.405	0.260	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.967
12	3.55	6.03	4.00	0.280	0.230	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918
9	2.68	5.90	3.94	0.215	0.170	16.4	5.56	2.47	2.20	1.11	0.905
W5 × 19	5.56	5.15	5.03	0.430	0.270	26.3	10.2	2.17	9.13	3.63	1.28
16	4.71	5.01	5.00	0.360	0.240	21.4	8.55	2.13	7.51	3.00	1.26
W4 × 13	3.83	4.16	4.06	0.345	0.280	11.3	5.46	1.72	3.86	1.90	1.00

† Un perfil de patín ancho se designa con la letra W seguida de la altura nominal in y el peso en libras por pie.

Apéndice C   Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

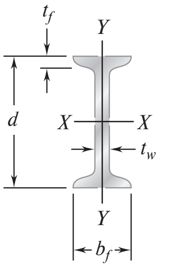


Perfiles W

(Perfiles de patín ancho)

			Aleta			Eje *X-X*			Eje *Y-Y*		
Designación[†]	Área A, in^2	Altura d, in	Ancho b_f, in	Espesor t_f, in	Espesor del alma t_w, in	I_x, in^4	S_x, in^3	r_x, in	I_y, in^4	S_y, in^3	r_y, in
W310 × 143	18 200	323	310	22.9	14.0	347	2150	138	112	728	78.5
107	13 600	312	305	17.0	10.9	248	1600	135	81.2	531	77.2
74	9 420	310	205	16.3	9.40	163	1050	132	23.4	228	49.8
60	7 550	302	203	13.1	7.49	128	844	130	18.4	180	49.3
52	6 650	318	167	13.2	7.62	119	747	133	10.2	122	39.1
44.5	5 670	312	166	11.2	6.60	99.1	633	132	8.45	102	38.6
38.7	4 940	310	165	9.65	5.84	84.9	547	131	7.20	87.5	38.4
32.7	4 180	312	102	10.8	6.60	64.9	416	125	1.94	37.9	21.5
23.8	3 040	305	101	6.73	5.59	42.9	280	119	1.17	23.1	19.6
W250 × 167	21 200	290	264	31.8	19.2	298	2060	118	98.2	742	68.1
101	12 900	264	257	19.6	11.9	164	1240	113	55.8	433	65.8
80	10 200	257	254	15.6	9.4	126	983	111	42.9	338	65.0
67	8 580	257	204	15.7	8.89	103	805	110	22.2	218	51.1
58	7 420	252	203	13.5	8.00	87.0	690	108	18.7	185	50.3
49.1	6 260	247	202	11.0	7.37	71.2	574	106	15.2	151	49.3
44.8	5 700	267	148	13.0	7.62	70.8	531	111	6.95	94.2	34.8
32.7	4 190	259	146	9.14	6.10	49.1	380	108	4.75	65.1	33.8
28.4	3 630	259	102	10.0	6.35	40.1	308	105	1.79	35.1	22.2
22.3	2 850	254	102	6.86	5.84	28.7	226	100	1.20	23.8	20.6
W200 × 86	11 000	222	209	20.6	13.0	94.9	852	92.7	31.3	300	53.3
71	9 100	216	206	17.4	10.2	76.6	708	91.7	25.3	246	52.8
59	7 550	210	205	14.2	9.14	60.8	582	89.7	20.4	200	51.8
52	6 650	206	204	12.6	7.87	52.9	511	89.2	17.7	174	51.6
46.1	5 880	203	203	11.0	7.24	45.8	451	88.1	15.4	152	51.3
41.7	5 320	205	166	11.8	7.24	40.8	398	87.6	9.03	109	41.1
35.9	4 570	201	165	10.2	6.22	34.4	342	86.9	7.62	92.3	40.9
31.3	3 970	210	134	10.2	6.35	31.3	298	88.6	4.07	60.8	32.0
26.6	3 390	207	133	8.38	5.84	25.8	249	87.1	3.32	49.8	31.2
22.5	2 860	206	102	8.00	6.22	20.0	193	83.6	1.42	27.9	22.3
19.3	2 480	203	102	6.48	5.84	16.5	162	81.5	1.14	22.5	21.4
W150 × 37.1	4 740	162	154	11.6	8.13	22.2	274	68.6	7.12	91.9	38.6
29.8	3 790	157	153	9.27	6.60	17.2	220	67.6	5.54	72.3	38.1
24	3 060	160	102	10.3	6.60	13.4	167	66.0	1.84	36.1	24.6
18	2 290	153	102	7.11	5.84	9.20	120	63.2	1.24	24.6	23.3
13.5	1 730	150	100	5.46	4.32	6.83	91.1	62.7	0.916	18.2	23.0
W130 × 28.1	3 590	131	128	10.9	6.86	10.9	167	55.1	3.80	59.5	32.5
23.8	3 040	127	127	9.14	6.10	8.91	140	54.1	3.13	49.2	32.0
W100 × 19.3	2 470	106	103	8.76	7.11	4.70	89.5	43.7	1.61	31.1	25.4

[†] Un perfil de patín ancho se designa con la letra W seguida de la altura nominal en milímetros y la masa en kilogramos por metro.



Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

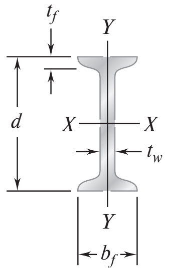
(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Perfiles S

(Perfiles del estándar americano)

			Aleta		Espesor del alma	Eje X-X			Eje Y-Y		
Designación†	Área A, in^2	Altura d, in	Ancho b_f, in	Espesor t_f, in	t_w, in	I_x, in^4	S_x, in^3	r_x, in	I_y, in^4	S_y, in^3	r_y, in
S24 × 121	35.5	24.5	8.05	1.09	0.800	3160	258	9.43	83.0	20.6	1.53
106	31.1	24.5	7.87	1.09	0.620	2940	240	9.71	76.8	19.5	1.57
100	29.3	24.0	7.25	0.870	0.745	2380	199	9.01	47.4	13.1	1.27
90	26.5	24.0	7.13	0.870	0.625	2250	187	9.21	44.7	12.5	1.30
80	23.5	24.0	7.00	0.870	0.500	2100	175	9.47	42.0	12.0	1.34
S20 × 96	28.2	20.3	7.20	0.920	0.800	1670	165	7.71	49.9	13.9	1.33
86	25.3	20.3	7.06	0.920	0.660	1570	155	7.89	46.6	13.2	1.36
75	22.0	20.0	6.39	0.795	0.635	1280	128	7.62	29.5	9.25	1.16
66	19.4	20.0	6.26	0.795	0.505	1190	119	7.83	27.5	8.78	1.19
S18 × 70	20.5	18.0	6.25	0.691	0.711	923	103	6.70	24.0	7.69	1.08
54.7	16.0	18.0	6.00	0.691	0.461	801	89.0	7.07	20.7	6.91	1.14
S15 × 50	14.7	15.0	5.64	0.622	0.550	485	64.7	5.75	15.6	5.53	1.03
42.9	12.6	15.0	5.50	0.622	0.411	446	59.4	5.95	14.3	5.19	1.06
S12 × 50	14.6	12.0	5.48	0.659	0.687	303	50.6	4.55	15.6	5.69	1.03
40.8	11.9	12.0	5.25	0.659	0.462	270	45.1	4.76	13.5	5.13	1.06
35	10.2	12.0	5.08	0.544	0.428	228	38.1	4.72	9.84	3.88	0.980
31.8	9.31	12.0	5.00	0.544	0.350	217	36.2	4.83	9.33	3.73	1.00
S10 × 35	10.3	10.0	4.94	0.491	0.594	147	29.4	3.78	8.30	3.36	0.899
25.4	7.45	10.0	4.66	0.491	0.311	123	24.6	4.07	6.73	2.89	0.950
S8 × 23	6.76	8.00	4.17	0.425	0.441	64.7	16.2	3.09	4.27	2.05	0.795
18.4	5.40	8.00	4.00	0.425	0.271	57.5	14.4	3.26	3.69	1.84	0.827
S6 × 17.2	5.06	6.00	3.57	0.359	0.465	26.2	8.74	2.28	2.29	1.28	0.673
12.5	3.66	6.00	3.33	0.359	0.232	22.0	7.34	2.45	1.80	1.08	0.702
S5 × 10	2.93	5.00	3.00	0.326	0.214	12.3	4.90	2.05	1.19	0.795	0.638
S4 × 9.5	2.79	4.00	2.80	0.293	0.326	6.76	3.38	1.56	0.887	0.635	0.564
7.7	2.26	4.00	2.66	0.293	0.193	6.05	3.03	1.64	0.748	0.562	0.576
S3 × 7.5	2.20	3.00	2.51	0.260	0.349	2.91	1.94	1.15	0.578	0.461	0.513
5.7	1.66	3.00	2.33	0.260	0.170	2.50	1.67	1.23	0.447	0.383	0.518

† Una viga del estándar americano se designa con la letra S seguida de la altura nominal en pulgadas y el peso en libras por pie.



Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Perfiles S

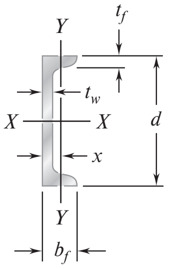
(Perfiles del estándar americano)

			Aleta			Eje X-X			Eje Y-Y		
Designación[†]	Área A, in^2	Altura d, in	Ancho b_f, in	Espesor t_f, in	Espesor del alma t_w, in	I_x, in^4	S_x, in^3	r_x, in	I_y, in^4	S_y, in^3	r_y, in
S610 × 180	22 900	622	204	27.7	20.3	1320	4 230	240	34.5	338	38.9
158	20 100	622	200	27.7	15.7	1220	3 930	247	32.0	320	39.9
149	18 900	610	184	22.1	18.9	991	3 260	229	19.7	215	32.3
134	17 100	610	181	22.1	15.9	937	3 060	234	18.6	205	33.0
119	15 200	610	178	22.1	12.7	874	2 870	241	17.5	197	34.0
S510 × 143	18 200	516	183	23.4	20.3	695	2 700	196	20.8	228	33.8
128	16 300	516	179	23.4	16.8	653	2 540	200	19.4	216	34.5
112	14 200	508	162	20.2	16.1	533	2 100	194	12.3	152	29.5
98.2	12 500	508	159	20.2	12.8	495	1 950	199	11.4	144	30.2
S460 × 104	13 200	457	159	17.6	18.1	384	1 690	170	10.0	126	27.4
81.4	10 300	457	152	17.6	11.7	333	1 460	180	8.62	113	29.0
S380 × 74	9 480	381	143	15.8	14.0	202	1 060	146	6.49	90.6	26.2
64	8 130	381	140	15.8	10.4	186	973	151	5.95	85.0	26.9
S310 × 74	9 420	305	139	16.7	17.4	126	829	116	6.49	93.2	26.2
60.7	7 680	305	133	16.7	11.7	112	739	121	5.62	84.1	26.9
52	6 580	305	129	13.8	10.9	94.9	624	120	4.10	63.6	24.9
47.3	6 010	305	127	13.8	8.89	90.3	593	123	3.88	61.1	25.4
S250 × 52	6 650	254	125	12.5	15.1	61.2	482	96.0	3.45	55.1	22.8
37.8	4 810	254	118	12.5	7.90	51.2	403	103	2.80	47.4	24.1
S200 × 34	4 360	203	106	10.8	11.2	26.9	265	78.5	1.78	33.6	20.2
27.4	3 480	203	102	10.8	6.88	23.9	236	82.8	1.54	30.2	21.0
S150 × 25.7	3 260	152	90.7	9.12	11.8	10.9	143	57.9	0.953	21.0	17.1
18.6	2 360	152	84.6	9.12	5.89	9.16	120	62.2	0.749	17.7	17.8
S130 × 15	1 890	127	76.2	8.28	5.44	5.12	80.3	52.1	0.495	13.0	16.2
S100 × 14.1	1 800	102	71.1	7.44	8.28	2.81	55.4	39.6	0.369	10.4	14.3
11.5	1 460	102	67.6	7.44	4.90	2.52	49.7	41.7	0.311	9.21	14.6
S75 × 11.2	1 420	76.2	63.8	6.60	8.86	1.21	31.8	29.2	0.241	7.55	13.0
8.5	1 070	76.2	59.2	6.60	4.32	1.04	27.4	31.2	0.186	6.28	13.2

† Una viga del estándar americano se designa con la letra S seguida de la altura nominal en milímetros y la masa en kilogramos por metro.

Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)



Perfiles C

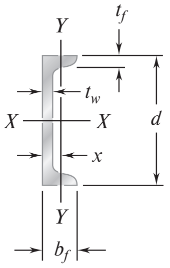
(Canales del estándar americano)

			Aleta			Eje X-X			Eje Y-Y			
Designación†	Área A, in^2	Altura d, in	Ancho b_f, in	Espesor t_f, in	Espesor del alma t_w, in	I_x, in^4	S_x, in^3	r_x, in	I_y, in^4	S_y, in^3	r_y, in.	x, in
C15 × 50	14.7	15.0	3.72	0.650	0.716	404	53.8	5.24	11.0	3.77	0.865	0.799
40	11.8	15.0	3.52	0.650	0.520	348	46.5	5.45	9.17	3.34	0.883	0.778
33.9	10.0	15.0	3.40	0.650	0.400	315	42.0	5.62	8.07	3.09	0.901	0.788
C12 × 30	8.81	12.0	3.17	0.501	0.510	162	27.0	4.29	5.12	2.05	0.762	0.674
25	7.34	12.0	3.05	0.501	0.387	144	24.0	4.43	4.45	1.87	0.779	0.674
20.7	6.08	12.0	2.94	0.501	0.282	129	21.5	4.61	3.86	1.72	0.797	0.698
C10 × 30	8.81	10.0	3.03	0.436	0.673	103	20.7	3.42	3.93	1.65	0.668	0.649
25	7.34	10.0	2.89	0.436	0.526	91.1	18.2	3.52	3.34	1.47	0.675	0.617
20	5.87	10.0	2.74	0.436	0.379	78.9	15.8	3.66	2.80	1.31	0.690	0.606
15.3	4.48	10.0	2.60	0.436	0.240	67.3	13.5	3.87	2.27	1.15	0.711	0.634
C9 × 20	5.87	9.00	2.65	0.413	0.448	60.9	13.5	3.22	2.41	1.17	0.640	0.583
15	4.41	9.00	2.49	0.413	0.285	51.0	11.3	3.40	1.91	1.01	0.659	0.586
13.4	3.94	9.00	2.43	0.413	0.233	47.8	10.6	3.49	1.75	0.954	0.666	0.601
C8 × 18.7	5.51	8.00	2.53	0.390	0.487	43.9	11.0	2.82	1.97	1.01	0.598	0.565
13.7	4.04	8.00	2.34	0.390	0.303	36.1	9.02	2.99	1.52	0.848	0.613	0.554
11.5	3.37	8.00	2.26	0.390	0.220	32.5	8.14	3.11	1.31	0.775	0.623	0.572
C7 × 12.2	3.60	7.00	2.19	0.366	0.314	24.2	6.92	2.60	1.16	0.696	0.568	0.525
9.8	2.87	7.00	2.09	0.366	0.210	21.2	6.07	2.72	0.957	0.617	0.578	0.541
C6 × 13	3.81	6.00	2.16	0.343	0.437	17.3	5.78	2.13	1.05	0.638	0.524	0.514
10.5	3.08	6.00	2.03	0.343	0.314	15.1	5.04	2.22	0.860	0.561	0.529	0.500
8.2	2.39	6.00	1.92	0.343	0.200	13.1	4.35	2.34	0.687	0.488	0.536	0.512
C5 × 9	2.64	5.00	1.89	0.320	0.325	8.89	3.56	1.83	0.624	0.444	0.486	0.478
6.7	1.97	5.00	1.75	0.320	0.190	7.48	2.99	1.95	0.470	0.372	0.489	0.484
C4 × 7.2	2.13	4.00	1.72	0.296	0.321	4.58	2.29	1.47	0.425	0.337	0.447	0.459
5.4	1.58	4.00	1.58	0.296	0.184	3.85	1.92	1.56	0.312	0.277	0.444	0.457
C3 × 6	1.76	3.00	1.60	0.273	0.356	2.07	1.38	1.08	0.300	0.263	0.413	0.455
5	1.47	3.00	1.50	0.273	0.258	1.85	1.23	1.12	0.241	0.228	0.405	0.439
4.1	1.20	3.00	1.41	0.273	0.170	1.65	1.10	1.17	0.191	0.196	0.398	0.437

† Un canal del estándar americano se designa con la letra C seguida de la altura nominal en pulgadas y el peso en libras por pie.

Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)



Perfiles C

(Canales del estándar americano)

			Aleta		Espesor del alma	Eje *X-X*			Eje *Y-Y*			
Designación†	Área A, in²	Altura d, in	Ancho b_f, in	Espesor t_f, in	t_w, in	I_x, in⁴	S_x, in³	r_x, in	I_y, in⁴	S_y, in³	r_y, in	x, in
C380 × 74	9 480	381	94.5	16.5	18.2	168	882	133	4.58	61.8	22.0	20.3
60	7 610	381	89.4	16.5	13.2	145	762	138	3.82	54.7	22.4	19.8
50.4	6 450	381	86.4	16.5	10.2	131	688	143	3.36	50.6	22.9	20.0
C310 × 45	5 680	305	80.5	12.7	13.0	67.4	442	109	2.13	33.6	19.4	17.1
37	4 740	305	77.5	12.7	9.83	59.9	393	113	1.85	30.6	19.8	17.1
30.8	3 920	305	74.7	12.7	7.16	53.7	352	117	1.61	28.2	20.2	17.7
C250 × 45	5 680	254	77.0	11.1	17.1	42.9	339	86.9	1.64	27.0	17.0	16.5
37	4 740	254	73.4	11.1	13.4	37.9	298	89.4	1.39	24.1	17.1	15.7
30	3 790	254	69.6	11.1	9.63	32.8	259	93.0	1.17	21.5	17.5	15.4
22.8	2 890	254	66.0	11.1	6.10	28.0	221	98.3	0.945	18.8	18.1	16.1
C230 × 30	3 790	229	67.3	10.5	11.4	25.3	221	81.8	1.00	19.2	16.3	14.8
22	2 850	229	63.2	10.5	7.24	21.2	185	86.4	0.795	16.6	16.7	14.9
19.9	2 540	229	61.7	10.5	5.92	19.9	174	88.6	0.728	15.6	16.9	15.3
C200 × 27.9	3 550	203	64.3	9.91	12.4	18.3	180	71.6	0.820	16.6	15.2	14.4
20.5	2 610	203	59.4	9.91	7.70	15.0	148	75.9	0.633	13.9	15.6	14.1
17.1	2 170	203	57.4	9.91	5.59	13.5	133	79.0	0.545	12.7	15.8	14.5
C180 × 18.2	2 320	178	55.6	9.30	7.98	10.1	113	66.0	0.483	11.4	14.4	13.3
14.6	1 850	178	53.1	9.30	5.33	8.82	100	69.1	0.398	10.1	14.7	13.7
C150 × 19.3	2 460	152	54.9	8.71	11.1	7.20	94.7	54.1	0.437	10.5	13.3	13.1
15.6	1 990	152	51.6	8.71	7.98	6.29	82.6	56.4	0.358	9.19	13.4	12.7
12.2	1 540	152	48.8	8.71	5.08	5.45	71.3	59.4	0.286	8.00	13.6	13.0
C130 × 13	1 700	127	48.0	8.13	8.26	3.70	58.3	46.5	0.260	7.28	12.3	12.1
10.4	1 270	127	44.5	8.13	4.83	3.11	49.0	49.5	0.196	6.10	12.4	12.3
C100 × 10.8	1 370	102	43.7	7.52	8.15	1.91	37.5	37.3	0.177	5.52	11.4	11.7
8	1 020	102	40.1	7.52	4.67	1.60	31.5	39.6	0.130	4.54	11.3	11.6
C75 × 8.9	1 140	76.2	40.6	6.93	9.04	0.862	22.6	27.4	0.125	4.31	10.5	11.6
7.4	948	76.2	38.1	6.93	6.55	0.770	20.2	28.4	0.100	3.74	10.3	11.2
6.1	774	76.2	35.8	6.93	4.32	0.687	18.0	29.7	0.0795	3.21	10.1	11.1

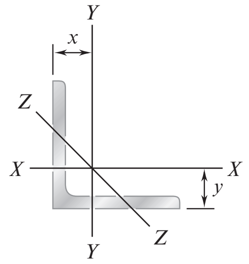
† Un canal del estándar americano se designa con la letra C seguida de la altura nominal en milímetros y la masa en kilogramos por metro.

Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Ángulos

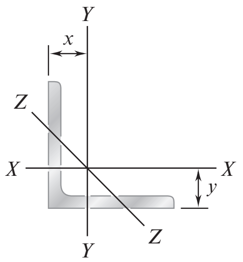
Patas iguales



Tamaño y espesor, in	Peso por pie, lb/ft	Área, in²	Eje X-X y eje Y-Y: I, in⁴	S, in³	r, in	x o y, in	Eje Z-Z: r_z, in
L8 × 8 × 1	51.0	15.0	89.1	15.8	2.43	2.36	1.56
¾	38.9	11.4	69.9	12.2	2.46	2.26	1.57
½	26.4	7.75	48.8	8.36	2.49	2.17	1.59
L6 × 6 × 1	37.4	11.0	35.4	8.55	1.79	1.86	1.17
¾	28.7	8.46	28.1	6.64	1.82	1.77	1.17
⅝	24.2	7.13	24.1	5.64	1.84	1.72	1.17
½	19.6	5.77	19.9	4.59	1.86	1.67	1.18
⅜	14.9	4.38	15.4	3.51	1.87	1.62	1.19
L5 × 5 × ¾	23.6	6.94	15.7	4.52	1.50	1.52	0.972
⅝	20.0	5.86	13.6	3.85	1.52	1.47	0.975
½	16.2	4.75	11.3	3.15	1.53	1.42	0.980
⅜	12.3	3.61	8.76	2.41	1.55	1.37	0.986
L4 × 4 × ¾	18.5	5.44	7.62	2.79	1.18	1.27	0.774
⅝	15.7	4.61	6.62	2.38	1.20	1.22	0.774
½	12.8	3.75	5.52	1.96	1.21	1.18	0.776
⅜	9.80	2.86	4.32	1.50	1.23	1.13	0.779
¼	6.60	1.94	3.00	1.03	1.25	1.08	0.783
L3½ × 3½ × ½	11.1	3.25	3.63	1.48	1.05	1.05	0.679
⅜	8.50	2.48	2.86	1.15	1.07	1.00	0.683
¼	5.80	1.69	2.00	0.787	1.09	0.954	0.688
L3 × 3 × ½	9.40	2.75	2.20	1.06	0.895	0.929	0.580
⅜	7.20	2.11	1.75	0.825	0.910	0.884	0.581
¼	4.90	1.44	1.23	0.569	0.926	0.836	0.585
L2½ × 2½ × ½	7.70	2.25	1.22	0.716	0.735	0.803	0.481
⅜	5.90	1.73	0.972	0.558	0.749	0.758	0.481
¼	4.10	1.19	0.692	0.387	0.764	0.711	0.482
3/16	3.07	0.900	0.535	0.295	0.771	0.687	0.482
L2 × 2 × ⅜	4.70	1.36	0.476	0.348	0.591	0.632	0.386
¼	3.19	0.938	0.346	0.244	0.605	0.586	0.387
⅛	1.65	0.484	0.189	0.129	0.620	0.534	0.391

Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)



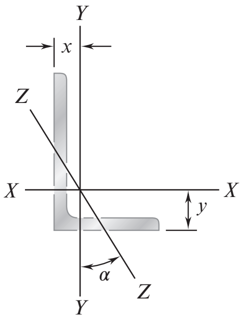
Ángulos

Patas iguales

Tamaño y espesor, mm	Masa por metro, kg/m	Área, mm^2	Eje X-X				Eje Z-Z
			I 10^6 mm^4	S 10^3 mm^3	r mm	x o y mm	r_z mm
L203 × 203 × 25.4	75.9	9 680	37.1	259	61.7	59.9	39.6
19	57.9	7 350	29.1	200	62.5	57.4	39.9
12.7	39.3	5 000	20.3	137	63.2	55.1	40.4
L152 × 152 × 25.4	55.7	7 100	14.7	140	45.5	47.2	29.7
19	42.7	5 460	11.7	109	46.2	45.0	29.7
15.9	36.0	4 600	10.0	92.4	46.7	43.7	29.7
12.7	29.2	3 720	8.28	75.2	47.2	42.4	30.0
9.5	22.2	2 830	6.41	57.5	47.5	41.1	30.2
L127 × 127 × 19	35.1	4 480	6.53	74.1	38.1	38.6	24.7
15.9	29.8	3 780	5.66	63.1	38.6	37.3	24.8
12.7	24.1	3 060	4.70	51.6	38.9	36.1	24.9
9.5	18.3	2 330	3.65	39.5	39.4	34.8	25.0
L102 × 102 × 19	27.5	3 510	3.17	45.7	30.0	32.3	19.7
15.9	23.4	2 970	2.76	39.0	30.5	31.0	19.7
12.7	19.0	2 420	2.30	32.1	30.7	30.0	19.7
9.5	14.6	1 850	1.80	24.6	31.2	28.7	19.8
6.4	9.80	1 250	1.25	16.9	31.8	27.4	19.9
L89 × 89 × 12.7	16.5	2 100	1.51	24.3	26.7	26.7	17.2
9.5	12.6	1 600	1.19	18.8	27.2	25.4	17.3
6.4	8.60	1 090	0.832	12.9	27.7	24.2	17.5
L76 × 76 × 12.7	14.0	1 770	0.916	17.4	22.7	23.6	14.7
9.5	10.7	1 360	0.728	13.5	23.1	22.5	14.8
6.4	7.30	929	0.512	9.32	23.5	21.2	14.9
L64 × 64 × 12.7	11.4	1 450	0.508	11.7	18.7	20.4	12.2
9.5	8.70	1 120	0.405	9.14	19.0	19.3	12.2
6.4	6.10	768	0.288	6.34	19.4	18.1	12.2
4.8	4.60	581	0.223	4.83	19.6	17.4	12.2
L51 × 51 × 9.5	7.00	877	0.198	5.70	15.0	16.1	9.80
6.4	4.70	605	0.144	4.00	15.4	14.9	9.83
3.2	2.40	312	0.0787	2.11	15.7	13.6	9.93

Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

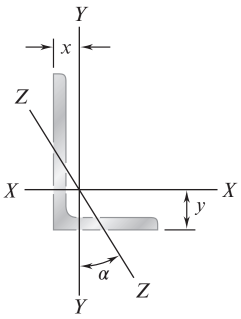
(Unidades utilizadas en Estados Unidos)



Ángulos

Patas desiguales

Tamaño y espesor, in	Peso por pie, lb/ft	Área, in^2	Eje X-X				Eje Y-Y				Eje Z-Z	
			I_x, in^4	S_x, in^3	r_x, in	y, in	I_y, in^4	S_y, in^3	r_y, in	x, in	r_z, in	tan α
L8 × 6 × 1	44.2	13.0	80.9	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.72	1.65	1.28	0.542
¾	33.8	9.94	63.5	11.7	2.52	2.55	30.8	6.92	1.75	1.56	1.29	0.550
½	23.0	6.75	44.4	8.01	2.55	2.46	21.7	4.79	1.79	1.46	1.30	0.557
L6 × 4 × ¾	23.6	6.94	24.5	6.23	1.88	2.07	8.63	2.95	1.12	1.07	0.856	0.428
½	16.2	4.75	17.3	4.31	1.91	1.98	6.22	2.06	1.14	0.981	0.864	0.440
⅜	12.3	3.61	13.4	3.30	1.93	1.93	4.86	1.58	1.16	0.933	0.870	0.446
L5 × 3 × ½	12.8	3.75	9.43	2.89	1.58	1.74	2.55	1.13	0.824	0.746	0.642	0.357
⅜	9.80	2.86	7.35	2.22	1.60	1.69	2.01	0.874	0.838	0.698	0.646	0.364
¼	6.60	1.94	5.09	1.51	1.62	1.64	1.41	0.600	0.853	0.648	0.652	0.371
L4 × 3 × ½	11.1	3.25	5.02	1.87	1.24	1.32	2.40	1.10	0.858	0.822	0.633	0.542
⅜	8.50	2.48	3.94	1.44	1.26	1.27	1.89	0.851	0.873	0.775	0.636	0.551
¼	5.80	1.69	2.75	0.988	1.27	1.22	1.33	0.585	0.887	0.725	0.639	0.558
L3½ × 2½ × ½	9.40	2.75	3.24	1.41	1.08	1.20	1.36	0.756	0.701	0.701	0.532	0.485
⅜	7.20	2.11	2.56	1.09	1.10	1.15	1.09	0.589	0.716	0.655	0.535	0.495
¼	4.90	1.44	1.81	0.753	1.12	1.10	0.775	0.410	0.731	0.607	0.541	0.504
L3 × 2 × ½	7.70	2.25	1.92	1.00	0.922	1.08	0.667	0.470	0.543	0.580	0.425	0.413
⅜	5.90	1.73	1.54	0.779	0.937	1.03	0.539	0.368	0.555	0.535	0.426	0.426
¼	4.10	1.19	1.09	0.541	0.953	0.980	0.390	0.258	0.569	0.487	0.431	0.437
L2½ × 2 × ⅜	5.30	1.55	0.914	0.546	0.766	0.826	0.513	0.361	0.574	0.578	0.419	0.612
¼	3.62	1.06	0.656	0.381	0.782	0.779	0.372	0.253	0.589	0.532	0.423	0.624



Apéndice C Propiedades de perfiles laminados de acero

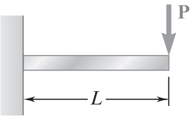
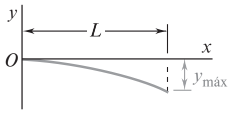
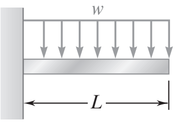
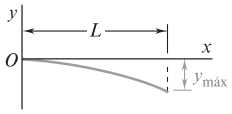
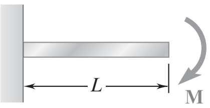
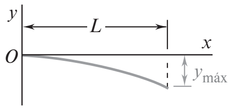
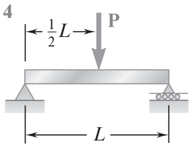
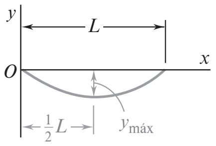
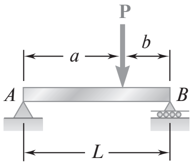
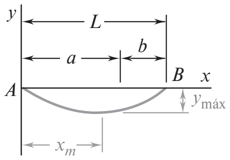
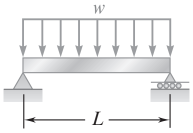
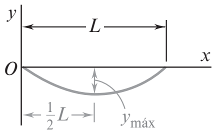
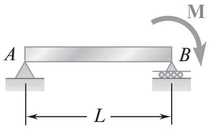
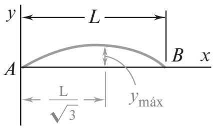
(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Ángulos

Patas desiguales

			Eje *X-X*				Eje *Y-Y*				Eje *Z-Z*	
Tamaño y espesor, mm	Masa por metro kg/m	Área mm^2	I_x 10^6 mm^4	S_x 10^3 mm^3	r_x mm	y mm	I_y 10^6 mm^4	S_y 10^3 mm^3	r_y mm	x mm	r_z mm	tan α
L203 × 152 × 25.4	65.5	8 390	33.7	247	63.2	67.3	16.1	146	43.7	41.9	32.5	0.542
19	50.1	6 410	26.4	192	64.0	64.8	12.8	113	44.5	39.6	32.8	0.550
12.7	34.1	4 350	18.5	131	64.8	62.5	9.03	78.5	45.5	37.1	33.0	0.557
L152 × 102 × 19	35.0	4 480	10.2	102	47.8	52.6	3.59	48.3	28.4	27.2	21.7	0.428
12.7	24.0	3 060	7.20	70.6	48.5	50.3	2.59	33.8	29.0	24.9	21.9	0.440
9.5	18.2	2 330	5.58	54.1	49.0	49.0	2.02	25.9	29.5	23.7	22.1	0.446
L127 × 76 × 12.7	19.0	2 420	3.93	47.4	40.1	44.2	1.06	18.5	20.9	18.9	16.3	0.357
9.5	14.5	1 850	3.06	36.4	40.6	42.9	0.837	14.3	21.3	17.7	16.4	0.364
6.4	9.80	1 250	2.12	24.7	41.1	41.7	0.587	9.83	21.7	16.5	16.6	0.371
L102 × 76 × 12.7	16.4	2 100	2.09	30.6	31.5	33.5	0.999	18.0	21.8	20.9	16.1	0.542
9.5	12.6	1 600	1.64	23.6	32.0	32.3	0.787	13.9	22.2	19.7	16.2	0.551
6.4	8.60	1 090	1.14	16.2	32.3	31.0	0.554	9.59	22.5	18.4	16.2	0.558
L89 × 64 × 12.7	13.9	1 770	1.35	23.1	27.4	30.5	0.566	12.4	17.8	17.8	13.5	0.485
9.5	10.7	1 360	1.07	17.9	27.9	29.2	0.454	9.65	18.2	16.6	13.6	0.495
6.4	7.30	929	0.753	12.3	28.4	27.9	0.323	6.72	18.6	15.4	13.7	0.504
L76 × 51 × 12.7	11.5	1 450	0.799	16.4	23.4	27.4	0.278	7.70	13.8	14.7	10.8	0.413
9.5	8.80	1 120	0.641	12.8	23.8	26.2	0.224	6.03	14.1	13.6	10.8	0.426
6.4	6.10	768	0.454	8.87	24.2	24.9	0.162	4.23	14.5	12.4	10.9	0.437
L64 × 51 × 9.5	7.90	1 000	0.380	8.95	19.5	21.0	0.214	5.92	14.6	14.7	10.6	0.612
6.4	5.40	684	0.273	6.24	19.9	19.8	0.155	4.15	15.0	13.5	10.7	0.624

Apéndice D Deflexiones y pendientes de vigas

Viga y carga	Curva elástica	Deflexión máxima	Pendiente en el extremo	Ecuación de la curva elástica
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y=\frac{P}{6EI}(x^3-3Lx^2)$
2 		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y=-\frac{w}{24EI}(x^4-4Lx^3+6L^2x^2)$
3 		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y=-\frac{M}{2EI}x^2$
4 		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm\frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \le \frac{1}{2}L$: $y=\frac{P}{48EI}(4x^3-3L^2x)$
5 		Para $a > b$: $-\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ en $x_m=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$	$\theta_A=-\frac{Pb(L^2-b^2)}{6EIL}$ $\theta_B=+\frac{Pa(L^2-a^2)}{6EIL}$	Para $x < a$: $y=\frac{Pb}{6EIL}[x^3-(L^2-b^2)x]$ Para $x=a$: $y=-\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$
6 		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm\frac{wL^3}{24EI}$	$y=-\frac{w}{24EI}(x^4-2Lx^3+L^3x)$
7 		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A=+\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B=-\frac{ML}{3EI}$	$y=-\frac{M}{6EIL}(x^3-L^2x)$

APÉNDICE

E Fundamentos de la certificación en ingeniería

En Estados Unidos, los ingenieros deben tener una licencia si su trabajo puede afectar directamente la salud, la seguridad y el bienestar públicos. Se pretende asegurar que los ingenieros posean las calificaciones mínimas que implican competencia, capacidad, experiencia y carácter. El proceso de licenciamiento implica un examen inicial, llamado *Fundamentals of Engineering Examination* (Examen de fundamentos de ingeniería), experiencia profesional, y un segundo examen llamado *Principles and Practice of Engineering* (Principios y práctica de la ingeniería). Aquellos que cumplan con éxito estos requisitos tendrán una licencia como ingeniero profesional. Los exámenes se desarrollan bajo los auspicios del *National Council of Examiners for Engineering and Surveying* de Estados Unidos.

El primer examen, Fundamentos de ingeniería, se puede realizar justo antes o después de la graduación de un programa de cuatro años acreditado en ingeniería. El examen hace énfasis en los temas de un programa típico de ingeniería de pregrado, incluyendo la Mecánica de materiales. Los temas incluidos en el examen cubren mucho del material de este libro. La siguiente es una lista de las principales áreas temáticas con referencias a las secciones apropiadas del libro. También se incluyen problemas que pueden resolverse para repasar este material.

Esfuerzos (1.2 a 1.4)
Problemas: 1.4, 1.10, 1.30, 1.37

Deformaciones (2.1 a 2.4; 2.7 a 2.8)
Problemas: 2.4, 2.19, 2.41, 2.47, 2.61, 2.68

Torsión (3.1 a 3.3; 3.9 a 3.10)
Problemas: 3.6, 3.27, 3.35, 3.53, 3.129, 3.137

Flexión (4.1 a 4.4; 4.7)
Problemas: 4.9, 4.22, 4.33, 4.49, 4.103, 4.107

Diagramas de fuerza cortante y momento flector (5.1 a 5.2)
Problemas: 5.5, 5.11, 5.39, 5.43

Esfuerzos normales en vigas (5.3)
Problemas: 5.18, 5.21, 5.56, 5.60

Fuerza cortante (6.1; 6.3 a 6.4)
Problemas: 6.1, 6.11, 6.32, 6.38

Transformación de esfuerzos y deformaciones (7.1 a 7.2; 7.5 a 7.6)
Problemas: 7.5, 7.15, 7.32, 7.43, 7.81, 7.87, 7.100, 7.104

Deflexión en vigas (9.1; 9.4)
Problemas: 9.5, 9.13, 9.71, 9.77

Columnas (10.1)
Problemas: 10.11, 10.19, 10.22

Energía de deformación (11.1 a 11.2)
Problemas: 11.9, 11.15, 11.21

Respuestas a problemas

En las siguientes páginas se encuentran las respuestas a los problemas cuyo número está en redondas. Las respuestas a los problemas con números en tipo cursivo no se incluyen en el presente listado.

CAPÍTULO 1

1.1 *a*) 84.9 MPa. *b*) –96.8 MPa.
1.2 $d_1 = 22.6$ mm, $d_2 = 40.2$ mm.
1.3 *a*) 17.93 ksi. *b*) 22.6 ksi.
1.4 6.75 kips.
1.7 *a*) 101.6 MPa. *b*) –21.7 MPa.
1.8 1 084 ksi.
1.9 285 mm^2.
1.10 *a*) 11.09 ksi. *b*) –12.00 ksi.
1.13 –4.97 MPa.
1.14 *a*) 12.73 MPa. *b*) –4.77 MPa.
1.15 43.4 mm.
1.16 2.25 kips.
1.17 889 psi.
1.18 67.9 kN.
1.20 29.4 mm.
1.21 *a*) 3.33 MPa. *b*) 525 mm.
1.23 *a*) 1.030 in. *b*) 38.8 ksi.
1.24 8.31 kN.
1.25 *a*) 11.45 mm. *b*) 134.9 MPa. *c*) 90.0 MPa.
1.28 *a*) 9.94 ksi. *b*) 6.25 ksi.
1.29 *a*) $\sigma = 489$ kPa; $\tau = 489$ kPa.
1.30 *a*) 13.95 kN. *b*) 620 kPa.
1.31 $\sigma = 70.0$ psi; $\tau = 40.4$ psi.
1.32 *a*) 1.500 kips. *b*) 43.3 psi.
1.35 $\sigma = -21.6$ MPa; $\tau = 7.87$ MPa.
1.36 833 kN.
1.37 3.09 kips.
1.40 *a*) 181.3 mm^2. *b*) 213 mm^2.
1.41 *a*) 3.97. *b*) 265 mm^2.
1.42 0.268 in^2.
1.45 2.87.
1.46 0.798 in.
1.47 10.25 kN.
1.48 *a*) 2.92. *b*) $b = 40.3$ mm, $c = 97.2$ mm.
1.50 3.24.
1.52 283 lb.
1.53 2.42.
1.54 2.05.
1.55 3.72 kN.
1.56 3.97 kN.
1.57 *a*) 362 kg. *b*) 1.718.
1.58 *a*) 629 lb. *b*) 1.689.
1.59 195.3 MPa.
1.60 *a*) 14.64 ksi. *b*) –9.96 ksi.
1.62 25.2 mm.
1.64 *a*) –640 psi. *b*) –320 psi.
1.65 *a*) 444 psi. *b*) 7.50 in. *c*) 2 400 psi.
1.67 3.45.
1.68 $\sigma_{perm}\, d/4\, \tau_{perm}$.
1.70 $21.3° < \theta < 32.3°$.
1.C2 *c*) 16 mm $\leq d \leq$ 22 mm. *d*) 18 mm $\leq d \leq$ 22 mm.
1.C3 *c*) 0.70 in $\leq d \leq$ 1.10 in *d*) 0.85 in $\leq d \leq$ 1.25 in.
1.C4 *b*) Para $\beta = 38.66°$, tan $\beta = 0.8$; *BD* es perpendicular a *BC*.
c) *F.S.* = 3.58 para $\alpha = 26.6°$; **P** es perpendicular a la línea *AC*.
1.C5 *b*) *Elemento de la figura P1.29, para* $\alpha = 60°$:
1) 70.0 psi; 2) 40.4 psi; 3) 2.14; 4) 5.30; 5) 2.14.
Elemento de la figura P1.31, para $\alpha = 45°$:
1) 489 kPa; 2) 489 kPa; 3) 2.58; 4) 3.07; 5) 2.58.
1.C6 *d*) $P_{perm} = 5.79$ kN; el esfuerzo en los eslabones es crítico.

CAPÍTULO 2

2.1 *a*) 0.546 mm. *b*) 36.3 MPa.
2.2 *a*) 0.0303 in. *b*) 15.28 ksi.
2.3 *a*) 9.82 kN. *b*) 500 MPa.
2.4 *a*) 81.8 MPa. *b*) 1.712.
2.6 *a*) 5.32 mm. *b*) 1.750 m.
2.7 *a*) 0.381 in. *b*) 17.58 ksi.
2.9 9.21 mm.
2.11 48.4 kips.
2.13 0.429 in.
2.14 1.988 kN.
2.15 0.868 in.
2.17 *a*) 25.5×10^{-3} in. *b*) 15.56×10^{-3} in.
2.19 *a*) 32.8 kN. *b*) 0.0728 mm ↓.
2.20 *a*) 0.0189 mm ↑. *b*) 0.0919 mm ↓.
2.21 *a*) $\delta_{AB} = -2.11$ mm; $\delta_{AC} = 2.03$ mm.
2.23 *a*) 0.1767 in. *b*) 0.1304 in.
2.24 50.4 kN.
2.25 14.74 kN.
2.26 *a*) –0.0302 mm. *b*) 0.01783 mm.
2.27 4.71×10^{-3} in. ↓.
2.29 *a*) $\rho g l^2/2E$. *b*) $W/2$.
2.30 $Ph/\pi Eab$ ↓.
2.33 *a*) 140.6 MPa. *b*) 93.8 MPa.
2.34 *a*) 15.00 mm. *b*) 288 kN.
2.35 $\sigma_s = -8.34$ ksi; $\sigma_c = -1.208$ ksi.
2.36 695 kips.
2.39 *a*) $R_A = 2.28$ kips ↑; $R_C = 9.72$ kips ↑. *b*) $\sigma_{AB} = +1.857$ ksi; $\sigma_{BC} = -3.09$ ksi.
2.41 *a*) 62.8 kN ← a *A*; 37.2 kN ← a *E*. *b*) 46.3 μm →.
2.42 *a*) 45.5 kN ← a *A*; 54.5 kN ← a *E*. *b*) 48.8 μm →.
2.43 0.536 mm ↓.
2.44 *a*) $P_{BE} = 205$ lb; $P_{CF} = 228$ lb. *b*) 0.0691 in. ↓.
2.45 $P_A = 0.525\, P$; $P_B = 0.200\, P$; $P_C = 0.275\, P$.
2.47 –8.15 MPa.
2.48 –56.2 MPa.
2.50 $\sigma_s = -1.448$ ksi; σ_C 54.2 psi.
2.51 142.6 kN.
2.52 *a*) $\sigma_{AB} = -5.25$ ksi; $\sigma_{BC} = -11.82$ ksi. *b*) 6.57×10^{-3} in. →.
2.54 *a*) –98.3 MPa. *b*) –38.3 MPa.
2.55 *a*) 21.4°C. *b*) 3.67 MPa.
2.56 5.70 kN.
2.58 *a*) 201.6°F. *b*) 18.0107 in.
2.59 *a*) 52.3 kips. *b*) 9.91×10^{-3}in.
2.61 29×10^3 psi; 10.03×10^3 psi; 0.444.
2.63 0.399.
2.64 *a*) 0.0358 mm. *b*) –0.00258 mm. *c*) –0.000344 mm. *d*) –0.00825 mm^2.
2.66 94.9 kips.

2.67 *a*) –0.0724 mm. *b*) –0.01531 mm.
2.68 *a*) 0.00312 in. *b*) 0.00426 in. *c*) 0.00505 in.
2.69 *a*) 352 $\times 10^{-6}$ in. *b*) 82.8 $\times 10^{-6}$ in. *c*) 307 $\times 10^{-6}$ in.
2.70 *a*) –63.0 MPa. *b*) –4.05 mm^2. *c*) –162.0 mm^3.
2.77 a = 42.9 mm; b = 160.7 mm.
2.78 75.0 kN; 40.0 mm.
2.79 *a*) 10.42 in. *b*) 0.813 in.
2.80 τ = 62.5 psi; G = 156.3 psi.
2.81 16.67 MPa.
2.82 19.00 $\times 10^3$ kN/m
2.83 *a*) 588 $\times 10^{-6}$ in. *b*) 33.2 $\times 10^{-3}$ in^3. *c*) 0.0294%.
2.84 *a*) –0.0746 mm; –143.9 mm^3. *b*) –0.0306 mm; –521 mm^3.
2.85 *a*) 193.2 $\times 10^{-6}$; 1.214 $\times 10^{-3}$ in^3. *b*) 396 $\times 10^{-6}$; 2.49 $\times 10^{-3}$ in^3.
2.88 3.00.
2.91 *a*) 0.0303 mm. *b*) σ_x = 40.6 MPa, $\sigma_y = \sigma_z$ = 5.48 MPa.
2.92 *a*) σ_x = 44.6 MPa; σ_y = 0; σ_z = 3.45 MPa. *b*) –0.0129 mm.
2.93 *a*) 58.3 kN. *b*) 64.3 kN.
2.94 *a*) 87.0 MPa. *b*) 75.2 MPa. *c*) 73.9 MPa.
2.97 *a*) 11.4 mm. *b*) 28.8 kN.
2.98 36.7 mm.
2.99 *a*) 12.02 kips. *b*) 108.0%.
2.100 23.9 kips.
2.101 *a*) 15.90 kips; 0.1745 in. *b*) 15.90 kips; 0.274 in.
2.102 *a*) 44.2 kips; 0.0356 in. *b*) 44.2 kips; 0.1606 in.
2.105 176.7 kN; 3.84 mm.
2.106 176.7 kN; 3.16 mm.
2.107 *a*) 0.292 mm. *b*) σ_{AC} = 250 MPa; σ_{BC} = –307 MPa. *c*) 0.0272 mm.
2.108 *a*) 990kN. *b*) σ_{AC} = 250 MPa; σ_{BC} = –316 MPa. *c*) 0.0313 mm.
2.111 *a*) 112.1 kips. *b*) 50 ksi en acero de baja resistencia; 82.9 ksi en acero de alta resistencia. *c*) 0.00906 in.
2.112 *a*) 0.0309 in. *b*) 64.0 ksi. *c*) 0.00387 in.
2.113 *a*) σ_{AD} = 250 MPa. *b*) σ_{BE} = 124.3 MPa. *c*) 0.622 mm ↓.
2.114 *a*) σ_{AD} = 233 MPa; σ_{BE} = 250 MPa. *b*) 1.322 mm ↓.
2.115 *a*) σ_{AD} = –4.70 MPa; σ_{BE} = 19.34 MPa. *b*) 0.0967 mm ↓.
2.116 *a*) –36.0 ksi. *b*) 15.84 ksi.
2.117 *a*) σ_{AC} = –150.0 MPa; σ_{CB} = –250 MPa. *b*) –0.1069 mm →.
2.118 *a*) σ_{AC} = 56.5 MPa; σ_{CB} = 9.41 MPa. *b*) 0.0424 mm →.
2.121 *a*) 915°F. *b*) 1 759°F.
2.122 *a*) 0.1042 mm. *b*) $\sigma_{AC} = \sigma_{CB}$ = –65.2 MPa.
2.123 *a*) 0.00788 mm. *b*) $\sigma_{AC} = \sigma_{CB}$ = –6.06 MPa.
2.125 1.219 in.
2.127 4.67°C.
2.128 *a*) 9.53 kips. *b*) 1.254 $\times 10^{-3}$ in.
2.130 (acero) – 15.80 ksi; (concreto) – 1.962 ksi.
2.131 *a*) 9.73 kN. *b*) 2.02 mm ←.
2.133 0.01870 in.
2.135 *a*) $A\ \sigma_Y/\mu g$. *b*) $E\ A/L$.
2.C1 *Prob. 2.126:* *a*) 11.90 $\times 10^{-3}$ in. ↓ . *b*) 5.66 $\times 10^{-3}$ in. ↑.
2.C3 *Prob. 2.60:* *a*) –116.2 MPa. *b*) 0.363 mm.
2.C5 r = 0.25 in.: 3.89 kips;
r = 0.75 in.: 2.78 kips.
2.C6 *a*) –0.40083. *b*) –0.10100. *c*) –0.00405.

CAPÍTULO 3

3.1 641 N · m.
3.2 87.3 MPa.
3.3 *a*) 5.17 kN · m. *b*) 87.2 MPa.
3.4 *a*) 7.55 ksi. *b*) 7.64 ksi.
3.6 *a*) 70.7 MPa. *b*) 35.4 MPa. *c*) 6.25%.
3.7 *a*) 19.21 kip · in. *b*) 2.01 in.
3.9 *a*) 8.35 ksi. *b*) 5.94 ksi.
3.10 *a*) 1.292 in. *b*) 1.597 in.
3.11 *a*) eje *CD*. *b*) 85.8 MPa
3.13 *a*) 77.6 MPa. *b*) 62.8 MPa. *c*) 20.9 MPa.
3.15 9.16 kip · in.
3.16 *a*) 1.503 in. *b*) 1.853 in.
3.18 *a*) d_{AB} = 52.9 mm. *b*) d_{BC} = 33.3 mm.
3.20 3.18 kN · m.
3.21 *a*) 59.6 mm. *b*) 43.9 mm.
3.22 *a*) 72.5 MPa. *b*) 68.7 MPa.
3.23 1.189 kip · in.
3.25 4.30 kip · in.
3.27 73.6 N · m.
3.28 *a*) d_{AB} = 38.6 mm. *b*) d_{CD} = 52.3 mm. *c*) 75.5 mm.
3.29 1.0; 1.025; 1.120; 1.200; 1.0.
3.31 11.87 mm.
3.32 9.38 ksi.
3.33 *a*) 1.390°. *b*) 1.482°.
3.35 *a*) 1.384°. *b*) 3.22°.
3.37 *a*) 14.43°. *b*) 46.9°.
3.38 6.02°.
3.40 1.140°.
3.41 3.77°.
3.42 3.78°.
3.44 53.8°.
3.45 36.1 mm.
3.46 0.837 in.
3.47 1.089 in.
3.48 62.9 mm.
3.49 42.0 mm.
3.50 22.5 mm.
3.53 *a*) 4.72 ksi. *b*) 7.08 ksi. *c*) 4.35°.
3.54 7.37°.
3.56 *a*) T_A = 1 090 N · m; T_C = 310 N · m. *b*) 47.4 MPa. *c*) 28.8 MPa.
3.57 τ_{AB} = 68.9 MPa; τ_{CD} = 14.70 MPa.
3.59 12.24 MPa.
3.61 0.241 in.
3.63 $T/2\pi t r_1^2$ a r_1.
3.64 *a*) 9.51 ksi. *b*) 4.76 ksi.
3.65 *a*) 46.9 MPa. *b*) 23.5 MPa.
3.66 *a*) 0.893 in. *b*) 0.709 in.
3.67 *a*) 20.1 mm. *b*) 15.94 mm.
3.68 25.6 kW.
3.69 2.64 mm.
3.71 *a*) 51.7 kW. *b*) 6.17°.
3.73 *a*) 47.5 MPa. *b*) 30.4 mm.
3.76 *a*) 4.08 ksi. *b*) 6.79 ksi.
3.77 *a*) 0.799 in. *b*) 0.947 in.
3.78 *a*) 16.02 Hz. *b*) 27.2 Hz.
3.79 1 917 rpm.
3.80 50.0 kW.
3.81 36.1 mm.
3.84 10.8 mm.
3.86 *a*) 5.36 ksi. *b*) 5.02 ksi.
3.87 63.5 kW.
3.88 42.6 Hz.
3.89 *a*) 2.61 ksi. *b*) 2.01 ksi.
3.90 *a*) 203 N · m. *b*) 165.8 N · m.
3.92 *a*) 9.64 kN · m. *b*) 9.91 kN · m.
3.93 2 230 lb · in.
3.94 *a*) 18.86 ksi; 1.500 in. *b*) 21.0 ksi; 0.916 in.
3.95 *a*) 113.3 MPa; 15.00 mm. *b*) 145.0 MPa; 6.90 mm.
3.98 *a*) 6.72°. *b*) 18.71°.
3.99 *a*) 2.47°. *b*) 4.34°.
3.100 *a*) 977 N · m. *b*) 8.61 mm.
3.101 *a*) 52.1 kip · in. *b*) 80.8 kip · in.
3.102 $\tau_{\mathrm{máx}}$ = 145.0 MPa; ϕ = 19.708.
3.104 *a*) 8.17 mm. *b*) 42.1°.
3.106 *a*) 8.02°. *b*) 14.89 kN · m.
3.107 *a*) 11.71 kN · m; 3.44°. *b*) 14.12 kN · m; 4.81°.
3.110 *a*) 5.24 kip · in. *b*) 6.88°.
3.111 *a*) 1.322 kip · in. *b*) 12.60 ksi.
3.112 2.32 kN · m.

3.113 2.26 kN · m.
3.114 5.63 ksi.
3.115 14.62°.
3.118 68.0 MPa en la superficie interior.
3.119 20.2°.
3.120 *a*) $c_0 = 0.1500c$. *b*) $T_0 = 0.221\tau_y c^3$.
3.121 0.0505 in.
3.122 68.2 in.
3.123 *a*) 189.2 N · m; 9.05°. *b*) 228 N · m; 7.91°.
3.124 *a*) 74.0 MPa; 9.56°. *b*) 61.5 MPa; 6.95°.
3.127 5.07 MPa.
3.128 59.2 MPa.
3.129 0.944.
3.131 0.198.
3.132 0.883.
3.133 *a*) 1.193 in. *b*) 1.170 in. *c*) 0.878 in.
3.135 *a*) 157.0 kN · m. *b*) 8.70°.
3.136 *a*) 7.52 ksi. *b*) 4.61°.
3.137 *a*) 1 007 N · m. *b*) 9.27°.
3.138 *a*) 4.55 ksi. *b*) 2.98 ksi. *c*) 2.56°.
3.139 *a*) 5.82 ksi. *b*) 2.91 ksi.
3.142 *a*) 16.85 N · m.
3.143 8.45 N · m.
3.144 $\tau_a = 4.73$ MPa, $\tau_b = 9.46$ MPa.
3.146 0.894 in.
3.147 *a*) 12.76 MPa. *b*) 5.40 kN · m.
3.149 *a*) $3c/t$. *b*) $3c^2/t^2$.
3.150 *b*) 0.25%, 1.000%, 4.00%.
3.151 637 kip · in.
3.153 12.22°.
3.155 1.285 in.
3.156 *a*) 73.7 MPa. *b*) 34.4 MPa. *c*) 5.06°.
3.157 4.12 kN · m.
3.158 *a*) 18.80 kW. *b*) 24.3 MPa.
3.160 7.34 kip · ft.
3.162 *a*) 0.347 in. *b*) 37.2°.
3.C2 *Prob. 3.44:* 2.21°.
3.C5 *a*) –3.282%. *b*) –0.853%. *c*) –0.138%. *d*) –0.00554%.
3.C6 *a*) –1.883%. *b*) –0.484%. *c*) –0.078%. *d*) –0.00313%.

CAPÍTULO 4

4.1 *a*) –61.6 MPa. *b*) 91.7 MPa.
4.2 *a*) –2.38 ksi. *b*) –0.650 ksi.
4.3 80.2 kN · m.
4.4 24.8 kN · m.
4.5 *a*) 1.405 kip · in. *b*) 3.19 kip · in.
4.6 *a*) –39.3 MPa. *b*) 26.2 MPa.
4.9 –14.71 ksi; 8.82 ksi.
4.10 –10.38 ksi; 15.40 ksi.
4.11 –102.4 MPa; 73.2 MPa.
4.12 61.3 kN.
4.15 20.4 kip · in.
4.16 106.1 N · m.
4.18 4.63 kip · in.
4.19 3.79 kN · m.
4.21 *a*) 96.5 MPa. *b*) 20.5 N · m.
4.22 *a*) 0.602 mm. *b*) 0.203 N · m.
4.23 *a*) 145.0 ksi. *b*) 384 lb · in.
4.24 *a*) $\sigma = 75.0$ MPa, $\rho = 26.7$ m. *b*) $\sigma = 125.0$ MPa, $\rho = 9.60$ m.
4.25 *a*) 9.17 kN · m. *b*) 10.24 kN · m.
4.26 *a*) 45.1 kip · in. *b*) 49.7 kip · in.
4.29 *a*) $(8/9)\ h_0$. *b*) 0.949.
4.30 *a*) 1 007 in. *b*) 3 470 in. (*c*) 0.013208.
4.31 *a*) 139.1 m. *b*) 480 m.
4.32 *a*) $[(\sigma_x)_{máx}/2\ \rho c](y^2 - c^2)$. *b*) $-(\sigma_x)_{máx}\ c/2\rho$.
4.33 1.240 kN · m.
4.34 887 N · m.
4.37 689 kip · in.
4.38 335 kip · in.
4.39 *a*) –56.0 MPa. *b*) 66.4 MPa.
4.40 *a*) –56.0 MPa. *b*) 68.4 MPa.
4.41 *a*) –1.979 ksi. *b*) 16.48 ksi.
4.43 8.70 m.
4.44 8.59 m.
4.45 625 ft.
4.47 3.87 kip · ft.
4.48 2.88 kip · ft.
4.49 *a*) 212 MPa. *b*) –15.59 MPa.
4.50 *a*) 210 MPa. *b*) –14.08 MPa.
4.54 *a*) 1 674 mm^2. *b*) 90.8 kN · m.
4.55 *a*) $\sigma_A = 6.86$ ksi; $\sigma_B = 6.17$ ksi; $\sigma_S = 4.11$ ksi. *b*) 151.9 ft.
4.57 *a*) –22.5 ksi. *b*) 17.78 ksi.
4.59 *a*) 6.15 MPa. *b*) –8.69 MPa.
4.61 *a*) 219 MPa. *b*) 176.0 MPa.
4.63 *a*) 6.79 kip · in. *b*) 5.59 kip · in.
4.64 *a*) 4.71 ksi. *b*) 5.72 ksi.
4.65 *a*) 147.0 MPa. *b*) 119.0 MPa.
4.67 *a*) 38.4 N · m. *b*) 52.8 N · m.
4.68 *a*) 57.6 N · m. *b*) 83.2 N · m.
4.69 2 460 lb · in.
4.71 *a*) 5.87 mm. *b*) 2.09 m.
4.72 *a*) 21.9 mm. *b*) 7.81 m.
4.75 *a*) 1 759 kip · in. *b*) 2 650 kip · in.
4.77 *a*) 29.2 kN · m. *b*) 1.500.
4.78 *a*) 27.5 kN · m. *b*) 1.443.
4.79 *a*) 2 840 kip · in. *b*) 1.611.
4.80 *a*) 4 820 kip · in. *b*) 1.443.
4.81 1.866 kN · m.
4.82 19.01 kN · m.
4.84 22.8 kip · in.
4.86 212 kip · in.
4.87 120 MPa.
4.88 106.4 MPa.
4.91 *a*) 106.7 MPa. *b*) $y_0 = -31.2$ mm, 0, 31.2 mm. *c*) 24.1 m.
4.92 *a*) 13.36 ksi. *b*) $y_0 = -1.517$ in., 0, 1.517 in. *c*) 168.8 ft.
4.94 *a*) $0.707\rho_Y$. *b*) $6.09\rho_Y$.
4.96 *a*) 4.69 m. *b*) 7.29 kN · m.
4.99 *a*) –102.8 MPa. *b*) 80.6 MPa.
4.100 *a*) –212 psi. *b*) –637 psi. *c*) –1 061 psi.
4.101 *a*) $-2P/\pi r^2$. *b*) $-5P/\pi r^2$.
4.103 *a*) –37.8 MPa. *b*) –38.6 MPa.
4.105 *a*) 288 lb. *b*) 209 lb.
4.106 1.994 kN.
4.107 14.40 kN.
4.108 16.04 mm.
4.109 43.0 kips.
4.110 0.500*d*.
4.113 7.86 kips ↓; 9.15 kips ↑.
4.114 5.32 kips ↓; 10.79 kips ↑.
4.115 *a*) 47.6 MPa. *b*) –49.4 MPa. *c*) 9.80 mm debajo de la parte superior de la sección.
4.116 *a*) $-P/2at$. *b*) $-2P/at$. *c*) $-P/2at$.
4.117 *a*) 1 125 kN. *b*) 817 kN.
4.121 *a*) 30.0 mm. *b*) 94.5 kN.
4.122 *a*) 5.00 mm. *b*) 243 kN.
4.124 $P = 44.2$ kips; $Q = 57.3$ kips.
4.125 *a*) 152.3 kips. *b*) $x = 0.59$ in. *c*) 300 μ.
4.127 *a*) –3.37 MPa. *b*) –18.60 MPa. *c*) 3.37 MPa.
4.128 *a*) 9.86 ksi. *b*) –2.64 ksi. *c*) –9.86 ksi.
4.129 *a*) –29.3 MPa. *b*) –144.8 MPa. *c*) –125.9 MPa.
4.130 *a*) 0.321 ksi. *b*) –0.107 ksi. *c*) 0.427 ksi.
4.133 *a*) 57.8 MPa. *b*) –56.8 MPa. *c*) 25.9 MPa.
4.134 *a*) 57.4°. *b*) 75.7 MPa.

4.135 *a*) 18.29°. *b*) 13.74 ksi.
4.137 *a*) 10.03°. *b*) 54.2 MPa.
4.138 *a*) 27.5°. *b*) 5.07 ksi.
4.139 *a*) 32.9°. *b*) 61.4 MPa.
4.141 113.0 MPa.
4.143 10.46 ksi.
4.144 *a*) $\sigma_A = 31.5$ MPa; $\sigma_B = -10.39$ MPa. *b*) 94.0 mm por encima del punto *A*.
4.145 *a*) 17.11 mm.
4.146 0.1638 in.
4.147 53.9 kips.
4.150 29.1 kip · in.
4.151 29.1 kip · in.
4.152 733 N · m.
4.153 1.323 kN · m.
4.155 900 N · m.
4.161 *a*) –77.3 MPa. *b*) –55.7 MPa.
4.162 $\sigma_A = -65.1$ MPa; $\sigma_B = 39.7$ MPa.
4.163 *a*) 12.19 ksi. *b*) 11.15 ksi.
4.164 $\sigma_A = 10.77$ ksi; $\sigma_B = -3.22$ ksi.
4.167 655 lb.
4.169 73.2 mm.
4.170 *a*) –82.4 MPa. *b*) 36.6 MPa.
4.171 *a*) 3.06 ksi. *b*) –2.81 ksi. *c*) 0.529 ksi.
4.173 13.80 kN · m.
4.174 8.49 kN · m.
4.175 *a*) 16.05 ksi. *b*) –9.84 ksi.
4.177 *a*) 41.8 MPa. *b*) –20.4 MPa.
4.178 27.2 mm.
4.179 107.8 N · m.
4.180 *a*) –32.5 MPa. *b*) 34.2 MPa.
4.181 *a*) –3.65 ksi. *b*) 3.72 ksi.
4.183 *a*) –5.96 ksi. *b*) 3.61 ksi.
4.184 *a*) –6.71 ksi. *b*) 3.24 ksi.
4.185 *a*) 63.9 MPa. *b*) –52.6 MPa.
4.191 –0.536 ksi.
4.192 67.8 MPa; –81.8 MPa
4.194 *a*) $\sigma_{máx} = 6\ M/a^3$, $1/\rho = 12M/Ea^4$.
b) $\sigma_{máx} = 8.49\ M/a^3$, $1/\rho = 12M/Ea^4$.
4.195 48.6 kN · m.
4.196 *a*) 46.9 MPa. *b*) 18.94 MPa. *c*) 55.4 m.
4.198 *a*) –20.9 ksi. *b*) –22.8 ksi.
4.199 60.9 mm.
4.201 *a*) 56.7 kN · m. *b*) 20.0 mm.
4.202 $P = 75.6$ kips ↓; $Q = 87.1$ kips ↓.
4.203 *a*) $\sigma_A = -\frac{1}{2}\sigma$; $\sigma_B = \sigma_1$; $\sigma_C = -\sigma_1$; $\sigma_D = \frac{1}{2}\sigma_1$. *b*) $\frac{4}{3}\rho_1$.
4.C1 $a = 4$ mm: $\sigma_a = 50.6$ MPa, $\sigma_s = 107.9$ MPa.
$a = 14$ mm: $\sigma_a = 89.7$ MPa, $\sigma_s = 71.8$ MPa.
a) 111.6 MPa. *b*) 6.61 mm.
4.C2 $y_Y = 65$ mm, $M = 52.6$ kN · m, $\rho = 43.3$; $y_Y = 45$ mm, $M = 55.6$ kN · m, $\rho = 30.0$ m.
4.C3 $\beta = 30°$: $\sigma_A = -7.83$ ksi, $\sigma_B = -5.27$ ksi, $\sigma_C = 7.19$ ksi, $\sigma_D = 5.91$ ksi;
$\beta = 120°$: $\sigma_A = 1.557$ ksi, $\sigma_B = 6.01$ ksi, $\sigma_C = -2.67$ ksi, $\sigma_D = -4.89$ ksi.
4.C4 $r_1/h = 0.529$ para 50% de incremento en $\sigma_{máx}$.
4.C5 *Prob. 4.10:* –102.4 MPa; 73.2 MPa.
4.C6 $y_Y = 0.8$ in: 76.9 kip · in, 552 in;
$y_Y = 0.2$ in: 95.5 kip · in, 138.1 in.
4.C7 $a = 0.2$ in: – 7.27 ksi, $a = 0.8$ in: – 6.61 ksi.
Para $a = 0.625$ in, $\sigma = -6.51$ ksi.

CAPÍTULO 5

5.1 *b*) $V = w(L/2 - x)$; $M = wx(L - x)/2$.
5.2 *b*) De *A* a *B*: $V = \frac{Pb}{L}$; $M = Pbx/L$.
De *B* a *C*: $V = Pa/L$; $M = Pa(L - x)/L$.
5.3 *b*) $V = w_0L/2 - w_0\,x^2/2L$; $M = -\,w_0L^2/3 + w_0Lx/2 - w_0x^3/6L$.
5.4 *b*) $V = w(L - x)$; $M = w/2\ (L - x)^2$.
5.5 *b*) $(0 < x < a)$: $V = -P$; $M = Px$. $(a < x < 2a)$: $V = 2P$; $M = -2Px + Pa$.
5.6 *b*) De *A* a *B*: $V = w(a - x)$; $M = w(ax - x^2/2)$.
De *B* a *C*: $V = 0$; $M = wa^2/2$.
De *C* a *D*: $V = w(L - x - a)$; $M = w[a(L - x) - (L - x)^2/2]$.
5.7 *a*) 3.00 kN. *b*) 0.800 kN · m.
5.8 *a*) 150.0 lb. *b*) 1 500 lb · in.
5.9 *a*) 62.5 kN. *b*) 47.6 kN · m.
5.11 *a*) 3.45 kN. *b*) 1 125 N · m.
5.12 *a*) 2 000 lb. *b*) 19 200 lb · in.
5.13 *a*) 900 N. *b*) 112.5 N · m.
5.15 10.89 MPa.
5.16 950 psi.
5.18 139.2 MPa.
5.20 9.90 ksi.
5.21 14.17 ksi.
5.23 $|V|_{máx} = 342$ N; $|M|_{máx} = 51.6$ N · m; $\sigma = 17.19$ MPa.
5.25 10.34 ksi.
5.26 $|V|_{máx} = 6.00$ kN; $|M|_{máx} = 4.00$ kN · m; $\sigma_{máx} = 14.29$ MPa.
5.27 *a*) 10.67 kN. *b*) 9.52 MPa.
5.29 *a*) 866 mm. *b*) 99.2 MPa.
5.30 *a*) 819 mm. *b*) 89.5 MPa.
5.31 *a*) 3.09 ft. *b*) 12.95 ksi.
5.32 1.021 in.
5.33 *a*) 33.3 mm. *b*) 6.66 mm.
5.34 Vea la respuesta 5.1.
5.35 Vea la respuesta 5.2.
5.36 Vea la respuesta 5.3.
5.37 Vea la respuesta 5.4.
5.38 Vea la respuesta 5.5.
5.39 Vea la respuesta 5.6.
5.40 Vea la respuesta 5.7.
5.41 Vea la respuesta 5.8.
5.42 Vea la respuesta 5.9.
5.43 Vea la respuesta 5.10.
5.46 Vea la respuesta 5.15.
5.47 Vea la respuesta 5.16.
5.48 Vea la respuesta 5.18.
5.49 Vea la respuesta 5.20.
5.52 *a*) $V = (w_0L/\pi)\cos(\pi x/L)$; $M = (w_0L^2/\pi^2)$ sen $(\pi x/L)$.
b) w_0L^2/π^2.
5.53 *a*) $V = w_0\,(L^2 - 3x^2)/6L$; $M = w_0(Lx - x^3/L)/6$.
b) 0.0642 w_0L^2.
5.54 $|V|_{máx} = 15.75$ kips; $|M|_{máx} = 27.8$ kip · ft; $\sigma = 13.58$ ksi.
5.55 $|V|_{máx} = 16.80$ kN; $|M|_{máx} = 8.82$ kN · m; $\sigma = 73.5$ MPa.
5.56 $|V|_{máx} = 20.7$ kN; $|M|_{máx} = 9.75$ kN · m; $\sigma = 60.2$ MPa.
5.58 $|V|_{máx} = 1\,400$ lb; $|M|_{máx} = 19.20$ kip · in; $\sigma = 6.34$ ksi.
5.59 $|V|_{máx} = 76.0$ kN; $|M|_{máx} = 67.3$ kN · m; $\sigma = 68.5$ MPa.
5.60 $|V|_{máx} = 48.0$ kN; $|M|_{máx} = 12.00$ kN · m; $\sigma = 62.2$ MPa.
5.61 $|V|_{máx} = 30.0$ lb; $|M|_{máx} = 24.0$ lb · ft; $\sigma = 6.95$ ksi.
5.63 *a*) $|V|_{máx} = 24.5$ kips; $|M|_{máx} = 36.3$ kip · ft; *b*) 15.82 ksi.
5.64 $|V|_{máx} = 1\,150$ N; $|M|_{máx} = 221$ N · m; $P = 500$ N; $Q = 250$ N.
5.65 $h > 173.2$ mm.
5.68 $b > 6.20$ in.
5.69 $h > 203$ mm.
5.70 $b > 48.0$ mm.
5.71 W21 × 62.
5.72 W27 × 84.
5.73 W530 × 92.
5.74 W250 × 28.4.
5.76 S15 × 42.9.
5.77 S510 × 98.2.
5.79 9 mm.
5.80 C180 × 14.6.
5.81 C9 × 15.

5.82 3/8 in.
5.83 W610 × 101.
5.84 W24 × 68.
5.85 176.8 kN/m.
5.86 108.8 kN/m.
5.89 *a*) 1.485 kN/m. *b*) 1.935 m.
5.91 *a*) S15 × 42.9. *b*) W27 × 84.
5.92 *a*) 6.49 ft. *b*) W16 × 31.
5.94 383 mm.
5.95 336 mm.
5.96 W27 × 84.
5.97 +23.2%.
5.98 *a*) $V = -w_0x + w_0\langle x-a\rangle^1$; $M = w_0x^2/2 + (w_0/2)\langle x-a\rangle^2$. *b*) $-3\,w_0a^2/2$.
5.100 *a*) $V = -w_0x + w_0x^2/2a - (w_0/2a)\langle x-a\rangle^2$; $M = -w_0x^2/2 + w_0x^3/6a - (w_0/6a)\langle x-a\rangle^3$. *b*) $-5\,w_0a^2/6$.
5.102 *a*) $V = -w_0\langle x-a\rangle^1 - 3w_0a/4 + (15\,w_0a/4)\langle x-2a\rangle^0$; $M = -(w_0/2)\langle x-a\rangle^2 - 3w_0ax/4 + (15\,w_0a/4)\langle x-2a\rangle^1$. *b*) $-w_0a^2/2$.
5.103 *a*) $V = 1.25\,P - P\langle x-a\rangle^0 - P\langle x-2a\rangle^0$; $M = 1.25\,Px - P\langle x-a\rangle^1 - P\langle x-2a\rangle^1$. *b*) 0.750 Pa.
5.104 *a*) $V = -P/2 - P\langle x-a\rangle^0$; $M = Px/2 - P\langle x-a\rangle^1 + Pa + Pa\langle x-a\rangle^0$. *b*) 3 $Pa/2$.
5.105 *a*) $V = -P\langle x-a\rangle^0$; $M = -P\langle x-a\rangle^1 - Pa\langle x-a\rangle^0$. *b*) $-Pa$.
5.106 *a*) $V = 40 - 48\langle x-1.5\rangle^0 - 60\langle x-3.0\rangle^0 + 60\langle x-3.6\rangle^0$ kN; $M = 40x - 48\langle x-1.5\rangle^1 - 60\langle x-3.0\rangle^1 + 60\langle x-3.6\rangle^1$ kN · m. *b*) 60.0 kN · m.
5.107 *a*) $V = -3 + 9.75\langle x-3\rangle^0 - 6\langle x-7\rangle^0 - 6\langle x-11\rangle^0$ kips; $M = -3x + 9.75\langle x-3\rangle^1 - 6\langle x-7\rangle^1 - 6\langle x-11\rangle^1$ kip · ft. *b*) 21.0 kip · ft.
5.108 *a*) $V = 62.5 - 25\langle x-0.6\rangle^1 + 25\langle x-2.4\rangle^1 - 40\langle x-0.6\rangle^0 - 40\langle x-2.4\rangle^0$ kN; $M = 62.5x - 12.5\langle x-0.6\rangle^2 + 12.5\langle x-2.4\rangle^2 - 40\langle x-0.6\rangle^1 - 40\langle x-2.4\rangle^1$ kN · m *b*) 47.6 kN · m.
5.109 *a*) $V = 13 - 3x + 3\langle x-3\rangle^1 - 8\langle x-7\rangle^0 - 3\langle x-11\rangle^1$ kips; $M = 13x - 1.5x^2 + 1.5\langle x-3\rangle^2 - 8\langle x-7\rangle^1 - 1.5\langle x-11\rangle^2$ kip · ft. *b*) 41.5 kip · ft.
5.110 *a*) $V = 30 - 24\langle x-0.75\rangle^0 - 24\langle x-1.5\rangle^0 - 24\langle x-2.25\rangle^0 + 66\langle x-3\rangle^0$ kN; $M = 30x - 24\langle x-0.75\rangle^1 - 24\langle x-1.5\rangle^1 - 24\langle x-2.25\rangle^1 + 66\langle x-3\rangle^1$ kN · m. *b*) 87.7 MPa.
5.114 *a*) 122.7 kip · ft a $x = 6.50$ ft. *b*) W16 × 40.
5.115 *a*) 121.5 kip · ft a $x = 6.00$ ft. *b*) W16 × 40.
5.118 $|V|_{máx} = 35.6$ kN; $|M|_{máx} = 25.0$ kN · m
5.119 $|V|_{máx} = 89.0$ kN; $|M|_{máx} = 178.0$ kN · m
5.120 $|V|_{máx} = 15.30$ kips; $|M|_{máx} = 38.0$ kip · ft.
5.122 *a*) $|V|_{máx} = 13.80$ kN; $|M|_{máx} = 16.16$ kN · m *b*) 83.8 MPa.
5.123 *a*) $|V|_{máx} = 40.0$ kN; $|M|_{máx} = 30.0$ kN · m *b*) 40.0 MPa.
5.124 *a*) $|V|_{máx} = 3.84$ kips; $|M|_{máx} = 3.80$ kip · ft. *b*) 0.951 ksi.
5.126 *a*) $h = h_0\,[(x/L)\,(1 - x/L)]^{1/2}$. *b*) 4.44 kip · in.
5.127 *a*) $h = h_0\,(x/L)^{1/2}$. *b*) 20.0 kips.
5.128 *a*) $h = h_0\,(x/L)^{3/2}$. *b*) 167.7 mm.
5.130 *a*) $h = h_0\sqrt{2x/L}$. *b*) 60.0 kN.
5.132 $l_2 = 6.00$ ft; $l_2 = 4.00$ ft.
5.134 1.800 m.
5.135 1.900 m.
5.136 $d = d_0\,(2x/L)^{1/3}$ para $0 \le x \le L/2$; $d = d_0\,[2\,(L-x)/L]^{1/3}$ para $L/2 \le x \le L$.
5.139 *a*) $b = b_0\,(1 - x/L)^2$. *b*) 160.0 lb/in.
5.140 *a*) 155.2 MPa. *b*) 143.3 MPa.
5.141 *a*) 25.0 ksi. *b*) 18.03 ksi.
5.143 193.8 kN.
5.144 *a*) 152.6 MPa. *b*) 133.6 MPa.
5.145 *a*) 4.49 m. *b*) 211 mm.
5.147 *a*) 11.16 ft. *b*) 14.31 in.
5.149 *a*) 240 mm. *b*) 150.0 MPa.
5.150 *a*) 15.00 in. *b*) 320 lb/in.
5.151 *a*) 30.0 in. *b*) 12.80 kips.
5.152 *a*) 85.0 N. *b*) 21.3 N · m.
5.154 *a*) 1.260 ft. *b*) 7.24 ksi.
5.156 $|V|_{máx} = 200$ kN; $|M|_{máx} = 300$ kN · m; 136.4 MPa.
5.158 $h > 14.27$ in.
5.159 W27 × 84.
5.161 *a*) 225.6 kN · m a $x = 3.63$ m. *b*) 60.6 MPa.
5.163 *a*) $b_0\,(1 - x/L)$. *b*) 20.8 mm.
5.C4 Para $x = 13.5$ ft: $M_1 = 131.25$ kip · ft; $M_2 = 156.25$ kip · ft; $M_C = 150.0$ kip · ft.
5.C6 *Prob. 5.112:* $V_A = 29.5$ kN, $M_{máx} = 28.3$ kN · m, a 1.938 m de *A*.

CAPÍTULO 6

6.1 60.0 mm.
6.2 2.00 kN.
6.3 326 lb.
6.4 *a*) 155.8 N. *b*) 329 kPa.
6.5 193.5 kN.
6.7 10.56 ksi.
6.9 *a*) 8.97 MPa. *b*) 8.15 MPa.
6.11 *a*) 13.15 ksi. *b*) 11.16 ksi.
6.12 *a*) 3.17 ksi. *b*) 2.40 ksi.
6.13 114.0 kN.
6.15 1 733 lb.
6.17 *a*) 84.2 kips. *b*) 60.2 kips.
6.18 87.3 mm.
6.19 *b*) $h = 320$ mm; $b = 97.7$ mm.
6.21 *a*) 1.745 ksi. *b*) 2.82 ksi.
6.22 *a*) 31.0 MPa. *b*) 23.2 MPa.
6.23 3.21 ksi.
6.24 32.7 MPa.
6.26 *a*) Línea en la altura media. *b*) 2.00.
6.28 *a*) Línea en la altura media. *b*) 1.500.
6.29 1.672 in.
6.30 10.79 kN.
6.31 *a*) 59.9 psi. *b*) 79.8 psi.
6.32 *a*) 379 kPa. *b*) 0.
6.35 *a*) 95.2 MPa. *b*) 112.8 MPa.
6.36 *a*) 101.6 MPa. *b*) 79.9 MPa.
6.37 $\tau_a = 33.7$ MPa; $\tau_b = 75.0$ MPa; $\tau_c = 43.5$ MPa.
6.38 *a*) 40.5 psi. *b*) 55.2 psi.
6.40 $\tau_a = 0$; $\tau_b = 1.262$ ksi; $\tau_c = 3.30$ ksi; $\tau_d = 6.84$ ksi; $\tau_e = 7.86$ ksi.
6.42 *a*) 18.23 MPa. *b*) 14.59 MPa. *c*) 46.2 MPa.
6.43 7.19 ksi.
6.44 9.05 mm.
6.45 0.371 in.
6.46 83.3 MPa.
6.48 $\tau_a = 10.76$ MPa; $\tau_b = 0$; $\tau_c = 11.21$ MPa; $\tau_d = 22.0$ MPa; $\tau_e = 9.35$ MPa.
6.49 *a*) 50.9 MPa. *b*) 62.4 MPa.
6.51 1.4222 in.
6.52 10.53 ksi.
6.56 *a*) 6.73 MPa. *b*) 1.515 MPa.
6.57 *a*) 23.3 MPa. *b*) 109.7 MPa.
6.58 *a*) 1.323 ksi. *b*) 1.329 ksi.
6.59 *a*) 0.888 ksi. *b*) 1.453 ksi.
6.61 0.345*a*.
6.62 0.714*a*.
6.63 1.250*a*.
6.64 $3(b^2 - a^2)/[6(a + b) + h]$.

6.65 *a*) 19.06 mm. *b*) $\tau_A = 0$; $(\tau_B)_{AB} = 50.5$ MPa; $(\tau_B)_{BD} = 25.3$ MPa; $\tau_c = 59.0$ MPa.
6.68 *a*) 10.22 mm. *b*) 0 en *B* y *E*; 41.1 MPa en *A*; 68.5 MPa justo por encima de *D*; 13.71 MPa justo a la derecha de *D*; 77.7 MPa justo debajo de *D*; 81.8 MPa en el centro de *DF*.
6.69 0.727 in.
6.70 20.2 mm.
6.71 1.265 in.
6.72 6.14 mm.
6.75 2.37 in.
6.76 21.7 mm.
6.77 40.0 mm.
6.78 3.75 in.
6.81 (máximo) P/at.
6.82 (máximo) 1.333 P/at.
6.83 *a*) 144.6 N · m. *b*) 65.9 MPa.
6.84 *a*) 144.6 N · m. *b*) 106.6 MPa.
6.87 (máximo) 0.428 ksi en *B*′.
6.88 (máximo) 1.287 ksi en *C*′.
6.89 738 N.
6.90 *a*) 17.63 MPa. *b*) 13.01 MPa.
6.91 143.3 kips.
6.93 189.6 lb.
6.94 *a*) 41.4 MPa. *b*) 41.4 MPa.
6.96 53.9 kips.
6.97 *a*) 146.1 kN/m. *b*) 19.99 MPa.
6.99 40.0 mm.
6.100 0.433 in.
6.C1 *a*) $h = 173.2$ mm. *b*) $h = 379$ mm.
6.C2 *a*) $L = 37.5$ in; $b = 1.250$ in. *b*) $L = 70.3$ in; $b = 1.172$ in. *c*) $L = 59.8$ in; $b = 1.396$ in.
6.C4 *a*) $\tau_{\text{máx}} = 2.03$ ksi; $\tau_B = 1.800$ ksi. *b*) 194 psi.
6.C5 *Prob. 6.66: a*) 2.67 in. *b*) $\tau_B = 0.917$ ksi; $\tau_D = 3.36$ ksi; $\tau_{\text{máx}} = 4.28$ ksi.

CAPÍTULO 7

7.1 $\sigma = 9.46$ ksi; $\tau = 1.013$ ksi.
7.2 $\sigma = 32.9$ MPa; $\tau = 71.0$ MPa.
7.3 $\sigma = 10.93$ ksi; $\tau = 0.536$ ksi.
7.4 $\sigma = -0.521$ MPa; $\tau = 56.4$ MPa.
7.5 *a*) –37.0°, 53.0°. *b*) –13.60 MPa. *c*) –86.4 MPa.
7.7 *a*) – 26.6°; 63.4°. *b*) 190.0 MPa, –10.00 MPa.
7.9 *a*) 8.0°, 98.0°. *b*) 36.4 MPa. *c*) –50.0 MPa.
7.10 *a*) –26.6°, 63.4°. *b*) 5.00 ksi. *c*) 6.00 ksi.
7.11 *a*) 18.4°, 108.4°. *b*) 100.0 MPa. *c*) 90.0 MPa.
7.12 *a*) –31.0°, 59.0° *b*) 17.00 ksi. *c*) 3.00 ksi.
7.13 *a*) $\sigma_{x'} = -2.40$ ksi; $\tau_{x'y'} = 0.1498$ ksi; $\sigma_{y'} = 10.40$ ksi. *b*) $\sigma_{x'} = 1.951$ ksi; $\tau_{x'y'} = 6.07$ ksi; $\sigma_{y'} = 6.05$ ksi.
7.15 *a*) $\sigma_{x'} = 9.02$ ksi; $\tau_{x'y'} = 3.80$ ksi; $\sigma_{y'} = -13.02$ ksi. *b*) $\sigma_{x'} = 5.34$ ksi; $\tau_{x'y'} = -9.06$ ksi; $\sigma_{y'} = -9.34$ ksi.
7.17 *a*) 217 psi. *b*) –125.0 psi.
7.18 *a*) –0.300 MPa. *b*) –2.92 MPa.
7.19 16.58 kN.
7.21 *a*) 18.4°. *b*) 16.67 ksi.
7.23 *a*) 18.9°, 108.9°, 18.67 MPa, –158.5 MPa. *b*) 88.6 MPa.
7.24 *a*) 25.1 ksi, –0.661 ksi, 12.88 ksi.
7.25 5.12 ksi, –1.640 ksi, 3.38 ksi.
7.26 12.18 MPa, –48.7 MPa; 30.5 MPa.
7.27 205 MPa.
7.29 *a*) –2.89 MPa. *b*) 12.77 MPa, 1.226 MPa.
7.53 *a*) –8.66 MPa. *b*) 17.00 MPa, –3.00 MPa.
7.55 33.8°, 123.8°; 168.6 MPa, 6.42 MPa.
7.56 0°, 90°; σ_0, $-\sigma_0$.
7.57 –30°, 60°; $-\sqrt{3}\tau_0$, $\sqrt{3}\tau_0$.
7.58 $-120.0 \text{ MPa} \le \tau_{xy} \le 120.0$ MPa.
7.59 $-141.4 \text{ MPa} \le \tau_{xy} \le 141.1$ MPa.
7.61 $16.5° \le \theta \le 110.1°$.
7.62 $-5.1° \le \theta \le 132.0°$.
7.63 *a*) 33.7°, 123.7°. *b*) 18.00 ksi. *c*) 6.50 ksi.
7.65 *b*) $|\tau_{xy}|_{\text{máx}} = \sqrt{\sigma_x\sigma_y - \sigma_{\text{máx}}\sigma_{\text{mín}}}$.
7.66 *a*) 13.00 ksi. *b*) 15.00 ksi.
7.68 *a*) 94.3 MPa. *b*) 105.3 MPa.
7.69 *a*) 100.0 MPa. *b*) 110.0 MPa.
7.70 *a*) 91.0 MPa. *b*) 91.0 MPa. *c*) 108.0 MPa.
7.71 *a*) 113.0 MPa. *b*) 91.0 MPa. *c*) 143.0 MPa.
7.73 *a*) 18.5 ksi. *b*) 13.00 ksi. *c*) 11.00 ksi.
7.74 *a*) ±6.00 ksi. *b*) ±11.24 ksi.
7.75 ±60.0 MPa.
7.77 2.00 ksi; 9.33 ksi.
7.79 –40.0 MPa; 130.0 MPa.
7.80 *a*) 45.7 MPa. *b*) 92.9 MPa.
7.81 *a*) 1.228. *b*) 1.098. *c*) Se presenta cedencia.
7.82 *a*) 1.083. *b*) Se presenta cedencia. *c*) Se presenta cedencia.
7.83 *a*) 1.287. *b*) 1.018. *c*) Se presenta cedencia.
7.84 *a*) 1.119. *b*) Se presenta cedencia. *c*) Se presenta cedencia.
7.87 8.19 kip · in.
7.88 9.46 kip · in.
7.89 Ocurrirá la ruptura.
7.90 Ocurrirá la ruptura.
7.91 Sin ruptura.
7.92 Ocurrirá la ruptura.
7.94 ±8.49 MPa.
7.95 50.0 MPa.
7.96 196.9 N · m.
7.98 *a*) 1.290 MPa. *b*) 0.852 mm.
7.100 5.49.
7.102 10.25 ksi; 5.12 ksi.
7.103 2.94 MPa.
7.104 12.76 m.
7.105 $\sigma_{\text{máx}} = 113.7$ MPa; $\tau_{\text{máx}} = 56.8$ MPa.
7.106 $\sigma_{\text{máx}} = 136.0$ MPa; $\tau_{\text{máx}} = 68.0$ MPa.
7.108 $\sigma_{\text{máx}} = 78.5$ MPa; $\tau_{\text{máx}} = 39.3$ MPa.
7.109 251 psi.
7.111 0.307 in.
7.112 3.29 MPa.
7.113 3.80 MPa.
7.114 *a*) 44.2 MPa. *b*) 15.39 MPa.
7.115 56.8°.
7.117 *a*) 3 750 psi. *b*) 1 079 psi.
7.118 387 psi.
7.120 *a*) 3.15 ksi. *b*) 1.9993 ksi.
7.121 *a*) 1.486 ksi. *b*) 3.16 ksi.
7.122 $\sigma_{\text{máx}} = 68.6$ MPa; $\tau_{\text{máx}} = 34.3$ MPa.
7.124 $\sigma_{\text{máx}} = 77.4$ MPa; $\tau_{\text{máx}} = 38.7$ MPa.
7.126 *a*) 5.64 ksi. *b*) 282 psi.
7.127 *a*) 2.28 ksi. *b*) 228 psi.
7.128 $\epsilon_{x'} = -653\ \mu$; $\epsilon_{y'} = 303\ \mu$; $\gamma_{x'y'} = -829\ \mu$.
7.129 $\epsilon_{x'} = 115.0\ \mu$; $\epsilon_{y'} = 285\ \mu$; $\gamma_{x'y'} = -5.72\ \mu$.
7.131 $\epsilon_{x'} = 36.7\ \mu$; $\epsilon_{y'} = 283\ \mu$; $\gamma_{x'y'} = 227\ \mu$.
7.132 $\epsilon_{x'} = -653\ \mu$; $\epsilon_{y'} = 303\ \mu$; $\gamma_{x'y'} = -829\ \mu$.
7.133 $\epsilon_{x'} = 115.0\ \mu$; $\epsilon_{y'} = 285\ \mu$; $\gamma_{x'y'} = -5.72\ \mu$.
7.135 $\epsilon_{x'} = 36.7\ \mu$; $\epsilon_{y'} = 283\ \mu$; $\gamma_{x'y'} = 227\ \mu$.
7.136 *a*) –33.7°, 56.3°; –420 μ, 100 μ, 160 μ. *b*) 520 μ. *c*) 580 μ.
7.137 *a*) –30.1°, 59.9°; –702 μ, –298 μ, 500 μ. *b*) 403 μ. *c*) 1 202 μ.
7.139 *a*) –26.6°, 64.4°; –150.0 μ, 750 μ, –300 μ. *b*) 900 μ. *c*) 1 050 μ.
7.140 *a*) 7.8°, 97.8°; 56.6 μ, 243 μ, 0. *b*) 186.8 μ. *c*) 243 μ.
7.141 *a*) 121.0°, 31.0°; 513 μ, 87.5 μ, 0. *b*) 425 μ. *c*) 513 μ.
7.143 *a*) 127.9°, 37.9°; –383 μ, –57.5 μ, 0. *b*) 325 μ. *c*) 383 μ.
7.146 *a*) -300×10^{-6} in/in. *b*) 435×10^{-6} in/in, -315×10^{-6} in/in; 750×10^{-6} in/in.
7.149 *a*) 30.0°, 120.0°; 560×10^{-6} in/in, -140.0×10^{-6} in/in. *b*) 700×10^{-6} in/in.

7.150 $P = 69.6$ kips; $Q = 30.3$ kips.
7.151 $P = 34.8$ kips; $Q = 38.4$ kips.
7.154 1.421 MPa.
7.155 1.761 MPa.
7.156 –22.5°, 67.5°; 426 μ, –952 μ, –224 μ.
7.157 –32.1°, 57.9°; –70.9 MPa, –29.8 MPa.
7.158 –4.76 ksi; –0.467 ksi.
7.159 *a*) 47.9 MPa. *b*) 102.7 MPa.
7.161 $\theta/2$, $(\theta + \pi)/2$; $\sigma_0 + \sigma_0 \cos\theta$, $\sigma_0 - \sigma_0 \cos\theta$.
7.163 *a*) 40.0 MPa. *b*) 72.0 MPa.
7.164 *a*) 1.286, *b*) 1.018. *c*) Se presenta cedencia.
7.165 $\sigma_{\text{máx}} = 45.1$ MPa; $\tau_{\text{máx}}$(en el plano) $= 9.40$ MPa.
7.167 3.43 ksi (compresión).
7.169 415×10^{-6} in/in.
7.C1 *Prob. 7.14:* *a*) –56.2 MPa, 86.2 MPa, –38.2 MPa.
b) –45.2 MPa, 75.2 MPa, 53.8 MPa.
Prob. 7.16: *a*) 24.0 MPa, –104.0 MPa, –1.50 MPa.
b) –19.51 MPa, –60.5 MPa, –60.7 MPa.
7.C4 *Prob. 7.93:* La ruptura ocurre en $\tau_0 = 3.67$ ksi.
7.C6 *Prob. 7.138:* *a*) –21.6°, 68.4°; 279μ, –599μ, 160.0μ.
b) 877μ. *c*) 877μ.
7.C7 *Prob. 7.142:* *a*) 11.3°, 101.3°; 310μ, 50.0μ, 0.
b) 260μ. *b*) 310μ.
7.C8 *Prob. 7.144:* $\epsilon_x = 253\mu$; $\epsilon_y = 307$; $\gamma_{xy} = -893$.
$\epsilon_a = 727\mu$; $\epsilon_b = -167.2$; $\gamma_{\text{máx}} = -894$.
Prob. 7.145: $\epsilon_x = 725\mu$; $\epsilon_y = -75.0$; $\gamma_{xy} = 173.2$.
$\epsilon_a = 734\mu$; $\epsilon_b = -84.3$; $\gamma_{\text{máx}} = 819$.

CAPÍTULO 8

8.1 *a*) 10.69 ksi. *b*) 19.18 ksi. *c*) No es aceptable.
8.2 *a*) 10.69 ksi. *b*) 13.08 ksi. *c*) Es aceptable.
8.3 *a*) 94.6 MPa. *b*) 93.9 MPa. *c*) Es aceptable.
8.4 *a*) 91.9 MPa. *b*) 95.1 MPa. *c*) Es aceptable.
8.5 *a*) W 310 × 38.7. *b*) 147.8 MPa; 18.18 MPa; 140.2 MPa.
8.6 *a*) W 690 × 125. *b*) 118.2 MPa; 34.7 MPa; 122.3 MPa.
8.9 *a*) 137.5 MPa. *b*) 129.5 MPa.
8.11 *a*) 17.90 ksi. *b*) 17.08 ksi.
8.12 *a*) 19.39 ksi. *b*) 20.7 ksi.
8.13 *a*) 131.3 MPa. *b*) 135.5 MPa.
8.15 41.2 mm.
8.19 873 lb.
8.20 1.578 in.
8.22 *a*) *H* : 6 880 psi; *K* : 6 760 psi. *b*) *H* : 7 420 psi; *K* : 7 010 psi.
8.23 57.7 mm.
8.24 54.3 mm.
8.27 37.0 mm.
8.28 43.9 mm.
8.29 1.822 in.
8.30 1.792 in.
8.31 *a*) 11.06 ksi; 0. *b*) –0.537 ksi; 1.610 ksi. *c*) –12.13 ksi; 0.
8.32 *a*) –12.34 ksi; 0. *b*) –1.073 ksi; 0.805 ksi. *c*) 10.20 ksi; 0.
8.35 *a*) –37.9 MPa; 14.06 MPa. *b*) –131.6 MPa; 0.
8.36 *a*) –32.5 MPa; 14.06 MPa. *b*) –126.2 MPa; 0.
8.37 *a*) 0; 3.34 ksi. *b*) –8.80 ksi; 2.93 ksi.
8.38 *a*) 20.4 MPa; 14.34 MPa. *b*) –21.5 MPa; 19.98 MPa.
8.39 *a*) 4.79 ksi; 3.07 ksi. *b*) –2.57 ksi; 3.07 ksi.
8.40 –14.98 MPa; 17.29 MPa.
8.42 55.0 MPa, –55.0 MPa; –45.0°, 45.0°; 55.0 MPa.
8.43 *a*) 4.30 MPa, –93.4 MPa; 12.1°, 102.1°. *b*) 48.9 MPa.
8.46 *a*) 3.47 ksi; 1.042 ksi. *b*) 7.81 ksi; 0.781 ksi. *c*) 12.15 ksi; 0.
8.47 *a*) 18.39 MPa; 0.391 MPa. *b*) 21.3 MPa; 0.293 MPa.
c) 24.1 MPa; 0.
8.48 *a*) –7.98 MPa; 0.391 MPa. *b*) –5.11 MPa; 0.293 MPa.
c) –2.25 MPa; 0.
8.49 1 506 psi, –4 150 psi; 31.1°, 121.1°; 2 830 psi.
8.51 25.2 MPa, –0.870 MPa; 13.06 MPa.
8.52 34.6 MPa, –10.18 MPa; 22.4 MPa.
8.53 *a*) 86.5 MPa; 0. *b*) 57.0 MPa; 9.47 MPa.
8.55 12.94 MPa, –1.328 MPa; 7.13 MPa.
8.57 4.05 ksi, –0.010 ksi; 2.03 ksi.
8.58 1.468 ksi, –3.90 ksi; 2.68 ksi.
8.60 *a*) 51.0 kN. *b*) 39.4 kN.
8.61 12.2 MPa, –12.2 MPa; 12.2 MPa.
8.62 *a*) 12.90 ksi, –0.32 ksi; –8.9°, 81.1°; 6.61 ksi.
b) 6.43 ksi, –6.43 ksi; ± 45.0°; 6.43 ksi.
8.64 0.48 ksi, –44.7 ksi; 22.6 ksi.
8.65 *a*) W14 × 22. *b*) 23.6 ksi, 4.89 ksi; 22.4 ksi.
8.66 *BC*: 21.7 mm; *CD*: 33.4 mm.
8.68 46.5 mm.
8.69 *a*) –11.07 ksi; 0. *b*) 2.05 ksi; 2.15 ksi. *c*) 15.17 ksi; 0.
8.71 $P\,(2R + 4r/3)/\pi r^3$.
8.74 30.1 MPa, –0.62 MPa; –8.2°, 81.8°; 15.37 MPa.
8.75 *a*) –16.41 ksi; 0. *b*) –15.63 ksi; 0.0469 ksi.
c) –7.10 ksi; 1.256 ksi.
8.76 *a*) 7.50 MPa. *b*) 11.25 MPa. *c*) 56.3°; 13.52 MPa.
8.C3 *Prob. 8.18*: 37.3 mm.
8.C5 *Prob. 8.45*: $\sigma = 6.00$ ksi; $\tau = 0.781$ ksi.

CAPÍTULO 9

9.1 *a*) $y = -(Px^2/6EI)\,(3L - x)$. *b*) $PL^3/3EI$ ↓. *c*) $PL^2/2EI$ ⦩.
9.2 *a*) $y = (M_0/2EI)\,(L - x)^2$. *b*) $M_0L^2/2EI$ ↑. *c*) $M_0\,L/EI$ ⦩.
9.3 *a*) $y = -(w/24EI)\,(x^4 - 4\,L^3x + 3L^4)$. *b*) $wL^4/8EI$ ↓.
c) $wL^3/6EI$ ⦨.
9.4 *a*) $y = -(w_0/120EIL)\,(x^5 - 5L^4x)$. *b*) $w_0L^4/30\,EI$ ↓.
c) $w_0L^3/24\,EI$ ⦨.
9.5 *a*) $y = (w/72\,EI)\,(3x^4 - 16ax^3)$. *b*) $10\,wa^4/9\,EI$ ↓.
c) $4\,wa^3/3EI$ ⦩.
9.7 *a*) $y = (w_0/EIL)\,(L^2x^3/48 - x^5/120 - L^4x/80)$.
b) $w_0\,L^4/256\,EI$ ↓. *c*) $w_0\,L^3/120\,EI$ ⦨.
9.9 *a*) 3.92×10^{-3} rad ⦩. *b*) 0.1806 in. ↓.
9.10 *a*) 2.79×10^{-3} rad ⦩. *b*) 1.859 mm ↓.
9.11 *a*) $0.00652w_0L^4/EI$ ↓; $0.481L$. *b*) 0.229 in. ↓.
9.12 *a*) $0.211L$; $0.01604M_0L^2/EI$. *b*) 6.08 m.
9.13 0.398 in. ↓.
9.16 *a*) $(P/EI)\,(ax^2/2 - aLx/2 + a^3/6)$. *b*) 1.976 mm ↓.
9.17 *a*) $y = -(w_0/EIL^2)\,(L^2x^4/24 - LX^5/30 + X^6/120 - L^4x^2/24)$.
b) $w_0\,L^4/40\,EI$ ↓.
9.18 *a*) $y = w_0\,(x^6 - 15\,L^2x^4 + 25L^3x^3 - 11\,L^5x)/360\,EIL^2$.
b) $11w_0L^3/360\,EI$ ⦩. *c*) $0.00916\,w_0L^4/EI$ ↓.
9.19 $3wL/8$ ↑.
9.20 $3M_0/2L$ ↑.
9.23 4.00 kips ↑.
9.24 9.75 kN ↑.
9.25 $R_B = 5P/16$ ↑; $M_A = -3PL/16$, $M_C = 5PL/32$, $M_B = 0$.
9.26 $R_B = 9M_0/8L$ ↑; $M_A = M_0/8$, $M_{C-} = -7M_0/16$, $M_{C+} = 9M_0/16$.
9.27 $R_A = 9w_0L/640$ ↑; $M_M = 0.00814\,w_0L^2$, $M_B = -0.0276\,w_0L^2$.
9.28 $R_A = 7wL/128$ ↑; $M_C = 0.0273\,wL^2$, $M_B = -0.0703\,wL^2$,
$M = 0.0288\,wL^2$ a $x = 0.555L$.
9.30 $R_B = 17wL/64$ ↑; $y_C = wL^4/1\,024\,EI$ ↓.
9.32 $R_B = 5M_0/6L$ ↓; $y_D = 7M_0L^2/486\,EI$ ↑.
9.33 $wL/2$↑, $wL^2/12$ ↺; $M = w\,[6x\,(L - x) - L^2]/12$.
9.34 $R_A = w_0L/4$ ↑, $M_A = 0.0521\,w_0L^2$ ↺; $M_C = 0.0313\,w_0L_2$.
9.35 *a*) $y = w\{Lx^3/48 - \langle x - L/2\rangle^4/24 - 7L^3x/384\}/EI$.
b) $7wL^3/384\,EI$ ⦩. *c*) $5wL^4/768\,EI$ ↓.
9.36 *a*) $y = (M_0/6EIL)\,\{x^3 - 3L\langle x - a\rangle^2 + (3b^2 - L^2)\,x\}$
b) $M_0\,(3b^2 - L^2)/6EIL$ ⦩. *c*) $M_0\,ab\,(b - a)/3\,EIL$ ↑.
9.37 *a*) $9Pa^3/4EI$ ↓. *b*) $19Pa^3/6EI$ ↓. *c*) $9Pa^3/4EI$↓.
9.38 *a*) $5Pa^3/2EI$ ↓. *b*) $49Pa^3/6EI$. *c*) $15Pa^3/EI$.
9.41 *a*) $y = w\,\{ax^3/6 - \langle x - a\rangle^4/24 + \langle x - 3a\rangle^4/24 - 11\,a^3x/6\}/EI$.
b) $19\,wa^4/8EI$ ↓.
9.43 *a*) $y = w_0\,\{-5L^3x^2/48 + L^2\,x^3/24 - \langle x - L/2\rangle^5/60\}/EIL$.
b) $w_0L^4/48\,EI$ ↓. *c*) $121\,w_0L^4/1\,920\,EI$ ↓.

9.44 *a)* $y = (w/24\,EI)\,[-x^4 + \langle x - L/2\rangle^4 - \langle x - L\rangle^4 + Lx^3 + 3L\,\langle x - L\rangle^3 - L^3x/16]$. *b)* $wL^4/768\,EI$ ↑. *c)* $5wL^4/256\,EI$.
9.45 *a)* 9.51×10^{-3} rad ⦪. *b)* 5.80 mm ↓.
9.46 *a)* 8.66×10^{-3} rad ⦪. *b)* 0.1 503 in ↓.
9.48 *a)* 5.40×10^{-3} rad ⦪. *b)* 3.06 mm ↓.
9.49 *a)* $5P/16$ ↑. *b)* $7\,PL^3/168EI$ ↓.
9.50 *a)* $9M_0/8L$ ↑. *b)* $M_0L^2/128EI$ ↓.
9.51 *a)* $2P/3$ ↑. *b)* $5PL^3/486EI$ ↓.
9.53 *a)* 11.54 kN ↑. *b)* 4.18 mm ↓.
9.54 *a)* 41.3 kN ↑. *b)* 0.705 mm ↓.
9.56 *a)* 7.38 kips ↑. *b)* 0.0526 in ↓.
9.57 *a)* $1.280wa$ ↑; $1.333wa^2$ ↺. *b)* $0.907\,wa^4/EI$ ↓.
9.58 *a)* $20P/27$ ↑; $4PL/27$ ↺. *b)* $5PL^3/1\,296\,EI$ ↓.
9.59 5.80 mm ↓ a $x = 0.991$ m.
9.60 0.1 520 in ↓ a $x = 26.4$ in.
9.61 0.281 in ↓ a $x = 8.40$ ft.
9.62 3.07 mm ↓ a $x = 0.942$ m.
9.65 $wL^3/48EI$ ∡; $wL^4/384EI$ ↑.
9.66 $PL^2/24\,EI$ ⦪; $PL^3/48\,EI$.
9.67 $3PL^2/4\,EI$ ∡; $13\,PL^3/24\,EI$ ↓.
9.68 $Pa\,(2L - a)/2\,EI$ ⦪; $Pa\,(3L^2 - 3aL + a^2)/6\,EI$ ↑.
9.71 *a)* $wL^4/128\,EI$. *b)* $wL^3/72\,EI$.
9.72 *a)* $PL^3/486\,EI$. *b)* $PL^2/81\,EI$ ⦪.
9.73 6.32×10^{-3} rad ⦪; 5.55 mm ↓.
9.75 7.91×10^{-3} rad ∡; 0.340 in ↓.
9.76 6.98×10^{-3} rad ∡; 0.1 571 in ↓.
9.77 *a)* 0.601×10^{-3} rad ⦪. *b)* 3.67 mm ↓.
9.79 *a)* $4P/3$ ↑; $PL/3$ ↺. *b)* $2P/3$ ↑.
9.80 *a)* $41\,wL/128$ ↑. *b)* $23\,wL/128$ ↑; $7wL^2/128$ ↻.
9.82 $R_A = 2M_0/L$ ↑; $R_B = 3M_0/L$ ↓; $R_C = M_C/L$ ↑.
9.84 $wL/2$ ↑, $wL^2/2$ ↻.
9.85 *a)* 5.94 mm ↓. *b)* 6.75 mm ↓.
9.86 $y_B = 0.210$ in. ↓; $y_c = 0.1709$ in ↓.
9.87 *a)* 5.06×10^{-3} rad ⦪. *b)* 0.0477 in ↓.
9.88 121.5 N/m.
9.90 5.63 kN.
9.91 *a)* 0.00937 mm ↓. *b)* 229 N ↑.
9.93 0.278 in ↓.
9.94 9.31 mm ↓.
9.95 *a)* M_0L/EI ⦪. *b)* $M_0L^2/2EI$ ↑.
9.96 *a)* $PL^2/2EI$ ∡. *b)* $PL^3/3\,EI$ ↓.
9.97 *a)* $wL^3/6EI$ ∡. *b)* $wL^4/8EI$ ↓.
9.98 *a)* $w_0L^3/24EI$ ∡. *b)* $w_0L^4/30\,EI$ ↓.
9.101 *a)* 4.24×10^{-3} rad ⦪. *b)* 0.0698 in ↓.
9.102 *a)* 5.20×10^{-3} rad ∡. *b)* 10.85 mm ↓.
9.103 *a)* 5.84×10^{-3} rad ⦪. *b)* 0.300 in ↓.
9.104 *a)* 7.15×10^{-3} rad ∡. *b)* 17.67 mm ↓.
9.105 *a)* $wL^3/16EI$ ∡. *b)* $47wL^4/1\,152\,EI$ ↓.
9.107 *a)* 3.43×10^{-3} rad ∡. *b)* 6.66 mm ↓.
9.109 *a)* $PL^2/16EI$ ⦪. *b)* $PL^3/48EI$ ↓.
9.110 *a)* $Pa(L - a)/2EI$ ⦪. *b)* $Pa\,(3L^2 - 4a^2)/24EI$ ↓.
9.111 *a)* $PL^2/32\,EI$ ⦪. *b)* $PL^3/128EI$ ↓.
9.112 *a)* $wa^2\,(3L - 2a)/12EI$ ⦪. *b)* $wa^2\,(3L^2 - 2a^2/48EI)$ ↓.
9.113 *a)* $M_0\,(L - 2a)/2EI$ ⦪. *b)* $M_0\,(L^2 - 4a^2)/8EI$ ↓.
9.115 *a)* $5Pa^2/8EI$ ⦪. *b)* $3Pa^3/4EI$ ↓.
9.118 *a)* 4.71×10^{-3} rad ⦪. *b)* 5.84 mm ↓.
9.119 *a)* 4.50×10^{-3} rad ⦪. *b)* 8.26 mm ↓.
9.120 *a)* 5.21×10^{-3} rad ⦪. *b)* 21.2 mm ↓.
9.122 3.84 kN/m.
9.123 $0.211L$.
9.124 $0.223L$.
9.125 *a)* $4PL^3/243EI$ ↑. *b)* $14\,PL^2/81\,EI$ ∡.
9.126 *a)* $5PL^3/768EI$ ↓. *b)* $3PL^2/128\,EI$ ⦪.
9.128 *a)* $5w_0L^4/768\,EI$ ↓. *b)* $7w_0\,L^3/360\,EI$ ⦪.
9.129 *a)* 8.74×10^{-3} rad ⦪. *b)* 15.10 mm ↓.
9.130 *a)* 7.48×10^{-3} rad ⦪. *b)* 5.35 mm ↓.
9.132 *a)* 5.31×10^{-3} rad ⦪. *b)* 0.204 in ↓.
9.133 *a)* $M_0\,(L + 3a)/3EI$ ∡. *b)* $M_0a\,(2L + 3a)/6\,EI$ ↓.
9.135 *a)* 5.33×10^{-3} rad ∡. *b)* 0.01421 in ↓.
9.136 *a)* 3.61×10^{-3} rad ⦪. *b)* 0.960 mm ↑.
9.137 *a)* 2.34×10^{-3} rad ⦪. *b)* 0.1763 in ↓.
9.139 *a)* $9wL^3/256\,EI$ ⦪. *b)* $7wL^3/256\,EI$ ∡. *c)* $5wL^4/512EI$ ↓.
9.140 *a)* $17PL^3/972\,EI$ ↓. *b)* $19PL^3/972\,EI$ ↓.
9.142 $0.00652\,w_0L^4/EI$ a $x = 0.519L$.
9.144 0.212 in para $x = 5.15$ ft.
9.145 0.1049 in.
9.146 1.841 mm.
9.147 $5P/16$ ↑.
9.148 $9M_0/8L$.
9.150 $7wL/128$ ↑.
9.152 $R_A = 3P/32$ ↓; $R_B = 13P/32$ ↑; $R_C = 11P/16$ ↑.
9.153 *a)* 6.87 mm ↑. *b)* 46.3 kN ↑.
9.154 10.18 kips ↑; $M_A = -87.9$ kip · ft; $M_D = 46.3$ kip · ft; $M_B = 0$.
9.155 $48\,EI/7L^3$.
9.156 $144\,EI/L^3$.
9.157 *a)* $y = (w_0/EIL)\,(L^3x^2/6 - Lx^4/12 + x^5/120)$. *b)* $11w_0L^4/120\,EI$ ↓. *c)* $w_0L^3/8EI$ ⦪.
9.158 *a)* $0.0642\,M_0L^2/EI$ a+ $x = 0.423\,L$. *b)* 45.3 kN · m.
9.160 $R_A = R_B = P/2$ ↑, $M_A = PL/8$ ↺; $M_B = PL/8$ ↻; $M_C = PL/8$.
9.161 *a)* 2.49×10^{-3} rad ⦪. *b)* 1.078 mm ↓.
9.163 0.210 in ↓.
9.165 *a)* 2.55×10^{-3} rad ⦪. *b)* 6.25 mm ↓.
9.166 *a)* 5.86×10^{-3} rad ∡. *b)* 0.0690 in ↑.
9.168 *a)* 65.2 kN ↑; $M_A = 0°$; $M_D = 58.7$ kN · m; $M_B = -82.8$ kN · m.
9.C1 *Prob. 9.74:* 5.56 × 10^{-3} rad ⦪; 2.50 mm ↓.
9.C2 *a = 6 ft: a)* 3.14 × 10^{-3} rad ⦪, 0.292 in ↓; *b)* 0.397 in ↓ a 11.27 ft a la derecha de A.
9.C3 $x = 1.6$ m: *a)* 7.90 × 10^{-3} rad ⦪, 8.16 mm ↓; *b)* 6.05 × 10^{-3} rad ⦪, 5.79 mm ↓; *c)* 1.021 × 10^{-3} rad ⦪, 0.314 mm ↓.
9.C5 *a)* $a = 3$ ft: 1.586 × 10^{-3} rad ⦪; 0.1369 in ↓; *b)* $a = 1.0$ m: 0.293 × 10^{-3} rad ⦪, 0.479 mm ↓.
9.C7 $x = 2.5$ m: 5.31 mm ↓; $x = 5.0$ m: 11.2.28 mm ↓.

CAPÍTULO 10

10.1 kL.
10.2 k/L.
10.3 $kL/4$.
10.4 $2\,kL/9$.
10.6 120.0 kips.
10.7 $ka^2/2l$.
10.9 305 kN.
10.10 8.37 lb.
10.11 1.421.
10.13 14.10 mm; el puntal redondo; 61.4 kN; el puntal cuadrado: 64.3 kN.
10.15 70.2 kips.
10.16 467 kN.
10.17 335 kips.
10.19 2.27.
10.21 *a)* 0.500. *b)* 2.46.
10.22 *a)* $L_{BC} = 4.20$ ft; $L_{CD} = 1.050$ ft. *b)* 4.21 kips.
10.24 657 mm.
10.25 *a)* 0.500. *b)* $b = 14.15$ mm; $d = 28.3$ mm.
10.27 *a)* 2.55. *b)* $d_2 = 28.3$ mm; $d_3 = 14.14$ mm; $d_4 = 16.72$ mm; $d_5 = 20.0$ mm.
10.28 1) 319 kg; 2) 79.8 kg; 3) 319 kg; 4) 653 kg.
10.29 *a)* 4.32 mm. *b)* 44.4 MPa.
10.30 *a)* 1.658 mm. *b)* 78.9 MPa.
10.32 *a)* 0.0399 in. *b)* 19.89 ksi.
10.34 *a)* 0.247 in. *b)* 12.95 ksi.
10.35 *a)* 13.29 kips. *b)* 15.50 ksi.
10.36 *a)* 235 kN. *b)* 149.6 MPa.

10.37 *a*) 151.6 kN. *b*) 109.5 MPa.
10.39 *a*) 370 kN. *b*) 104.6 MPa.
10.40 *a*) 224 kN. *b*) 63.3 MPa.
10.41 58.9°F.
10.43 *a*) 189.0 kN. *b*) 229 kN.
10.44 *a*) 147.0 kN. *b*) 174.0 kN.
10.45 *a*) 49.6 kips. *b*) 0.412.
10.47 1.302 m.
10.49 *a*) 26.8 ft. *b*) 8.40 ft.
10.50 *a*) 4.54 m. *b*) 2.41 m.
10.51 W 200 × 26.6.
10.53 2.125 in.
10.54 2.625 in.
10.56 3.09.
10.57 *a*) 220 kN. *b*) 841 kN.
10.58 *a*) 86.6 kips. *b*) 88.1 kips.
10.59 414 kN.
10.60 35.9 kN.
10.62 *a*) 26.6 kN. *b*) 33.0 kN.
10.64 76.8 kips.
10.65 76.3 kips.
10.66 1 596 kN.
10.68 173.5 kips.
10.69 *a*) 66.3 kN. *b*) 243 kN.
10.71 123.1 mm.
10.72 6.53 in.
10.74 1.615 in.
10.75 22.3 mm.
10.77 W200 × 46.1.
10.78 W14 × 82.
10.79 W10 × 54.
10.80 *a*) 30.1 mm. *b*) 33.5 mm.
10.83 L89 × 64 × 12.7.
10.84 56.1 kips.
10.86 *a*) P_D = 433 kN; P_L = 321 kN. *b*) P_D = 896 kN; P_L = 664 kN.
10.87 W310 × 74.
10.88 5/16 in.
10.89 76.7 kN.
10.91 *a*) 18.26 kips. *b*) 14.20 kips.
10.92 *a*) 21.1 kips. *b*) 18.01 kips.
10.93 *a*) 329 kN. *b*) 280 kN.
10.95 *a*) 0.698 in. *b*) 2.11 in.
10.97 16.44 ft.
10.99 5.48 m.
10.100 4.81 m.
10.101 1.021 m.
10.102 1.175 m.
10.103 83.4 mm.
10.104 87.2 mm.
10.105 12.00 mm.
10.106 15.00 mm.
10.107 140.0 mm.
10.109 1.882 in.
10.110 1.735 in.
10.111 $t = \frac{1}{4}$ in.
10.113 W14 × 145.
10.114 W14 × 68.
10.116 W250 × 58.
10.117 *a*) 647 lb. *b*) 0.651 in. *c*) 58.8%.
10.118 $k >$ 4.91 kN/m.
10.120 *a*) 47.2°. *b*) 1.582 kips.
10.121 2.44.
10.123 $\Delta T = \pi^2 b^2/12L^2\,\alpha$.
10.125 107.7 kN.
10.126 W250 × 67.
10.128 *a*) 0.0987 in. *b*) 0.787 in.
10.C1 r = 8 mm: 9.07 kN. r = 16 mm: 70.4 kN.
10.C2 b = 1.0 in: 3.85 kips. b = 1.375 in: 6.07 kips.
10.C3 h = 5.0 m: 9 819 kg. h = 7.0 m: 13 255 kg.
10.C4 P = 35 kips: *a*) 0.086 in; *b*) 4.69 ksi.
P = 55 kips: *a*) 0.146 in; *b*) 7.65 ksi.
10.C6 *Prob. 10.113:* P_{perm} = 282.6 kips.
Prob. 10.114: P_{perm} = 139.9 kips.

CAPÍTULO 11

11.1 *a*) 43.1 in · lb/in³. *b*) 72.8 in · lb/in³. *c*) 172.4 in · lb/in³.
11.2 *a*) 21.6 kJ/m³. *b*) 336 kJ/m³, *c*) 163.0 kJ/m³.
11.3 *a*) 177.9 kJ/m³. *b*) 712 kJ/m³. *c*) 160.3 kJ/m³.
11.5 *a*) 58.0 in · lb/in³. *b*) 20.0 in · kip/in³.
11.6 *a*) 1 296 kJ/m³. *b*) 90.0 MJ/m³.
11.7 *a*) 1.750 MJ/m³. *b*) 71.2 MJ/m³.
11.9 *a*) 176.2 in · lb.
b) u_{AB} = 11.72 in · lb/in³; u_{BC} = 5.65 in · lb/in³.
11.10 *a*) 12.18 J. *b*) u_{AB} = 15.83kJ/m³; u_{BC} = 38.6 kJ/m³.
11.11 *a*) 168.8 in · lb.
b) u_{CD} = 0.882 in · lb/in³; u_{EF} = 5.65 in · lb/in³.
11.12 0.846 J.
11.15 *a*) 3.28. *b*) 4.25.
11.17 102.7 in · lb.
11.18 1.398 P^2l/EA.
11.20 2.37 P^2l/EA.
11.21 0.233 P^2l/EA.
11.23 6.68 kip · in.
11.24 $W^2L^5/40\,EI$.
11.25 $(P^2a^2/6\,EI)\,(a + L)$.
11.27 $(M_0^2/6\,EIL^2)\,(a^3 + b^3)$.
11.28 89.5 in · lb.
11.30 1 048 J.
11.31 670 J.
11.33 12.70 J.
11.37 *a*) Sin cedencia. *b*) Se presenta cedencia
11.39 *a*) 2.33. *b*) 2.02.
11.40 $(2M_0^2\,L/Ebd^3)\,(1 + 3Ed^2/10GL^2)$.
11.41 $(Q^2/4\pi GL)\ln(R_2/R_1)$.
11.42 24.7 mm.
11.43 25.5 ft/s.
11.44 9.12 lb.
11.45 841 mm.
11.48 11.09 ft/s.
11.50 *a*) 7.54 kN. *b*) 41.3 MPa. *c*) 3.18 mm.
11.51 *a*) 9.60 kN. *b*) 32.4 MPa. *c*) 2.50 mm.
11.52 *a*) 15.63 mm. *b*) 83.8 N · m. *c*) 208 MPa.
11.53 *a*) 7.11 mm. *b*) 140.1 MPa.
11.54 *a*) 0.903 in. *b*) 511 lb · in. *c*) 21.3 ksi.
11.56 *b*) 7.12.
11.57 *b*) 0.152.
11.58 $Pa^2b^2/3EI$ ↓.
11.59 $Pa^2\,(a + L)/3EI$.
11.61 $M_0\,(L + 3a)/3EI$ ⤹.
11.62 $3PL^3/16\,EI$ ↓.
11.63 $3Pa^3/4\,EI$ ↓.
11.65 $M_0L/16\,EI$ ⤹.
11.66 59.8 mm ↓.
11.67 32.4 in.
11.68 3.12°.
11.72 $2.38Pl/EA$ →.
11.73 0.650 in ↓.
11.75 0.366 in ↓.
11.76 1.111 mm ↓.
11.77 *a*) y *b*) $P^2L^3/6\,EI + PM_0L^2/2EI + M_0^2L/2\,EI$.
11.78 *a*) y *b*) $P^2L^3/48\,EI + M_0PL^2/8EI + M_0^2L/2\,EI$.
11.80 *a*) y *b*) $5\,M_0^2L/4\,EI$.
11.82 *a*) y *b*) $M_0^2L/2\,EI$.

11.83 $0.0443wL^4/EI$ ↓.
11.85 $wL^4/768\ EI$ ↑.
11.86 $7wL^3/48\ EI$ ∡.
11.88 $wL^3/384\ EI$ ∡.
11.89 $(Pab/6EIL^2)\ (3La + 2a^2 + 2b^2)$ ⦣.
11.90 $M_0L/6\ EI$ ⦣.
11.91 0.329 in ↓.
11.93 5.12 mm ↓.
11.94 7.25 mm ↓.
11.95 7.07×10^{-3} rad ⦣.
11.96 3.80 mm ↓.
11.97 2.07×10^{-3} rad ∡.
11.99 $x_C = 0$, $y_C = 2.80\ P_L/EA$ ↓.
11.101 0.1613 in ↓.
11.102 0.01034 in ←.
11.103 0.1459 mm ↓.
11.105 *a*) $PL^3/6EI$ ↓. *b*) $0.1443\ PL^3/EI$.
11.106 $\pi PR^3/2\ EI$ ↓.
11.107 *a*) $PR^3/2\ EI$ →. *b*) $\pi PR^3/4\ EI$ ↓.
11.109 $5PL^3/6EI$.
11.111 $5P/16$ ↑.
11.112 $3M_0/2L$ ↑.
11.113 $3M_0\,b(L + a)/2L^3$ ↑.
11.114 $7wL/128$ ↑.
11.117 $P/(1 + 2\cos^3\phi)$.
11.118 $7P/8$.
11.119 $0.652P$.
11.121 $2P/3$.
11.123 136.6 J.
11.124 1.767 in · kip.
11.126 4.76 kg.
11.129 2.55°.
11.130 11.57 mm ↓.
11.134 0.807 in ↓.
11.C2 *a*) $a = 15$ in: $\sigma_D = 17.19$ ksi, $\sigma_C = 21.0$ ksi;
$a = 45$ in: $\sigma_D = 36.2$ ksi, $\sigma_C = 14.74$ ksi.
b) $a = 18.34$ in, $\sigma = 20.67$ ksi.
11.C3 *a*) $L = 200$ mm: $h = 2.27$ mm;
$L = 800$ mm: $h = 1.076$ mm.
b) $L = 440$ mm: $h = 3.23$ mm.
11.C4 $a = 300$ mm: 1.795 mm, 179.46 MPa;
$a = 600$ mm: 2.87 mm, 179.59 MPa.
11.C5 $a = 2$ m: *a*) 30.0 J; *b*) 7.57 mm, 60.8 J.
$a = 4$ m: *a*) 21.9 J; *b*) 8.87 mm, 83.4 J.
11.C6 $a = 20$ in: *a*) 13.26 in; *b*) 99.5 kip · in; *c*) 803 lb.
$a = 50$ in: *a*) 9.46 in; *b*) 93.7 kip · in; *c*) 996 lb.

Créditos de fotografías

Búsqueda de imágenes de Danny Meldung/Photo Affairs, Inc.

CAPÍTULO 1

Portada: © Pete Ryan/Getty Images RF; 1.1: © David R. Frazier/Science Source; 1.2: © Walter Bibikow/agefotostock; 1.3: © John DeWolf.

CAPÍTULO 2

Portada: © Sylvain Grandadam/agefotostock; 2.1: © John DeWolf; 2.2: Cortesía de Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.; 2.3-2.5: © John DeWolf; 2.6: © John Fisher.

CAPÍTULO 3

Portada: © incamerastock/Alamy; 3.1: © 2008 Ford Motor Company; 3.2: © John DeWolf; 3.3: Cortesía de Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.; 3.4: © koi88/Alamy RF.

CAPÍTULO 4

Portada: © Mel Curtis/Getty Images RF; 4.1: Cortesía de Flexifoil; 4.2: © Tony Freeman/PhotoEdit; 4.3: © Shutterstock/Dwight Smith; 4.4: © Bohemian Nomad Picturemakers/Corbis; 4.5: © Tony Freeman/PhotoEdit; 4.6: © John DeWolf.

CAPÍTULO 5

Portada: © Shutterstock/MOLPIX; 5.1: © Huntstock/agefotostock RF; 5.2: © David Nunuk/Science Source.

CAPÍTULO 6

Portada: © Aurora Photos/Alamy; 6.1: © John DeWolf; 6.2: © Jake Wyman/Getty Images; 6.3: © Rodho/shutterstock.com.

CAPÍTULO 7

Portada: NASA; 7.1: © Walter G. Allgöwer Image Broker/Newscom; 7.2: © FELLOW/agefotostock; 7.3: © Clair Dunn/Alamy; 7.4: © Spencer C. Grant/PhotoEdit.

CAPÍTULO 8

Portada: © Shutterstock/Gwoeii.

CAPÍTULO 9

Portada: © Jetta Productions/Getty Images RF; 9.1: © Shutterstock/JFs Pic Factory; 9.2–9.3: © John DeWolf; 9.4: © Shutterstock/stewie; 9.5: © Shutterstock/s_oleg.

CAPÍTULO 10

Portada: © Shutterstock/Tracy ben; 10.1: Cortesía de Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University; 10.2a: © Steve Photo/Alamy RF; 10.2b: © Shutterstock/Byron W.Moore.

CAPÍTULO 11

Portada: © Corbis Super RF/Alamy; 11.1: © Israel Antunes/Alamy; 11.2: © Tony Freeman/PhotoEdit; 11.3: © TRL Ltd./Science Source.

Índice analítico

Los números de página seguidos de la letra “n” indican que la entrada se encuentra en la nota al pie de página.

A

Acero
  al bajo carbono, 60
  dulce, 108
  estructural, 53, 215
Acoplamientos de brida, 166
Agujero circular, 106
Aluminum Association, 637
American Association of State Highway Officials, 30
American Concrete Institute, 30
American Forest and Paper Association, 30, 638
American Institute of Steel Construction, 30, 636
American Institute of Steel Construction Specifications, 639
Análisis de
  esfuerzos en flexión pura, 208
  la flexión asimétrica, 210
  una estructura, 6
Analogía de la membrana, 186
Ángulo de torsión, 132, 134, 148, 720
  de un eje hueco, 188
Ángulos, 412
Aplicación de galgas extensiométricas, 422
Apoyo rígido que no permite deflexión, 707n
Articulación plástica, 389

B

Barra
  de pesas, 208
  plana con ranuras, 229
  plana con un cambio repentino del ancho, 229
Bloques a compresión, 635
Building Code Requirement for Structural Concrete, 30

C

Caballos de potencia (hp), 164
Canales, 412
Capa de un material compuesto, 57
Carga
  centrada, 208
  céntrica, 8, 253
    perfectamente alineada, 615
  concentrada única, 687
  crítica, 612, 613, 657
    de Euler para el pandeo, 616
  de diseño, 29
  de torsión, 493
  de trabajo, 29
  distribuida, 302, 362
  estática equivalente, 719
  excéntrica, 208, 253
  muerta, 30
  multiaxial, 86, 94, 122
  permisible, 29
  simétrica, 573
  torsional, 185
  transversal, 302, 493
    de una viga, 302
  única, 719
  uniformemente distribuida, 302
  viva, 30
Carga axial, 7, 50
  céntrica, 503, 635
  excéntrica, 209, 293
Carga de impacto, 664, 683
  de una estructura elástica, 719
  transversal, 686
Carga última, 639
  de la estructura, 31
  del material, 28
  para cortante doble, 29
  para corte simple, 28
Cargas
  axiales excéntricas, 208
  cíclicas, 30
  concentradas, 302, 532
  de extremo abierto, 339
  de impacto, 669
  de impulso, 30
  dinámicas, 30
  equivalentes distribuidas, 362
  ficticias, 720
  fluctuantes, 59
  inversas dentro del rango plástico, 59
  repetitivas, 59
  transversales, 208, 209
Castigliano, Alberto, 702
Cavidades, 55, 449
Cedencia, 30
  del material, 53
  en una prueba de torsión, 447
Centro de
  cortante, 371, 388, 399, 412
  simetría, 403
Círculo de Mohr, 265, 421, 432, 479
  para deformación plana, 422, 481
Claro de una viga, 302
Códigos de construcción, 30
Coeficiente de expansión térmica, 74, 122
Coeficientes de influencia, 700
Columnas
  céntricamente cargadas, 658
  de longitud intermedia, 635
  elásticas, 612
  largas, 635
  muy cortas, 635
  sometidas a una carga excéntrica, 647
Componente de esfuerzo, 87
  no cero, 212
Componentes
  de esfuerzo, 673
  del esfuerzo cortante, 27

Comportamiento elástico del material, 58
Compresión, 212
Concentración de esfuerzo, 209
Concentraciones de esfuerzo, 291
Concepto de
cedencia, 30
deformación unitaria, 51
elemento de dos fuerzas, 5
energía de deformación, 664
esfuerzo, 6
Condición de compatibilidad, 588
Condiciones
adicionales de frontera, 532
de frontera, 529, 599
impuestas en la viga por sus apoyos, 529
Conexiones bajo carga transversal, 25
Consideraciones para la selección del factor de seguridad, 29
Corchetes de Macaulay, 339
Corrosión, 30
Cortante
en la sección, 9
horizontal por unidad de longitud, 372, 411
Coulomb, Charles Agustín de, 447
Criterio
de Coulomb, 447
de la energía de distorsión máxima, 664
de la máxima energía de distorsión, 421, 446
de la máxima resistencia a cortante, 421
de máxima deformación normal, 448n
de Mohr, 421, 448, 480
de Saint-Venant, 448n
de Von Mises, 446
del esfuerzo cortante máximo, 446
del esfuerzo normal máximo, 447
Cubreplacas, 348
Cuerpo isotrópico elástico, 673
Cuñas, 166
Cuñeros, 166
Curva
carga-deformación, 664
de Euler, 629
elástica, 526, 528
de una viga, 599
Curvatura
anticlástica, 218, 291
de la superficie neutra, 527

D

Decaimiento, 30
Definición de
deformación a corte, 90n
de deformación normal, 120
de deformación unitaria normal, 51
de margen de seguridad, 29n
Deflexión
de la columna, 649
máxima, 527
de una viga, 526
Deformación
axial, 92
cortante, 90, 123, 166, 464, 481
en una flecha circular, 136, 196
de la viga bajo carga, 526
de un material dúctil, 30
en cedencia, 241
en fluencia, 53
ingenieril, 56
lateral, 85, 92, 122
longitudinal, 213
máxima a cortante, 148
permanente, 58
plana, 422
plástica, 58
por unidad de longitud, 120
real, 90
térmica, 122
Deformación unitaria
a corte, 92
elemental, 56
final, 57
ingenieril, 56
normal, 51
real, 56
térmica, 74
Deformaciones
causadas por las cargas, 50
cortantes, 136
de la estructura, 536
de un miembro prismático, 211
en el rango elástico, 132
en miembros prismáticos, 208
normales, 464
plásticas, 124
principales, 481
Densidad de energía de deformación, 664, 666, 666n, 717
de Saint-Venant, Adhémar Barré, 105
Deslizamiento, 58
Desplazamiento relativo, 62
Desviación tangencial, 571, 585
Determinación de la carga crítica, 657
Diagrama
de carga-deflexión, 109
de carga-deformación, 51
de círculo de Mohr, 493
de cuerpo libre, 4, 39
de esfuerzo-deformación, 51
de fuerza cortante, 304, 360
de momento flector, 304, 360
por partes, 527
esfuerzo-deformación a cortante, 174
M/EI, 574
dibujado por partes, 574
Diagramas de cuerpo libre, 14
Dilatación, 674
del material, 88, 122
Dirección de la componente, 26
Discontinuidades en una carga distribuida, 532
Diseño
de columnas reales, 658
de esfuerzo permisible, 31
de estructuras, 9
de un eje de transmisión, 163
del esfuerzo permisible, 635, 639
por carga y factor de resistencia (DCFR), 30
Distribución
de esfuerzo ficticia, 172
de esfuerzo real, 172
de esfuerzos estáticamente indeterminada, 134
de la deformación, 174
de los esfuerzos cortantes sobre un eje circular, 132
uniforme del esfuerzo, 8
Ductilidad, 57
de un material, 55

E

Ecuación de la curva elástica, 528
Efecto Bauschinger, 58
Eje
centroidal, 264, AP-5, AP-9
circular, 132
sólido de material elastoplástico, 173
de sección transversal circular variable, 166
de simetría, AP-2
horizontal, 239
de transmisión, 132
neutro, 212, 290, 398, 505
de la sección, 254

Ejes
centroidales principales de la sección transversal, 265
de transmisión, 493
estáticamente indeterminados, 151
huecos no circulares de pared delgada, 187
principales de deformación, 466, 468, 481
principales de esfuerzo, 442, 468
Ejes circulares, 196
huecos, 134
sólidos, 134
Ejemplo de flexión pura, 208
Elemento
a compresión, 6
a tensión, 6
bajo carga axial, 7
estructural con una discontinuidad, 105
estructural sometido a carga axial, 50
Elementos
asimétricos de pared delgada, 412
bajo carga axial, 25
con sección transversal rectangular, 504n
de dos fuerzas, 4
de pared delgada, 387
sin plano vertical de simetría, 398
estructurales esbeltos, 503
huecos de pared delgada, 504n
Endurecimiento por deformación, 54, 59
Energía
de distorsión, 446, 664
máxima, 673
por unidad de volumen, 673
Energía de deformación, 664, 665, 717
bajo carga axial, 718
bajo carga transversal, 672
elástica, 664, 668
en flexión, 669
en torsión, 670
Engranes conectados al eje, 166
Ensayo
de tensión, 52
estándar de fatiga, 121
Errores
de cálculo, 14
en el razonamiento, 14
Esfuerzo, 666n
compresivo, 6
crítico, 615
de apoyo, 11
de cedencia, 120
de compresión, 215, 433
de costilla, 455
de tensión, 6, 215, 433
en un punto dado, 7
ficticio, 172, 240
ingenieril, 56
longitudinal, 455, 480
normal, 7
máximo, 421
permisible bajo carga céntrica, 648
permisible para la columna, 647
plano, 420, 422, 674
por flexión, 215
promedio, 111
real, 56
residual, 175
tangencial, 455
último normal, 28
uniaxial, 212
Esfuerzo cortante
máximo en el filete, 166
promedio, 9, 411
último, 28
Esfuerzos
de apoyo, 13
de costilla, 480
en elementos estructurales esbeltos, 503
en miembros curvos, 210
normales, 303, 505
en una viga, 303
principales, 421, 424, 442, 478
Esfuerzos cortantes, 303, 503, 718
máximos en el plano, 421
máximos fuera del plano, 421
planos, 670
verticales, 370
Esfuerzos residuales, 29, 111, 124
de compresión, 113
de tensión, 113
en un material elastoplástico, 176
Especificación Nacional de Diseño para la Construcción en Madera, 638
Especificación para construcciones con acero estructural, 636, 636n
Especificaciones de diseño, 30
Espumas poliméricas, 85n
Estabilidad
de la estructura, 612
del elemento, 9
Estado
de deformación plana, 463n
de esfuerzo cortante plano, 673
de esfuerzo uniaxial, 212, 673
general de esfuerzo, 479, 673
Estado de esfuerzos
biaxial, 445
plano, 463n
tridimensional, 421
Estados de deformación plana, 463
Estricción, 53
Estructura
elástica estáticamente indeterminada, 707
indeterminada de primer grado, 707
Estructuras estáticamente indeterminadas, 720
Estudio de vigas, 209
Euler, Leonard, 615
Exactitud de
los cálculos desarrollados, 14
los datos recibidos, 14
Excentricidad de la carga, 615, 626

F

Factor de
carga, 31, 327
concentración de esfuerzos, 111, 124
de la discontinuidad, 107
diseño de carga y resistencia, 635, 639
forma, 242
resistencia, 31, 327, 639
seguridad, 29, 636
Falla
debida al corte, 371
en bloques a compresión, 635
por compresión, 55
por fatiga, 59
por pandeo, 174n
Falla en columnas
cortas, 635
de longitud intermedia, 635
largas, 635
Fallas
de estabilidad, 30
del material, 55
por pandeo, 30
repentinas, 30
Fatiga, 29, 59
Fibras paralelas encapsuladas en una matriz, 57
Filete(s), 106, 166
Flexión pura, 208, 290
Fluencia, 53
Flujo cortante, 371, 372, 388, 411
por torsión, 188
Fórmula de
Euler, 615, 657
de flexión elástica, 290

de interacción, 649
de la secante, 628, 658
de torsión, 165
Fórmulas
de diseño, 635
de flexión elástica, 215
de torsión elástica, 138
empíricas para un esfuerzo permisible, 635
Fuerza
axial céntrica, 503
cortante, 303, 490
interna, 6
por unidad de área, 6
Fuerzas, 14
cortantes, 9
de cortante, 370
elementales, 6
estáticamente indeterminadas, 50
externas, 305
normales, 370
transversales, 9
Función
analítica única, 546
escalón, 337, 361
Funciones de singularidad, 336, 361, 527, 601

G

Galga extensiométrica(s), 422, 471, 482
Gigapascal (GPa), 8
Grietas
macroscópicas, 449
microscópicas, 55, 449

H

Hertz (Hz), 163
Hexágono de Tresca, 446
Hierro fundido, 54
Hooke, Robert, 56

I

Inestabilidad local, 53

K

Kilolibras por pulgada cuadrada (ksi), 8
Kilopascal (kPa), 8

L

Lámina de un material compuesto, 57
Laminado plano, 57
Ley de Hooke, 56, 85, 122, 132, 209, 448
para esfuerzo y deformación a cortante, 91, 468
Libras por pulgada cuadrada (psi), 8
Límite
de fatiga para metales no ferrosos, 60
de proporcionalidad, 57, 121, 136
de resistencia, 60, 121
para probetas maquinadas y pulidas, 60
elástico, 136
del material, 58, 121
Longitud
base de la probeta, 52
efectiva de la columna, 612, 617, 636n, 658

M

Máquina de ensayo a torsión, 148
Margen de seguridad, 29n
Material
dúctil, 120, 673
elástico isotrópico, 719
elastoplástico, 108, 124
idealizado, 174
en estado dúctil, 54n
en estado frágil, 54n
frágil, 120
homogéneo, 85
isotrópico, 85
Materiales
anisotrópicos, 57, 95
compuestos reforzados con fibras, 57, 94
dúctiles, 30, 53, 139
frágiles, 30, 54, 139, 447
isotrópicos, 57
ortotrópicos, 95
Matriz, 57, 94
Maxwell James, 701
Medida estándar de la ductilidad de un material, 55
Megapascal (MPa), 8
Metales no ferrosos, 60
Método
de diseño por carga y factor de resistencia, 30
de diseño por el factor de carga y resistencia, 658
de diseño por esfuerzo permisible, 29
de diseño por factores de carga y resistencia, 326
de funciones de singularidad, 304
de interacción, 647, 649, 658
de superposición, 527
del esfuerzo permisible, 647, 658
del momento de área, 587
fotoelástico, 106
Metodología EMARP, 14
Métodos
de análisis experimental de esfuerzos, 166
para el diseño de columnas bajo una carga excéntrica, 658
Miembro(s)
compuesto, 226
curvos, 278
prismáticos, 209
prismáticos sometidos a flexión, 208
rectos, 278
Módulo
de compresibilidad del material, 89
de cortante del material, 91
de elasticidad, 56
de resiliencia, 664, 667, 667n, 718
de rigidez, 91, 123
de ruptura a torsión, 172, 198
de ruptura en flexión, 240
de sección elástico, 215, 242
de sección plástico, 242
de tenacidad, 664, 666,667n, 717
de Young, 56
volumétrico, 123
de elasticidad, 89
Mohr, Otto, 432
Momento
de torsión, 503
elástico máximo, 209, 292
máximo, 292
elástico, 240
plástico, 241, 292, 389
polar de inercia, 137, 138, 150, AP-7
Momento de inercia, 172, AP-6
centroidal, 491
de la sección transformada, 227
de un área, AP-6
Momento flector, 210, 213, 303, 490, 494
cero, 617
último, 240
Momentos rectangulares de inercia, A6

N

National Design Specification for Wood Construction, 30
Número de aplicaciones de carga, 29

P

Pandeo
lateral, 325n
local, 325n
Par de torsión, 132, 148
interno, 138, 150
máximo elástico, 173
plástico del eje, 174
Par torsional, 132
Paralelepípedo
oblicuo, 90
rectangular, 86
Pares internos, 14
Pascal (Pa), 8
Peligro para
un material dúctil, 490
un material frágil, 490
Perfil
angular, 404
Z, 403
Perno
en cortante simple, 11
sometido a cortante doble, 11
Plano(s)
de esfuerzo, 425
cortante máximo, 425
principales de esfuerzo, 421, 424, 442, 478
Planteamiento de un problema, 14
Poisson, Siméon Denis, 85
Porcentaje de
alargamiento, 55
reducción de área, 55
Posibilidad de falla repentina, 30
Potencia
de cero de cualquier número, 337
que debe transmitirse, 163
Primer momento del área, AP-2
Principio de
Saint-Venant, 105, 124, 136, 377, 491, 504
superposición, 86, 176, 377, 412, 504
Problema(s) estáticamente indeterminado, 65, 70, 121
Propiedad de dilatación, 424n
Propiedades físicas de los metales estructurales, 57
Punto
con una desviación tangencial negativa, 572
con una desviación tangencial positiva, 572
inferior de cedencia, 54
superior de cedencia, 54

R

Radio
de giro, AP-6
exterior del eje, 164
Rapidez de rotación del eje, 163
Razón de Poisson, 463n
Reacciones en los apoyos, 14, 532
Reacción redundante, 71, 588, 707
Recipientes
cilíndricos, 455
Recipientes de pared delgada, 455
Recipientes esféricos, 455
Región plástica, 175
Relación
de esbeltez, 657
de la columna, 615, 648
de Poisson, 122, 217
efectiva de esbeltez de la columna, 617
Resiliencia del material, 667
Resistencia, 57
a la cedencia, 54, 124, 137, 667
a la corrosión, 57
a la fractura, 53
de fluencia, 53
de la estructura, 612
Resistencia última, 53
a la tensión, 28
al corte, 28
Rigidez a la flexión, 529
de la viga, 599
Roseta de
45°, 472
60°, 472
deformación, 422, 472, 482
Rotaciones en el plano de esfuerzo, 425

S

Sección
crítica, 229
transformada, 209, 227
transversal crítica, 229
transversal rectangular uniforme, 185
Segundo momento, 172
Semiespesor, 389
Símbolo para los esfuerzos, 636n
Simetría axial, 185
Singularidad en la carga, 336
Sistema
estable, 612, 613
fuerza-momento, 503
inestable, 612, 613
Specification for Structural Steel Buildings, 30
Standard Specifications for Highway Bridges, 30
Superficie
de apoyo, 11
neutra, 212, 278, 290, 490

T

Tangente de
pendiente conocida, 583
referencia, 572, 583
Tenacidad de un material, 666
Tensión, 212
Teorema
de Castigliano, 702, 720
de los ejes paralelos, AP-9
del eje paralelo, 220
del primer momento de área, 527, 571
del segundo momento de área, 527, 571
recíproco de Maxwell, 701
Teoría matemática de la elasticidad, 166
Termoelasticidad, 58
Tipo de cargas, 30
Tipo(s) de falla, 30
en columnas, 635
Torsión elástica, 132
Transformación de
esfuerzo plano, 425
la deformación plana, 422, 481
Transformaciones de la deformación, 463
Trayectorias de esfuerzo, 492
Tresca, Henri Edouard, 446
Triángulo de fuerzas, 5

U

Unidades
acostumbradas en Estados Unidos, 8
del sistema SI, 8
principales del SI, 9n

V

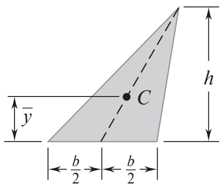
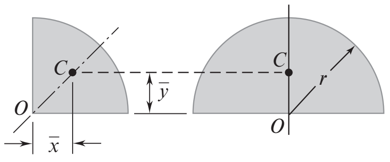
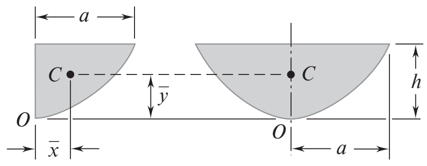
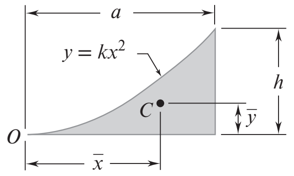
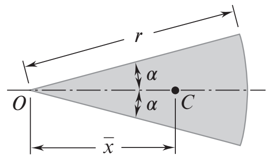
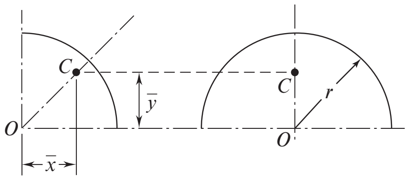
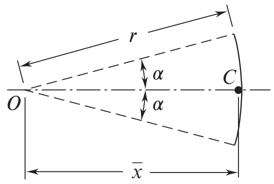
Valor
máximo del esfuerzo, 106
promedio del esfuerzo, 7
Variaciones en las propiedades del elemento, 29
Vector(es) de
momento, 265
par, 132
Vidrio, 54

Viga
de acero laminado, 325
deformada, 526
de madera, 325
de patín ancho, 375
de resistencia constante, 348
en voladizo, 529
estándar estadounidense, 375
prismática, 526, 529
rectangular delgada, 374
S, 375
saliente, 529
simplemente apoyada, 529
W, 375
Viga estáticamente indeterminada, 536
al primer grado, 537
al segundo grado, 537
Vigas, 302
americanas estándar, 215
con cargas asimétricas, 527
conectadas por una articulación, 303
cortas, 326
de acero, 302
de ala ancha, 215
de aluminio, 302
de brida, 215
ancha, 242
de caja, 371
de concreto reforzado, 228
de madera, 302
de patín ancho, 371
de resistencia constante, 304, 362
de sección transversal no rectangular, 242
de sección transversal variable, 362, 527
en voladizo, 572
estáticamente determinadas, 302, 359
estáticamente indeterminadas, 302, 527
extruidas, 412
indeterminadas, 526
no prismáticas, 304, 348, 362
prismáticas, 348
S, 215
salientes, 527
W, 215
von Mises, Richard, 446

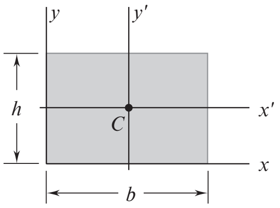
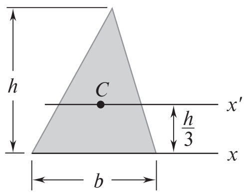
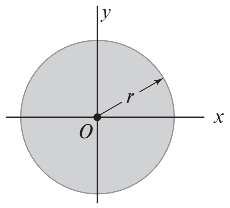
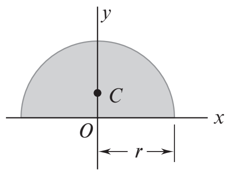
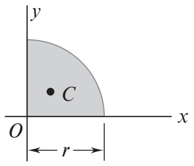
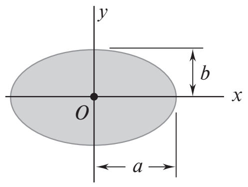
Y

Young, Thomas, 56

Centroides de áreas y líneas comunes

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Segmento parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Momentos de inercia de formas geométricas comunes

Rectángulo	 	$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo	 	$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo	 	$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo	 	$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo	 	$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse	 	$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$